ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LXXVIII.3 (2002)

Dérivées tangentielles des fonctions de la classe $\mathcal{A}^{k,\alpha}$ dans les domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$

par Laurent Verdoucq (Lille)

Abstract. Let Ω be a domain of finite type in $\mathbb{C}^2$ and let f be a function holomorphic in Ω and belonging to $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. We prove the existence of boundary values for some suitable derivatives of f of order greater than k. The gain of derivatives holds in the complex-tangential direction and it is precisely related to the geometry of $\partial\Omega$. Then we prove a property of non-isotropic Hölder regularity for these boundary values. This generalizes some results given by J. Bruna and J. M. Ortega for the unit ball.

Introduction. Soit B la boule unité de $\mathbb{C}^n$. En 1986, dans le but d'obtenir des résultats d'interpolation pour les fonctions de la classe $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{B}) := \mathcal{O}(B) \cap \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{B})$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \alpha < 1$, J. Bruna et J. M. Ortega [1] ont montré l'existence de valeurs au bord pour des dérivées de ces fonctions, à un ordre de dérivation supérieur à k. Le fait bien connu que les fonctions dans $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{B})$ sont, en règle générale, de régularité double dans la direction complexe-tangentielle influence bien sûr l'ordre maximal de ces dérivées supplémentaires.

Plus précisément, Bruna et Ortega associent à toute dérivée un poids ω donné par $\omega = p/2 + q$, où p désigne le nombre de dérivées complexes-tangentielles et q le nombre de dérivées transverses. Ils obtiennent alors, sous l'hypothèse $\alpha \neq 1/2$, un théorème d'existence et de régularité de valeurs au bord pour les dérivées des fonctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{B})$ lorsque le poids vérifie $\omega < k + \alpha$. Dans le cas des domaines strictement pseudoconvexes, l'article [1] fait mention de résultats analogues. Dans le cas des domaines faiblement pseudoconvexes, on peut espérer un meilleur gain de dérivées supplémentaires dans la direction complexe-tangentielle, gain relié à la géométrie du bord.

Ce travail a pour but d'obtenir des résultats dans l'esprit de ceux de Bruna et Ortega [1] mais, cette fois, pour les domaines bornés de type fini

2000 *Mathematics Subject Classification*: 32A40, 32F18, 32A37.

Key words and phrases: complex tangential derivative, Hölder regularity, domain of finite type.

dans $\mathbb{C}^2$. Comme point de départ dans ce cadre, on peut citer des résultats de S. Grellier [5] : pour r une fonction définissante de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit les champs de vecteurs

$$L_1 = \frac{\partial r}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial r}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Le champ L_1 est clairement complexe-tangentiel tandis que L_2 est transverse. On suppose Ω de type fini m. On note $\delta_\Omega(z)$ la distance d'un point z à $\partial\Omega$. Comme dans [2], on peut alors définir, pour $z \in \Omega$ et $\delta \geq 0$, une fonction $\tau(z,\delta)$ telle que $\tau(z,\delta_\Omega(z))$ donne le rayon maximal dans la direction complexe-tangentielle pour un polydisque centré en z et contenu dans Ω. On a alors le résultat suivant [5, Corollaire A] :

Théorème 1. *Pour toute fonction f de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ et tout couple d'indices (p,q) tel que $p/m + q > k + \alpha$, il existe des constantes $C_{p,q}$ telles que*

$$|L_1^p L_2^q f(z)| \leq C_{p,q}\|f\|\delta_\Omega(z)^{\alpha+k-q}\tau(z,\delta_\Omega(z))^{-p}. \tag{1}$$

Ici, la norme $\|\cdot\|$ est celle de $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Il est à noter que ce théorème reste vrai quand on remplace $L_1^p L_2^q$ par n'importe quel itéré de p champs L_1 et de q champs L_2 (les commutateurs qui apparaissent vérifient de “bonnes” estimations).

On peut donner une idée rapide de la preuve de (1). D'abord, en appliquant la formule de Cauchy, on obtient l'estimée suivante : pour des indices p, q, l tels que $q + l > k + \alpha$, on a

$$|N^l L_1^p L_2^q f(z)| \leq C\delta_\Omega(z)^{\alpha+k-q-l}\tau(z,\delta_\Omega(z))^{-p}, \tag{2}$$

où N désigne une dérivation dans la direction normale. Il suffit ensuite d'intégrer selon la direction normale : pour un point z' du bord, on note $N_{z'}$ le vecteur normal sortant en z'. Pour un z' convenable, on écrit $z = z' - sN_{z'}$ avec s inférieur à une constante ε_0 assez petite (il suffit en effet de considérer des points z proches de $\partial\Omega$). On a alors

$$L_1^p L_2^q f(z) = A(z_0) + \int_s^{\varepsilon_0} \frac{(t-s)^{l-1}}{(l-1)!} N^l L_1^p L_2^q f(z' - tN_{z'})\,dt$$

où $A(z_0)$ est un terme provenant du polynôme de Taylor au point $z_0 = z' - \varepsilon_0 N_{z'}$. On utilise alors l'estimée (2), le fait que l'on ait classiquement

$$\tau(z',u\delta)^{-1} \leq Cu^{-1/m}\tau(z',\delta)^{-1} \quad \text{pour } u > 1,$$

et diverses propriétés classiques de τ (voir [2]). La condition $p/m+q > k+\alpha$ permet d'assurer que l'intégrale $\int_s^{\varepsilon_0}(t-s)^{l-1}t^{-l+k+\alpha-q-p/m}\,dt$ est bornée indépendamment de s.

On déduit alors immédiatement un corollaire du théorème 1 :

Corollaire. *Si $p/2 + q < k + \alpha$, alors $L_1^p L_2^q f$ admet un prolongement continu à $\overline{\Omega}$. De plus, cette fonction est dans $C^{0,\varepsilon}$ avec $\varepsilon = k + \alpha - p/2 - q$.*

La démonstration est immédiate et fait appel à la caractérisation classique de $C^{0,\varepsilon}$ par une estimation sur le gradient [6], ainsi qu'à l'estimée

$$\tau(z',\delta) \le C\delta^{-1/2} \tag{3}$$

et à une intégration semblable à la précédente.

En fait, il apparaît clair que si on a une meilleure estimée que (3) dans une région d'approche admissible de z', on pourra établir pour un plus grand nombre de dérivées l'existence de valeurs au bord en z' (au sens des limites admissibles). Suivant ce principe, on obtient dans le présent article le théorème suivant (théorème 2.11) :

THÉORÈME 2. *Soit $U_{z'}$ une région d'approche admissible d'un point z' du bord de type $\theta(z')$. Alors, pour tout couple d'indices (p,q) tel que $p/\theta(z') + q < k+\alpha$, la fonction $z \mapsto L_1^p L_2^q f(z)$ admet un prolongement continu en z' en restriction à la région $U_{z'}$.*

L'existence d'une limite *normale* pour $L_1^p L_2^q f(z)$ est d'ailleurs très facile à démontrer : dans un voisinage de z', on a $\tau(z',\delta)^{-1} \le C\delta^{-1/\theta(z')}$, ce qui constitue une amélioration de (3). Pour des indices (p,q) tels que $p/\theta(z') + q < k+\alpha$, on écrit $L_1^p L_2^q f(z' - sN_{z'})$ comme on l'a fait plus haut et on a l'existence de l'intégrale de 0 à ε_0 puisque

$$\tau(z' - tN_{z'}, t)^{-1} \approx \tau(z',t)^{-1} \le Ct^{-1/\theta(z')}.$$

On peut remarquer que dans cette preuve, les constantes dépendent de z'. On montrera dans cet article que l'on a également convergence dans la région d'approche admissible, ce qui requiert une certaine uniformité des constantes intervenant dans les estimations. Outre une technique de développements de Taylor le long de chemins adaptés, on utilise pour cela des constructions de V. Thilliez [10], [11], introduites en 1991 afin d'étudier certains problèmes d'interpolation dans des classes utradifférentiables au bord de domaines de type fini.

L'article est divisé en trois parties.

Dans la première partie, on commence par rappeler les définitions d'outils associés à la géométrie des domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$: coordonnées adaptées de D. Catlin [2], pseudo-distance δ et pseudo-boules correspondantes, régions d'approche admissibles d'un point du bord, suivant la description qui en est donnée par V. Thilliez dans [10], [11] : grossièrement, pour deux points z et z' au voisinage d'un point de type fini, la pseudo-distance $\delta(z',z)$ est de l'ordre de la distance euclidienne d dans la direction transverse, et de $d^{\Theta(z',z)}$ dans la direction complexe-tangentielle. Pour $z' \in \partial\Omega$, le nombre $\Theta(z',z')$ n'est autre que le type $\theta(z')$ du point z'. Après ces rappels, on décrit deux constructions de chemins affines par morceaux joignant des points situés dans des régions d'approche données. L'une de ces constructions est reprise de [10], [11] ; l'autre a été développée spécifiquement pour établir l'existence des dérivées supplémentaires pour $\mathcal{A}^{k,\alpha}$.

Dans la deuxième partie, on obtient en plusieurs étapes le résultat central de cet article. On sait d'abord que l'appartenance d'une fonction holomorphe dans un domaine Ω à la classe $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ peut être caractérisée par un contrôle de l'explosion des dérivées au voisinage du bord : de l'ordre de $\delta_\Omega(z)^{k+\alpha-l}$ pour les dérivées d'ordre $l > k$ (voir par exemple [7]). Ici, on obtient au théorème 2.5 une version non isotrope de cette estimation, valable pour les points z d'une région d'approche admissible d'un point z' de $\partial\Omega$. Ce n'est alors plus l'ordre de dérivation l qui intervient, mais le "poids" $p/\Theta(z',z)+q$ où p est le nombre de dérivées complexes-tangentielles et q le nombre de dérivées transverses. On peut noter que le corollaire 2.6 qui s'ensuit implique clairement le résultat de [5] rappelé dans le théorème 1 plus haut. Ces estimations non isotropes, jointes à des développements de Taylor le long de chemins construits dans la première partie, conduisent à la proposition 2.8 qui permet de vérifier le critère de Cauchy d'existence d'une limite en un point z' du bord et en restriction à une région d'approche admissible de z', pour les dérivées des fonctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, lorsque l'on a $p/\theta(z')+q < k+\alpha$. Il est donc possible de définir des valeurs au bord pour ces dérivées en tout point z' du bord, pour $p/\theta(z')+q < k+\alpha$, en convergeant vers z' dans une région d'approche admissible : c'est bien le théorème 2 énoncé plus haut. Un exemple simple (2.12) montre que le "poids" de dérivation $p/\theta(z')+q$ est le plus grand possible.

Ce résultat peut bien être interprété comme une extension de la partie "existence" du théorème de Bruna et Ortega, puisque, dans le cas strictement pseudoconvexe, on a évidemment $\theta(z') = 2$ pour tout z'.

Dans la troisième partie, on étudie la régularité des valeurs au bord précédemment définies. On établit pour cela une formule de Taylor non-isotrope pour les fonctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$: l'esprit de ce résultat est celui du théorème 1.5 de [1] ; les méthodes de démonstration font appel aux idées de [10], [11]. Muni de cet outil, on démontre alors un théorème de régularité hölderienne pour les valeurs au bord des dérivées des fonctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, sous la restriction technique $\alpha < 1/m$. Ce résultat contient en particulier le fait qu'une fonction holomorphe et α-hölderienne au sens usuel dans un domaine Ω strictement pseudoconvexe est automatiquement α-hölderienne par rapport à la pseudo-distance non isotrope sur le bord de Ω (voir [9]). Pour ces domaines et pour $\alpha < 1/2$, il recouvre également la partie "régularité" du théorème de Bruna et Ortega.

L'auteur tient à remercier le referee pour ses suggestions qui lui ont permis d'améliorer notablement la présentation de plusieurs points de cet article.

Ces résultats ont été annoncés dans une note [12]. Ils constituent une partie de la thèse [13] de l'auteur, où ils mènent à des résultats d'interpolation pour les classes $\mathcal{A}^{k,\alpha}$ des ellipsoïdes de $\mathbb{C}^2$.

1. Rappels sur la géométrie des domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$. Tout ce qui suit est emprunté à [2], [10] et [11], excepté la première construction de chemins (1.5) et les lemmes qui s'y rattachent (1.6 et 1.7).

1.1. *Notations générales.* Dans toute la suite, si X est un ensemble et $A(x)$, $B(x)$ sont deux expressions dépendant de x dans X, on écrira souvent $A(x) \lesssim B(x)$ pour dire que l'on a $A(x) \le CB(x)$ où C est une constante positive indépendante de x. De même, $A(x) \approx B(x)$ signifie que l'on a simultanément $A(x) \lesssim B(x)$ et $B(x) \lesssim A(x)$.

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^2$ à frontière de classe $\mathcal{C}^\infty$, z^0 un point de $\partial\Omega$ et r une fonction définissante pour Ω au voisinage de z^0 (on a évidemment $|r(z)| \approx \delta_\Omega(z)$). On note $\partial_{z_j} = \partial/\partial z_j$ pour $j = 1, 2$.

1.2. *Coordonnées de Catlin et pseudo-boules.* On peut supposer que $\partial_{\operatorname{Re} z_2} r(z^0) > 0$; il est alors démontré dans [2] qu'il existe dans un voisinage convenable U de z^0, pour tout entier m, des applications $d_0, d_1, \ldots, d_m$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U, uniques et telles que, pour tout z' de U, l'application $\phi_{z'}$ qui à ζ de $\mathbb{C}^2$ associe z donné par

$$z_1 = z_1' + \zeta_1, \qquad z_2 = z_2' + d_0(z')\zeta_2 + \sum_{k=1}^{m} d_k(z')\zeta_1^k$$

définisse un changement de coordonnées holomorphes dans $\mathbb{C}^2$ et telles que la fonction $\varrho_{z'} = r \circ \phi_{z'}$, définissante pour $\Omega_{z'} = \phi_{z'}^{-1}(\Omega)$ au voisinage de 0, admette un développement de la forme

$$\varrho_{z'}(\zeta) = r(z') + \operatorname{Re}\zeta_2 + \sum_{\substack{j+k\le m\\ j\ge 1,\, k\ge 1}} a_{j,k}(z')\zeta_1^j\overline{\zeta}_1^k + \mathcal{O}(|\zeta_1|^{m+1} + |\zeta|\cdot|\zeta_2|)$$

où les $a_{j,k}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U.

On pose $A_l(z') = \max_{j+k=l} |a_{jk}(z')|$ pour $2 \le l \le m$. On fait alors l'hypothèse que le point z^0 est de type fini m, ce qui signifie que l'on a $A_l(z^0) = 0$ pour $l < m$ et $A_m(z^0) \ne 0$. Quitte à rétrécir U, on a alors $A_m \ne 0$ dans U et on peut définir, pour z' dans U et δ réel strictement positif, les quantités

$$\theta(z') = \min\{l;\ A_l(z') \ne 0\}$$

(en particulier, pour $z' \in U \cap \partial\Omega$, $\theta(z')$ est le type de z'),

$$\tau(z',\delta) = \left(\sum_{l=2}^{m}\left(\frac{A_l(z')}{\delta}\right)^{1/l}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad T(z',\delta) = \frac{\operatorname{Log}\delta}{\operatorname{Log}(\tau(z',\delta)/\tau(z',1))}.$$

La quantité précédente est un équivalent continu du T de Catlin [2], avec une normalisation convenable qui permet, par des considérations élémentaires de fonctions convexes, de montrer que $T(z',\delta)$ est une fonction croissante de δ, comprise entre $\theta(z')$ et m, qui se prolonge en 0 en posant $T(z',0)=\theta(z')$.

On définit enfin une famille de pseudo-boules (voir [2], [8]) par

$$Q_\delta(z') = \phi_{z'}(R_\delta(z')),$$

où $R_\delta(z')$ est le bidisque ouvert de centre 0, de birayon $(\tau(z',\delta),\delta)$. On leur associe une pseudo-distance définie, pour z' et z dans U, par

$$\delta(z',z) = \inf\{\eta > 0;\ z \in Q_\eta(z')\}.$$

Quitte à restreindre U, on pourra supposer que, pour tous z et z' de U, on a $\delta(z',z) < 1$.

1.3. *Outils géométriques.* On définit maintenant la quantité $\Theta(z',z) := T(z',\delta(z',z))$. Cette quantité décrit alors la taille de la plus petite pseudo-boule de centre z' contenant z en ce sens que, de façon simpliste, cette taille est de l'ordre de $\delta^{1/\Theta}$ dans la direction complexe-tangentielle et δ dans la direction transverse. On a une liste de propriétés ([10], [11]) résumée ci-dessous.

(i) $2 \le \theta(z') \le \Theta(z',z) \le m$ et $\Theta(z',z') = \theta(z')$,
(ii) $\delta(z',z) \le \delta(z',z'')$ entraîne $\Theta(z',z) \le \Theta(z',z'')$,
(iii) $\delta(z',z) \approx |\zeta_1|^{\Theta(z',z)} + |\zeta_2|$ pour $z = \phi_{z'}(\zeta)$,
(iv) $\tau(z',\delta(z',z)) \approx \delta(z',z)^{1/\Theta(z',z)}$,
(v) pour $j+l \le m$ et pour $z = \phi_{z'}(\zeta)$, on a

$$|\partial^j_{\zeta_1}\partial^l_{\bar\zeta_1}\varrho_{z'}(\zeta)| \lesssim \delta(z',z)^{1-(j+l)/\Theta(z',z)}.$$

Dans ce travail, on sera amené à utiliser systématiquement des itérés des champs L_1 et L_2. Dans toute la suite, pour a, b entiers naturels, on notera $\mathcal{S}_{a,b}$ l'ensemble des suites $\beta = (\beta_l)_{1\le l\le a+b}$ à valeurs dans $\{1,2\}$ telles que $\#\{l;\ \beta_l = 1\} = a$ et $\#\{l;\ \beta_l = 2\} = b$. Pour $\beta \in \mathcal{S}_{a,b}$, on pourra alors considérer les itérés $L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{a+b}}$.

On est également amené à utiliser les champs de vecteurs $X_{z',j}$ associés aux coordonnées de Catlin :

$$X_{z',j} = (\phi_{z'})_*(\partial_{\zeta_j}) \quad \text{pour } j = 1, 2.$$

En particulier, le champ $X_{z',1}$ est à coefficients polynomiaux holomorphes et il est approximativement complexe-tangentiel en ce sens que l'on a

$$X_{z',1}(z) = \partial_{z_2} r(z') L_1(z) + A(z',z)\partial_{z_2}$$

avec $|\partial_{z_2} r(z')| \approx 1$ et $A(z',z) = \mathcal{O}(|z_1 - z'_1|)$. Le champ $X_{z',2}$, lui, est transverse.

Soient trois points $z' \in U \cap \overline{\Omega}$, $z'' \in U \cap \partial\Omega$ et $z = \phi_{z'}(\zeta) \in U \cap \Omega$. D'après Catlin [2], $\phi_{z''}$ se factorise en $\phi_{z'} \circ \psi_{z',z''}$ où $\psi_{z',z''} : \Omega_{z''} \to \Omega_{z'}$ est le changement de coordonnées associé par 1.2 au domaine $\Omega_{z'}$ et au point ζ'' tel que $z'' = \phi_{z'}(\zeta'')$. On a donc $\psi_{z',z''}(u) = \zeta$ avec

$$\zeta_1 = \zeta_1'' + u_1, \qquad \zeta_2 = \zeta_2'' + d_0'' u_2 + \sum_{j=1}^{m} d_j'' u_1^j,$$

où les d_j'', $0 \le j \le m$, dépendent de façon $\mathcal{C}^\infty$ de z' et z''.

Soit $\Xi_{\zeta'',j}$ le champ sur $\Omega_{z'}$ défini par

$$\Xi_{\zeta'',j} = (\psi_{z',z''})_*(\partial_{u_j}) = (\phi_{z'})_*^{-1}(X_{z'',j}), \qquad j = 1, 2.$$

On a alors

$$\Xi_{\zeta'',1} = \partial_{\zeta_1} + E\partial_{\zeta_2} \quad \text{avec} \quad E(\zeta) = \sum_{j=1}^{m} j d_j''(\zeta_1 - \zeta_1'')^{j-1}, \quad \Xi_{\zeta'',2} = d_0''\partial_{\zeta_2}.$$

1.4. *Régions d'approche admissibles.* Du fait que l'on a supposé $\partial_{x_2} r > 0$ dans U, on déduit facilement l'existence d'une constante h, avec $h \ge 0$, telle que pour tous points z' de $U \cap \partial\Omega$ et $z = \phi_{z'}(\zeta)$ de $U \cap \overline{\Omega}$, et tout réel t avec $0 \le t < 1$, le point

(1.4.1) $\qquad \zeta^{z',t} := (\zeta_1, \zeta_2 - ht/d_0(z')) \quad \text{vérifie} \quad \varrho_{z'}(\zeta^{z',t}) - \varrho_{z'}(\zeta) \approx -t$

et donc

$$|\varrho_{z'}(\zeta^{z',t})| \approx |\varrho_{z'}(\zeta)| + t. \tag{1.4.2}$$

En l'absence de risque de confusion, on omettra l'indice z' : on notera $\zeta^t = \zeta^{z',t}$, $\varrho = \varrho_{z'}$.

On définit alors, pour a réel positif, le bidisque non isotrope

$$P^{t,a}(z') := P(0^t, (\tau(z', a|\varrho(0^t)|), a|\varrho(0^t)|)).$$

Il est établi dans [10] qu'il existe une constante a avec $0 < a < 1$, telle que l'on ait, quitte à rétrécir U, $\phi_{z'}(P^{t,a}(z')) \subset \Omega \cap U$ pour $0 < t \le 1$. On a en outre la propriété essentielle suivante :

(1.4.3) Pour $\zeta \in P^{t,a}(z')$, le point $z = \phi_{z'}(\zeta)$ satisfait $\delta(z', z) \approx |r(z)| = |\varrho(\zeta)| \approx t$.

Pour $0 < t_0 \le 1$ et $0 < a_0 \le a$, on peut alors définir la région d'approche admissible

$$U_{z'}^{t_0,a_0} := \phi_{z'}(V_{z'}^{t_0,a_0}) \quad \text{avec} \quad V_{z'}^{t_0,a_0} := \bigcup_{0<t<t_0} P^{t_0,a_0}(z').$$

Cette construction est géométriquement équivalente aux constructions classiques de régions d'approche admissibles [8]. Compte tenu de (1.4.3), on a évidemment

$$\delta(z', z) \approx |r(z)| \quad \text{pour } z \in U_{z'}^{t_0,a_0}.$$

On rappelle ici l'estimée suivante ([10, (3.3)] ou [11, (2.9)]). Pour trois points z' et z'' dans $U \cap \partial\Omega$, $z = \phi_{z'}(\zeta)$ dans $U \cap \Omega$ vérifiant $z \in U^{1,a}_{z''}$, on a

$$|\partial^l_{\zeta_1} E(\zeta_1)| \lesssim \delta(z', z)^{1-(l+1)/\Theta(z',z)} \quad \text{pour } 0 \leq l \leq m-1 \tag{1.4.4}$$

où E a été défini en 1.3. (Pour $l \geq m$, on a évidemment $\partial^l_{\zeta_1} E \equiv 0$.)

1.5. *Première construction de chemins.* Soient z' un point de $U \cap \partial\Omega$, z et z'' deux points de $U^{t_0,a_0}_{z'}$ et ζ, ζ'' tels que $z = \phi_{z'}(\zeta)$, $z'' = \phi_{z'}(\zeta'')$. Par définition de $U^{t_0,a_0}_{z'}$, il existe t et t'' avec $0 < t \leq t_0$, $0 < t'' \leq t_0$, tels que l'on ait $\zeta \in P^{t,a_0}(z')$ et $\zeta'' \in P^{t'',a_0}(z')$ ou, autrement dit,

$$|\zeta_1| < \tau(z', a_0|\varrho(0^t)|), \qquad |\zeta_2 + ht/d_0(z')| < a_0|\varrho(0^t)|$$

et

$$|\zeta''_1| < \tau(z', a_0|\varrho(0^{t''})|), \qquad |\zeta''_2 + ht''/d_0(z')| < a_0|\varrho(0^{t''})|.$$

On supposera, pour fixer les idées, que l'on a

$$t \leq t''. \tag{1.5.1}$$

Définissons alors des chemins S_1, S_2, S_3 de la façon suivante. Le chemin S_1 est le segment $[\zeta, \xi]$ avec $\xi := (\zeta_1, \zeta_2 - h(t'' - t)/d_0(z'))$. Les points de S_1 sont les points

$$u^{1,s} = (\zeta_1, \zeta_2 - hs(t'' - t)/d_0(z')) \quad \text{avec } 0 \leq s \leq 1.$$

On pose $z^{1,s} = \phi_{z'}(u^{1,s})$. Le chemin S_2 est le segment $[\xi, \xi'']$ avec $\xi'' = (\zeta''_1, \xi_2)$. Les points de S_2 sont les points

$$u^{2,s} = (\zeta_1 + s(\zeta''_1 - \zeta_1), \xi_2) \quad \text{avec } 0 \leq s \leq 1.$$

On pose $z^{2,s} = \phi_{z'}(u^{2,s})$. Le chemin S_3 est le segment $[\xi'', \zeta'']$, constitué des points

$$u^{3,s} = (\zeta''_1, \xi_2 + s(\zeta''_2 - \xi_2)) \quad \text{avec } 0 \leq s \leq 1.$$

On pose $z^{3,s} = \phi_{z'}(u^{3,s})$. On note enfin $w = z^{1,1} = z^{2,0}$ et $w'' = z^{2,1} = z^{3,0}$.

Le lemme suivant s'obtient par des arguments élémentaires.

Lemme 1.6. *Le chemin $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ défini précédemment est contenu dans $V^{a_0,t_0}_{z'}$. Plus précisément, on a*

$$u^{1,s} \in P^{t+s(t''-t),a_0}(z') \quad \textit{pour tout } s \textit{ avec } 0 \leq s \leq 1, \tag{1.6.1}$$

$$S_2 \cup S_3 \subset P^{t'',a_0}(z'). \tag{1.6.2}$$

Le lemme suivant contrôle la variation de Θ le long de S_1, S_2 et S_3.

Lemme 1.7. *Pour tout s avec $0 \leq s \leq 1$, on a*

$$\frac{1}{\Theta(z', z^{1,s})} - \frac{1}{\Theta(z', z)} \lesssim \frac{1}{|\mathrm{Log}\, \delta(z', z)|} \lesssim \frac{1}{|\mathrm{Log}\, \delta(z', z^{1,s})|}, \tag{1.7.1}$$

$$\left|\frac{1}{\Theta(z', z^{2,s})} - \frac{1}{\Theta(z', w)}\right| \lesssim \frac{1}{|\mathrm{Log}\, \delta(z', w)|} \lesssim \frac{1}{|\mathrm{Log}\, \delta(z', z'')|}, \tag{1.7.2}$$

$$\left|\frac{1}{\Theta(z',z^{2,s})}-\frac{1}{\Theta(z',z'')}\right|\lesssim\frac{1}{|\mathrm{Log}\,\delta(z',z'')|},\tag{1.7.3}$$

$$\left|\frac{1}{\Theta(z',z^{3,s})}-\frac{1}{\Theta(z',w'')}\right|\lesssim\frac{1}{|\mathrm{Log}\,\delta(z',z'')|}.\tag{1.7.4}$$

Preuve. On a $\delta(z',z^{1,s})\approx t+s(t''-t)$ d'après (1.4.3) et (1.6.1). Il en résulte $\delta(z',z^{1,s})\gtrsim t\approx\delta(z',z)$ en particulier. On en déduit (1.7.1) en calquant la preuve de [10, (3.4.4)]. On a par ailleurs $\delta(z',z^{2,s})\approx\delta(z',w)\approx\delta(z',w'')\approx\delta(z',z^{3,s})\approx\delta(z',z'')\approx t''$ en vertu de (1.4.3) et (1.6.2). Les estimations (1.7.2) à (1.7.4) en résultent aussitôt via les arguments de [10, (3.4.3)] ou [11, (0.9)]. ∎

1.8. *Deuxième construction de chemins* [10], [11]. Soient deux réels t_0 et a_0 avec $0<t_0\le 1$ et $0<a_0\le a$. La construction de [10, §3] (voir aussi [11, (1.5)–(1.6) et (2.11)]) fournit une constante δ_1 avec $\delta_1>0$, ne dépendant que de la géométrie de Ω, et deux réels s_0 et b_0 avec $0<s_0\le t_0$ et $0<b_0\le a_0$, dépendant de t_0, a_0 et de la géométrie de Ω, tels que les propriétés suivantes soient vérifiées :

On considère z' et z'' deux points de $U\cap\partial\Omega$ et $z=\phi_{z'}(\zeta)$ un point de $U_{z''}^{s_0,b_0}$ vérifiant $\delta(z',z)<\delta_1 b_0 t_0$. On considère un réel s avec $0<s\le s_0$ tel que l'on ait $z\in\phi_{z''}(P^{s,b_0}(z''))$. On pose $t:=(2\delta_1 t_0)^{-1}\delta(z',z)$ et on définit $\xi:=0^t=(0,-ht/d_0(z'))$, $x:=\phi_{z'}(\xi)$, $\omega:=(\zeta_1,-ht/d_0(z'))$, $y:=\phi_{z'}(\omega)$ ainsi que les segments $T_1:=[0,\xi]$ et $T_2:=[\xi,\omega]$, constitués respectivement des points $v^{1,\lambda}:=(0,ht\lambda/d_0(z'))$ et $v^{2,\lambda}:=(\lambda\zeta_1,-ht/d_0(z'))$ avec $0\le\lambda\le 1$. On pose $x^{1,\lambda}=\phi_{z'}(v^{1,\lambda})$ et $x^{2,\lambda}=\phi_{z'}(v^{2,\lambda})$. On a alors

$$\delta(z'',z)\approx s\lesssim t\approx\delta(z',z),\quad \delta(z',x^{1,\lambda})\approx\lambda t\quad\text{et}\quad\delta(z',x^{2,\lambda})\approx t\tag{1.8.1}$$

et

$$\phi_{z'}(T_1\cup T_2)\subset U_{z'}^{t_0,a_0}.\tag{1.8.2}$$

En outre, si on pose $v^0:=\phi_{z''}^{-1}(y)$, $v^1:=\phi_{z''}^{-1}(z)$ et si on considère le segment $T:=[v^0,v^1]$ décrit par $v^\lambda:=v^0+\lambda(v^1-v^0)$ pour $0\le\lambda\le 1$, on a

$$v_1^\lambda=v_1^0\quad\text{pour } 0\le\lambda\le 1\quad\text{et}\quad|v^1-v^0|\lesssim\delta(z',z),\tag{1.8.3}$$

$$\phi_{z''}(T)\subset U_{z''}^{t_0,a_0}\cap\phi_{z'}(P^{t,b_0}(z')),\tag{1.8.4}$$

$$v^\lambda\in P^{s+(1-\lambda)t,a_0}(z'')\quad\text{pour } 0\le\lambda\le 1\tag{1.8.5}$$

et enfin, en posant $x^{3,\lambda}=\phi_{z''}(v^\lambda)$,

$$\frac{1}{\Theta(z'',x^{3,\lambda})}-\frac{1}{\Theta(z'',z)}\lesssim\frac{1}{|\mathrm{Log}\ \delta(z'',z)|}\lesssim\frac{1}{|\mathrm{Log}\ \delta(z'',x^{3,\lambda})|}.\tag{1.8.6}$$

Remarque. Avec les notations de [10], [11], on a $v^\lambda=u^{1-\lambda}$.

2. Estimations non isotropes et valeurs au bord des dérivées complexes-tangentielles

2.1. *Définitions et notations.* Soient k un entier naturel et α un réel avec $0 < \alpha < 1$. On note $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\overline{\Omega}$, dont les dérivées d'ordre k sont α-hölderiennes sur $\overline{\Omega}$. Soit $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. On pose

$$\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{O}(\Omega).$$

On note $\|\cdot\|$ la norme usuelle sur $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ (voir [1]) qui munit $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ d'une structure d'algèbre de Banach.

Soit $\phi_{z'}$, $z' \in U$, le changement de coordonnées polynômial sur $\mathbb{C}^2$ défini en 1.2 et soit $\Omega_{z'} = \phi_{z'}^{-1}(\Omega)$. Il est facile de voir que pour $f \in \mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ (resp. $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$), on a $f \circ \phi_{z'} \in \mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}_{z'})$ (resp. $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}_{z'})$) et $\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \approx \|f \circ \phi_{z'}\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}_{z'})}$.

Dans la suite, on notera souvent

$$F := f \circ \phi_{z'}$$

en omettant l'indice z', pour abréger.

Avant de poursuivre, on introduit, pour des raisons de commodité, une notation supplémentaire. Pour β et γ réels avec $\beta > 0$, on pose

$$\mathcal{J}(\beta,\gamma) = \int_0^1 \frac{ds}{(s+\beta)^{1+\gamma}} \quad \text{et} \quad \mathcal{W}(\beta,\gamma) = 1 + \mathcal{J}(\beta, \gamma - (k+\alpha)).$$

Quand γ varie, la quantité $\mathcal{W}(\beta,\gamma)$ décrit une échelle de croissance en β adaptée à l'expression des estimations que l'on se propose d'obtenir. On utilisera les propriétés élémentaires suivantes de $\mathcal{W}(\beta,\gamma)$. Dans (2.1.1) à (2.1.7), on suppose toujours $0 < \beta < 1$. Tout d'abord, pour λ réel positif, on a

$$\beta^\lambda \mathcal{W}(\beta,\gamma) \le \mathcal{W}(\beta, \gamma - \lambda). \tag{2.1.1}$$

Soit, par ailleurs, ε un réel avec $0 < \varepsilon < 1$. On a les estimations

$$1 + C_\gamma \beta^{k+\alpha-\gamma} \le \mathcal{W}(\beta,\gamma) \le 1 + \varepsilon^{-1}\beta^{k+\alpha-\gamma} \quad \text{pour } \gamma \ge k+\alpha+\varepsilon, \tag{2.1.2}$$

avec $C_\gamma = (1 - 2^{k+\alpha-\gamma})/(\gamma - k - \alpha)$,

$$1 \le \mathcal{W}(\beta,\gamma) \le C'\varepsilon^{-1} \quad \text{pour } 0 \le \gamma \le k+\alpha-\varepsilon, \tag{2.1.3}$$

avec $C' = 1 + 2^{k+\alpha}$, et enfin

$$1 + |\operatorname{Log}\beta| \le \mathcal{W}(\beta, k+\alpha) \le 2 + |\operatorname{Log}\beta|. \tag{2.1.4}$$

On a, en outre, les propriétés suivantes :

$$K^{-1}\beta \le \beta' \le K\beta \text{ avec } K \ge 1 \quad \text{implique} \quad K_\gamma^{-1}\mathcal{W}(\beta,\gamma) \le \mathcal{W}(\beta',\gamma) \le K_\gamma \mathcal{W}(\beta,\gamma) \tag{2.1.5}$$

avec $K_\gamma = K^{1+|\gamma-k-\alpha|}$,

(2.1.6) $$\gamma \le \gamma' \quad \text{implique} \quad \mathcal{W}(\beta,\gamma) \le 2^{\gamma'-\gamma}\mathcal{W}(\beta,\gamma'),$$

et enfin, pour $K \ge 0$,

(2.1.7) $$\mathcal{W}\left(\beta, \gamma + \frac{K}{|\operatorname{Log}\beta|}\right) \le e^K \mathcal{W}(\beta,\gamma).$$

Rappelons maintenant la caractérisation suivante classique de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ (voir [4] ou [7, Lemme 8]). Une fonction f holomorphe dans Ω appartient à $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ si et seulement si, pour tous entiers naturels p et q, il existe une constante $C(p,q,f)$ telle que l'on ait, pour tout z de Ω,

(2.1.8) $$|\partial^p_{z_1}\partial^q_{z_2} f(z)| \le C(p,q,f)(1+|r(z)|^{k+\alpha-(p+q)}),$$

et on a alors $C(p,q,f) \le C_{p,q}\|f\|$ où $C_{p,q}$ ne dépend que de p, q, k, α et de la géométrie de Ω. On observe maintenant, comme conséquence de (2.1.2) et (2.1.3) appliqués avec $\varepsilon = \min(\alpha, 1-\alpha)$, que (2.1.8) peut se reformuler en

(2.1.9) $$|\partial^p_{z_1}\partial^q_{z_2} f(z)| \le C(p,q)\|f\|\mathcal{W}(|r(z)|, p+q).$$

On va obtenir une version non isotrope de (2.1.9). Le résultat correspondant fera l'objet du théorème 2.5. Auparavant, plusieurs lemmes techniques sont nécessaires.

Dans toute la suite, la notation $\mathcal{O}'(\varphi(z',z))$ désigne une quantité bornée en module par $C\inf\{1, \varphi(z',z)\}$ où C est une constante ne dépendant pas de z et z'.

LEMME 2.2. *Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \cap U)$, p et q deux indices, (β_l) une suite de $\mathcal{S}_{p,q}$. Il existe alors des fonctions $\gamma_{\beta,p,q,i,j} \in \mathcal{C}^\infty(U \times U)$ telles que, pour tout $z' \in \overline{\Omega} \cap U$ et tout $z \in \Omega \cap U$, on ait*

(2.2.1) $$(L_{\beta_1}L_{\beta_2}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z) = \sum_{\substack{i,j,\, i\le p\\ 1\le i+j\le p+q}} \gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z)(X^i_{z',1}X^j_{z',2}f)(z)$$

avec

(2.2.2) $$\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z) = \mathcal{O}'(\delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z))}).$$

Preuve. On pose

$$L'_1 = \partial_{\zeta_2}\varrho\partial_{\zeta_1} - \partial_{\zeta_1}\varrho\partial_{\zeta_2} \quad \text{et} \quad L'_2 = \partial_{\zeta_1}.$$

Un calcul rapide montre facilement que l'on a

$$(L'_1F) = d_0(z')(L_1f)\circ\phi_{z'} \quad \text{et} \quad (L'_2F) = d_0(z')(L_2f)\circ\phi_{z'}$$

et, puisque $|d_0(z')| \approx 1$, il suffit de démontrer les estimations sur $(L'_{\beta_1}L'_{\beta_2}\dots L'_{\beta_{p+q}}F)(\zeta)$.

Traitons tout de suite le cas $p = 0$. On a, dans ce cas, pour $F = f \circ \phi_{z'}$,

$$(L'_{\beta_1} L'_{\beta_2} \dots L'_{\beta_q} F)(\zeta) = \partial^q_{\zeta_2} F(\zeta)$$

où $z = \phi_{z'}(\zeta)$, ce qui est bien la formule demandée.

Pour $p \neq 0$, les arguments de [5, lemme 3.2] établissent facilement l'existence de fonctions $\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z', z)$ telles que

$$(L'_{\beta_1} L'_{\beta_2} \dots L'_{\beta_{p+q}} F)(\zeta) = \sum_{\substack{1 \le i+j \le p+q \\ i \le p}} \gamma_{\beta,p,q,i,j}(z', z) \partial^i_{\zeta_1} \partial^j_{\zeta_2} F(\zeta)$$

où

$$\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z', z) = \sum_{(a,b) \in E_{p,q,i,j}} \nu(a, b) \prod_{r=1}^{p} \partial^{a_r}_{\zeta_1} \partial^{b_r}_{\zeta_2} \varrho(\zeta)$$

et où chaque $E_{p,q,i,j}$ est un ensemble de couples (a, b) de p-uples $a = (a_r)_{1 \le r \le p}$ et $b = (b_r)_{1 \le r \le p}$ vérifiant $\sum_{r=1}^{p} a_r = p - i$, $\sum_{r=1}^{p} b_r = p + q - j$ et $a_r + b_r \ge 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et où chaque $\nu(a, b)$ est un coefficient réel.

Il s'agit donc de montrer que $\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z', z) = \mathcal{O}'(\delta(z', z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)})$. Comme ϱ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a évidemment

$$\Big| \prod_{i=1}^{p} \partial^{a_r}_{\zeta_1} \partial^{b_r}_{\zeta_2} \varrho(\zeta) \Big| \lesssim 1$$

et donc

$$|\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z', z)| \lesssim 1. \tag{2.2.3}$$

Pour montrer l'autre estimée contenue dans la notation $\mathcal{O}'$, deux cas se présentent à nous.

• Supposons $j \le q$. Puisque $i \le p$, on a $j - q + (i - p)/\Theta(z', z) \le 0$ et, dans ce cas, $\mathcal{O}'(\delta(z', z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}) = \mathcal{O}(1)$ et (2.2.3) permet de conclure.

• Supposons $j > q$. Puisque $\sum_{r=1}^{p} a_r = p - i$, il y a au moins i indices a_r qui sont nuls et comme $a_r + b_r \ge 1$ pour tout $r \in \{1, \dots, p\}$, il y a au moins i indices b_r qui ne sont pas nuls et donc, au plus $p - i$ indices b_r qui sont nuls.

Si on appelle I le nombre de ces indices b_r nuls, on a donc $I \le p - i$. De plus, comme $p + q - j = \sum_{r=1}^{p} b_r \ge p - I$, on a $I \ge j - q$. On peut facilement se ramener au cas où les indices b_r nuls sont $b_1, \dots, b_I$. Pour les I indices b_r nuls, les indices a_r correspondants ne sont pas nuls. On obtient alors, en utilisant l'estimée 1.3(v),

$$\Big| \prod_{r=1}^{p} \partial^{a_r}_{\zeta_1} \partial^{b_r}_{\zeta_2} \varrho(\zeta) \Big| \lesssim \Big| \prod_{r=1}^{I} \partial^{a_r}_{\zeta_1} \varrho(\zeta) \Big| \lesssim \delta(z', z)^{I - (\sum_{r=1}^{I} a_r)/\Theta(z',z)}.$$

Or, puisque $p-i \geq \sum_{r=1}^{I} a_r$ et $I \geq j-q$, on obtient

$$\Big|\prod_{r=1}^{p} \partial_{\zeta_1}^{a_r}\partial_{\zeta_2}^{b_r}\varrho(\zeta)\Big| \lesssim \delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}. \ \blacksquare$$

LEMME 2.3. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega\cap U)$. On suppose que, pour tous indices i et j, tout $z' \in U\cap\overline{\Omega}$ et tout $z \in U\cap\Omega$, on a*

$$|(X_{z',1}^{i}X_{z',2}^{j}f)(z)| \leq A_{i,j}(f)\mathcal{W}\bigg(\delta(z',z), \frac{i}{\Theta(z',z)}+j\bigg)$$

où $A_{i,j}(f)$ est une constante positive. Alors, pour tous entiers naturels p et q et pour toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{p,q}$, on a

$$|(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z)| \leq A'_{p,q}(f)\mathcal{W}\bigg(\delta(z',z), \frac{p}{\Theta(z',z)}+q\bigg)$$

où $A'_{p,q}(f)$ est donné par $C_{p,q}\sup_{i+j\leq p+q}A_{i,j}(f)$ avec une constante $C_{p,q}$ ne dépendant que de $p+q$ et de la géométrie de Ω.

Preuve. On utilise le lemme 2.2. On reprend la formule (2.2.1) ; deux cas se présentent à nous.

• $j-q+(i-p)/\Theta(z',z) \geq 0$; alors en utilisant (2.2.2) puis (2.1.1) on a

$$\begin{aligned}&|\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z)\partial_{\zeta_1}^{i}\partial_{\zeta_2}^{j}F(\zeta)|\\ &\qquad\leq A'_{p,q}(f)\delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}\mathcal{W}\bigg(\delta(z',z), \frac{i}{\Theta(z',z)}+j\bigg)\\ &\qquad\leq A'_{p,q}(f)\mathcal{W}\bigg(\delta(z',z), \frac{p}{\Theta(z',z)}+q\bigg),\end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité.

• $j-q+(i-p)/\Theta(z',z) < 0$; alors $i/\Theta(z',z)+j < p/\Theta(z',z)+q$ et en utilisant (2.2.2) et (2.1.6) on a

$$\begin{aligned}|\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z)\partial_{\zeta_1}^{i}\partial_{\zeta_2}^{j}F(\zeta)| &\leq A'_{p,q}(f)\mathcal{W}\bigg(\delta(z',z), \frac{i}{\Theta(z',z)}+j\bigg)\\ &\leq A'_{p,q}(f)\mathcal{W}\bigg(\delta(z',z), \frac{p}{\Theta(z',z)}+q\bigg). \ \blacksquare\end{aligned}$$

LEMME 2.4. *Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega\cap U)$ et deux points $z' \in U\cap\overline{\Omega}$ et $z \in U\cap\Omega$. On suppose que, pour tous indices i et j et toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{i,j}$, on ait*

$$|(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{i+j}}f)(z)| \leq A_{i,j}(f)\mathcal{W}\bigg(\delta(z',z), \frac{i}{\Theta(z',z)}+j\bigg)$$

où $A_{i,j}(f)$ est une constante positive. Alors, pour tous entiers naturels p et

q, on a

$$|(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z)| \leq A'_{p,q}(f)\mathcal{W}\Big(\delta(z',z), \frac{p}{\Theta(z',z)}+q\Big)$$

où $A'_{p,q}(f)$ est donné par $C_{p,q}\sup_{i+j\leq p+q}A_{i,j}(f)$ avec une constante $C_{p,q}$ ne dépendant que de $p+q$ et de la géométrie de Ω.

Preuve. Des relations

$$L'_1 = \partial_{\zeta_2}\varrho\partial_{\zeta_1} - \partial_{\zeta_1}\varrho\partial_{\zeta_2}, \quad L'_2 = \partial_{\zeta_2},$$

on obtient

$$\partial_{\zeta_1} = (\partial_{\zeta_2}\varrho)^{-1}(L'_1 + \partial_{\zeta_1}\varrho L'_2), \quad \partial_{\zeta_2}\varrho = L'_2.$$

En utilisant 1.3(v) et les propriétés de $\mathcal{W}$ décrites en 2.1, on montre alors aisément par récurrence sur r que l'on a, pour tous i et j entiers, l'estimation

$$|\partial^r_{\zeta_1}(L'_{\beta_1}\ldots L'_{\beta_{i+j}}F)(\zeta)| \leq A'_{i+r,j}(f)\mathcal{W}\Big(\delta(z',z), \frac{i+r}{\Theta(z',z)}+j\Big)$$

et il reste à appliquer alors ce résultat au cas particulier où $r=p$, $i=0$ et $j=q$. Dans ce cas, on a $\beta_1 = \ldots = \beta_q = 2$ et on obtient

$$|\partial^p_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}F(\zeta)| \leq A'_{p,q}(f)\mathcal{W}\Big(\delta(z',z), \frac{p}{\Theta(z',z)}+q\Big). \ \blacksquare$$

Nous allons écrire maintenant l'analogue non isotrope de (2.1.9).

Théorème 2.5. *Pour toute fonction f de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, tous points z' de $U\cap\partial\Omega$, z de $U^{1,a}_{z'}$, tout couple d'indices (p,q) et toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{p,q}$, on a*

$$|(L_{\beta_1}\ldots L_{\beta_{p+q}}f)(z)| \leq C_{p,q}\|f\|\mathcal{W}\Big(|r(z)|, \frac{p}{\Theta(z',z)}+q\Big)$$

où $C_{p,q}$ désigne une constante positive ne dépendant que de p, q, k, α et de la géométrie de Ω.

Preuve. Grâce au lemme 2.3, il suffit d'établir les mêmes estimations avec l'itéré $L_{\beta_1}\ldots L_{\beta_{p+q}}$ des champs L_1, L_2 remplacé par l'itéré $X^p_{z',1}X^q_{z',2}$ des champs $X_{z',1}$, $X_{z',2}$.

On montre d'abord qu'avec les notations de (1.4), on a, pour $0\leq s\leq 1$ et $q\geq k+1$,

$$|\partial^p_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}F(\zeta^s)| \leq C_{p,q}\|f\|\cdot|\varrho(\zeta^s)|^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)} \tag{2.5.1}$$

avec $F = f\circ\phi_{z'}$ et $C_{p,q}$ une constante convenable. Pour cela, on utilise le lemme 1.3 de [10], [11] qui stipule que le bidisque

$$P^s := P(\zeta^s, ((a_1|\varrho(\zeta^s)|)^{1/\Theta(z',z)}, a_1|\varrho(\zeta^s)|))$$

satisfait $\phi_{z'}(P^s)\subset\Omega$ pour une constante a_1 bien choisie, ne dépendant que de la géométrie de Ω. En appliquant la formule de Cauchy sur ce bidisque, on a

$$\partial^p_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}F(\zeta^s) = \frac{(q-k)!}{(2i\pi)^2}\int\limits_{\partial^0 P^s} \frac{\partial^k_{\zeta_2}F(\omega_1,\omega_2)}{(\omega_1-\zeta_1)^{p+1}(\omega_2-\zeta_2^s)^{q-k+1}}\,d\omega_1\,d\omega_2$$

où ∂^0 désigne le bord distingué. Comme on a, par hypothèse, $q-k+1 \geq 2$, il s'ensuit

$$\int\limits_{\partial^0 P^s} \frac{\partial^k_{\zeta_2}F(\omega_1,\zeta_2^s)}{(\omega_1-\zeta_1)^{p+1}(\omega_2-\zeta_2^s)^{q-k+1}}\,d\omega_1\,d\omega_2 = 0$$

et, suivant l'idée utilisée par E. M. Stein [9] dans le cas strictement pseudo-convexe, on obtient alors, par soustraction,

$$\partial^p_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}F(\zeta^s) = \frac{(q-k)!}{(2i\pi)^2}\int\limits_{\partial^0 P^s} \frac{\partial^k_{\zeta_2}F(\omega_1,\omega_2)-\partial^k_{\zeta_2}F(\omega_1,\zeta_2^s)}{(\omega_1-\zeta_1)^{p+1}(\omega_2-\zeta_2^s)^{q-k+1}}\,d\omega_1\,d\omega_2. \tag{2.5.2}$$

Par ailleurs, on sait que l'on a

$$|\partial^k_{\zeta_2}F(\omega_1,\omega_2)-\partial^k_{\zeta_2}F(\omega_1,\zeta_2^s)| \lesssim \|f\|\cdot|\omega_2-\zeta_2^s|^\alpha. \tag{2.5.3}$$

De (2.5.2), (2.5.3) et de la définition de P^s, on déduit immédiatement (2.5.1).

Dans le cas $q \geq k+1$, le théorème 2.5 n'est qu'une reformulation de (2.5.1). En effet, pour $s=0$, (2.5.1) s'écrit

$$|(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z)| \leq C_{p,q}\|f\|\cdot|r(z)|^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)}$$

avec $p/\Theta(z',z)+q \geq k+1 \geq k+\alpha+\varepsilon$ avec $\varepsilon = 1-\alpha$ et donc

$$|r(z)|^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)} \leq C'_{p,q}\mathcal{W}\left(|r(z)|, \frac{p}{\Theta(z',z)}+q\right)$$

compte tenu de (2.1.2). Dans le cas $q \leq k$, on écrit

$$\partial^p_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}F(\zeta) = E_1 + E_2$$

avec

$$E_1 = \sum_{l=0}^{k-q}\frac{1}{l!}\,\partial^p_{\zeta_1}\partial^{q+l}_{\zeta_2}F(\zeta^1)(\zeta_2-\zeta_2^1)^l,$$

$$E_2 = \frac{(\zeta_2-\zeta_2^1)^{k-q+1}}{(k-q)!}\int_0^1 s^{k-q}\partial^p_{\zeta_1}\partial^{k+1}_{\zeta_2}F(\zeta^s)\,ds.$$

Quand z décrit $\overline{\Omega}\cap U$, les points $\phi_{z'}(\zeta^1)$ restent dans une partie compacte de Ω. Il s'ensuit aisément que l'on a $|E_1| \leq C_{p,q}\sup|F| \leq C'_{p,q}\|f\|$ pour des constantes $C_{p,q}$, $C'_{p,q}$ convenables. En appliquant (2.5.1) avec $q=k+1$, on obtient par ailleurs

$$|E_2| \leq C''_{p,q}\|f\|\int_0^1 s^{k-q}|\varrho(\zeta^s)|^{\alpha-p/\Theta(z',z)-1}\,ds$$

avec $|\varrho(\zeta^s)| \approx |\varrho(\zeta)| + s$ d'après (1.4.3) et $s^{k-q} \leq (|\varrho(\zeta)| + s)^{k-q}$ puisque l'on a supposé $q \leq k$. Il vient donc, quitte à augmenter $C''_{p,q}$,

$$|E_2| \leq C''_{p,q}\|f\| \int_0^1 (s + |\varrho(\zeta)|)^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q+1)}\, ds$$
$$\leq C''_{p,q}\|f\| \mathcal{W}\Big(|\varrho(\zeta)|, \frac{p}{\Theta(z',z)} + q\Big).$$

Les estimations obtenues pour $|E_1|$ et $|E_2|$ prouvent évidemment le théorème, puisque $|\varrho(\zeta)| = |r(z)|$ et $\partial^p_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}F(\zeta) = (X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z)$. ∎

Dans le souci de donner un corollaire à ce théorème, on pose

$$\Theta(z) = \sup\{\Theta(z', z);\ z \in U_{z'}\}.$$

Avec les notations de l'introduction, on a alors le résultat suivant :

Corollaire 2.6. *Soit $\varepsilon_0 > 0$. Pour toute fonction f de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, tout point z dans $\Omega \cap U$, tout couple d'indices (p, q) et toute suite(β_l) de $\mathcal{S}_{p,q}$, on a*

- *si $p/\Theta(z) + q \geq k + \alpha + \varepsilon_0$, l'estimation*

(2.6.1) $$|(L_{\beta_1} \ldots L_{\beta_{p+q}} f)(z)| \leq C^{\varepsilon_0}_{p,q}\|f\|\delta(z)^{k+\alpha-q}\tau(z, \delta(z))^{-p},$$

- *si $p/\Theta(z) + q \leq k + \alpha - \varepsilon_0$, l'estimation*

(2.6.2) $$|(L_{\beta_1} \ldots L_{\beta_{p+q}} f)(z)| \leq C^{\varepsilon_0}_{p,q}\|f\|$$

où $C^{\varepsilon_0}_{p,q}$ sont des constantes ne dépendant que de p, q, ε_0 et de la géométrie de Ω.

2.7. *Commentaires.* (i) Dans les hypothèses faites, on a $|r(z)| \approx \delta(z', z)$ en vertu de (1.4.4) et donc, compte tenu de (2.1.5), on peut remplacer $\mathcal{W}(|r(z)|, p/\Theta(z', z) + q)$ par $\mathcal{W}(\delta(z', z), p/\Theta(z', z) + q)$ dans le résultat obtenu. On peut aussi y remplacer les itérés $(L_{\beta_1} \ldots L_{\beta_{p+q}} f)(z)$ par les itérés $(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z)$, en vertu du lemme 2.4. Dans tout ce qui suit, on utilisera ces remarques sans les mentionner.

(ii) En fonction de p, q, z', z la quantité $\mathcal{W}(\delta(z', z), p/\Theta(z', z) + q)$ peut varier "continûment" d'une estimation en $\delta(z', z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)}$ à une estimation en $|\mathrm{Log}\ \delta(z', z)|$ (voir (2.1.2) à (2.1.4)) ; ceci motive l'utilisation de $\mathcal{W}$ pour formuler commodément le théorème.

(iii) Le théorème 2.5 peut être vu comme une généralisation aux domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$ du lemme 1.1 établi par J. Bruna et J. M. Ortega dans la boule [1].

(iv) La première affirmation du corollaire 2.6 implique clairement le résultat de [5] rappelé en introduction (théorème 1).

(v) Les constantes qui apparaissent dans le théorème 2.5 et son corollaire sont bien évidemment uniformes par rapport à z'.

(vi) Soient (p,q) un couple d'indices et (β_l) une suite de $\mathcal{S}_{p,q}$. On va montrer maintenant en 2.8–2.11 que pour $f\in\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $z'\in U\cap\partial\Omega$, la convergence pour les indices p,q tels que $p/\theta(z')+q<k+\alpha$ vers $(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z')$ n'est pas seulement normale mais peut être élargie à la région d'approche admissible $U_{z'}$. On donnera ultérieurement en 3.7 une propriété de régularité pour les fonctions $z'\mapsto(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z')$. Comme on l'a mentionné en introduction, ces résultats généralisent un théorème de J. Bruna et J. M. Ortega ([1], théorème 1.2) limité au cas de la boule.

Proposition 2.8. *Soit f une fonction de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Soient z' un point de $U\cap\partial\Omega$, z et z'' deux points de $U^{1,a}_{z'}$ et (p,q) un couple d'entiers naturels tels que l'on ait*

$$p/\theta(z')+q<k+\alpha. \tag{2.8.1}$$

Soit ε un réel, avec $0<\varepsilon<1$. Si on pose

$$\alpha_\varepsilon:=\min\left\{\frac{1-\varepsilon}{\Theta(z',z)},\ \frac{1-\varepsilon}{\Theta(z',z'')},\right.\\ \left. k+\alpha-\left(\frac{p}{\Theta(z',z)}+q\right),\ k+\alpha-\left(\frac{p}{\Theta(z',z'')}+q\right)\right\},$$

on a alors

$$\begin{aligned}|(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z)-(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z'')|\\ \le C(f)\varepsilon^{-1}(\delta(z',z)+\delta(z',z''))^{\alpha_\varepsilon}\end{aligned} \tag{2.8.2}$$

où $C(f)$ est une constante ne dépendant que de f, k, α et de la géométrie de Ω.

2.9. *Remarques.* (i) Compte tenu de (2.8.1), du fait que $p/\Theta(z',\cdot)+q\le p/\theta(z')+q$ et que $\theta(z')$ ne prend que des valeurs entières entre 2 et m, on a clairement $\inf_{z,z'}\{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)\}>0$.

Cette remarque sera utilisée dans la preuve qui suit. Elle implique également qu'à ε fixé, on a $\inf_{z,z',z''}\alpha_\varepsilon>0$.

(ii) Lorsqu'on suppose $0<\alpha<1/m$, les conditions $p/\theta(z')+q<k+\alpha$ et $p/\theta(z')+q\le k$ sont équivalentes. De là, il est facile de voir que, dans les hypothèses de 2.8, on peut touver ε tel que

$$\alpha_\varepsilon\ge\alpha \tag{2.9.1}$$

quels que soient z', z, z'', p et q. En particulier, pour $p=q=0$, $z''=z'$, le résultat obtenu s'écrit, pour $f\in\mathcal{A}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$,

$$|f(z)-f(z')|\lesssim\delta(z',z)^\alpha\quad\text{pour } z\in U^{1,a}_{z'}. \tag{2.9.2}$$

Dans [7], J. McNeal et E. M. Stein démontrent une forme globale de (2.9.2) (c'est-à-dire que z n'est pas astreint à rester dans une région d'approche de z') lorsque Ω est un convexe de type fini de $\mathbb{C}^n$. L'estimation (2.9.2) permet une interprétation naturelle de la restriction $0 < \alpha < 1/m$ (voir [7]). Un résultat similaire figure dans un travail de D.-C. Chang et S. Krantz ([3, théorème 2.10]).

(iii) Pour $1/m \leq \alpha < 1$, on n'a plus (2.9.1). Dans le cas $p = q = 0$, on a $\alpha_\varepsilon \geq (1-\varepsilon)/m$ et donc

$$|f(z) - f(z')| \lesssim \delta(z', z)^{(1-\varepsilon)/m}$$

pour $f \in \mathcal{A}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $z \in U^{1,a}_{z'}$. Cette estimation n'est évidemment pas optimale. Une amélioration de la proposition 2.8 dans le cas $\alpha \geq 1/m$ semble très compliquée, en particulier pour α rationnel de la forme $j/\theta(z')$ avec $1 \leq j < \theta(z')$. Cette difficulté correspond à la restriction $\alpha \neq 1/2$ rencontrée dans [1].

2.10. *Preuve de la proposition 2.8.* On se place dans le cadre de la première construction de chemins (voir 1.5 à 1.7).

(i) Estimation le long de S_1 : Soit J_1 l'entier naturel tel que l'on ait

$$k + \alpha + \varepsilon - 1 < p/\Theta(z', z) + q + J_1 \leq k + \alpha + \varepsilon.$$

On a évidemment $0 \leq J_1 \leq k + 2$. On pose

$$I_1 = (X^p_{z',1} X^q_{z',2} f)(z) - (X^p_{z',1} X^q_{z',2} f)(w) = P_1 + R_1$$

avec, en notant, comme en (2.1), $F := f \circ \phi_{z'}$,

$$P_1 = \sum_{j=1}^{J_1} \frac{1}{j!} \partial^p_{\zeta_1} \partial^{q+j}_{\zeta_2} F(\xi)(\zeta_2 - \xi_2)^j,$$

$$R_1 = \frac{(\zeta_2 - \xi_2)^{J_1+1}}{J_1!} \int_0^1 s^{J_1} \partial^p_{\zeta_1} \partial^{q+J_1+1}_{\zeta_2} F(u^{1,s})\, ds.$$

Pour $1 \leq j \leq J_1$, on a

$$\frac{1}{j!} |\partial^p_{\zeta_1} \partial^{q+j}_{\zeta_2} F(\xi)(\zeta_2 - \xi_2)^j| \lesssim (t'' - t)^j \mathcal{W}\left(\delta(z', w), \frac{p}{\Theta(z', w)} + q + j\right)$$

compte tenu du théorème 2.5 et du lemme 2.4. On a aussi $0 \leq t'' - t \leq t'' \approx \delta(z', w) \approx \delta(z', z'')$ et donc, compte tenu de (2.1.5), (1.7.1) et (2.1.6)–(2.1.7),

$$(t'' - t)^j \mathcal{W}\left(\delta(z', w), \frac{p}{\Theta(z', w)} + q + j\right) \lesssim \delta(z', z'')^j \mathcal{W}\left(\delta(z', z''), \frac{p}{\Theta(z', z)} + q + j\right).$$

Enfin, $p/\Theta(z',z)+q+j \le p/\Theta(z',z)+q+J_1 \le k+\alpha+\varepsilon$ et donc, par (2.1.5) et (2.1.2),

$$\mathcal{W}\left(\delta(z',z''),\frac{p}{\Theta(z',z)}+q+j\right) \lesssim \mathcal{W}(\delta(z',z''),k+\alpha+\varepsilon) \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{-\varepsilon}.$$

De ces considérations, il résulte que

$$|P_1| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{1-\varepsilon}. \tag{2.10.1}$$

On estime maintenant le reste de Taylor R_1. On a sans difficulté

$$|R_1| \lesssim (t''-t)^{J_1+1}\int_0^1 s^{J_1}\mathcal{W}\left(\delta(z',z^{1,s}),\frac{p}{\Theta(z',z^{1,s})}+q+J_1+1\right)ds. \tag{2.10.2}$$

Par ailleurs $\delta(z',z^{1,s}) \approx t+s(t''-t)$ et donc, en vertu de (2.1.5), (1.7.1), (2.1.6)–(2.1.7), on a aussi

$$\mathcal{W}\left(\delta(z',z^{1,s}),\frac{p}{\Theta(z',z)}+q+J_1+1\right) \lesssim \mathcal{W}\left(t+s(t''-t),\frac{p}{\Theta(z',z)}+q+J_1+1\right).$$

Enfin, comme on a $p/\Theta(z',z)+q+J_1+1 > k+\alpha+\varepsilon$, il vient, d'après (2.1.2) et en reportant dans (2.10.2),

$$\begin{aligned}|R_1| &\lesssim \varepsilon^{-1}(t''-t)\int_0^1 (s(t''-t))^{J_1}(t+s(t''-t))^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q+J_1+1)}\,ds\\ &\lesssim \varepsilon^{-1}(t''-t)\int_0^1 (t+s(t''-t))^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q+1)}\,ds\\ &\lesssim \varepsilon^{-1}(k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q))^{-1}{t''}^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)}\end{aligned}$$

par un calcul direct. Suivant les hypothèses qui ont été faites et selon la remarque 2.9(i), on en déduit alors

$$|R_1| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)}$$

et, compte tenu de (2.10.1),

$$|I_1| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{\min\{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q),1-\varepsilon\}}. \tag{2.10.3}$$

(ii) Estimation le long de S_2 : Soit J_2 l'entier naturel tel que l'on ait

$$k+\alpha+(\varepsilon-1)/\Theta(z',z'') < (p+J_2)/\Theta(z',z'')+q \le k+\alpha+\varepsilon/\Theta(z',z'').$$

On a clairement $0 \le J_2 \le m(k+1)+1$. On pose

$$I_2 = (X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(w)-(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(w'') = P_2+R_2,$$

avec

$$P_2 = \sum_{j=1}^{J_2} \frac{1}{j!}\,\partial_{\zeta_1}^{p+j}\partial_{\zeta_2}^{q} F(\xi'')(\xi_1 - \xi_1'')^j,$$

$$R_2 = \frac{(\xi_1 - \xi_1'')^{J_2+1}}{J_2!}\int_0^1 s^{J_2}\partial_{\zeta_1}^{p+J_2+1}\partial_{\zeta_2}^{q} F(u^{2,s})\,ds.$$

Pour $1 \le j \le J_2$, compte tenu de (1.7.3), du fait que l'on a $\delta(z', w'') \approx \delta(z', z'')$ et $(p+j)/\Theta(z', z'') + q \le k + \alpha + \varepsilon/\Theta(z', z'')$, on obtient

$$|\partial_{\zeta_1}^{p+j}\partial_{\zeta_2}^{q} F(\xi'')| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z', z'')^{-\varepsilon/\Theta(z',z'')} \tag{2.10.4}$$

via des arguments similaires à ceux utilisés pour l'estimation de P_1. Par ailleurs, dans la construction 1.5, on a

$$|\xi_1 - \xi_1''| = |\zeta_1 - \zeta_1''| \le |\zeta_1| + |\zeta_1''| \lesssim \tau(z', a|\varrho(0^{t''})|) \lesssim \tau(z', \delta(z', z''))$$

et donc, par 1.3(iv) et (2.10.4),

$$|P_2| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z', z'')^{(1-\varepsilon)/\Theta(z',z'')}. \tag{2.10.5}$$

On estime à présent R_2. On a tout d'abord

$$\mathcal{W}\left(\delta(z', z^{2,s}), \frac{p+J_2+1}{\Theta(z', z^{2,s})} + q\right) \lesssim \mathcal{W}\left(\delta(z', z''), \frac{p+J_2+1}{\Theta(z', z'')} + q\right)$$

en vertu de (1.7.3), du fait que l'on a $\delta(z', z^{2,s}) \approx \delta(z', z'')$ et des propriétés (2.1.5) à (2.1.7) de $\mathcal{W}$. On en déduit

$$|R_2| \lesssim \delta(z', z'')^{(J_2+1)/\Theta(z',z'')}\mathcal{W}\left(\delta(z', z''), \frac{p+J_2+1}{\Theta(z', z'')} + q\right)$$

et, puisque $(p + J_2 + 1)/\Theta(z', z'') + q \ge k + \alpha + \varepsilon/\Theta(z', z'')$, il vient, par (2.1.2),

$$|R_2| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z', z'')^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z'')+q)}$$

et, compte tenu de (2.10.5),

$$|I_2| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z', z'')^{\min\{k+\alpha-(p/\Theta(z',z'')+q),(1-\varepsilon)/\Theta(z',z'')\}}. \tag{2.10.6}$$

(iii) Estimation le long de S_3 : On procède de façon similaire en définissant J_3 l'entier naturel tel que l'on ait

$$k + \alpha + \varepsilon - 1 < p/\Theta(z', z'') + q + J_3 \le k + \alpha + \varepsilon.$$

On a évidemment $0 \le J_3 \le k + 2$. On pose

$$I_3 = (X_{z',1}^p X_{z',2}^q f)(w'') - (X_{z',1}^p X_{z',2}^q f)(z'') = P_3 + R_3,$$

avec

$$P_3 = \sum_{j=1}^{J_3} \frac{1}{j!}\, \partial^p_{\zeta_1} \partial^{q+j}_{\zeta_2} F(\zeta'')(\xi''_2 - \zeta''_2)^j,$$

$$R_3 = \frac{(\xi''_2 - \zeta''_2)^{J_3+1}}{J_3!} \int_0^1 s^{J_3} \partial^p_{\zeta_1} \partial^{q+J_3+1}_{\zeta_2} F(u^{3,s})\, ds.$$

On a $|\xi''_2 - \zeta''_2| \lesssim a|\varrho(0^{t''})| \lesssim t''$ et donc $|\xi''_2 - \zeta''_2| \lesssim \delta(z', z'')$. De là et de l'estimation

$$|\partial^p_{\zeta_1} \partial^{q+j}_{\zeta_2} F(\zeta'')| \lesssim \mathcal{W}\biggl(\delta(z', z''), \frac{p}{\Theta(z', z'')} + q + j\biggr),$$

les arguments déjà invoqués permettent d'obtenir

$$|P_3| \lesssim \varepsilon^{-1} \delta(z', z'')^{(1-\varepsilon)/\Theta(z', z'')}. \tag{2.10.7}$$

De même, on a

$$|R_3| \lesssim \delta(z', z'')^{J_3+1} \int_0^1 s^{J_3} \mathcal{W}\biggl(\delta(z', z^{3,s}), \frac{p}{\Theta(z', z^{3,s})} + q + J_3 + 1\biggr)\, ds$$

et, compte tenu de (1.7.3), (1.7.4) et de l'estimation $\delta(z', z^{3,s}) \approx \delta(z', z'') \approx t''$,

$$|R_3| \lesssim \delta(z', z'')^{J_3+1} \mathcal{W}\biggl(\delta(z', z''), \frac{p}{\Theta(z', z'')} + q + J_3 + 1\biggr).$$

On conclut alors, avec les mêmes arguments que pour l'estimation de R_2, à la majoration

$$|R_3| \lesssim \varepsilon^{-1} \delta(z', z'')^{k+\alpha-(p/\Theta(z', z'')+q)}$$

et, compte tenu de (2.10.7),

$$|I_3| \lesssim \varepsilon^{-1} \delta(z', z'')^{\min\{k+\alpha-(p/\Theta(z', z'')+q), (1-\varepsilon)/\Theta(z', z'')\}}. \tag{2.10.8}$$

(iv) Conclusion : Posons

$$I = (X^p_{z',1} X^q_{z',2} f)(z) - (X^p_{z',1} X^q_{z',2} f)(z'') = I_1 + I_2 + I_3.$$

En regroupant (2.10.3), (2.10.6) et (2.10.8), on obtient

$$|I| \lesssim \varepsilon^{-1} \delta(z', z'')^{\min\{k+\alpha-(p/\Theta(z', z'')+q), (1-\varepsilon)/\Theta(z', z'')\}},$$

mais cette estimation est liée au fait que l'on a supposé, pour simplifier les notations, $t'' \geq t$, c'est-à-dire $\delta(z', z'') \gtrsim \delta(z', z)$, dans la construction de chemins 1.5. Dans le cas général, il convient de tenir compte de la symétrie des rôles de z et z'' et on obtient ainsi immédiatement

$$|I| \lesssim \varepsilon^{-1} (\delta(z', z) + \delta(z', z''))^{\alpha_\varepsilon}$$

où α_ε est l'expression spécifiée en 2.8.

Théorème 2.11. *Dans les hypothèses de la proposition* 2.8, *la limite*

$$\lim_{z\to z',\, z\in U^{1,a}_{z'}} (X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z) \tag{2.11.1}$$

existe. On la note par abus $(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z')$. *De même, pour toute suite* (β_l) *de* $\mathcal{S}_{p,q}$, *la limite*

$$\lim_{z\to z',\, z\in U^{1,a}_{z'}} (L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z) \tag{2.11.2}$$

existe. On la note par abus $(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z')$. *De plus,*

$$\begin{aligned}(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z') \\ = \sum_{\substack{i,j\\ i/\theta(z')+j<k+\alpha}} \gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z')(X^i_{z',1}X^j_{z',2}f)(z')\end{aligned} \tag{2.11.3}$$

où les $\gamma_{\beta,p,q,i,j}$ *sont les fonctions de* $\mathcal{C}^\infty(U\times U)$ *définies en* 2.2.

Preuve. L'existence des limites (2.11.1) est un corollaire trivial de la proposition 2.8 et de la remarque 2.9(i), via une simple application du critère de Cauchy pour l'existence de limites.

L'existence des limites (2.11.2) découle du lemme 2.2 et de la formule (2.2.1). En effet, trois cas se présentent pour les termes qui apparaissent dans cette formule.

• $i/\theta(z')+j<k+\alpha$. Puisque $i/\Theta(z',z)+j\le i/\theta(z')+j<k+\alpha$, la limite de $(X^i_{z',1}X^j_{z',2}f)(z)$ existe alors quand z tend vers z' dans $U^{1,a}_{z'}$.

• $i/\theta(z')+j>k+\alpha$. Alors, puisque $i/\Theta(z',z)+j\le i/\theta(z')+j$, on obtient, en posant

$$\mu=(i/\theta(z')+j-(k+\alpha))/2>0$$

et en utilisant (2.1.2),

$$\begin{aligned}&|\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z)(X^i_{z',1}X^j_{z',2}f)(z)|\\ &\qquad\lesssim \delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}\mathcal{W}\left(\delta(z',z),\frac{i}{\theta(z')}+j\right)\lesssim S_1+S_2\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}S_1&=\delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)},\\ S_2&=\mu^{-1}\delta(z',z)^{k+\alpha-i/\theta(z')-q+(i-p)/\Theta(z',z)}.\end{aligned}$$

Quand on fait tendre z' vers z dans $U^{1,a}_{z'}$, S_1 tend vers 0, puisque $i\le p$ et donc $j-q+(i-p)/\Theta(z',z)\ge j-q+(i-p)/\theta(z')\ge k+\alpha-(p/\theta(z')+q)>0$. De même, on a $S_2\lesssim\delta(z',z)^{k+\alpha-(p/\theta(z')+q)}$ qui tend également vers 0.

• $i/\theta(z') + j = k + \alpha$. On a alors

$$|\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z)(X^i_{z',1}X^j_{z',2}f)(z)| \lesssim \delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}\mathcal{W}\left(\delta(z',z), \frac{i}{\theta(z')}+j\right) \lesssim \delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}(1+|\operatorname{Log}\delta(z',z)|)$$

avec $(i-p)/\Theta(z',z)+j-q \geq (i-p)/\theta(z')+j-q = k+\alpha-(p/\theta(z')+q) > 0$, donc le terme correspondant tend aussi vers 0.

En faisant tendre z vers z' dans $U^{1,a}_{z'}$, on obtient donc bien la formule (2.11.3) souhaitée.

2.12. *Exemple.* À titre d'illustration, on peut considérer l'ellipsoïde $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2;\ |z_1|^4 + |z_2|^2 < 1\}$ qui est de type fini 4 et vérifier aisément, à l'aide des inégalités $|z_1| \lesssim |1-z_2|^{1/4}$ et $|1-z_2| \gtrsim |r(z)|$, que la fonction $f(z) = z_1^2 \operatorname{Log}(1-z_2)$ est dans $\mathcal{A}^{0,1/2}(\overline{\Omega})$: il suffit pour cela de voir que $|\partial_{z_i} f(z)| \lesssim |r(z)|^{-1/2}$ pour $i = 1, 2$. On peut alors, par des calculs simples, montrer que $(L_1 f)(0,1)$ existe (et est nulle) tandis que $(L_1^2 f)(0,1)$ et $(L_2 f)(0,1)$ n'existent pas. Ceci correspond bien à la condition (2.8.1) sur les ordres de dérivation.

3. Formule de Taylor non isotrope et applications

3.1. *Notations et hypothèses.* Dans toute la suite, on supposera de plus

$$\alpha \neq j/m, \quad j \in \{1, \dots, m-1\}. \tag{3.1.1}$$

Soit $f \in \mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Soit z' un point de $U \cap \partial\Omega$ de type m. Soient δ_1, s_0 et b_0 les nombres associés par 1.8 à $a_0 = a$ et $t_0 = 1$. On associe à f un développement de Taylor non isotrope

$$T^{z'}_{NI} f(z) = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N},\, j\in\mathbb{N}\\ i/m+j<k+\alpha}} \frac{1}{i!j!}(X^i_{z',1}X^j_{z',2}f)(z')\zeta_1^i\zeta_2^j \quad \text{pour } z = \phi_{z'}(\zeta).$$

On pose également $h := f - T^{z'}_{NI} f$, $H := h \circ \phi_{z'}$.

Lemme 3.2. *Soit f une fonction de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Pour tout point z' de $U \cap \partial\Omega$ et tout couple d'indices (p,q) tel que $p/\theta(z') + q < k + \alpha$, on a*

$$|(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z')| \leq C_{p,q}(f) \tag{3.2.1}$$

où $C_{p,q}(f)$ est une constante ne dépendant que de p, q et f.

De plus, pour tous points z', z'' de $U \cap \partial\Omega$ et z de $U \cap \overline{\Omega}$ et tout couple d'indices (p,q), on a

$$|(X^p_{z'',1}X^p_{z'',2}(T^{z'}_{NI} f))(z)| \leq C'_{p,q}(f) \tag{3.2.2}$$

où $C'_{p,q}(f)$ est une constante ne dépendant que de p, q et f.

Preuve. (3.2.1) est une conséquence de l'estimation (2.6.2) : on pose $\varepsilon_0 = \min\{|\alpha - j/m|;\ j \in \{1, \ldots, m-1\}\}$, ce qui est possible d'après (3.1.1). Pour tout couple d'indices (i,j) tel que $i/\theta(z') + j < k + \alpha$, on a alors automatiquement $i/\theta(z') + j < k + \alpha - \varepsilon_0$.

On peut alors faire tendre z vers z' en restriction à $U_{z'}$ dans (2.6.2). On obtient alors que pour tout couple d'indices (i,j) tel que $i/\theta(z')+j+q < k+\alpha$ et toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{i,j}$, on a l'estimation

$$|(L_{\beta_1} \ldots L_{\beta_{i+j}} L_2^q f)(z')| \le C_{i,j,q}^{\varepsilon_0} \|f\|.$$

En suivant la même méthode que pour le lemme 2.2 puis en faisant tendre z vers z' comme dans 2.11, on peut obtenir la formule

$$(X_{z',1}^p X_{z',2}^q f)(z') = \sum_{\substack{i+j \le p \\ i/\theta(z')+j+q<k+\alpha \\ \beta \in \mathcal{S}_{i,j}}} \Gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z')(L_{\beta_1} \ldots L_{\beta_{i+j}} L_2^q f)(z')$$

où les fonctions $\Gamma_{\beta,p,q,i,j}(\cdot,\cdot)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U \times U$. On obtient donc (3.2.1).

Pour démontrer (3.2.2), il suffit de voir que $(X_{z'',1}^p X_{z'',2}^q (T_{NI}^{z'} f))(z)$ est $\mathcal{C}^\infty$ en z et z'' et que le degré et les coefficients de $T_{NI}^{z'} f$ sont uniformément bornés en z' d'après (3.2.1). ■

Théorème 3.3. *Soit f une fonction de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ avec $\alpha \in \,]0,1[$ vérifiant* (3.1.1). *Soient z' un point de $U \cap \partial\Omega$ de type m, z'' un point de $U \cap \partial\Omega$, z un point de $U \cap \overline{\Omega}$ avec $\delta(z',z) < \delta_1 b_0 t_0$ et $z \in U_{z''}^{s_0,b_0}$, et p et q deux indices tels que $p/\Theta(z'',z) + q < k + \alpha$. Alors on a*

$$|(X_{z'',1}^p X_{z'',2}^q (f - T_{NI}^{z'} f))(z)| \lesssim \frac{1}{k + \alpha - (p/\Theta(z'',z) + q)}\, \delta(z',z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}.$$

On fait la preuve en trois étapes : 3.4–3.6. On se place désormais dans le schéma de construction de chemins du 1.8.

3.4. *Estimation en ω. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p/m + q < k + \alpha$. On a alors l'estimation*

$$|\partial_{\zeta_1}^p \partial_{\zeta_2}^q H(\omega)| \lesssim \delta(z',z)^{k+\alpha-(p/m+q)}.$$

Preuve. Elle se réalise en deux étapes.

(i) Première étape : Estimation sur $[\xi, \omega]$. Soit J l'entier naturel tel que l'on ait

$$(p+J)/m + q < k + \alpha \le (p+J+1)/m + q.$$

On a évidemment $0 \le J \le m(k+1)$. Par développement de Taylor, on peut écrire

$$\partial^p_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}H(\omega) = P + R, \tag{3.4.1}$$

avec

$$P = \sum_{j=0}^{J} \frac{1}{j!}\,\partial^{p+j}_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}H(\xi)\zeta_1^j, \qquad R = \frac{\zeta_1^{J+1}}{J!}\int_0^1 \sigma^J \partial^{p+J+1}_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}H(v^{2,1-\sigma})\,d\sigma.$$

On va tout d'abord estimer $|R|$. On a

$$|R| \lesssim |\zeta_1|^{J+1}\int_0^1 \sigma^J|\partial^{p+J+1}_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}H(v^{2,1-\sigma})|\,d\sigma.$$

Par des considérations de degré immédiates, la condition $(p+J+1)/m+q \ge k+\alpha$ implique

$$\partial^{p+J+1}_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}H(v^{2,1-\sigma}) = \partial^{p+J+1}_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}F(v^{2,1-\sigma})$$

et donc, en vertu du théorème 2.5 et du lemme 2.4,

$$|\partial^{p+J+1}_{\zeta_1}\partial^q_{\zeta_2}H(v^{2,1-\sigma})| \lesssim \mathcal{W}\biggl(\delta(z',x^{2,1-\sigma}), \frac{p+J+1}{\Theta(z',x^{2,1-\sigma})}+q\biggr)$$

avec $\Theta(z',\cdot)\equiv m$ puisque z' est de type m. On en tire

$$|R| \lesssim |\zeta_1|^{J+1}\int_0^1 \sigma^J \mathcal{W}\biggl(\delta(z',x^{2,1-\sigma}), \frac{p+J+1}{m}+q\biggr)\,d\sigma.$$

De plus, d'après 1.3(iv), on a $|\zeta_1| \lesssim \delta(z',z)^{1/\Theta(z',z)} = \delta(z',z)^{1/m}$. On a donc

$$|R| \lesssim \delta(z',z)^{(J+1)/m}\int_0^1 \sigma^J \mathcal{W}\biggl(\delta(z',x^{2,1-\sigma}), \frac{p+J+1}{m}+q\biggr)\,d\sigma.$$

Puisque $\delta(z',x^{2,1-\sigma}) \approx t \approx \delta(z',z)$, on a, par (2.1.5),

$$|R| \lesssim \delta(z',z)^{(J+1)/m}\mathcal{W}\biggl(\delta(z',z), \frac{p+J+1}{m}+q\biggr).$$

La condition $(p+J+1)/m+q \ge k+\alpha$, jointe à l'hypothèse (3.1.1), assure qu'en fait $(p+J+1)/m+q-(k+\alpha) \ge \varepsilon$ avec $\varepsilon = \min_{j\in\{0,1\dots,m\}}|\alpha-j/m|$. De là, en utilisant (2.1.2), on obtient finalement

$$\begin{aligned} |R| &\lesssim \delta(z',z)^{(J+1)/m}\delta(z',z)^{k+\alpha-((p+J+1)/m+q)} \\ &= \delta(z',z)^{k+\alpha-(p/m+q)}. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

(ii) Deuxième étape : Estimation sur $[0,\xi]$. Pour $\eta>0$, on procède à un développement et à des estimations le long de $[v^{1,\eta},\xi]$ avec le paramétrage $\lambda\mapsto v^{1,\eta(1-\lambda)+\lambda}$ pour $0\le\lambda\le 1$. On fera ensuite tendre η vers 0.

Pour $0 \le j \le J$, soit L_j l'entier naturel tel que l'on ait

$$(p+j)/m + q + L_j < k + \alpha \le (p+j)/m + q + L_j + 1.$$

On a évidemment $L_j \le k+1$. On peut alors écrire, par développement de Taylor,

$$\partial_{\zeta_1}^{p+j} \partial_{\zeta_2}^{q} H(\xi) = P_j^\eta + R_j^\eta, \tag{3.4.3}$$

avec

$$P_j^\eta = \sum_{l=0}^{L_j} \frac{1}{l!} \partial_{\zeta_1}^{p+j} \partial_{\zeta_2}^{q+l} H(v^{1,\eta})(\xi_2 - v_2^{1,\eta})^l,$$

$$R_j^\eta = \frac{(\xi_2 - v_2^{1,\eta})^{L_j+1}}{L_j!} \int_0^1 \sigma^{L_j} \partial_{\zeta_1}^{p+j} \partial_{\zeta_2}^{q+L_j+1} H(v^{1,\eta\sigma+1-\sigma})\, d\sigma.$$

Quand η tend vers 0, $v^{1,\eta}$ tend vers 0 en restant dans $V_{z'}^{1,a}$. Compte tenu de 2.11 et de la définition de $T_{NI}^{z'} f$, on voit alors que pour $0 \le l \le L_j$, chaque terme $\partial_{\zeta_1}^{p+j} \partial_{\zeta_2}^{q+l} H(v^{1,\eta})$ tend vers zéro. Ainsi on a

$$\lim_{\eta \to 0} P_j^\eta = 0. \tag{3.4.4}$$

On va maintenant estimer R_j^η. Il vient

$$|R_j^\eta| \lesssim |\xi_2 - v_2^{1,\eta}|^{L_j+1} \int_0^1 \sigma^{L_j} |\partial_{\zeta_1}^{p+j} \partial_{\zeta_2}^{q+L_j+1} H(v^{1,\eta\sigma+1-\sigma})|\, d\sigma.$$

On a $|\xi_2 - v_2^{1,\eta}| \le |\xi_2| + |v_2^{1,\eta}| \lesssim t + \eta t \lesssim t$. De plus puisque $(p+j)/m + q + L_j + 1 \ge k + \alpha$ et pour des raisons de degré sur $T_{NI}^{z'} f$, on a

$$\partial_{\zeta_1}^{p+j} \partial_{\zeta_2}^{q+L_j+1} H(v^{1,\eta\sigma+1-\sigma}) = \partial_{\zeta_1}^{p+j} \partial_{\zeta_2}^{q+L_j+1} F(v^{1,\eta\sigma+1-\sigma}).$$

On applique l'estimée donnée par le théorème 2.5 et le lemme 2.4. Il vient

$$|R_j^\eta| \lesssim t^{L_j+1} \int_0^1 \sigma^{L_j} \mathcal{W}\left(\delta(z', x^{1,\eta\sigma+1-\sigma}), \frac{p+j}{m} + q + L_j + 1\right) d\sigma.$$

Puisque $\delta(z', x^{1,\eta\sigma+1-\sigma}) \approx (\eta\sigma + 1 - \sigma)t$, on a alors, d'après (2.1.5),

$$|R_j^\eta| \lesssim t^{L_j+1} \int_0^1 \sigma^{L_j} \mathcal{W}\left(t(1+\sigma(\eta-1)), \frac{p+j}{m} + q + L_j + 1\right) d\sigma.$$

Compte tenu du choix de L_j et de (3.1.1), on a $(p+j)/m + q + L_j + 1 > k + \alpha$ et, d'après (2.1.2) et un argument déjà utilisé dans la première étape,

$$|R_j^\eta| \lesssim t^{k+\alpha-((p+j)/m+q)} \int_0^1 \sigma^{L_j} (1+\sigma(\eta-1))^{k+\alpha-((p+j)/m+q+L_j+1)}\, d\sigma.$$

On remarque alors que dans l'intégrale de droite, la fonction intégrée est plus petite que la fonction $g(\sigma) = \sigma^{L_j}(1-\sigma)^{k+\alpha-((p+j)/m+q+L_j+1)}$ et que l'intégrale $\int_0^1 g(\sigma)\,d\sigma$ converge puisque l'on a $k+\alpha-((p+j)/m+q+L_j+1) > -1$. On a donc

$$|R_j^\eta| \lesssim t^{k+\alpha-((p+j)/m+q)}$$

uniformément en η. Finalement, en faisant tendre η vers 0 et en utilisant (3.4.4), on obtient alors

$$|\partial_{\zeta_1}^{p+j}\partial_{\zeta_2}^{q} H(\xi)| \lesssim t^{k+\alpha-((p+j)/m+q)} \approx \delta(z',z)^{k+\alpha-((p+j)/m+q)}.$$

On peut alors injecter cette estimation dans (3.4.1) et, grâce à (3.4.2), on obtient le résultat annoncé. ∎

3.5. *Estimée de raccord.* Comme dans [11, (3.5)], on définit

$$A_{i,j}^{(p)} := (\partial_{\zeta_1}^{i}\partial_{\zeta_2}^{j}\Xi_{\zeta'',1}^{p}h)(\omega), \qquad (i,j,p)\in\mathbb{N}^3.$$

(On se reportera à 1.3 pour la définition de $\Xi_{\zeta'',1}$.) On va montrer par récurrence sur l'entier p que l'on a l'estimation

$$|A_{i,j}^{(p)}| \lesssim \delta(z',z)^{k+\alpha-((p+i)/m+j)}.$$

Pour $p=0$, on vient de le montrer en 3.4 pour les entiers i,j tels que $i/m+j<k+\alpha$. D'après (3.1.1), il ne reste plus qu'à le montrer pour i,j entiers tels que $i/m+j>k+\alpha$. On a, par des considérations de degré,

$$\partial_{\zeta_1}^{i}\partial_{\zeta_2}^{j}H(\omega) = \partial_{\zeta_1}^{i}\partial_{\zeta_2}^{j}F(\omega).$$

Par le théorème 2.5, le lemme 2.4 et puisque $\Theta(z',\cdot)\equiv m$, on a

$$|\partial_{\zeta_1}^{i}\partial_{\zeta_2}^{j}F(\omega)| \lesssim \mathcal{W}\left(\delta(z',y), \frac{i}{\Theta(z',y)}+j\right) \lesssim \mathcal{W}\left(\delta(z',y), \frac{i}{m}+j\right).$$

On utilise alors (1.8.1) et (2.1.5), (2.1.2) et (3.1.1) pour obtenir

$$|\partial_{\zeta_1}^{i}\partial_{\zeta_2}^{j}H(\omega)| \lesssim \delta(z',z)^{k+\alpha-(i/m+j)},$$

ce qui clôt le cas $p=0$.

On suppose la formule vraie au rang $p-1$. Alors, d'après [11, (3.5)], on a

$$A_{i,j}^{(p)} = A_{i+1,j}^{(p-1)} + \sum_{l+n=i}\frac{i!}{l!n!}\,\partial_{\zeta_1}^{l}E(\omega_1)A_{n,j+1}^{(p-1)},$$

d'où, en utilisant l'hypothèse de récurrence et (1.4.4), en remarquant que $\zeta_1=\omega_1$,

$$\begin{aligned}|A_{i,j}^{(p)}| &\lesssim \delta(z',z)^{k+\alpha-((p-1+i+1)/m+j)}\\ &\qquad + \sum_{l+n=i}\frac{i!}{l!n!}\,\delta(z',z)^{1-(l+1)/m}\delta(z',z)^{k+\alpha-((p-1+n)/m+j+1)}\\ &\lesssim \delta(z',z)^{k+\alpha-((p+i)/m+j)},\end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation souhaitée.

3.6. *Fin de la preuve.* On fixe ε_0, un réel strictement positif. Soit L l'entier naturel tel que

$$k+\alpha+\varepsilon_0-1 < p/\Theta(z'',z)+q+L \leq k+\alpha+\varepsilon_0.$$

On a évidemment $L \leq k+1$. On peut alors écrire, par un développement de Taylor,

$$(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}h)(z) = P+R$$

avec

$$P = \sum_{l=0}^{L} \frac{1}{l!}(X^p_{z'',1}X^{q+l}_{z'',2}h)(y)\left(\frac{z_2-y_2}{d_0(z'')}\right)^l,$$

$$R = \frac{(v_2^1-v_2^0)^{L+1}}{L!}\int_0^1 \sigma^L \partial^p_{u_1}\partial^{q+L+1}_{u_2}H^*(v^{1-\sigma})\,d\sigma,$$

où $H^* = h\circ\phi_{z''}$. Estimons tout d'abord R. En utilisant (1.8.3), on obtient

$$|R| \lesssim \delta(z',z)^{L+1}\int_0^1 \sigma^L|\partial^p_{u_1}\partial^{q+L+1}_{u_2}H^*(v^{1-\sigma})|\,d\sigma.$$

On a

$$\begin{aligned}\partial^p_{u_1}\partial^{q+L+1}_{u_2}H^* &= (X^p_{z'',1}X^{q+L+1}_{z'',2}f)\circ\phi_{z''} - (X^p_{z'',1}X^{q+L+1}_{z'',2}T^{z'}_{NI}f)\circ\phi_{z''}\\ &= E_1 - E_2.\end{aligned}$$

Comme on n'a pas nécessairement $p/m+q+L+1 \geq k+\alpha$, le terme E_2 dans l'égalité précédente n'est pas forcément nul, mais en vertu du lemme 3.2, on peut affirmer que l'on a $|E_2| \lesssim 1$.

Compte tenu du théorème 2.5 et du lemme 2.4 qui permettent de majorer $|E_1|$, il vient donc maintenant

$$|R| \lesssim \delta(z',z)^{L+1}\int_0^1 \sigma^L\mathcal{W}\left(\delta(z'',x^{3,1-\sigma}),\frac{p}{\Theta(z'',x^{3,1-\sigma})}+q+L+1\right)d\sigma.$$

En combinant (1.8.6), (2.1.6) et (2.1.7), on obtient, d'après (1.8.5),

$$|R| \lesssim \delta(z',z)^{L+1}\int_0^1 \sigma^L\mathcal{W}\left(s+\sigma t,\frac{p}{\Theta(z'',z)}+q+L+1\right)d\sigma.$$

Puisque $p/\Theta(z'',z)+q+L+1 > k+\alpha+\varepsilon_0$, on a, compte tenu du fait que $\delta(z',z)\approx t$,

$$\begin{aligned}|R| &\lesssim t\int_0^1 (\sigma t)^L(s+\sigma t)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q+L+1)}\,d\sigma\\ &\lesssim t\int_0^1 (s+\sigma t)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q+1)}\,d\sigma\end{aligned}$$

et en faisant le calcul direct de l'intégrale, on obtient, puisque $p/\Theta(z'',z) + q < k+\alpha$,

$$\int_0^1 (s+\sigma t)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q+1)}\, d\sigma \lesssim \frac{1}{t(k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q))}(s+t)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}.$$

On obtient donc

$$|R| \lesssim \frac{1}{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}(s+t)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}$$

avec $\delta(z',z) \approx t$ et $s \lesssim t$, d'où

$$|R| \lesssim \frac{1}{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}\delta(z',z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}. \tag{3.6.1}$$

D'autre part, pour $0 \le l \le L$, on a

$$(X^p_{z'',1}X^{q+l}_{z'',2}h)(y) = \Xi^p_{\zeta'',1}(d_0(z'')/d_0(z'))^{q+l}\partial^{q+l}_{\zeta_2}H(\omega)$$

avec, de plus, $|d_0| \approx 1$ et $|z_2 - y_2| \lesssim \delta(z',z)$. En utilisant 3.5 et le fait que $\Xi_{\zeta'',1}$ et $\partial/\partial_{\zeta_2}$ commutent, on obtient alors l'estimation

$$|P| \lesssim \delta(z',z)^{k+\alpha-(p/m+q)}$$

donc, *a fortiori*,

$$|P| \lesssim \delta(z',z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}. \tag{3.6.2}$$

En regroupant (3.6.1) et (3.6.2), on a le résultat souhaité.

En application du théorème de Taylor 3.3, on démontre maintenant un résultat de régularité pour les fonctions $z' \mapsto (X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z')$ et $z' \mapsto (L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z')$ comme annoncé en 2.7(vi).

Théorème 3.7. *On suppose $0<\alpha<1/m$. On considère f une fonction de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, z' un point de type m dans $U \cap \partial\Omega$ et V un voisinage convexe de z' dans $\mathbb{C}^2$, avec V relativement compact dans U. Soient z'' un point de $V \cap \partial\Omega$ et (p,q) un couple d'entiers naturels vérifiant*

$$p/\theta(z'') + q < k + \alpha.$$

On a alors

$$|(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z') - (X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}f)(z'')| \le C(f)\delta(z',z'')^\alpha \tag{3.7.1}$$

où $C(f)$ est une constante dépendant de f et de la géométrie de Ω.

Pour toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{p,q}$, on a aussi

$$|(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z') - (L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z'')| \le C'(f)\delta(z',z'')^\alpha \tag{3.7.2}$$

où $C'(f)$ est une constante dépendant de f et de la géométrie de Ω.

Preuve. Pour démontrer (3.7.1), on commence par décomposer le terme de gauche:

$$(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z') - (X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}f)(z'') = A_1(z',z'') + A_2(z',z'')$$

où

$$A_1(z',z'') = (X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}(f - T^{z'}_{NI}f))(z''),$$
$$A_2(z',z'') = (X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}T^{z'}_{NI}f)(z'') - (X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z').$$

La démonstration se découpe en trois étapes. Compte tenu de 3.2, on peut clairement se limiter au cas où on a $\delta(z',z'') < \delta_1 b_0 t_0$, où δ_1, b_0 et t_0 sont associés à f par 3.1.

(i) Première étape : On estime tout d'abord $A_1(z',z'')$. Tout point z de $U^{s_0,b_0}_{z''}$ suffisamment proche de z'' vérifie $\delta(z',z) < \delta_1 b_0 t_0$. On applique à un tel point z le théorème 3.3 en remarquant que les hypothèses sur p, q, α entraînent $p/\theta(z'') + q \le k$ et *a fortiori* $p/\Theta(z'',z) + q \le k$. On obtient

$$|(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}(f - T^{z'}_{NI}f))(z)| \lesssim \delta(z',z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}.$$

On fait alors tendre z vers z'' tout en restant dans $U^{s_0,b_0}_{z''}$ et on obtient

$$|A_1(z',z'')| \lesssim \delta(z',z'')^{k+\alpha-(p/\theta(z'')+q)}. \tag{3.7.3}$$

(ii) Deuxième étape : On désire maintenant estimer $A_2(z',z'')$. Pour cela, on pose

$$B(z,z',z'') = (X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}((T^{z'}_{NI}f) - (T^{z'}_{NI}f)\circ\phi_{z'}\circ\phi^{-1}_{z''}))(z),$$
$$\mathcal{P}(\zeta) = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N},\, j\in\mathbb{N}\\ i/m+j<k+\alpha}} \frac{1}{i!j!}(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z')\zeta_1^i\zeta_2^j.$$

Par définition, on a

$$T^{z'}_{NI}f = \mathcal{P}\circ\phi^{-1}_{z'} \quad \text{et donc} \quad (T^{z'}_{NI}f)\circ\phi_{z'}\circ\phi^{-1}_{z''} = \mathcal{P}\circ\phi^{-1}_{z''}.$$

On considère l'application $\psi_{z',z''}$ et les dérivations ∂_{u_j} décrites en 1.3. Par ce qui précède, on a alors

$$B(z,z',z'') = \partial^p_{u_1}\partial^q_{u_2}(\mathcal{P}(\psi_{z',z''}(u)) - \mathcal{P}(u))|_{u=\phi^{-1}_{z''}(z)}.$$

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles $a = (a_{ij})$ de nombres complexes indexées par les biindices $i,j \in \mathbb{N}$ tels que $i/m + j < k + \alpha$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ s'identifie à $\mathbb{C}^d$, où l'on a posé $d = \#\{(i,j);\, i/m + j < k + \alpha\}$. À tout élément a de $\mathcal{F}$, on fait correspondre le polynôme

$$\mathcal{P}_a(\zeta) = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N},\, j\in\mathbb{N}\\ i/m+j<k+\alpha}} a_{ij}\zeta_1^i\zeta_2^j.$$

On pose alors, pour $(z, w, z'', a) \in U \times V^2 \times \mathcal{F}$,

$$\widetilde{B}(z, w, z'', a) = \partial_{u_1}^p \partial_{u_2}^q (\mathcal{P}_a(\psi_{w,z''}(u)) - \mathcal{P}_a(u))|_{u=\phi_{z''}^{-1}(z)}$$

de telle sorte que si $a^{z'}$ désigne l'élément de $\mathcal{F}$ défini par

$$a_{ij}^{z'} = (X_{z',1}^p X_{z',2}^q f)(z') \text{ pour } i/m + j < k + \alpha,$$

alors on a

$$\widetilde{B}(z, z', z'', a^{z'}) = B(z, z', z''). \tag{3.7.4}$$

La fonction $\widetilde{B} : U \times V^2 \times \mathcal{F} \to \mathbb{C}$, $(z, w, z'', a) \mapsto \widetilde{B}(z, w, z'', a)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a en outre

$$\widetilde{B}(z, z'', z'', a) = 0 \tag{3.7.5}$$

pour tous (z, z'') de $U \times V$ et tout a de $\mathcal{F}$.

Soit alors $\mathcal{K}$ un compact de $\mathcal{F}$. En appliquant à $\widetilde{B}$ le théorème des accroissements finis par rapport à la troisième variable, on déduit de (3.7.5) que l'on a

$$|\widetilde{B}(z, w, z'', a)| \le C|w - z''| \quad \text{pour } (z, w, z'', a) \in U \times V^2 \times \mathcal{K}, \tag{3.7.6}$$

C désignant une constante positive convenable qui dépend de $\mathcal{K}$.

D'après le lemme 3.2, il existe un compact $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}$ tel que l'on ait

$$\{a^{z'};\ z' \in U \cap \partial\Omega \text{ et } \theta(z') = m\} \subset \mathcal{K}.$$

On applique alors (3.7.6) avec ce compact $\mathcal{K}$, avec $w = z'$, $a = a^{z'}$ et en notant que l'on a aussi $|z' - z''| \lesssim |\zeta_1''| + |\zeta_2''| \lesssim (|\zeta_1''|^m + |\zeta_2''|)^{1/m} \lesssim \delta(z', z'')^{1/m}$. Compte tenu de (3.7.4), on obtient la majoration $|\widetilde{B}(z, z', z'')| \lesssim \delta(z', z'')^{1/m}$.

Pour finir, quand z tend vers z'', on constate, compte tenu des définitions, que $B(z, z', z'')$ tend vers $A_2(z', z'')$. On obtient ainsi

$$|A_2(z', z'')| \lesssim \delta(z', z'')^{1/m}. \tag{3.7.7}$$

(iii) Troisième étape : En regroupant (3.7.3) et (3.7.7), on obtient

$$\begin{aligned}|(X_{z',1}^p X_{z',2}^q f)(z') - (X_{z',1}^p X_{z',2}^q f)(z'')| \\ \le C(f)\delta(z', z'')^{\min\{1/m, k+\alpha-(p/\theta(z'')+q)\}}.\end{aligned}$$

L'estimation (3.7.1) en résulte, puisque $\min\{1/m, k+\alpha-(p/\theta(z'')+q)\} \ge \alpha$. L'estimation (3.7.2) découle immédiatement de (3.7.1) et de (2.11.3). ∎

3.8. *Remarques.* (i) Dans le cas $\alpha \ge 1/m$, la preuve de 3.7 fournit un résultat moins bon : sous réserve que l'on ait $\alpha \ne j/m$ pour $j \in \{1, \dots, m-1\}$, on obtient

$$|(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z')-(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z'')| \le \frac{C'(f)}{k+\alpha-(p/\theta(z'')+q)}\,\delta(z',z'')^{\beta}$$

avec, comme dans (3.7.9), $\beta=\min\{1/m, k+\alpha-(p/\theta(z'')+q)\}$.

(ii) Si on suppose $\alpha<1/m$ mais $\theta(z')<m$, on obtient également une estimation plus faible, à savoir

$$|(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z')-(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z'')|\le C'(f)(|\zeta_1''|^{\theta(z')}+|\zeta_2''|)^{\alpha}$$

pour $z''=\phi_{z'}(\zeta'')$ vérifiant $\theta(z'')\le\theta(z')$ et $p/\theta(z'')+q<k+\alpha$. La preuve consiste à reprendre les méthodes précédentes en travaillant avec la pseudo-distance "tronquée" $\delta^{(\nu)}$ définie à partir de

$$\tau^{(\nu)}(z',\delta)=\left(\sum_{l=2}^{\nu-1}\left(\frac{A_l(z')}{\delta}\right)^{1/l}+\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/\nu}\right)^{-1},\qquad \nu=2,\dots,m.$$

Pour $\theta(z')=\nu$, on a $\delta^{(\nu)}(z',z'')\approx|\zeta_1''|^{\nu}+|\zeta_2''|$. Bien sûr, dans ce cas, les résultats ne sont plus liés de façon optimale à la géométrie du bord.

Références

[1] J. Bruna and J. M. Ortega, *Interpolation by holomorphic functions smooth to the boundary in the unit ball of* $\mathbb{C}^N$, Math. Ann. 274 (1986), 525–575.

[2] D. Catlin, *Estimates for invariant metrics on weakly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^2$, Math. Z. 200 (1989), 429–466.

[3] D.-C. E. Chang and S. G. Krantz, *Holomorphic Lipschitz functions and application to the* $\overline{\partial}$*-problem*, Colloq. Math. 62 (1991), 227–256.

[4] P. L. Duren, *Theory of* H^p *spaces*, Academic Press, New York, 1970.

[5] S. Grellier, *Behavior of holomorphic functions in complex tangential directions in a domain of finite type in* $\mathbb{C}^n$, Publ. Mat. 36 (1992), 251–292.

[6] G. M. Henkin and J. Leiterer, *Theory of Functions on Complex Manifolds*, Monogr. Math. 79, Birkhaüser, Basel, 1984.

[7] J. D. McNeal and E. M. Stein, *Mapping properties of the Bergman projection on convex domains of finite type*, Duke Math. J. 73 (1994), 177–199.

[8] A. Nagel, E. M. Stein and S. Wainger, *Boundary behavior of functions holomorphic in domains of finite type*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 78 (1981), 6596–6599.

[9] E. M. Stein, *Singular integrals and estimates for the Cauchy–Riemann equations*, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 440–445.

[10] V. Thilliez, *Classes de Gevrey non isotropes et interpolation dans les domaines de type fini de* $\mathbb{C}^2$, thèse, Univ. Paris XI, Orsay, 1991.

[11] —, *Classes de Gevrey non isotropes dans les domaines de type fini de* $\mathbb{C}^2$, J. Anal. Math. 60 (1993), 259–305.

[12] L. Verdoucq, *Valeurs au bord pour les dérivées tangentielles des fonctions de la classe $\mathcal{A}^{k,\alpha}$ dans les domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 326 (1998), 161–164.

[13] —, *Dérivées tangentielles et interpolation pour les fonctions de la classe $\mathcal{A}^{k,\alpha}$ au bord de domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$*, thèse, Univ. Lille I, 1998.

CNRS–URA 751, Bât. M2, Mathématiques
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail: laurent.verdoucq@agat.univ-lille1.fr

Reçu par la Rédaction le 5.2.1999
Révisé le 10.3.2001 (1042)