COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 96 2003 NO. 1

ÉQUIDISTRIBUTION PRESQUE PARTOUT MODULO 1 DE SUITES OSCILLANTES PERTURBÉES – II : CAS LIOUVILLIEN UNIDIMENSIONNEL

PAR

BENOÎT RITTAUD (Paris)

Abstract. We extend the results on uniform distribution modulo 1 given in [3] to sequences of the form $(t(h_nF(n\Theta) + \varepsilon_n h'_n))_n$, where $(h_n)_n$, $(h'_n)_n$ and $(h_n/h'_n)_n$ are polynomially increasing sequences, $(\varepsilon_n)_n$ a bounded sequence, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ essentially a 1-periodic C^3 function, Θ and t real numbers (the case $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ and $\Theta \in \mathbb{R}^d$ for $d > 1$ will be treated in a separate article). We remove the diophantine hypothesis on Θ needed in [3], and add a technical hypothesis on h_n.

Dans [3] il est démontré, à quelques hypothèses techniques près, que si $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathbb{Z}^d$-périodique de classe C^1, alors la suite $(tnF(n\Theta))_n$ admet une distribution asymptotique modulo 1 pour presque tout réel t, où Θ est un élément de $\mathbb{R}^d$ sur lequel est fait une hypothèse diophantienne. La méthode employée s'adapte alors pour des suites plus générales, comme celles du type $(t(nF(n\Theta)+\varepsilon_n\sqrt{n}))_n$ où $|\varepsilon_n| < 1$ pour tout n, ou encore celles où les termes n et $\sqrt{n}$ sont remplacés par des termes dont seules les croissances sont polynomiales. La méthode s'adapte aussi pour obtenir les mêmes résultats le long de sous-suites indicées par une partie de $\mathbb{N}$ de densité asymptotique inférieure non nulle.

Le présent article fait suite à l'article [3], dont il constitue un prolongement naturel. En nous plaçant dans le cas de la dimension 1, nous montrons de quelle manière, et sous quelles hypothèses additionnelles, on peut obtenir les mêmes résultats sans l'hypothèse diophantienne sur Θ : ces hypothèses consistent essentiellement à supposer que F est de classe C^3 et que le terme dominant de h_n est donné par une puissance positive de n fixée.

Nous savons également traiter le problème plus général en dimension d (toujours sans hypothèse diophantienne sur Θ) ; cette étude, qui complète les présents résultats, sera menée dans un article ultérieur.

L'auteur remercie Emmanuel Lesigne pour sa relecture patiente, scrupuleuse et constructive du présent article.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 11J71, 11K38.

Présentation générale de la stratégie. Comme dans [3], nous partons d'une version du lemme métrique de Koksma, qui assure notamment l'équidistribution modulo 1 de la suite $(tu_n)_n$ pour presque tout réel t dès lors que l'on peut majorer par une puissance de N inférieure à 1 le nombre d'entiers $j < N$ pour lesquels la valeur $|u_i - u_j|$ est trop petite (à i fixé ; cet ensemble est noté E_i). Lorsque Θ est de type diophantien fini, l'outil de la discrépance fournit le résultat, en utilisant le fait que la discrépance à l'ordre N de la suite $(n\Theta)_n$ décroît polynomialement en N (l'exposant est donné essentiellement par l'inverse du type diophantien ; cf. [1]). D'une certaine manière, lorsque Θ est de type diophantien fini, la valeur n est relativement "non-corrélée" à celle de $F(n\Theta)$, puisque la suite $(n\Theta)_n$ prise modulo 1 se distribue uniformément de façon rapide : cette "non-corrélation" (que quantifie la discrépance) se traduit par le fait que, pour $i < N$ (et $|F| < 1$), $(jF(j\Theta))_{0\leq j<N}$ ne se concentre pas à un endroit ou l'autre de l'intervalle $[-N, N]$, en particulier ne se rapproche pas trop souvent de la valeur $iF(i\Theta)$.

Lorsque Θ est de type diophantien infini, il ne peut y avoir de convergence à vitesse polynomiale de la discrépance $D_N((n\Theta)_n)$ vers 0. Toutefois, la preuve classique de la majoration de l'ordre de grandeur de $D_N((n\Theta)_n)$ s'adapte si, au lieu de considérer le type diophantien usuel, on prend en compte un type diophantien *à l'ordre* N, qui présente l'avantage sur le précédent de donner un renseignement sur la suite $(n\Theta)_n$ qui ne soit pas seulement asymptotique. Avec cet outil, l'estimation classique de la discrépance $D_N((n\Theta)_n)$ prend une nouvelle forme (proposition 3.1), qui s'exprime seulement à l'aide des N^β premiers termes de $(n\Theta)_n$ (avec $\beta < 1$), et qui permet d'obtenir une bonne estimation du cardinal de E_i pour certaines valeurs de N (section 4.2.1) : ces valeurs sont essentiellement celles qui sont proches du dénominateur q_k d'un convergent du développement de Θ en fraction continue.

Lorsque N n'est proche d'aucun de ces dénominateurs, les $\{n\Theta\}$ (où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x) pour $n < N$ ont un comportement voisin de celui d'une suite périodique : un argument d'approximation ramène alors au cas trivial où Θ est rationnel (section 4.2.2, troisième cas).

Quel que soit Θ de type diophantien infini, il existe un ensemble d'entiers N (de densité asymptotique supérieure non nulle) pour lequel ni l'argument de discrépance précédent, ni l'argument de "presque périodicité" n'est opérant. On est donc amené à faire l'étude d'un cas intermédiaire (scindé en deux pour des raisons calculatoires ; section 4.2.2, premier et deuxième cas), qui nécessite des développements techniques notamment pour traiter les cas de suites du type $(n/\{n\Theta\})_n$, qui peuvent être constantes sur des sous-ensembles de $[0, N]$ de cardinal plus grand que n'importe quelle puissance de N inférieure à 1 lorsque Θ est de type diophantien infini (cf.

[2, pp. 88–90] pour une preuve). On traite ce type de cas en montrant que ces sous-ensembles sont les seuls à pouvoir augmenter le cardinal de E_i de façon décisive (section 4.1), qu'ils ne dépendent pas fondamentalement de N et qu'ils constituent une partie de $\mathbb{N}$ de densité asymptotique nulle (si l'on désigne par q_1, q_2, etc. la suite des dénominateurs des convergents de Θ, ces sous-ensembles sont essentiellement l'intersection avec $[0, N[$ de l'ensemble des multiples de q_1 inférieurs à q_2, des multiples de q_2 inférieurs à q_3, etc.) ; il est donc possible de les écarter *a priori* pour notre problème d'équidistribution.

1. Énoncé des résultats

Définitions et notations. Si W est une partie infinie de $\mathbb{N}$ et si Z est une partie de $\mathbb{N}$, on appelle *W-densité asymptotique inférieure* de Z la quantité

$$\mathrm{dai}_W(Z) := \liminf_{N\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{Card}(Z\cap W\cap[0,N[)}{\mathrm{Card}(W\cap[0,N[)}\right).$$

On définit de même la W-densité asymptotique *supérieure*, $\mathrm{das}_W(Z)$, à l'aide de la lim sup de la suite de rapports précédente. Lorsque $\mathrm{dai}_W(Z)$ et $\mathrm{das}_W(Z)$ coïncident, on note $\mathrm{da}_W(Z)$ leur valeur commune, appelée *W-densité asymptotique*. On note P_W l'ensemble des parties Z de $\mathbb{N}$ telles que $\mathrm{da}_W(Z) = 0$ ou $\mathrm{dai}_W(Z) > 0$, et P^+ l'ensemble des $Z \subset \mathbb{N}$ telles que $\mathrm{dai}_{\mathbb{N}}(Z) > 0$.

Une suite $(u_n)_n$ est dite *à croissance* (*au moins*) *polynomiale* (resp. *à décroissance au moins polynomiale*) s'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $n > 0$, $u_{n+1}/u_n > 1 + c/n$ (resp. $u_{n+1}/u_n < 1 - c/n$).

Notre principal résultat est le suivant :

Théorème 1.1. *Soit $(P(n))_n$ une suite réelle de la forme $P(n) = cn^e + Q(n)$, où $e > 0$, $c \neq 0$ et où la suite $(Q(n)/n^e)_n$ est majorée en module par une suite à décroissance polynomiale. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique telle qu'il existe un compact négligeable $Y \subset [0,1]$ en-dehors duquel $F_{|[0,1]}$ est de classe C^3, et ne contenant aucun point de la frontière de l'ensemble $(F'')^{-1}(0)$. Soit $\Theta \in \mathbb{R}$; notons W l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels le point $\{n\Theta\}$ est hors de Y et régulier pour F (i.e. $F'(\{n\Theta\}) \neq 0$), et W_0 l'ensemble des entiers naturels n tels que $F(n\Theta) = 0$. Soit $Z \in P^+ \cap P_W$. Soient enfin une suite $(h'_n)_n$ telle que $(n^e/h'_n)_n$ soit à croissance polynomiale et $(\varepsilon_n)_n$ une suite bornée. Si la suite $(t\varepsilon_n h'_n)_{n\in Z\cap W_0}$ admet une distribution asymptotique modulo 1 pour presque tout réel t, alors il en va de même pour la suite $(t(P(n)F(n\Theta) + \varepsilon_n h'_n))_{n\in Z}$.*

Nous démontrons en fait que la distribution de la suite $(tP(n)F(n\Theta))_{n\in Z}$ est donnée, pour presque tout t, par la combinaison convexe $\mu(F^{-1}(0))\delta_0 +$

$(1 - \mu(F^{-1}(0)))\mu$, où μ est la mesure uniforme sur $[0, 1[$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0. On en tire aisément une expression explicite de la distribution asymptotique de $(t(P(n)F(n\Theta) + \varepsilon_n h'_n))_{n\in Z}$ en fonction de celle de $(t\varepsilon_n h'_n)_{n\in Z\cap W_0}$.

Les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 de [3] donnent des résultats sur les suites de la forme $(h_n F(n\Theta))_n$, où $(h_n)_n$ est à croissance polynomiale (prescrite) et n'est donc pas obligée de s'écrire sous la forme $P(n) = cn^e + Q(n)$ comme c'est le cas dans le théorème précédent ; cette restriction est ici introduite pour des raisons techniques (notamment pour le lemme 4.1 et sa version plus générale donnée en début de section 4.2), mais il est très possible qu'une analyse plus fine permette de la supprimer.

La motivation de cette étude devient plus apparente lorsqu'on la mène en dimension d (où des problèmes techniques supplémentaires surgissent, qui, comme indiqué plus haut, seront traités dans un article ultérieur). En effet, des questions de convergence ponctuelle de moyennes diagonales se réduisent à des problèmes d'équidistribution modulo 1 de suites de la forme $(\sum_{k=0}^{d} n^k F_k(n\Theta_k))_k$, où les F_k sont des combinaisons linéaires de fonctions trigonométriques. Si l'on considère des applications linéaires $A_1, \ldots, A_p$ de $\mathbb{R}^d$ et des fonctions $f_1, \ldots, f_p$ $\mathbb{Z}^d$-périodiques de $L^p(\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d)$, l'étude de la convergence de l'expression

$$\frac{1}{N} \sum_{n<N} \prod_{i=1}^{p} f_i(A_i^n x)$$

pour presque tout x se ramène, *via* des réductions de Jordan et un argument de densité permettant de ne considérer que des f_i prenant la forme de caractères, à l'étude de la distribution modulo 1 de combinaisons de suites de la forme $\lambda^n n^k \sin(n\theta)$ ($\theta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$) et $n^k \sin(n\theta)$, ce dernier cas étant de loin le plus délicat.

Dans [2] est mentionné le fait que les théorèmes de distribution asymptotique sont obtenus pour certaines suites construites à partir de suites croissantes $(h_n)_n$ dont la croissance est soit polynomiale, soit exponentielle. On peut en fait montrer que les résultats demeurent valables pour certaines suites dont la croissance est intermédiaire. Le résultat suivant, démontré en fin d'article, a été obtenu à partir d'une idée que nous a communiqué G. Tenenbaum ; nous l'en remercions ici.

Théorème 1.2. *Soit $(c_n)_n$ une suite croissante vers $+\infty$, soit $(h_n)_n$ la suite définie par $h_0 = 1$ et, pour tout n,*

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = 1 + \frac{c_n}{n}.$$

Le théorème 1.3 de [3] s'applique pour ce choix de la suite $(h_n)_n$.

Notons que la démonstration du théorème 1.2 donne en plus que, si $c_n > \log^z(n)$ pour tout n (où $z > 1$ est fixé), alors le théorème 1.1 de [3] s'applique pour ce choix de la suite $(h_n)_n$.

2. Deux lemmes préliminaires. Dans cette section, l'entier N est fixé et suffisamment grand.

Pour tous entiers n et q, la notation $n + q\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble $\{n + kq : k \in \mathbb{Z}\}$.

Lemme 2.1. *Soit H_N une partie quelconque de $[0, N[\cap \mathbb{N}$, soit $a > 0$ un réel, soit $(u_n)_n$ une suite réelle, et soit $q > 0$ un entier. Soit $c > 0$ un entier tel que, pour tout $n \in [0, N[\setminus H_N$,*

$$\mathrm{Card}(\{k \in ([n, N[\cap (n + q\mathbb{Z})) \setminus H_N : |u_k - u_n| < 2N^a\}) < c.$$

Alors, pour tout $n \in [0, N[\setminus H_N$,

$$\mathrm{Card}(\{k \in [n, N[\setminus H_N : |u_k - u_n| < N^a\}) < qc.$$

Démonstration. Fixons $n \in [0, N[\setminus H_N$ et soit $k \in [n, N[$ un entier tel que $|u_k - u_n| < N^a$. Choisissons $k_i > 0$ minimal tel que $k - k_i \in q\mathbb{Z}$ et $|u_{k_i} - u_n| < N^a$. On doit donc avoir

$$|u_k - u_{k_i}| \le |u_k - u_n| + |u_n - u_{k_i}| \le 2N^a.$$

En appliquant l'hypothèse du lemme à k_i au lieu de n, on en déduit que, pour chaque $i < q$, le nombre d'éléments k de l'ensemble $([k_i, N[\cap (i + q\mathbb{Z})) \setminus H_N$ tels que $|u_k - u_n| \le N^a$ est majoré par c.

Le lemme 2.1 est démontré.

Lemme 2.2 (version initiale). *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, soit $a > 0$ un réel, soit H_N une partie de $[0, N[$, et soient K, K' deux entiers naturels tels que, pour tout $n \in [0, N[\setminus H_N$,*

$$\mathrm{Card}(\{0 \le j < K : |u_{n+j} - u_n| < 2N^a\}) \le K'.$$

Alors, pour tout $n \in [0, N[\setminus H_N$,

$$\mathrm{Card}(\{0 \le j < N : n + j \notin H_N,\ |u_{n+j} - u_n| < N^a\}) \le (1 + N/K)K'.$$

Démonstration. Soit $n \in [0, N[\setminus H_N$. Par hypothèse, l'ensemble $[n, n+K[$ possède au plus K' éléments de la forme $n + j$ pour lesquels $|u_{n+j} - u_n| < 2N^a$.

Soit n' le plus petit entier hors de H_N supérieur à $n + K$ et vérifiant $|u_{n'} - u_n| < N^a$. Toujours par hypothèse, l'ensemble $[n', n' + K[$ possède au plus K' éléments de la forme $n' + j$ pour lesquels $|u_{n'+j} - u_{n'}| < 2N^a$, qui est une condition nécessaire pour que $|u_{n'+j} - u_n| < N^a$.

En itérant ce procédé (considérer le plus petit entier $n'' > n' + K$ tel que $|u_{n''} - u_n| < N^a$), l'ensemble $[n, N[$ est découpé en au plus $1 + N/K$

tranches à l'intérieur desquelles on trouve au plus K' entiers j pour lesquels $|u_{n+j} - u_n| < N^a$ avec $n + j \notin H_N$. Au total, ces entiers j sont donc en quantité majorée par $(1 + N/K)K'$.

Le lemme 2.2 est démontré.

Dans la suite, ce lemme sera utilisé dans sa version suivante :

LEMME 2.2 (version finale). *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, soit $a > 0$ un réel, soit $q > 0$ un entier, soit H_N une partie de $[0, N[$, et soient K, K' deux entiers naturels tels que, pour tout $n \in [0, N[\setminus H_N$,*

$$\mathrm{Card}(\{0 \leq j < K/q : |u_{n+jq} - u_n| < 2N^a\}) \leq K'.$$

Alors, pour tout $n \in [0, N[\setminus H_N$,

$$\mathrm{Card}(\{0 \leq j < N/q : n + jq \notin H_N,\ |u_{n+jq} - u_n| < N^a\}) \leq (1 + N/K)K'.$$

3. Discrépance et approximations rationnelles à l'ordre N

3.1. *Estimation de la discrépance de $(n\Theta)_{n<N}$ pour certaines valeurs de N*

NOTATIONS. Pour tout réel x, on désigne par $\{x\}$ la partie fractionnaire de x et par $\langle x \rangle$ la distance de x à $\mathbb{Z}$.

DÉFINITION. Soit $\Theta \in \mathbb{R}$ irrationnel. Pour tout entier $N > 1$, appelons *type diophantien à l'ordre N* de Θ la plus grande valeur $\eta_N > 0$ pour laquelle il existe des entiers p et q avec $|q| \leq N$ tels que

$$\Theta = \frac{p}{q} \pm \frac{1}{qN^{\eta_N}}.$$

Une définition équivalente, qui se généralise en dimension plus grande, consiste à écrire

$$\eta_N := \max_{h \in [-N,N] \cap \mathbb{N}} \left(-\frac{\log(\langle h\Theta \rangle)}{\log(N)} \right).$$

La définition de η_N peut également être utilisée pour des N non entiers.

REMARQUES. Le type diophantien usuel de Θ, noté $\eta(\Theta)$, peut se définir comme l'infimum des réels $\sigma > 0$ pour lesquels il existe $c > 0$ tel que, quel que soit $h \in \mathbb{Z}$ non nul, $|h|^\sigma \cdot \langle h\Theta \rangle > c$. On peut alors écrire l'égalité suivante :

$$\eta(\Theta) = \limsup_{|h| \to +\infty} \left(-\frac{\log(\langle h\Theta \rangle)}{\log(|h|)} \right).$$

Il est raisonnable de penser (mais nous n'aurons pas à utiliser ce genre de résultats) que $\eta(\Theta) = \limsup(\eta_N(\Theta))$, et que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\eta_N(\Theta)$ est l'intervalle $[1, \eta(\Theta)]$. Notons aussi que, avec le lemme de Dirichlet, on montre que $\eta_N(\Theta) > 1$ pour tout $N > 0$.

Nous donnerons plus loin en remarque une autre définition possible de $\eta_N(\Theta)$.

On appelle *discrépance à l'ordre* N de la suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{T}$ $(:= \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ la quantité

$$D_N((u_n)_n) := \sup_{I \in \mathcal{I}} \left(\left| \frac{\mathrm{Card}(\{n < N : u_n \in I\})}{N} - \mu(I) \right| \right),$$

où $\mathcal{I}$ désigne l'ensemble des intervalles du tore et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$. On note $D_N(\Theta)$ la valeur $D_N((n\Theta)_n)$. Rappelons qu'on a le résultat suivant, pour Θ de type diophantien $\eta < +\infty$ et tout $\varepsilon > 0$ (cf. [1]) :

$$D_N(\Theta) = O(N^{-1/(\eta+\varepsilon)}).$$

Nous allons adapter la preuve de ce résultat pour obtenir une estimation de la discrépance à partir du type diophantien à l'ordre N. Plus précisément, nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soit Θ irrationnel, soit $N > 0$ un entier, et soit $\beta > 0$ un réel. On a, à une constante multiplicative près indépendante de N et de β,*

$$D_N(\Theta) \leq \max(N^{-\beta}, \beta N^{-1+\beta\eta_{N^\beta}} \log(N)).$$

Remarques. La majoration asymptotique de $D_N(\Theta)$ donnée par la proposition 3.1 n'est pas optimale (par exemple, pour un Θ de type diophantien égal à 1, elle est de $N^{-1/2}\sqrt{\log(N)}$). Cette estimation se révèle toutefois performante pour certaines valeurs de N. Considérons par exemple le réel Θ défini par

$$\Theta = \frac{1}{q} + \frac{1}{qq^{1000}} + \frac{1}{qq^{1000}(qq^{1000})^{1000}} + \dots$$

Lorsque N est égal à q^{2000}, en prenant $\beta = 1/3$, on montre que η_{N^β} vaut $3/2$ (plus une quantité ε), d'où $D_N(\Theta) \leq N^{-1/3+\varepsilon}$ (à une constante multiplicative près), alors que l'estimation classique à l'aide du type diophantien $\eta(\Theta)$ ne donne que $D_N(\Theta) \leq N^{-1/(1001+\varepsilon)}$. Le meilleur choix de β à N fixé vérifie l'équation $\beta = 1/2\eta_{N^\beta}$; dans l'exemple, on peut ainsi prendre β proche de $1/2$ (et inférieur à $1/2$).

L'estimation de la discrépance est encore améliorée pour certains N en définissant $\eta_N(\Theta)$ de manière alternative. En définissant η_N comme maximisant les valeurs σ telles qu'il existe $q \in [-N, N] \cap \mathbb{N}$ tel que $\Theta = p/q \pm 1/q^2N^\sigma$ (au lieu de $p/q \pm 1/qN^\sigma$ pour la définition précédente), on obtient une estimation de la discrépance donnée par $\max(N^{-\beta}, \beta N^{-1+\beta\eta_{N^\beta}} \log^2(N))$, avec un η_N qui cette fois se rapproche de zéro lorsque η est de type diophantien ordinaire égal à 1 (soit, asymptotiquement, une discrépance en $\log^2(N)/N$). Dans la suite, nous nous en tiendrons tout de même à notre première définition, qui ne produit pas de difficulté supplémentaire et donne lieu à des expressions plus simples.

Démonstration de la proposition 3.1. La preuve suit les grandes lignes de la démonstration du théorème analogue pour le type diophantien ordinaire (voir [1]). Nous utilisons la classique inégalité d'Erdős–Turán, valable pour toute suite $(x_n)_n$ et tout entier naturel m :

$$D_N \le C\left(\frac{1}{m} + \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi h x_n}\right|\right),$$

où C est une constante indépendante de N, de m et de la suite $(x_n)_n$. Appliquée à la suite $(n\Theta)_n$, cette inégalité devient (cf. [1])

$$D_N(\Theta) \le C\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h\langle h\Theta\rangle}\right).$$

Dans la suite de cette démonstration, $\beta > 0$ est fixé et l'on note η la valeur $\eta_{N^\beta}(\Theta)$.

D'après la formule de sommation d'Abel, on a

$$\sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h\langle h\Theta\rangle} = \sum_{h=1}^{m} \frac{s_h}{h(h+1)} + \frac{s_m}{m+1},$$

où $s_h = \sum_{j=1}^{h} 1/\langle j\Theta\rangle$.

Remarquons que, quel que soit l'entier positif h majoré en module par N^β, on a $\langle h\Theta\rangle \ge 1/N^{\beta\eta}$ (par définition de $\eta = \eta_{N^\beta}$). Ainsi, si $0 \le h_1 < h_2 \le N^\beta/2$, alors on a

$$\langle h_1\Theta \pm h_2\Theta\rangle = \langle (h_1 \pm h_2)\Theta\rangle \ge \frac{1}{N^{\beta\eta}}.$$

On en tire que, pour tous h_1 et h_2 tels que $0 \le h_1 < h_2 \le N^\beta/2$, on a

$$|\langle h_1\Theta\rangle - \langle h_2\Theta\rangle| \ge \frac{1}{N^{\beta\eta}}.$$

Pour tout entier positif h majoré par $N^\beta/2$, dans chacun des intervalles

$$\left[0, \frac{1}{N^{\beta\eta}}\right[, \quad \left[\frac{1}{N^{\beta\eta}}, \frac{2}{N^{\beta\eta}}\right[, \quad \ldots, \quad \left[\frac{h}{N^{\beta\eta}}, \frac{h+1}{N^{\beta\eta}}\right[,$$

il ne se trouve donc qu'au plus un nombre de la forme $\langle j\Theta\rangle$ avec $1 \le j \le h$, sans qu'aucun ne se trouve dans le premier. En conséquence, pour $h \le N^\beta/2$,

$$s_h = \sum_{j=1}^{h} \frac{1}{\langle j\Theta\rangle} \le \sum_{j=1}^{h} \frac{N^{\beta\eta}}{j} = O(N^{\beta\eta}\log(h)).$$

On en tire que, pour tout $m \le N^\beta/2$,

$$\sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h\langle h\Theta\rangle} = O\left(\sum_{h=1}^{m} \frac{N^{\beta\eta}\log(h)}{h(h+1)} + \frac{N^{\beta\eta}\log(m)}{m+1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= N^{\beta\eta} O\biggl(\log(m) \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h(h+1)} + \frac{\log(m)}{m+1} \biggr) \\
&\leq O(N^{\beta\eta} \log(m)).
\end{aligned}
$$

En injectant ce résultat dans l'estimation de la discrépance donnée plus haut, il vient que, pour tout $m \leq N^{\beta}/2$,

$$
D_N(\Theta) \leq C\biggl(\frac{1}{m} + \frac{1}{N} N^{\beta\eta} \log(m) \biggr).
$$

Il reste alors à prendre pour m la partie entière de $N^{\beta}/2$ pour obtenir la relation cherchée.

La proposition 3.1 est démontrée.

4. Démonstration du théorème 1.1 Pour la simplicité des écritures qui vont suivre, nous nous plaçons dans le cas où $h_n = n$ et où $\varepsilon_n = 0$ pour tout n, ainsi que dans le cas où $Z = \mathbb{N}$, étant entendu que nous donnerons les précisions qui s'imposent là où elles sont nécessaires.

Soit $N > 0$. Pour des réels $a > 0$ et $\beta > 0$ qui seront fixés ultérieurement, qui ne dépendront pas de N, et qui vérifieront l'inégalité $a\beta < 1$, on note $\eta := \eta_{N^{a\beta}}(\Theta)$. Il existe donc $q(N) \in \mathbb{Z}$, $|q(N)| \leq N^{a\beta}$ ainsi qu'un entier $p(N)$ tels que

$$
\Theta = \frac{p(N)}{q(N)} \pm \frac{1}{q(N) N^{a\beta\eta}}.
$$

Dans la suite, quitte à changer $q(N)$ en $-q(N)$, on suppose que le membre de droite est $p(N)/q(N) + 1/q(N)N^{a\beta\eta}$.

Remarquons que, par définition, $(|q(N)|)_N$ est une suite croissante et que, si $q(N) \neq q(N-1)$, alors $q(N)$ est la partie entière de $N^{a\beta}$.

4.1. *Analyse des cas du type* $F(x) = 1/\{x\}$. Comme indiqué en introduction, le cas où $F(x)$ est de la forme $1/\{x\}$ impose une analyse spécifique lorsque Θ est de type diophantien infini : en effet, si l'on suppose que $1/q$ est une "très bonne" approximation rationnelle de Θ et que N est, disons, de l'ordre de q^2, alors la séquence $(nF(n\Theta))_{n<N}$ est pratiquement constante et égale à q, ce qui pose problème pour l'équidistribution. Le calcul montre que, au moins pour notre méthode de résolution, l'ensemble des fonctions pour lesquelles ce type de problème se pose est constitué des solutions de l'équation différentielle $(F/F')' = -1$, qui sont de la forme $F(x) = c_1/(\{x\} + c_2)$.

Pour toute fonction dérivable f et tout réel non nul z, $f'_z(x)$ désigne la quantité $f'(x)$ lorsque $z > 0$, $-f'(x)$ lorsque $z < 0$. Pour tout z non nul, notons alors G_z la fonction F/F'_z (définie là où F'_z est non nulle).

Lemme 4.1. *Soit $\gamma \in]0,1[$ et soit $G : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On fixe $m > 0$ et $N > 0$ assez grand, puis on appelle Z'_m l'ensemble des $n < N$ tels que $|G'_{q(N)}(n\Theta) + 1| < 1/m$. À $i < |q(N)|$ fixé, l'ensemble $H_N^{(i)}$ des $n \in ([0,N[\cap (i + q(N)\mathbb{Z})) \setminus Z'_m$ tels que*

$$(*) \qquad \left| G(n\Theta) + \frac{n}{q(N)N^{a\beta\eta}} \right| \le \frac{1}{(q(N)N^{a\beta\eta})^\gamma}$$

est de cardinal majoré à une constante multiplicative près (ne dépendant que de m et de G) par

$$\max\left(1, \frac{(q(N)N^{a\beta\eta})^{1-\gamma}}{q(N)}, \frac{N}{q(N)N^{a\beta\eta}}, \frac{N}{q(N)(q(N)N^{a\beta\eta})^\gamma}\right).$$

Remarque. Dans le cas général où h_n s'écrit sous la forme $cn^e + Q(n)$, la suite de la démonstration du théorème 1.1 est la même, en remplaçant simplement la relation $(*)$ du lemme précédent par

$$\left| G(n\Theta) + \frac{n}{eqN^{a\beta\eta}} \right| \le \frac{1}{(q(N)N^{a\beta\eta})^\gamma}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{T}$ et soit $\varrho \in \{+1, -1\}$ (ensemble des signes). Puisque G est de classe C^1, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, la relation suivante :

$$G(x + \varepsilon\varrho) = G(x) + \varepsilon G_\varrho(x) + o(\varepsilon).$$

Puisque G est de classe C^2, le o est uniforme en x (et en ϱ). Il existe donc un entier m_0 pour lequel, pour tout $m' \ge m_0$, $o(1/m')/(1/m') < 1/2m$ (indépendamment de x et de ϱ).

Dans la suite de la démonstration, on note q la valeur $q(N)$. Puisque m_0 est indépendant de N, quitte à prendre N assez grand, on peut supposer vraie l'inégalité $4m(qN^{a\beta\eta})^{1-\gamma}/q < N^{a\beta\eta}/m_0$.

Soit $n \in H_N^{(i)}$ et soit $j \in [4m(qN^{a\beta\eta})^{1-\gamma}/q, N^{a\beta\eta}/m']$ tels que, pour deux réels ε et ε' bornés en module par 1,

$$G(n\Theta) = \frac{-n}{qN^{a\beta\eta}} + \frac{\varepsilon}{(qN^{a\beta\eta})^\gamma},$$
$$G((n+jq)\Theta) = \frac{-(n+jq)}{qN^{a\beta\eta}} + \frac{\varepsilon'}{(qN^{a\beta\eta})^\gamma}.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} G((n+jq)\Theta) &= \frac{-n}{qN^{a\beta\eta}} + \frac{-jq}{qN^{a\beta\eta}} + \frac{\varepsilon'}{(qN^{a\beta\eta})^\gamma} \\ &= G(n\Theta) - \frac{\varepsilon}{(qN^{a\beta\eta})^\gamma} + \frac{-jq}{qN^{a\beta\eta}} + \frac{\varepsilon'}{(qN^{a\beta\eta})^\gamma}. \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{(qN^{a\beta\eta})^\gamma}+\frac{-jq}{qN^{a\beta\eta}} &= G((n+jq)\Theta)-G(n\Theta)\\ &= |\{jq\Theta\}|G_q'(n\Theta)+o(\{jq\Theta\})\\ &= \frac{jq}{qN^{a\beta\eta}}\,G_q'(n\Theta)+o\bigg(\frac{jq}{qN^{a\beta\eta}}\bigg),\end{aligned}$$

le $o(\ )$ précédent ne dépendant pas du signe de q d'après ce qui a été dit plus haut. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}G_q'(n\Theta) &= \frac{(\varepsilon'-\varepsilon)/(qN^{a\beta\eta})^\gamma - j/N^{a\beta\eta} - o(j/N^{a\beta\eta})}{j/N^{a\beta\eta}}\\ &= (\varepsilon'-\varepsilon)\,\frac{(qN^{a\beta\eta})^{1-\gamma}}{jq} - 1 - \frac{o(j/N^{a\beta\eta})}{j/N^{a\beta\eta}},\end{aligned}$$

et donc, d'après les valeurs extrêmes que peut prendre j,

$$|G_q'(n\Theta)+1| \le 2\cdot\frac{1}{4m}+\frac{1}{2m}=\frac{1}{m},$$

d'où $n\in Z_m'$, ce qui contredit l'hypothèse $n\in H_N^{(i)}$.

Nous avons donc montré que, si $n\in H_N^{(i)}$, alors quel que soit l'élément j de l'intervalle $[4m(qN^{a\beta\eta})^{1-\gamma}/q, N^{a\beta\eta}/m']$, on a $n+jq\notin H_N^{(i)}$.

Soit n_0 le plus petit élément de $H_N^{(i)}$. On a alors, à une constante multiplicative près ne dépendant que de m et de G,

$$\mathrm{Card}\bigg(H_N^{(i)}\cap\bigg[n_0, n_0+q\frac{N^{a\beta\eta}}{m'}\bigg]\bigg)\le\max\bigg(1,\frac{(qN^{a\beta\eta})^{1-\gamma}}{q}\bigg).$$

Soit alors n_1 le plus petit élément de $H_N^{(i)}$ supérieur à $n_0+qN^{a\beta\eta}/m'$; le cardinal de l'ensemble $H_N^{(i)}\cap[n_1, n_1+qN^{a\beta\eta}/m']$ se majore alors comme ci-dessus. L'itération de ce procédé conduit à la construction d'au plus $\max(1, N/(qN^{a\beta\eta}))$ intervalles de $[0,N[$ (à une constante multiplicative près). On en déduit que, à une constante multiplicative près ne dépendant que de m et de G,

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(H_N^{(i)}) &\le \max\bigg(1,\frac{N}{qN^{a\beta\eta}}\bigg)\cdot\max\bigg(1,\frac{(qN^{a\beta\eta})^{1-\gamma}}{q}\bigg)\\ &\le \max\bigg(1,\frac{(qN^{a\beta\eta})^{1-\gamma}}{q},\frac{N}{qN^{a\beta\eta}},\frac{N}{q(qN^{a\beta\eta})^\gamma}\bigg).\end{aligned}$$

Le lemme 4.1 est démontré.

LEMME 4.2. *Soit Z l'ensemble des entiers naturels k tels que $q(k-1)=q(k)$. On a alors, pour tout entier naturel N,*

$$\mathrm{Card}(Z\cap[2^{-1/a\beta}N, N[)\le 2.$$

Démonstration. D'après la définition des $q(N)$, pour tout $k \in Z$, $q(k)$ est la partie entière de $k^{a\beta}$.

Notons M la valeur $N^{a\beta}$, et $\mathcal{H}$ l'ensemble des $q(k)$ où $k \in Z$. Supposons trouvés k et k' tous deux éléments de Z et appartenant à l'intervalle $[2^{-1/a\beta}N, N[$. Notons q et q' les éléments de $\mathcal{H}$ qui leur sont associés ; q et q' sont alors compris (en module) entre $(2^{-1/a\beta}N)^{a\beta}$ et $N^{a\beta}$ (d'après la remarque du début de la présente démonstration), c'est-à-dire, entre $M/2$ et M. On a ainsi, pour deux entiers p et p' et pour deux réels η et η',

$$\Theta = \frac{p}{q} + \frac{1}{qk^{\eta}} = \frac{p'}{q'} + \frac{1}{q'k'^{\eta'}}.$$

On a alors

$$(q-q')\Theta = (p-p') + \left(\frac{1}{k^{\eta}} - \frac{1}{k'^{\eta'}}\right).$$

Quitte à échanger q et q', on peut supposer que la seconde parenthèse du membre de droite est une quantité positive, inférieure au maximum des deux termes qui la constituent. La valeur $\widetilde{q} = q - q'$ permet donc d'avoir une approximation rationnelle de Θ plus précise que celle donnée par q ou par q'. Si q et q' sont tous deux dans l'intervalle $[M/2, M]$, alors $|\widetilde{q}| < M/2 < \min(q, q')$, ce qui contredit la définition de Z. Il y a donc au plus un élément de $\mathcal{H}$ dans $[M/2, M]$ et, de la même façon, au plus un élément de $\mathcal{H}$ dans l'intervalle $[-M, -M/2]$.

Le lemme 4.2 est démontré.

LEMME 4.3. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soient a et β deux réels positifs tels que $a\beta < 1$. On note $V_{q(N)}$ l'intérieur de l'ensemble $(G_{q(N)})'_{q(N)}{}^{-1}(-1)$ et A_m l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels il existe $N \in [n, 2n]$ tel que $\{n\Theta\} \in V_{q(N^{a\beta})}$ et*

$$(**) \qquad \left|\frac{n}{q(N^{a\beta})N^{a\beta\eta_{N^{a\beta}}}} + G_{q(N^{a\beta})}(n\Theta)\right| < \frac{1}{m}.$$

Alors, la densité asymptotique supérieure de A_m tend vers 0 *quand m tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Pour mener à bien l'étude de la distribution asymptotique de $(nF(n\Theta))_n$, il suffit de s'intéresser à celle des sous-suites $(nF(n\Theta))_{n\Theta \in V_{+1}}$ et $(nF(n\Theta))_{n\Theta \in V_{-1}}$. C'est ainsi que, quitte à se placer le long de ces sous-suites, on peut supposer que $V_{+1} = [0, 1[$ ou $V_{-1} = [0, 1[$, soit $(F/F')' = -1$, ou encore $F(x) = c_1/(c_2 + \{x\})$ pour certaines constantes réelles c_1 et c_2. Sans diminuer la généralité, on suppose $c_1 = 1$ et, pour la clarté de l'exposition, nous prenons $c_2 = 0$. On a alors $F(x) = 1/\{x\}$ et donc $G_z(x) = -\{x\}$ pour $z > 0$ et $G_z(x) = \{x\}$ pour $z < 0$.

Soit $l \in \mathbb{N}^*$. On pose $I = [l, 2l]$, et Z désigne l'ensemble défini au lemme 4.2. D'après ce même lemme, $[l, 4l] \cap Z$ a au plus 4 éléments, notés

N_1, N_2, N_3 et N_4 (rappelons que $a\beta < 1$, donc que $[2^{-1/a\beta}N, N[$ contient $[N/2, N[$ pour tout N).

Soit $n \in I \cap A_m$. Supposons que $(**)$ soit vérifié pour un $N \in \{N_1, \dots, N_4\}$ tel que $n \in [N/2, N]$. On note q la valeur $q(N^{a\beta})$ et η la valeur $\eta_{N^{a\beta}}$. On a alors

$$\left| \frac{n}{qN^{a\beta\eta}} \pm \{n\Theta\} \right| < \frac{1}{m},$$

le signe $\pm$ étant l'inverse de celui de q. Les deux cas se traitant de la manière symétrique, on suppose désormais que q est positif. On a alors

$$\left| \frac{n}{qN^{a\beta\eta}} - \{n\Theta\} \right| < \frac{1}{m}.$$

On a $\Theta = p/q + 1/qN^{a\beta\eta}$ (en notant $p = p_{N^{a\beta}}$), donc, pour un certain $s \in \{0, 1\}$,

$$\{n\Theta\} = \left\{ \frac{np}{q} \right\} + \left\{ \frac{n}{qN^{a\beta\eta}} \right\} - s.$$

En notant $E(x)$ la partie entière du réel x, on en tire

$$\left| E\left(\frac{n}{qN^{a\beta\eta}} \right) + s - \left\{ \frac{np}{q} \right\} \right| < \frac{1}{m}.$$

On en déduit que la distance de np/q à $\mathbb{Z}$ doit être majorée par $1/m$. L'ensemble des $n \in [l, 2l] \cap A_m$ vérifiant cette condition s'écrit comme réunion d'intervalles de longueurs majorées par $4q/m$ et espacés d'une longueur q. Cet ensemble contient au plus $\max(4q/m, 4N/m) = 4N/m$ éléments et, en faisant la somme sur les 4 ensembles du même type dont la réunion recouvre $[l, 2l] \cap A_m$ (un ensemble pour chaque N de $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$), on obtient

$$\frac{\operatorname{Card}(A_m \cap [l, 2l])}{l} \leq 4 \cdot \frac{4 \cdot \frac{4l}{m}}{l} \leq \frac{64}{m},$$

ce qui implique que $\operatorname{das}(A_m) \leq 64/m$.

Le lemme 4.3 est démontré.

4.2. *Étude de cas suivant les valeurs de η.* La démonstration qui suit s'appuyant sur certains résultats obtenus dans [3], indiquons brièvement une proposition qui y figure et que nous utiliserons dans la suite (cf. section 6.1 de [3]) :

PROPOSITION. *Soit $a \in]0, 1[$. S'il existe un réel $\omega < 1$ tel que, pour tout $N > 0$ et tout $i \in [N/\log^2(N), N[\cap \mathbb{N}$, le cardinal de l'ensemble*

$$E_i^0 = \{N/\log^2(N) < n < N : |nF(n\Theta) - iF(i\Theta)| < N^a\}$$

est majoré par N^ω, alors la suite $(tnF(n\Theta))_n$ est équidistribuée modulo 1 pour presque tout réel t.

La démonstration de la proposition précédente passe par l'utilisation d'un lemme métrique dû à Koksma. Une proposition analogue est valable pour le cas plus général d'une suite de la forme $(t((cn^e+Q(n))F(n\Theta)+\varepsilon_n h'_n))_n$ (les notations sont celles de l'énoncé du théorème 1.1), en remplaçant la condition $a\in\,]0,1[$ par $a\in\,]0,e[$.

Si l'on trouve un réel $\omega<1$ tel que, pour tout N, on ait

$$\mathrm{Card}(\{n\in[N/2,N]:|nF(n\Theta)-iF(i\Theta)|<N^a\})<N^\omega,$$

alors, en sommant sur des tranches de la forme $[2^{-k}N,2^{-k+1}N[$ pour k variant de 1 à $\log(\log^2(N))$, on obtient une majoration polynomiale du cardinal de E_i^0. Ainsi, dans la suite, nous posons $E_i:=\{n\in[N,2N]:|nF(n\Theta)-iF(i\Theta)|<N^a\}$ et nous nous attachons à en majorer le cardinal polynomialement en N.

Rappelons que $a\in\,]0,1[$. On fixe quatre éléments de $]0,1[$, nommés β, γ, u et v, de façon à ce que soient vérifiées les relations suivantes :

- $\gamma>2\beta$;
- $u<a$;
- $(a+1)/2+\gamma<v<1+u-a$.

Dans tout ce qui suit, N est fixé une fois pour toutes suffisamment grand devant ces paramètres et devant m (lui aussi fixé assez grand), et on note simplement q la valeur $q(N^{a\beta})$ et η la valeur $\eta_{N^{a\beta}}(\Theta)$.

4.2.1. *Premier cas* : $a\beta\eta<u$. D'après [3, pp. 469–470], pour estimer $\mathrm{Card}(E_i)$, il suffit de majorer polynomialement en k la valeur $D_k(\Theta)$ pour tout $k\in[N^a/\log^2(N),N^a\log^2(N)]$. Or, d'après la proposition 3.1, pour tout $\widetilde{a}$ tel que $N^{\widetilde{a}}\in[N^a/\log^2(N),N^a\log^2(N)]$ et tout $\widetilde{\beta}>0$ on a, à une constante multiplicative près indépendante de N et de $\widetilde{\beta}$,

$$D_{N^{\widetilde{a}}}(\Theta)\le\max(N^{-\widetilde{a}\widetilde{\beta}},\widetilde{\beta}N^{\widetilde{a}(\widetilde{\beta}\eta_{N^{\widetilde{a}\widetilde{\beta}}}-1)}\log(N^{\widetilde{a}})).$$

En prenant $\widetilde{\beta}$ tel que $\widetilde{a}\widetilde{\beta}=a\beta$, on obtient

$$D_{N^{\widetilde{a}}}(\Theta)\le\max(N^{-a\beta},a\beta N^{a\beta\eta-\widetilde{a}}\log(N)).$$

Puisque N est supposé assez grand, on peut poser $|a-\widetilde{a}|<(a-u)/2$. On a donc $a\beta\eta-\widetilde{a}=(a\beta\eta-a)+(a-\widetilde{a})<(u-a)+(a-u)/2=(u-a)/2$. Aussi la discrépance est-elle majorée par une puissance négative de N ; on tire donc de [3] une majoration polynomiale du cardinal de E_i.

4.2.2. *Second cas* : $a\beta\eta>u$. On se donne $n\in[N/2,N]$ et, dans toute la suite, $j>0$ est un entier vérifiant $n+jq<N$ et $j<N^{a\beta\eta}/3$, ce qui permet en particulier d'écrire que $\{jq\Theta\}=j/N^{a\beta\eta}$. On pose alors

$$A_{n,j}:=(n+jq)F((n+jq)\Theta)-nF(n\Theta).$$

D'après le lemme 2.3 de [3], on peut supposer que F' est soit partout nulle, soit partout de module compris entre $1/m$ et m (quitte à partitionner l'intervalle $[0,1[$ en une union finie d'intervalles sur lesquels on a cette alternative, à partitionner $\mathbb{N}$ en autant de sous-parties X_l (plus une partie de petite densité, que l'on peut négliger d'après le lemme 2.3 de [3] précité) et à considérer $(nF(n\Theta))_{n\in X_l}$ pour chaque l). Dans le premier cas, on a $F((n+jq)\Theta) = F(n\Theta)$, d'où $A_{n,j} = jqF(n\Theta)$, ce qui permet aisément, à l'aide du lemme 2.1, d'appliquer la proposition rappelée en début de section 4.2. Dans la suite, on suppose donc $|F'| \in]1/m, m[$ sur tout l'intervalle $[0,1[$. De la même manière, on peut supposer $|F| \in]1/m, m[$ sur $[0,1[$, ce qui implique que G_q est majorée en module par m^2 et minorée en module par $1/m^2$. Enfin, on peut aussi considérer $F'' \in]1/m, m[$ d'après l'hypothèse faite sur la frontière de $(F'')^{-1}(0)$. Ces réductions reviennent ainsi à se placer hors d'une partie Z_m de $\mathbb{N}$ dont la densité asymptotique tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$.

On a

$$\begin{aligned}
A_{n,j} &= (n+jq)(F(n\Theta) + \{jq\Theta\}F'_q(n\Theta) + O(\{jq\Theta\}^2)) - nF(n\Theta)\\
&= nF(n\Theta) + jqF(n\Theta) + \frac{nj}{N^{a\beta\eta}}\, F'_q(n\Theta) + \frac{jqj}{N^{a\beta\eta}}\, F'_q(n\Theta)\\
&\quad +(n+jq)O\left(\frac{j^2}{(N^{a\beta\eta})^2}\right) - nF(n\Theta)\\
&= jqF(n\Theta) + \frac{j(n+jq)}{N^{a\beta\eta}}\left(F'_q(n\Theta) + O\left(\frac{j}{N^{a\beta\eta}}\right)\right)\\
&= jqF'_q(n\Theta)\left[G_q(n\Theta) + \frac{n+jq}{qN^{a\beta\eta}}\left(1 + mO(\frac{j}{N^{a\beta\eta}})\right)\right]\Bigg) \qquad (1)\\
&= jqF'_q(n\Theta)\Bigg[G_q(n\Theta) + \frac{n}{qN^{a\beta\eta}} \qquad (2)\\
&\qquad + \frac{n}{qN^{a\beta\eta}}\, mO\left(\frac{j}{N^{a\beta\eta}}\right) + \frac{j}{N^{a\beta\eta}}\left(1 + mO\left(\frac{j}{N^{a\beta\eta}}\right)\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

Les $O(\ )$ des expressions (1) et (2) précédentes vérifient par ailleurs que, pour un certain $r > 0$ ne dépendant que de m et de F, pour tout $\varepsilon \in]-r, r[$, on a $|O(\varepsilon)| \leq 1/2m$. D'autre part, l'hypothèse stipulant que F est de classe C^3 nous permet de supposer que les fonctions $O(\ )$ ont un comportement sous-linéaire. On pourrait affaiblir cette hypothèse sur F tout en conservant la possibilité de faire des calculs voisins de ceux qui suivent.

<u>Premier cas</u> : $qN^{a\beta\eta} \leq N^v$. On utilise la forme (1) de A. On a, pour tout $j < N^{a\beta\eta}/r < N^{a\beta\eta}/3$,

- $\left|\dfrac{n+jq}{qN^{a\beta\eta}}\right| \geq \dfrac{N^{1-v}}{2}$;

- $\displaystyle\left|1+mO\left(\frac{j}{N^{a\beta\eta}}\right)\right| \geq 1-m\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}.$

D'après l'inégalité $1-v>0$, la première de ces deux expressions tend vers l'infini. Pour tout N assez grand, pour tout $j\in[12mN^{a-1+v}/q, N^u/r]$, on a

$$|A_{n,j}| > \frac{jq}{m}\left[-m^2+\frac{N^{1-v}}{4}\right] > \frac{jqN^{1-v}}{6m} > 2N^a.$$

Nous venons donc de montrer l'inégalité suivante, valable pour tout $n\in[N/2,N[$:

$$\mathrm{Card}(\{0\leq j\leq N^u/r : n+jq\notin Z_m,\ |A_{n,j}|<2N^a\}) \leq \frac{6mN^{a-1+v}}{q}.$$

D'après le lemme 2.2, on en tire que

$$\mathrm{Card}(\{j : n+jq\in[n,N[,\ |A_{n,j}|<N^a\}) \leq \left(1+\frac{N}{qN^u/r}\right)\frac{6mN^{a-1+v}}{q}.$$

(Rappelons que nous avons vu en début de section 4.2.2 comment on peut se placer hors de Z_m.)

Cette dernière quantité est de l'ordre de N^{a+v-u}/q^2. D'après le lemme 2.1, l'ensemble $E_i\setminus Z_m$ est donc de cardinal majoré à une constante multiplicative près (ne dépendant que de m et de F) par qN^{a+v-u}/q^2, une quantité elle-même majorée par N^{a+v-u}, qui est une puissance de N inférieure à 1.

<u>Deuxième cas</u> : $N^v < qN^{a\beta\eta} < m^3N$. Si $(G_q)'_q=-1$ sur un ensemble ouvert, le lemme 4.3 permet de supposer *a priori* que $|n/qN^{a\beta\eta}+G_q(n\Theta)|\geq 1/m$ lorsque $\{n\Theta\}$ est dans cet ouvert. Dans le cas contraire, d'après le lemme 4.1, l'ensemble $H_N=\bigcup_i H_N^{(i)}$ des $n\in[N/\log^2(N),N[\setminus Z'_m$ vérifiant la relation $(*)$ est de cardinal majoré à une constante multiplicative près par

$$q\cdot\max\left(1,\frac{(qN^{a\beta\eta})^{1-\gamma}}{q},\frac{N}{qN^{a\beta\eta}},\frac{N}{(qN^{a\beta\eta})^\gamma q}\right) \leq \max(q,(qN^{a\beta\eta})^{1-\gamma},N^{1-a\beta\eta},N^{1-a\beta\eta\gamma}q^{-\gamma}).$$

D'après les hypothèses, ce maximum est majoré par une puissance de N strictement inférieure à 1. Avec le lemme métrique de Koksma, on peut donc négliger H_N.

On utilise cette fois la forme (2) de $A_{n,j}$ et l'on peut supposer que, dans tous les cas (et à une constante multiplicative près, pour chacun des calculs suivants) :

- $\displaystyle\left|\frac{n}{qN^{a\beta\eta}}+G_q(n\Theta)\right| \geq \frac{1}{(qN^{a\beta\eta})^\gamma} \geq \frac{1}{m^3N^\gamma}$;
- $\displaystyle\left|\frac{n}{qN^{a\beta\eta}}\,mO\left(\frac{j}{N^{a\beta\eta}}\right)\right| \leq Nj\cdot m^2\,\frac{q}{N^{2v}} = \frac{m^2jq}{N^{2v-1}}$;

- $\left|\frac{j}{N^{a\beta\eta}}\left(1+O\left(\frac{j}{N^{a\beta\eta}}\right)\right)\right| \le \frac{2jq}{N^v}$.

La relation $v < 1$ implique que la majoration de la deuxième de nos trois expressions ci-dessus constitue aussi une majoration de la troisième.

Soit $j \in [6N^{a+\gamma}m^3/q, N^{2v-1-\gamma}/3m^5q]$. On a alors

$$|A_{n,j}| > jq\left[\frac{N^{-\gamma}}{m^3} - \frac{N^{-\gamma}}{3m^3} - \frac{N^{-\gamma}}{3m^3}\right] > 6N^{a+\gamma}\cdot N^{-\gamma}/3 > 2N^a.$$

On conclut alors comme au premier cas.

Troisième cas : $qN^{a\beta\eta} \ge m^3N$. On utilise encore la forme (2) de $A_{n,j}$. On a, pour $j < rN^{a\beta\eta}$:

- $\frac{n}{qN^{a\beta\eta}} \le \frac{1}{m^3}$;
- $\left|\frac{n}{qN^{a\beta\eta}}\, mO\left(\frac{j}{N^{a\beta\eta}}\right)\right| \le \frac{1}{m^2}\, O\left(\frac{jq}{qN^{a\beta\eta}}\right) \le \frac{1}{m^2}\cdot\frac{jq}{m^4N} = \frac{jq}{m^6N}$;
- $\left|\frac{j}{N^{a\beta\eta}}\left(1+O\left(\frac{j}{N^{a\beta\eta}}\right)\right)\right| \le \frac{3}{2}\,\frac{jq}{m^3N}$.

Soit $j \in [4m^3N^a/q, \min(2/3, rm^3)N/q]$. On a alors

$$|A_{n,j}| > \frac{jq}{m}\left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3} - \frac{1}{m^3} - \frac{1}{m^3}\right] > \frac{jq}{2m^3} > 2N^a.$$

On conclut comme au premier cas.

Le théorème 1.1 est démontré.

5. Démonstration du théorème 1.2. La preuve utilise, comme pour le reste des résultats, le lemme métrique de Koksma. On reprend les mêmes notations que précédemment. On fixe $i \in]N/\log^2(N), N[$, $z \in]1,2[$, $z' \in]0, z-1[$ et on désigne par M la valeur $N\log^{z'-z}(N)$.

Premier cas : Il existe $n_0 \in E_i$ tel que $c_{n_0} > \log(N)^z$. On peut supposer $n_0 < N - M$. Soit $n \ge n_0 + M$. On a alors, à une constante multiplicative près,

$$h_n \ge h_{n_0}\prod_{j=0}^{M}\left(1+\frac{c_{n_0+j}}{n_0+j}\right) \ge h_{n_0}\left(1+\frac{\log^z(N)}{N}\right)^M$$

$$\ge h_{n_0}\left(\left(1+\frac{\log^z(N)}{N}\right)^{N/\log^z(N)}\right)^{\log^{z'}(N)} \ge h_{n_0}e^{\log^{z'}(N)}.$$

On en déduit alors que, si $(a_n)_n$ est une suite bornée et minorée en module par $1/m$, alors la quantité $|h_na_n - h_{n_0}a_{n_0}|$ est minorée par $|h_{n_0}|$ pour $n > n_0 + M$ (et N assez grand). On écrit alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in[i,N[} \min\left(1, \frac{1}{|h_n a_n - h_i a_i|}\right)\\
&\quad = \sum_{n\in[i,n_0[} \min\left(1, \frac{1}{|h_n a_n - h_i a_i|}\right) + \sum_{n\in[n_0,N[} \min\left(1, \frac{1}{|h_n a_n - h_i a_i|}\right)\\
&\quad \leq \sum_{n\in[i,n_0[} \min\left(1, \frac{1}{|h_n a_n - h_i a_i|}\right) + \sum_{n\in[n_0,N[} \frac{1}{|h_i|}\\
&\quad \leq \sum_{n\in[i,n_0[} \min\left(1, \frac{1}{|h_n a_n - h_i a_i|}\right) + \sum_{n\in[i,N[} \frac{1}{i}\\
&\quad \leq \sum_{n\in[i,n_0[} \min\left(1, \frac{1}{|h_n a_n - h_i a_i|}\right) + \log(N).
\end{aligned}$$

Pour conclure à l'aide du lemme métrique de Koksma, on est donc ramené au cas qui suit, avec $N < n_0$.

Second cas : Pour tout $n \in E_i$, on a $c_n < \log(N)^z$. On reprend alors la démonstration du théorème 1.3 de [3], le point crucial étant la détermination de la vitesse de déplacement des intervalles $I_n :=](X - 2N^a)/h_n, (X + 2N^a)/h_n[$, où X est de l'ordre de h_i (cf. lemme 6.2 de [3]). Plus précisément, nous cherchons un "grand" entier k pour lequel la réunion des intervalles I_{n+j} pour j entre 0 et k soit un intervalle de mesure une puissance négative de N.

Fixons $k = N^a$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\frac{X+2N^a}{h_n} - \frac{X-2N^a}{h_{n+k}} = \frac{h_{n+k}(X+2N^a) - h_n(X-2N^a)}{h_n h_{n+k}}\\
&\qquad = \frac{1}{h_n h_{n+k}}\left(h_n \prod_{j=0}^{k}\left(1 + \frac{c_{n+j}}{n+j}\right) \cdot (X+2N^a) - h_n(X-2N^a)\right)\\
&\qquad \leq \frac{1}{h_{n+k}}\left(\prod_{j=0}^{k}\left(1 + \frac{\log(N)^z}{n}\right) \cdot (X+2N^a) - (X-2N^a)\right)\\
&\qquad \leq \frac{1}{h_{n+k}}\left(\left(1 + \frac{\log(N)^{z+2}}{N}\right)^k (X+2N^a) - (X-2N^a)\right)\\
&\qquad \leq \frac{1}{h_{n+k}}\left(\left(1 + 2k\,\frac{\log(N)^{z+2}}{N}\right)(X+2N^a) - (X-2N^a)\right)\\
&\qquad \leq \frac{1}{h_{n+k}}\left(X + 2N^a + 2k\,\frac{\log(N)^{z+2}}{N}\,(X+2N^a) - X + 2N^a\right).
\end{aligned}$$

Le membre de droite est de l'ordre de $XN^a \log(N)^{z+2}/(Nh_{n+k})$. Puisque X est au plus de l'ordre de h_{n+k}, l'intervalle obtenu par réunion des intervalles I_{n+j} pour j entre 0 et $k = N^a$ est de mesure majorée par une puissance négative de N. On conclut alors comme dans [3].

RÉFÉRENCES

[1] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley-Interscience, New York, 1974.

[2] B. Rittaud, *Convergence ponctuelle de moyennes ergodiques non conventionnelles et distribution asymptotique de suites oscillantes*, thèse de doctorat, Université de Tours, 1999.

[3] —, *Équidistribution presque partout modulo 1 de suites oscillantes perturbées*, Bull. Soc. Math. France 128 (2000), 451–471.

Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris 13
av. J.-B. Clément
93430 Villetaneuse, France
E-mail: rittaud@math.univ-paris13.fr

Received 23 May 2002 (4223)