COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 122 2011 NO. 2

# THÉORÈME DE LA CLÔTURE $lq$-MODULAIRE ET APPLICATIONS

PAR

MUSTAPHA CHELLALI et EL HASSANE FLIOUET (Oujda)

**Abstract.** Let $K$ be a purely inseparable extension of a field $k$ of characteristic $p \neq 0$. Suppose that $[k : k^p]$ is finite. We recall that $K/k$ is $lq$-modular if $K$ is modular over a finite extension of $k$. Moreover, there exists a smallest extension $m/k$ (resp. $M/K$) such that $K/m$ (resp. $M/k$) is $lq$-modular. Our main result states the existence of a greatest $lq$-modular and relatively perfect subextension of $K/k$. Other results can be summarized in the following:

1. The product of $lq$-modular extensions over $k$ is $lq$-modular over $k$.
2. If we augment the ground field of an $lq$-modular extension, the $lq$-modularity is preserved. Generally, for all intermediate fields $K_1$ and $K_2$ of $K/k$ such that $K_1/k$ is $lq$-modular over $k$, $K_1(K_2)/K_2$ is $lq$-modular.

By successive application of the theorem on $lq$-modular closure (our main result), we deduce that the smallest extension $m/k$ of $K/k$ such that $K/m$ is $lq$-modular is non-trivial (i.e. $m \neq K$). More precisely if $K/k$ is infinite, then $K/m$ is infinite.

**1. Introduction.** Les extensions purement inséparables d'exposant fini ont été l'objet de nombreuses études (cf. à titre d'exemple [CF-1], [D-75], [DM-96], [MV-70], [P-49], [S-68], [W-75]). En particulier, on dispose des mécanismes qui permettent la détermination de la structure de ce type d'extensions. Cependant, les propriétés du cas d'exposant non borné restent un peu mal connues. Certes peu sont les travaux qui ont traité cette situation (cf. par exemple [CF-3], [D-86], [K-73], [P-49]). Cette note s'inscrit dans cette direction. Soient $k$ un corps commutatif de caractéristique $p > 0$, $K$ une extension purement inséparable de $k$, et $m$ la plus petite sous-extension de $K/k$ telle que $K/m$ est modulaire (cf. [W-75, p. 40, proposition 1.2]). Si $[k : k^p]$ est fini, on démontre que $m$ n'est pas triviale (c'est-à-dire $m \neq K$) ; plus précisément, $K/m$ est d'exposant non borné si $K/k$ l'est (cf. [CF-3, p. 148, théorème 1.4]). Par contre, si $[k : k^p]$ est infini, il se peut fort bien qu'on perd cette propriété en obtenant $m = K$ (cf. [CF-3, p. 149, exemple]). Pour écarter ce cas, on suppose désormais sauf mention expresse du contraire

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 12F15.

*Key words and phrases*: purely inseparable extension, modular extension, $lq$-modular extension.

DOI: 10.4064/cm122-2-13  

que $[k : k^p]$ est fini. On rappelle que $K/k$ est dite *lq-modulaire* si $m/k$ est finie. Dans [CF-2] nous caractérisons ces extensions au moyen d'invariants. De plus, nous montrons qu'une intersection quelconque portant sur $k$ ou sur $K$ préserve la $lq$-modularité (cf. [CF-2]). En particulier, il existe une plus petite sous-extension $m_1/k$ (resp. une extension $M_1/K$) de $K/k$ telle que $K/m_1$ (resp. $M_1/k$) est $lq$-modulaire.

Dans le présent travail nous continuons à nous intéresser à la même classe d'extensions. Notre résultat principal consiste à établir l'existence de la plus grande sous-extension de $K/k$ répondant aux critères de la $lq$-modularité et d'être "relativement parfaite". Notons que la condition d'être relativement parfaite joue un rôle important à l'existence ; sans elle toute extension $K/k$ sera $lq$-modulaire, puisque toute extension finie est $lq$-modulaire, et $K$ sera réunion d'extensions finies ; ce qui n'est pas le cas. D'autre part, on a :

1. *Le produit respecte la lq-modularité ; c'est-à-dire, pour tous corps intermédiaires $K_1$ et $K_2$ de $K/k$ tels que $K_1/k$ et $K_2/k$ sont lq-modulaires, $K_1(K_2)/k$ est lq-modulaire.*
2. *Si l'on augmente le corps du base d'une extension lq-modulaire, la lq-modularité se conserve. Plus généralement, $K_1(K_2)/K_2$ est lq-modulaire si $K_1/k$ l'est. En outre, pour toute sous-extension $L/k$ de $K/k$, $K/L$ est lq-modulaire si $K/k$ l'est.*

Par application successive du théorème de la clôture $lq$-modulaire (résultat principal de ce travail), on montre que $K/k$ se décompose en une chaîne finie d'extensions $lq$-modulaires ; c'est-à-dire, il existe une suite d'extensions $k = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n \subseteq K = H_{n+1}$ avec $H_i/H_{i-1}$ $lq$-modulaire pour $i = 1, \ldots, n+1$. Si de plus $K/k$ est infinie, on a $H_i/H_{i-1}$ d'exposant non borné, et $K/H_n$ est finie. Donc $K/H_{n-1}$ est $lq$-modulaire infinie. Il en résulte que la plus petite sous-extension $m_1/k$ de $K/k$ telle que $K/m_1$ est $lq$-modulaire n'est pas triviale (c'est-à-dire $m_1 \neq K$). Plus précisément, $K/m_1$ est d'exposant non borné si $K/k$ l'est.

Puisque les propriétés du degré d'irrationalité, des exposants, et des extensions modulaires interviennent partout dans ce travail, nous avons cru bon de rappeler ce qui est nécessaire dans la section suivante.

## 2. Terminologie et notation

**2.1. Degré d'irrationalité d'une extension.** Soit $K/k$ une extension algébrique purement inséparable de corps commutatifs de caractéristique $p > 0$. Nous distinguons deux cas :

*Cas où $K/k$ est finie.* Une partie $G$ de $K$ est dite *r-générateur* de $K/k$ si $K = k(G)$. Si de plus $|G|$ est minimum, $G$ est dite *r-base* de $K/k$. Soient $B_1$ une $r$-base de $K/k$, et $B_2$ une $p$-base de $k$ (c'est-à-dire,

$B_2$ est un $r$-générateur minimal de $k/k^p$). On note $\mathrm{di}(K/k) = |B_1|$ et $\mathrm{di}(k) = |B_2|$ ; $\mathrm{di}(K/k)$ s'appelle le *degré d'irrationalité* de $K/k$, et $\mathrm{di}(k)$ le *degré d'imperfection* de $k$. Voici les résultats dont on a besoin, et qui font appel au degré d'irrationalité :

($\mathbf{P}_1$) *Pour toute sous-extension $L/L'$ de $K/k$, on a* $\mathrm{di}(L/L') \leq \mathrm{di}(K/k)$ (cf. [CF-1, p. 371, théorème 1]).

($\mathbf{P}_2$) *Pour toute extension finie $K/k$, on a* $\mathrm{di}(K/k) \leq \mathrm{di}(k)$ (cf. [CF-1, p. 372, théorème 2]).

($\mathbf{P}_3$) *Pour toute extension algébrique $L/k$, on a* $\mathrm{di}(L) \leq \mathrm{di}(k)$*, avec égalité si $L/k$ est finie* ([CF-3, p. 133, théorème 3.2]).

($\mathbf{P}_4$) *Soient $K_1/k$ et $K_2/k$ des sous-extensions de $K/k$, $k$-linéairement disjointes. Alors :*

(i) $\mathrm{di}(K_1(K_2)/K_2) = \mathrm{di}(K_1/k)$.

(ii) $\mathrm{di}(K_1(K_2)/k) = \mathrm{di}(K_1/k) + \mathrm{di}(K_2/k)$ *si $K_1/k$ et $K_2/k$ sont non séparables* (cf. [CF-1, p. 371, proposition 3]).

Nous aurons également besoin des propriétés du degré d'irrationalité des extensions purement inséparables d'exposant non borné. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

*Cas où $K/k$ est infinie et* $\mathrm{di}(k) < +\infty$. Soient $(K_n/k)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'extensions purement inséparables, et $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Donc la suite $(\mathrm{di}(K_n/k))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante bornée, et on a $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{di}(K_n/k) = \mathrm{di}(k) - \mathrm{di}(K) + \mathrm{di}(K/k(K^p))$ (cf. [CF-3, p. 135, théorème 4.2]). Par prolongement de la définition du cas fini, on désigne par degré d'irrationalité de $K/k$ le nouveau invariant $\mathrm{di}(K/k) = \mathrm{di}(k) - \mathrm{di}(K) + \mathrm{di}(K/k(K^p))$. Au moyen de cette nouvelle définition, on retrouve toutes les propriétés citées en haut, c'est-à-dire :

($\mathbf{P}_5$) *Pour toute sous-extension $L/L'$ de $K/k$, on a* $\mathrm{di}(L/L') \leq \mathrm{di}(K/k)$ ([CF-3, p. 137, théorème 5.2]).

($\mathbf{P}_6$) *Pour toute extension purement inséparable $K/k$, on a* $\mathrm{di}(K/k) \leq \mathrm{di}(k)$ ([CF-3, p. 135, théorème 4.2]).

($\mathbf{P}_7$) *Soient $K_1/k$ et $K_2/k$ des sous-extensions $k$-linéairement disjointes de $K/k$. On a :*

(i) $\mathrm{di}(K_1(K_2)/K_2) = \mathrm{di}(K_1/k)$.

(ii) $\mathrm{di}(K_1(K_2)/k) = \mathrm{di}(K_1/k) + \mathrm{di}(K_2/k)$ ([CF-3, p. 137, proposition 8.2]).

**2.2. Extension relativement parfaite.** Soit $K/k$ une extension algébrique de caractéristique $p > 0$. Un corps $k$ est dit *parfait* si $k = k^p$. Dans le même ordre d'idées, on dit que $K/k$ est *relativement parfaite* si $k(K^p) = K$. Il est immédiat que :

- *Si $K/L$ et $L/k$ sont relativement parfaites, il en est de même de $K/k$. En particulier, si $K/L$ est finie, on a $K = L$.*
- *Si $K/k$ est relativement parfaite, alors $L(K)/k(L)$ est aussi relativement parfaite.*
- *Si $K_i/k$ $(i \in I)$ sont relativement parfaites, il en est de même de $\prod_{i\in I} K_i/k$.*

Par suite, il existe une plus grande sous-extension $k_r/k$ de $K/k$ relativement parfaite ; on la notera $k_r = \mathrm{rp}(K/k)$, et on l'appellera *clôture relativement parfaite* de $K/k$. Si de plus $\mathrm{di}(k)$ est fini, on a :

($\mathbf{P}_8$) *$K$ est relativement parfaite sur une extension finie de $k$. La suite décroissante $(k(K^{p^n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire sur $k_1 = k(K^{p^{n_0}})$. En outre, $K/k_1$ est purement inséparable finie, et $k_1/k$ est la clôture relativement parfaite de $K/k$* (cf. [CF-3, p. 140, lemme 2.3]).

**2.3. Exposants d'une extension.** Dans cette section nous distinguons aussi deux cas :

*Cas où $K/k$ est purement inséparable finie.* Soit $x \in K$ et posons $o(x/k) = \inf\{m \in \mathbb{N} : x^{p^m} \in k\}$ et $o_1(K/k) = \inf\{m \in \mathbb{N} : K^{p^m} \subset k\}$. Une $r$-base $B = \{a_1, \dots, a_n\}$ de $K/k$ est dite *canoniquement ordonnée* si pour $j = 1, \dots, n$, on a

$$o(a_j/k(a_1, \dots, a_{j-1})) = o_1(K/k(a_1, \dots, a_{j-1})).$$

L'entier $o(a_s/k(a_1, \dots, a_{s-1}))$ définit ci-dessus vérifie $o(a_s/k(a_1, \dots, a_{s-1})) = \inf\{m \in \mathbb{N} : \mathrm{di}(k(K^{p^m})/k) \leq s - 1\}$ ([CF-3, p. 138, lemme 1.3]). Il en résulte immédiatement le résultat du [P-49, p. 90, Satz 14] qui confirme l'indépendance des entiers $o(a_i/k(a_1, \dots, a_{i-1}))$ $(1 \leq i \leq n)$ vis-à-vis au choix des $r$-bases canoniquement ordonnées $\{a_1, \dots, a_n\}$ de $K/k$. Par suite, on pose $o_i(K/k) = o(a_i/k(a_1, \dots, a_{i-1}))$ si $1 \leq i \leq n$, et $o_i(K/k) = 0$ si $i > n$. L'invariant $o_i(K/k)$ s'appelle le *$i$-ème exposant* de $K/k$. Voici également les principales relations dont on a besoin, et qui font intervenir les exposants.

($\mathbf{P}_9$) *Soient $K$ et $L$ des corps intermédiaires d'une extension $\Omega/k$ avec $K/k$ purement inséparable finie. Alors $o_j(K(L)/k(L)) \leq o_j(K/k)$ pour tout entier $j$* (cf. [CF-1, p. 373, proposition 5]).

($\mathbf{P}_{10}$) *Soit $K/k$ une extension purement inséparable finie. Pour toute sous-extension $L/L'$ de $K/k$, et tout $j \in \mathbb{N}$, on a $o_j(L/L') \leq o_j(K/k)$* ([CF-1, p. 374, proposition 6]).

($\mathbf{P}_{11}$) *Soient $m_j$ le $j$-ème exposant de $K/k$, et $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une $r$-base canoniquement ordonnée de $K/k$. On a :*

(i) $k(K^{p^{m_j}}) = k(\alpha_1^{p^{m_j}}, \dots, \alpha_{j-1}^{p^{m_j}})$.

(ii) *Soit* $\Lambda_j = \{(i_1, \ldots, i_{j-1}) : 0 \leq i_1 < p^{m_1 - m_j}, \ldots, 0 \leq i_{j-1} < p^{m_{j-1} - m_j}\}$. *Alors* $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})^{p^{m_j}\xi} : \xi \in \Lambda_j\}$ *est une base de* $k(K^{p^{m_j}})$ *sur* $k$.

(iii) *Soient* $n \in \mathbb{N}$, *et* $j$ *le plus grand entier tel que* $m_j > n$. *Alors* $\{\alpha_1^{p^n}, \ldots, \alpha_j^{p^n}\}$ *est une* $r$*-base canoniquement ordonnée de la extension* $k(K^{p^n})/k$, *et sa liste des exposants est* $(m_1 - n, \ldots, m_j - n)$ ([CF-3, p. 140, proposition 5.3]).

($\mathbf{P}_{12}$) *Soient* $K_1/k$ *et* $K_2/k$ *deux sous-extensions purement inséparables de* $K/k$. *Alors* $K_1/k$ *et* $K_2/k$ *sont* $k$*-linéairement disjointes si et seulement si* $o_j(K_1(K_2)/K_2) = o_j(K_1/k)$ *pour tout* $j \in \mathbb{N}$ (cf. [CF-1, p. 374, proposition 7]).

*Cas où* $K/k$ *est purement inséparable infinie et* $\mathrm{di}(k) < +\infty$. Soient $(K_n/k)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'extensions purement inséparables finies, et $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Pour tout entier $j$, la suite $(o_j(K_n/k))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc $\lim_{n\to+\infty} o_j(K_n/k) = +\infty$, ou la suite $(o_j(K_n/k))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang. Si la suite $(o_j(K_n/k))_n$ est bornée, pour tout entier $t \geq j$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $o_t(K_n/k) \leq o_j(K_n/k)$ ; par suite, la suite $(o_t(K_n/k))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Mais comme $\mathrm{di}(K/k)$ est fini (car $\mathrm{di}(K/k) \leq \mathrm{di}(k) < +\infty$), il existe un entier $t$ tel que :

- $\forall j \leq t$, $o_j(K_n/k) \to +\infty$.
- $\forall j > t$, $o_j(K_n/k) \to e_j$ fini.

($\mathbf{P}_{13}$) *L'entier* $t$ *ci-dessus est égal à* $\mathrm{di}(k) - \mathrm{di}(K)$, *et on a :*

(i) $\lim_{n\to+\infty} o_j(K_n/k) = +\infty$ *pour* $j \leq t$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} o_j(K_n/k) = o_{j-t}(K/\mathrm{rp}(K/k))$ *pour* $j > t$ ([CF-3, p. 140, théorème 2.3]).

Le nouveau invariant $o_j(K/k) = \lim_{n\to+\infty} o_j(K_n/k)$ s'appelle le *j-ème exposant* de $K/k$. Exactement comme dans le cas précédent, on a :

($\mathbf{P}_{14}$) *Soient* $K$ *et* $L$ *des corps intermédiaires d'une extension* $\Omega/k$ *avec* $K/k$ *purement inséparable. Alors pour tout entier* $j$, *on a* $o_j(K(L)/k(L)) \leq o_j(K/k)$ ([CF-3, p. 142, proposition 7.3]).

($\mathbf{P}_{15}$) *Pour toute sous-extension* $L/L'$ *de* $K/k$, *et tout* $j \in \mathbb{N}$, *on a* $o_j(L/L') \leq o_j(K/k)$ ([CF-3, p. 142, proposition 8.3]).

**2.4. Extension modulaire.** On rappelle qu'une extension $K/k$ est dite *modulaire* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les corps $K^{p^n}$ et $k$ sont $K^{p^n} \cap k$-linéairement disjoints. Cette notion a été introduite pour la première fois par Sweedler dans [S-68] ; elle caractérise les extensions purement inséparables, qui sont produit tensoriel sur $k$ d'extensions simples sur $k$. Voici le reste des résultats dont on a besoin :

($\mathbf{P}_{16}$) *Soient $K/k$ une extension purement inséparable finie (resp. modulaire), et $L/k$ une sous-extension de $K/k$ (resp. modulaire). Si $k(K^p) \subset L$, il existe une $r$-base canoniquement ordonnée (resp. modulaire) $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de $K/k$, et $e_1, \dots, e_{n_1} \in \{1, p\}$ ($n_1 = \mathrm{di}(L/k)$), tels que $\{\alpha_1^{e_1}, \dots, \alpha_{n_1}^{e_{n_1}}\}$ est aussi une $r$-base canoniquement ordonnée (resp. modulaire) de $L/k$ avec $e_j = 1$ si $o_j(L/k) = o_j(K/k)$, et $e_j = p$ si $o_j(L/k) = o_j(K/k) - 1$* ([CF-3, p. 146, proposition 8.4]).

($\mathbf{P}_{17}$) *Soit $K/k$ une extension purement inséparable modulaire ; soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n = k^{p^{-n}} \cap K$ et $K_n = k(K^{p^n})$. Alors $k_n/k$, $K_n/k$, $K/k_n$, et $K/K_n$ sont modulaires* ([CF-3, p. 144, proposition 6.4]).

**3. Invariant de la $lq$-modularité d'une extension.** Soit $K/k$ une extension purement inséparable infinie avec $\mathrm{di}(k)$ fini. Dans tout ce qui suit nous employons les notations suivantes : $k_j = k^{p^{-j}} \cap K$, $U_s^j(K/k) = j - o_s(k_j/k)$.

Définition 3.1. Soit $K/k$ une extension purement inséparable d'exposant non borné avec $\mathrm{di}(k)$ fini. Le premier entier $i_0$ pour lequel la suite $(U_s^j(K/k))_{j\in\mathbb{N}}$ est non bornée s'appelle l'*invariant de la lq-modularité* de $K/k$. Il sera noté $\mathrm{Ilqm}(K/k)$.

Du ($\mathbf{P}_{10}$) et ($\mathbf{P}_{11}$), on déduit immédiatement le résultat suivant :

Proposition 3.2. *Soit $K/k$ une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}(k)$ fini. Pour tout entier $s$, la suite $(U_s^j(K/k))_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante.*

*Preuve.* Il est immédiat que $o_s(k_n/k) \leq o_s(k_{n+1}/k) \leq o_s(k_n/k) + 1$, car $k_{n+1}^p \subseteq k_n$. Donc $n + 1 - o_s(k_{n+1}/k) \geq n - o_s(K_n/k)$ ; c'est-à-dire, la suite $(U_s^j(K/k))_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante. ∎

On a aussitôt :

- Pour tout $s \geq \mathrm{Ilqm}(K/k)$, $\lim_{n\to+\infty} U_s^j(K/k) = +\infty$.
- Pour tout $s < \mathrm{Ilqm}(K/k)$, la suite $(U_s^j(K/k))_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée ; et par suite, pour tout $n \geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{s<\mathrm{Ilqm}(K/k)} U_s^j(K/k)$, on obtient $U_s^n(K/k) = U_s^{n+1}(K/k)$. Ou encore, $o_s(k_{n+1}/k) = o_s(k_n/k) + 1$.

Cela conduit à :

Proposition 3.3. *Soient $k \subseteq K_1 \subseteq K_2$ des extensions purement inséparables avec $\mathrm{di}(k)$ fini. Pour tout $s \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_s^n(K_1/k) \geq U_s^n(K_2/k)$. En outre, $\mathrm{Ilqm}(K_1/k) \leq \mathrm{Ilqm}(K_2/k)$, avec égalité si $K_2/K_1$ est finie.*

*Preuve.* La première affirmation est une application directe de ($\mathbf{P}_{10}$). En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $k^{p^{-n}} \cap K_1 \subseteq k^{p^{-n}} \cap K_2$. Par passage aux exposants, on obtient $o_s(k^{p^{-n}} \cap K_1/k) \leq o_s(k^{p^{-n}} \cap K_2/k)$, donc $U_s^n(K_2/k) \leq U_s^n(K_1/k)$. Il en résulte que $\mathrm{Ilqm}(K_1/k) \leq \mathrm{Ilqm}(K_2/k)$.

Dans le cas où $K_2/K_1$ est finie, posons $e = o_1(K_2/K_1)$. Donc pour tout $n > e$, on a $k(k^{p^{-n}} \cap K_2^{p^e}) \subseteq k^{p^{-n}} \cap K_1$. D'après ($\mathbf{P}_{11}$), on obtient $o_s(k^{p^{-n-e}} \cap K_2/k) - e \leq o_s(k^{p^{-n}} \cap K_1/k)$. Donc $e + n - o_s(k^{p^{-n-e}} \cap K_2/k) \geq n - o_s(k^{p^{-n}} \cap K_1/k)$. D'où $\mathrm{Ilqm}(K_2/k) \leq \mathrm{Ilqm}(K_1/k)$ ; et par suite, $\mathrm{Ilqm}(K_1/k) = \mathrm{Ilqm}(K_2/k)$. ■

DÉFINITION 3.4 (cf. [CF-2]). Soit $K/k$ une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}(k)$ fini. $K/k$ est dite *lq-modulaire* si $K$ est modulaire sur une extension finie de $k$.

Le résultat qui suit caractérise les extensions $lq$-modulaires au moyen de la variation des exposants de certains corps intermédiaires. Plus précisément, on a :

THÉORÈME 3.5. *Soit $K/k$ une extension purement inséparable avec* $\mathrm{di}(k)$ *fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$K/k$ est lq-modulaire.*
2. *Pour tout $s \in \{1, \ldots, t\}$ avec $t = \mathrm{di}(k) - \mathrm{di}(K)$, la suite $(U_s^j(K/k))_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée.*
3. $\mathrm{Ilqm}(K/k) = t + 1$.

*Preuve.* [CF-3, p. 148, proposition 10.4]. ■

Sans perdre de généralité, le résultat qui suit améliore naturellement les hypothèses de la condition suffisante du théorème ci-dessus.

PROPOSITION 3.6. *Soit $(K_n/k)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'extensions purement inséparables finies avec* $\mathrm{di}(k)$ *fini. Posons $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *La suite $(o_1(K_n/k))_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée.*
2. *Pour tout $s \in \{1, \ldots, t\}$ avec $t = \mathrm{di}(k) - \mathrm{di}(K)$, la suite $(o_1(K_n/k) - o_s(K_n/k))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.*

*Alors $K/k$ est lq-modulaire.*

*Preuve.* Posons $e_n = o_1(K_n/k)$, donc $K_n \subseteq k^{p^{-e_n}} \cap K$. D'après ($\mathbf{P}_{10}$), on obtient $o_t(K_n/k) \leq o_t(k^{p^{-e_n}} \cap K/k)$. Par suite, $o_1(K_n/k) - o_t(K_n/k) \geq o_1(k^{p^{-e_n}} \cap K/k) - o_t(k^{p^{-e_n}} \cap K/k)$. Puisque la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq e_{i_0}$. D'où $k^{p^{-n}} \cap K \subseteq k^{p^{-e_0}} \cap K$. Comme la suite $(U_t^j(K/k))_{j \in \mathbb{N}}$ est croissante, on conclut que $U_t^n(K/k) \leq U_t^{e_{i_0}}(K/k) \leq o_1(K_{i_0}/k) - o_t(K_{i_0}/k)$. Il en résulte que la suite $(U_t^n(K/k))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Or, pour tout $s \in \{1, \ldots, t\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_s^n(K/k) \leq U_t^n(K/k)$. D'après le théorème 3.5, $K/k$ est $lq$-modulaire. ■

La réciproque de la proposition précédente est généralement fausse comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soient $P$ un corps parfait de caractéristique $p > 0$, et $k = P(X, Y)$ le corps des fractions rationnelles aux indéterminées $X, Y$. Posons $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ avec $K_n = k(X^{p^{-2n}}, Y^{p^{-n}})$. Alors $K/k$ est $lq$-modulaire, mais la suite $(o_1(K_n/k) - o_2(K_n/k))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée.

Comme conséquence du théorème 3.5, on a :

Proposition 3.7. *Soient $k \subseteq K_1 \subseteq K_2$ des extensions purement inséparables avec $[K_2 : K_1]$ et $\mathrm{di}(k)$ finis. Alors $K_2/k$ est lq-modulaire si et seulement si $K_1/k$ l'est.*

*Preuve.* Immédiat du fait que $\mathrm{Ilqm}(K_1/k) = \mathrm{Ilqm}(K_2/k)$. ∎

On a aussitôt :

Corollaire 3.8. *Soient $K/k$ une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}(k)$ fini, et $H$ la clôture relativement parfaite de $K/k$. Alors $K/k$ est lq-modulaire si et seulement s'il en est de même de $H/k$.*

Soit $K/k$ une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}(k)$ fini. Dans tout le reste de ce travail, pour des raisons d'écriture, on pose $o_s(k_n/k) = e^n_s$, et $e(K/k) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{s<\mathrm{Ilqm}(K/k)} U^j_s(K/k)$.

Avec ces nouvelles notations, on obtient :

Théorème 3.9. *Pour tout $n \geq e(K/k)$, on a $k(k_n^{p^{e^n_{i_0}}}) \subseteq k(k_{n+1}^{p^{e^{n+1}_{i_0}}})$, et l'extension $M = \bigcup_{n\geq e(K/k)} k(k_n^{p^{e^n_{i_0}}})$ vérifie :*

1. $\mathrm{di}(M/k) = \mathrm{Ilqm}(K/k) - 1$.
2. *L'extension $M/k$ est relativement parfaite.*
3. *$M/k$ est lq-modulaire.*

*Preuve.* Posons $\mathrm{Ilqm}(K/k) = i_0$ et $\mathrm{di}(K/k) = t_1$. Pour tout entier $n \geq e(K/k)$ et tout $1 \leq s \leq i_0 - 1$, on a $e^{n+1}_s = e^n_s + 1$. Comme $k(k^p_{n+1}) \subseteq k_n$, d'après $(\mathbf{P}_{16})$, pour tout $n \geq e(K/k)$, il existe une $r$-base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{t_1}\}$ canoniquement ordonnée de $k_{n+1}/k$, et il existe $e_s \in \{1, p\}$ tel que $\{\alpha^p_1, \ldots, \alpha^p_{i_0-1}, \alpha^{e_{i_0}}_{i_0}, \ldots, \alpha^{e_{t_1}}_{t_1}\}$ est une $r$-base canoniquement ordonnée de $k_n/k$. D'où

$$k(k_n^{p^{e^n_{i_0}}}) = k(\alpha_1^{p^{e^n_{i_0}+1}}, \ldots, \alpha_{i_0-1}^{p^{e^n_{i_0}+1}}) \subseteq k(\alpha_1^{p^{e^{n+1}_{i_0}}}, \ldots, \alpha_{i_0-1}^{p^{e^{n+1}_{i_0}}}) = k(k_{n+1}^{p^{e^{n+1}_{i_0}}}).$$

D'après $(\mathbf{P}_{11})$, la liste des exposants de $k(k_n^{p^{e^n_{i_0}}})$ est $(n - e^n_{i_0}, \ldots, e^n_{i_0-1} - e^n_{i_0})$, et elle vérifie :

(1) $\lim_{n\to+\infty}((n - e^n_{i_0}) - (e^n_{i_0-1} - e^n_{i_0})) = \lim_{n\to+\infty}(n - e^n_{i_0-1})$
$= \lim_{n\to+\infty} U^n_{i_0-1}(K/k) < +\infty$.

(2) $\lim_{n\to+\infty}(n - e^n_{i_0}) = \lim_{n\to+\infty} U^n_{i_0}(K/k) = +\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}(e^n_{i_0-1} - e^n_{i_0}) = \lim_{n\to+\infty}(U^n_{i_0}(K/k) - U^n_{i_0-1}(K/k)) = +\infty$.

À partir des conditions (1) et (2), et par application de la proposition 3.6, $M/k$ est $lq$-modulaire. De même à partir des conditions (2) et (3), et par application du $(\mathbf{P}_{13})$ on obtient $\mathrm{di}(M/k) = i_0 - 1$, et $M/k$ est relativement parfaite. ∎

## 4. Théorème d'existence

Théorème 4.1 (Théorème de la clôture $lq$-modulaire). *Soit $K/k$ une extension purement inséparable avec* $\mathrm{di}(k)$ *fini. Alors l'extension* $M = \bigcup_{n\geq e(K/k)} k(k_n^{p^{e^n_{i_0}}})$ *est la plus grande sous-extension lq-modulaire relativement parfaite de $K/k$.*

Pour la preuve de ce théorème nous aurons besoin de la terminologie suivante.

Définition 4.2. Une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{N}$ est dite *$q$-entière* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_{n+1} - e_n \in \{0, 1\}$.

Lemme 4.3. *Soient $K/k$ une extension lq-modulaire relativement parfaite, et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite q-entière telle que* $\lim_{n\to+\infty}(n - e_n) = +\infty$. *Pour tout $n \geq e(K/k)$, on a :*

1. $k(k_n^{p^{e_n}}) \subseteq k(k_{n+1}^{p^{e_{n+1}}})$.
2. $\bigcup_{n\geq e(K/k)} k(k_n^{p^{e_n}}) = K$.

*Preuve.* Puisque $K/k$ est $lq$-modulaire relativement parfaite, pour tout $n \geq e(K/k)$ et tout $s \in \{1, \ldots, t\}$ avec $t = \mathrm{di}(k) - \mathrm{di}(K)$ on obtient $e^n_s + 1 = e^{n+1}_s$ ; c'est-à-dire, $k(k^p_{n+1}) = k_n$. D'où $k(k_n^{p^{e_n}}) \subseteq k(k_{n+1}^{p^{e_{n+1}}})$. Soit $H = \bigcup_{n\geq e(K/k)} k(k_n^{p^{e_n}})$ ; il est clair que $H \subseteq K$. De plus, à partir d'un certain entier $n_0$, la liste des exposants de $k(k_n^{p^{e_n}})/k$ est $(n - e_n, e^n_2 - e_n, \ldots, e^n_t - e_n)$ avec $e^n_t - e_n > 0$ ; c'est-à-dire, $\mathrm{di}(k(k_n^{p^{e_n}})/k) = t$. En effet, $\lim_{n\to+\infty}(n - e_n) = +\infty$ ; donc il existe $n_0 \geq e(K/k)$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $n - e_n > e(K/k) \geq U^n_t(K/k) = n - e^n_t$, d'où $e^n_t > e_n$. Par application du $(\mathbf{P}_{11})$, $(n - e_n, e^n_2 - e_n, \ldots, e^n_t - e_n)$ est exactement la liste des exposants de $k(k_n^{p^{e_n}})/k$ telle que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{1\leq s\leq t} ((n - e_n) - (e^n_s - e_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{1\leq s\leq t} (n - e^n_s) < +\infty.$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty}(e^n_t - e_n) = +\infty$, car $\lim_{n\to+\infty}(n - e_n) = +\infty$, et la suite $((n - e_n) - (e^n_t - e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'après $(\mathbf{P}_{13})$, $H/k$ est relativement parfaite, et $\mathrm{di}(H) = \mathrm{di}(K)$. D'où $H = K$. ∎

*Preuve du théorème.* Soit $J/k$ une sous-extension $lq$-modulaire relativement parfaite de $K/k$. Posons $J_n = k^{p^{-n}} \cap J$. On a $\lim_{n\to+\infty}(n - e^n_{i_0}) = +\infty$, et $(e^n_{i_0})_{n\in\mathbb{N}}$ est $q$-entière. Par application du lemme précédent, on a $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} k(J_n^{p^{e^n_{i_0}}})$. D'autre part, $k(J_n^{p^{e^n_{i_0}}}) \subseteq k(k_n^{p^{e^n_{i_0}}})$ ; donc $J \subseteq M$. ∎

DÉFINITION 4.4. Soit $K/k$ une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}(k)$ fini. La plus grande sous-extension $lq$-modulaire et relativement parfaite de $K/k$ s'appelle la *clôture lq-modulaire* de $K/k$. Elle sera notée par $\mathrm{clm}(K/k)$.

REMARQUES.

1. Si $K/k$ est finie, $k$ est la clôture $lq$-modulaire de $K/k$ ; donc ce cas est trivial. Cependant si $K/k$ est d'exposant non borné, il en est de même de $\mathrm{clm}(K/k)/k$. Pour cela, on s'intéresse uniquement aux extensions d'exposant non borné.
2. Si $K/k$ est $lq$-modulaire, $\mathrm{clm}(K/k)$ est la clôture relativement parfaite de $K/k$.
3. La clôture $lq$-modulaire d'une extension purement inséparable peut ne pas être triviale comme le montre l'exemple ci-après.

EXEMPLE. Soient $P$ un corps parfait de caractéristique $p > 0$, et $k = p(X, Z_1, Z_2)$ le corps des fractions rationnelles aux indéterminées $X, Z_1, Z_2$. Posons $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ avec

$$K_n = k(X^{p^{-2n}}, Z_1^{p^{-1}} X^{p^{-2n}} + \cdots + Z_1^{p^{-n}} X^{p^{-n-1}} + Z_2^{p^{-n}}).$$

L'extension $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} k(X^{p^{-n}})$ est la plus petite sous-extension de $K/k$ telle que $K/L$ est modulaire (cf. [CF-2, p. 75, exemple]), donc $K/k$ n'est pas $lq$-modulaire. Il en résulte que $L = \mathrm{clm}(K/k)$ (cf. théorème 5.1 ci-après).

**5. Applications.** La première conséquence immédiate du théorème de la clôture $lq$-modulaire est :

THÉORÈME 5.1. *Soit $K/k$ une extension purement inséparable avec* $\mathrm{di}(k)$ *fini. Pour toute sous-extension lq-modulaire $J/k$ de $K/k$, on a* $\mathrm{di}(k) - \mathrm{di}(J) \le \mathrm{Ilqm}(K/k) - 1$, *avec égalité si $J/k$ contient la clôture lq-modulaire de $K/k$.*

*Preuve.* On a $\mathrm{clm}(J/k) \subseteq \mathrm{clm}(K/k)$, donc $\mathrm{di}(\mathrm{clm}(J/k)/k) = \mathrm{di}(k) - \mathrm{di}(J) \le \mathrm{di}(\mathrm{clm}(K/k)/k) = \mathrm{Ilqm}(K/k) - 1$, avec égalité si et seulement si $\mathrm{di}(\mathrm{clm}(J/k)/k) = \mathrm{di}(\mathrm{clm}(K/k)/k)$, ou encore $\mathrm{di}(\mathrm{clm}(J/k)) = \mathrm{di}(\mathrm{clm}(K/k))$. D'où $\mathrm{clm}(J/k) = \mathrm{clm}(K/k) \subseteq J$. ∎

Par application du théorème de la clôture $lq$-modulaire, on obtient aussi une propriété de préservation de la $lq$-modularité. Plus précisément, on a :

PROPOSITION 5.2. *Le produit de deux extensions lq-modulaires est lq-modulaire.*

*Preuve.* Soient $K_1/k$ et $K_2/k$ deux sous-extensions purement inséparables d'une même extension $K/k$. Il est alors immédiat que l'on a $\mathrm{clm}(K_1/k)(\mathrm{clm}(K_2/k)) \subseteq \mathrm{clm}(K/k)$. Si $K_1/k$ et $K_2/k$ sont $lq$-modulaires, $\mathrm{clm}(K_1/k)/k$ et $\mathrm{clm}(K_2/k)/k$ sont les clôtures relativement parfaites respectives de $K_1/k$ et $K_2/k$. Par suite, $\mathrm{clm}(K_1/k)(\mathrm{clm}(K_2/k))$ est la clôture relativement parfaite de $K_1(K_2)/k$. Il en résulte que $\mathrm{clm}(K_1/k)(\mathrm{clm}(K_2/k)) = \mathrm{clm}(K_1(K_2)/k)$, d'où $K_1(K_2)/k$ est $lq$-modulaire. ∎

On déduit alors de la proposition précédente le résultat suivant :

Proposition 5.3. *Soient $K_1$ et $K_2$ des corps intermédiaires d'une extension purement inséparable $K/k$, $k$-linéairement disjoints avec* $\mathrm{di}(k)$ *fini. On a* $\mathrm{Ilqm}(K_1/k) + \mathrm{Ilqm}(K_2/k) - 1 \leq \mathrm{Ilqm}(K_1(K_2)/k)$.

*Preuve.* Soient $M$, $M_1$, et $M_2$ les clôtures $lq$-modulaires respectives de $K_1(K_2)/k$, $K_1/k$, et $K_2/k$. On a $M_1(M_2) \subseteq M$ avec $M_1/k$ et $M_2/k$ $k$-linéairement disjointes (transitivité de la linéarité disjointe) ; il s'ensuit que $\mathrm{di}(M_1 \otimes_k M_2/k) = \mathrm{di}(M_1/k) + \mathrm{di}(M_2/k) \leq \mathrm{di}(M/k)$ (cf. $(\mathbf{P}_7)$), ou encore $\mathrm{Ilqm}(K_1/k) - 1 + \mathrm{Ilqm}(K_2/k) - 1 \leq \mathrm{Ilqm}(K_1(K_2)/k) - 1$. Donc $\mathrm{Ilqm}(K_1/k) + \mathrm{Ilqm}(K_2/k) - 1 \leq \mathrm{Ilqm}(K_1(K_2)/k)$. ∎

De même par application successive du théorème de la clôture $lq$-modulaire, on obtient :

Proposition 5.4. *Toute extension purement inséparable $K/k$ avec* $\mathrm{di}(k)$ *fini se décompose en une chaîne finie d'extensions lq-modulaires ; c'est-à-dire, il existe une suite d'extensions $k = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq K = S_{n+1}$ avec $S_i/S_{i-1}$ lq-modulaire pour $i = 1, \ldots, n+1$.*

*Preuve.* Soit $S_i = \mathrm{clm}(K/S_{i-1})$ avec $S_0 = k$. On a $k \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots \subseteq K$. D'après $(\mathbf{P}_3)$, on obtient $\mathrm{di}(k) \geq \mathrm{di}(S_1) \geq \cdots \geq \mathrm{di}(S_n) \geq \cdots \geq \mathrm{di}(K)$. Comme $\mathrm{di}(k)$ est fini, la suite $(\mathrm{di}(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, c'est-à-dire il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{di}(S_{n_0}) = \mathrm{di}(S_j)$ pour tout $j \geq n_0$. D'où $S_{n_0} = S_j$ pour tout $j \geq n_0$. ∎

Contrairement aux applications citées en haut, la proposition suivante n'est pas une conséquence immédiate du théorème de la clôture $lq$-modulaire :

Proposition 5.5. *Soient $K_1$ et $K_2$ des corps intermédiaires d'une extension purement inséparable $K/k$ avec* $\mathrm{di}(k)$ *fini. Alors $K_1(K_2)/K_2$ est lq-modulaire si $K_1/k$ l'est.*

Pour la preuve nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.6. *Soient $k \subseteq L \subseteq K$ des extensions purement inséparables avec $L/k$ et* $\mathrm{di}(k)$ *finis. Alors $K/k$ est lq-modulaire si et seulement s'il en est de même de $K/L$.*

*Preuve.* Supposons que $K/k$ est $lq$-modulaire et $e = o_1(L/k)$. Soit $m/k$ la plus petite sous-extension de $K/k$ telle que $K/m$ est modulaire ($m/k$ est finie). D'après ($\mathbf{P}_{17}$), $K/m^{p^{-e}} \cap K$ est modulaire, et $m^{p^{-e}} \cap K/L$ est finie. D'où $K/L$ est $lq$-modulaire. L'autre implication est triviale. ∎

*Preuve de la proposition.* Soient $M = \mathrm{clm}(K_1/k)$ et $L = M(K_2)$. D'après la proposition 5.4, il existe une suite d'extensions de $K/k$ vérifiant :

- $k = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq K_2 \subseteq L$.
- $S_i/S_{i-1}$ est $lq$-modulaire, et $K_2/S_{n+1}$ est finie.

Soit $M_i = \mathrm{clm}(L/S_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ avec $M_0 = \mathrm{clm}(L/k)$ $(M \subseteq M_0)$. D'après le théorème de la clôture $lq$-modulaire, on a $S_{i+1} \subseteq M_i$. Or, $M \subseteq M_0 \subseteq M_n$ et $S_{n+1} \subseteq M_n$, donc $[M(K_2) : M_n] \leq [M(K_2)) : M(S_{n+1})] \leq [K_2 : S_{n+1}] < +\infty$. Il en résulte que $M(K_2)/S_n$ est $lq$-modulaire, puisque $M_n/S_n$ l'est (cf. proposition 3.7). Par suite, $M(K_2)/K_2$ est $lq$-modulaire (cf. lemme 5.6). ∎

L'inégalité suivante résulte immédiatement de la proposition ci-dessus.

Proposition 5.7. *Soient $K_1$ et $K_2$ des corps intermédiaires d'une extension purement inséparable $K/k$, $k$-linéairement disjointes avec* $\mathrm{di}(k)$ *fini. On a*

$$\mathrm{Ilqm}(K_1/k) \leq \mathrm{Ilqm}(K_2(K_1)/K_2).$$

*Preuve.* Immédiat. ∎

Remarques.

1. La proposition 5.5 permet de retrouver le résultat de [CF-2] qui confirme que si $K/k$ est $lq$-modulaire, $K$ préserve sa $lq$-modularité sur ces corps intermédiaires. En effet, soit $L/k$ une sous-extension de $K/k$. D'après la proposition précédente, $K(L) = K$ est $lq$-modulaire sur $L$ si $K/k$ l'est.
2. Les deux inégalités qui figurent dans les propositions 5.3 et 5.7 peuvent être strictes comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soient $P$ un corps parfait de caractéristique $p > 0$, et $k = P(X, Z_1, Z_2)$ le corps des fractions rationnelles aux indéterminées $X, Z_1, Z_2$. Posons $K_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_{1,n}$ avec $K_{1,n} = k(X^{p^{-2n}}, Z_1^{p^{-1}} X^{p^{-2n}} + \cdots + Z_1^{p^{-n}} X^{p^{-n-1}} + Z_2^{p^{-n}})$ et $K_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} k(Z_1^{p^{-n}})$. Soit $K = K_1(K_2)$. On a $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} k^{p^{-n}}$ et $K_1/k$ n'est pas $lq$-modulaire, car l'extension $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} k(X^{p^{-n}})$ est la plus petite sous-extension de $K_1/k$ telle que $K_1/L$ est modulaire (cf. [CF-2, p. 75, exemple]). Par suite, $k \subseteq L \subseteq \mathrm{clm}(K/k) \subseteq K_1$ avec $K_1 \neq \mathrm{clm}(K_1/k)$, d'où $L = \mathrm{clm}(K_1/k)$. On en déduit $\mathrm{clm}(K_1/k)(\mathrm{clm}(K_2/k)) = \mathrm{clm}(K_1/k)(K_2) = L(K_2) \neq \mathrm{clm}(K/k) = K$.

Parmi les autres applications du théorème de la clôture $lq$-modulaire, on a :

THÉORÈME 5.8. *Soit $K/k$ une extension purement inséparable avec* $\mathrm{di}(k)$ *fini. La plus petite sous-extension $m/k$ de $K/k$ telle que $K/m$ est lq-modulaire n'est pas triviale ($K \neq m$). Plus précisément, si $K/k$ est infinie, il en est de même de $K/m$.*

*Preuve.* Si $K/k$ est finie, on a $k = m$. Supposons que $K/k$ est d'exposant non borné. Considérons la suite d'extensions construite de la façon suivante : $k = S_0$ et $S_i = \mathrm{clm}(K/S_{i-1})$. Soit $n$ le premier entier tel que $K/S_n$ est finie, donc $S_i/S_{i-1}$ est infinie pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Par suite, $K/S_{n-1}$ est $lq$-modulaire infinie, d'où $m \subseteq S_{n-1}$. On en déduit que $K/m$ est d'exposant non borné. ∎

## *RÉFÉRENCES*


[CF-1] M. Chellali et E. Fliouet, *Sur les extensions purement inséparables*, Arch. Math. (Basel) 81 (2003), 369–382.

[CF-2] —, —, *Extension presque modulaire,* Ann. Sci. Math. Québec 28 (2004), 65–75.

[CF-3] —, —, *Extensions purement inséparables d'exposant non borné*, Arch. Math. (Brno) 40 (2004), 129–159.

[D-75] J. K. Deveney, *An intermediate theory for a purely inseparable Galois theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 198 (1975), 287–295.

[D-86] —, *$w_0$-generated field extensions*, Arch. Math. (Basel) 47 (1986), 410–412.

[DM-96] J. K. Deveney and J. N. Mordeson, *Higher derivation Galois theory of inseparable field extensions*, in: Handbook of Algebra, Vol. 1, North-Holland, 1996, 187–220.

[K-73] L. A. Kime, *Purely inseparable modular extensions of unbounded exponent*, Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 335–349.

[MV-70] J. N. Mordeson and B. Vinograde, *Structure of Arbitrary Purely Inseparable Extension Fields*, Lecture Notes in Math. 173, Springer, Berlin, 1970.

[P-49] G. Pickert, *Inseparable Körpererweiterungen*, Math. Z. 52 (1949), 81–135.

[S-68] M. E. Sweedler, *Structure of inseparable extensions*, Ann. of Math. 87 (1968), 401–410.

[W-75] W. C. Waterhouse, *The structure of inseparable field extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975), 39–56.



Mustapha Chellali, El hassane Fliouet
Département de mathématiques
Faculté des sciences
Université Mohammed 1
Oujda, Maroc
E-mail: chellali@iam.ma
fliouet@yahoo.fr



*Received 12 February 2010;*
*revised 21 December 2010* (5336)