COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 123 2011 NO. 2

UNE REMARQUE SUR LES ESPACES D'INTERPOLATION A^β QUI SONT FAIBLEMENT LUR

PAR

MOHAMMAD DAHER (Le Mée-sur-Seine)

Abstract. Let (A_0, A_1) be a pair of interpolation spaces and $\beta \in]0,1[$. We show that if (A^β, n_β) is a weakly-LUR space for a specific norm n_β (equivalent to the natural one), then $A_\theta = A^\theta$ for every $\theta \in]0,1[$.

1. Introduction. Soit $\overline{A} = (A_0, A_1)$ un couple d'interpolation complexe, au sens de [1]–[3]. Soit $S = \{z \in \mathbb{C};\ 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$.

Rappelons d'abord la définition de l'espace d'interpolation A_θ, où $\theta \in]0,1[$. On note $\mathcal{F}(\overline{A})$ l'espace des fonctions F à valeurs dans $A_0 + A_1$, continues bornées sur S, holomorphes à l'intérieur de S, telles que, pour $j \in \{0,1\}$, $F(j+i\tau)$ prend ses valeurs dans A_j, l'application $\tau \in \mathbb{R} \mapsto F(j+i\tau) \in A_j$ est continue et $\|F(j+i\tau)\|_{A_j} \to 0$ quand $|\tau| \to +\infty$. On le munit de la norme

$$\|F\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} = \max(\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|F(i\tau)\|_{A_0}, \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|F(1+i\tau)\|_{A_1}).$$

L'espace $A_\theta = \{F(\theta);\ F \in \mathcal{F}(\overline{A})\}$ est un Banach [2, Theorem 4.1.2] pour la norme définie par

$$\|a\|_{A_\theta} = \inf\{\|F\|_{\mathcal{F}(\overline{A})};\ F(\theta) = a\}.$$

Rappelons maintenant la définition de l'espace d'interpolation A^θ [2, Chapter 4]. On note $\mathcal{G}(\overline{A})$ l'espace des fonctions g à valeurs dans $A_0 + A_1$, continues sur S, holomorphes à l'intérieur de S, telles que $g(j+i\tau) - g(j+i\tau') \in A_j$ pour tous $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$, $j \in \{0,1\}$, et la quantité suivante est finie :

$$\|g^{\cdot}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})} = \max\Big[\sup_{\substack{\tau,\tau'\in\mathbb{R}\\ \tau\ne\tau'}} \Big\|\frac{g(i\tau)-g(i\tau')}{\tau-\tau'}\Big\|_{A_0}, \sup_{\substack{\tau,\tau'\in\mathbb{R}\\ \tau\ne\tau'}} \Big\|\frac{g(1+i\tau)-g(1+i\tau')}{\tau-\tau'}\Big\|_{A_1}\Big].$$

Cette quantité définit une norme sur l'espace $Q\mathcal{G}(\overline{A})$, quotient de $\mathcal{G}(\overline{A})$ par les fonctions constantes, et $Q\mathcal{G}(\overline{A})$ est complet pour cette norme [2, Lemma 4.1.3].

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 46B70.
Key words and phrases: interpolation space, locally uniformly rotund.

DOI: 10.4064/cm123-2-3

L'espace $A^\theta = \{g'(\theta);\ g \in \mathcal{G}(\overline{A})\}$ est un Banach [2, Theorem 4.1.4] pour la norme définie par

$$\|a\|_{A^\theta} = \inf\{\|g^{\cdot}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})};\ g'(\theta) = a\}.$$

D'après [1], A_θ s'identifie isométriquement à un sous-espace de A^θ.

On rappelle [2, p. 89] les inégalités suivantes, pour $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$:

$$\|g'(z)\|_{A_0+A_1} \le \|g^{\cdot}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}, \qquad z \in S, \tag{1.1}$$

conséquence immédiate de

$$\left\|\frac{g(z+it)-g(z)}{t}\right\|_{A_0+A_1} \le \|g^{\cdot}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}, \qquad z \in S,\ t \in \mathbb{R}^*. \tag{1.2}$$

L'inégalité (1.2) découle de la définition de $\|g^{\cdot}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}$ et du théorème des trois droites [2, Lemma 1.1.2] appliqué aux fonctions $z \mapsto \langle (g(z+it)-g(z))/t, a^*\rangle$, où a^* parcourt la boule unité de $A_0^* \cap A_1^*$ et t est un réel fixé.

D'après [2, Theorem 4.2.2], $A_0 \cap A_1$ est dense dans A_θ, $0 < \theta < 1$. Dans la suite, (A_0, A_1) est un couple d'interpolation tel que $A_0 \cap A_1$ est dense dans A_0 et A_1, ce qui permet d'appliquer le théorème d'itération [2, Theorem 4.6.1].

La lettre θ désignera toujours un réel dans $]0,1[$.

Définition 1 ([5]). Un espace de Banach X est (resp. *faiblement*) *localement uniformément convexe*, ce qu'on note LUR (resp. ω-LUR), si, pour toute suite $(x_n)_{n\ge 0}$ dans X telle que

$$\|x_n\|^2/2 + \|x\|^2/2 - \|(x_n+x)/2\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

on a $x_n \to x$ en norme (resp. faiblement).

2. Résultats. Outre sa norme naturelle, l'espace A^θ est muni de la norme n_θ (voir le lemme 2 ci-dessous):

$$n_\theta(a) = \sup\{|\langle a, a^*\rangle|;\ \|a^*\|_{(A_0^*, A_1^*)_\theta} \le 1\}.$$

Théorème 1. *Si (A^β, n_β) est un espace ω-LUR pour un $\beta \in\ ]0,1[$, alors $A_\theta = A^\theta$ pour tout $\theta \in\ ]0,1[$.*

Proche de celle de [4], la preuve utilisera les lemmes suivants. Le premier est certainement bien connu.

Lemme 1. *Soient X un espace de Banach et E un sous-espace fermé préfaiblement dense dans X^*. Alors il existe une constante C telle que*

$$\|x\|_X \le C \sup_{\|x^*\|_E = 1} |\langle x, x^*\rangle| = C\|x\|_{E^*} \le C\|x\|_X, \qquad x \in X.$$

Preuve. Comme $\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*}=1} |\langle x, x^*\rangle|$, l'inégalité de droite est immédiate. Soit $J : X \to E^*$ la contraction canonique. Montrons que J^* :

$E^{**} \to X^*$ est surjective. Par hypothèse, tout $x^* \in X^*$ est limite préfaible d'une suite généralisée $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans E. Par le théorème de Banach–Steinhaus, cette famille est bornée dans X^*, donc dans E. D'après le théorème de Banach–Alaoglu, elle admet une valeur d'adhérence préfaible e^{**} dans E^{**}, qui coïncide nécessairement avec x^* sur $J(X)$, c'est-à-dire $x^* = J^*(e^{**})$.

Alors, par le théorème de l'application ouverte, il existe une constante $C > 0$ telle que tout x^* dans la boule unité de X^* provient d'un e^{**} dans la boule de rayon C de E^{**}. D'où

$$\|x\|_X \le \sup_{\|e^{**}\|_{E^{**}} < C} |\langle x, J^*(e^{**})\rangle| = C\|J(x)\|_{E^*}. \blacksquare$$

LEMME 2.

(a) *L'espace* $(A_0^*, A_1^*)_\theta$ *est dense dans* $(A^\theta)^*$ *pour la topologie* $\sigma[(A^\theta)^*, A^\theta]$.
(b) *L'application* n_θ *définit une norme sur* A^θ*, équivalente à la norme naturelle.*

Preuve. (a) D'après [1], $(A_0^*, A_1^*)_\theta$ est isométriquement un sous-espace de $(A_0^*, A_1^*)^\theta$. Or ce dernier est isométriquement égal à $(A_\theta)^*$ [2, Theorem 4.5.1]. Soit $a \in A^\theta$ tel que $\langle a, a^*\rangle = 0$ pour tout $a^* \in (A_0^*, A_1^*)_\theta$; en particulier $\langle a, a^*\rangle = 0$ pour tout $a^* \in A_0^* \cap A_1^* = (A_0 + A_1)^*$. Comme A^θ s'injecte continûment dans A_0+A_1, cela entraîne $a = 0$ et prouve la densité annoncée. En particulier n_θ définit bien une norme sur A^θ.

(b) Le lemme 1 appliqué à $X = A^\theta$ et $E = (A_0^*, A_1^*)_\theta$ achève la preuve du lemme 2. $\blacksquare$

LEMME 3. *Soit* $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$ *et soit*

$$\phi_\theta : \mathbb{R} \to A^\theta, \qquad \phi_\theta(\tau) = g'(\theta + \iota\tau).$$

(a) *L'application* $n_\theta(\phi_\theta)$ *est s.c.i. sur* $\mathbb{R}$.
(b) *Si* ϕ_θ *est à valeurs dans un sous-espace séparable* Z *de* A^θ*, elle est fortement mesurable à valeurs dans* A^θ.

Preuve. (a) Comme $A_0^* \cap A_1^*$ est dense en norme dans $(A_0^*, A_1^*)_\theta$ (voir [2, Theorem 4.2.2]),

$$\begin{aligned} n_\theta(\phi_\theta(\tau)) &= \sup\{|\langle \phi_\theta(\tau), a^*\rangle|;\ \|a^*\|_{(A_0^*,A_1^*)_\theta} \le 1\} \\ &= \sup\{|\langle \phi_\theta(\tau), a^*\rangle|;\ \|a^*\|_{(A_0^*,A_1^*)_\theta} \le 1 \text{ et } a^* \in A_0^* \cap A_1^*\}. \end{aligned}$$

Comme ϕ_θ est continue $\mathbb{R} \to A_0+A_1$, la fonction $\tau \mapsto \langle \phi_\theta(\tau), a^*\rangle$ est continue lorsque $a^* \in A_0^* \cap A_1^*$.

(b) D'après (a), l'application $n_\theta(\phi_\theta - x)$ est s.c.i. sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in A^\theta$. L'image réciproque par ϕ_θ de toute n_θ-boule ouverte de A^θ est donc un borélien. Par le lemme 2, les topologies induites sur A^θ par n_θ et la norme naturelle sont les mêmes. Comme Z est séparable, tout ouvert de Z est réunion dénombrable de n_θ-boules, et ϕ_θ est bien mesurable à valeurs dans Z. $\blacksquare$

Lemme 4. *Soient $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$ et $\beta \in]0,1[$. On suppose que $\phi_\beta = g'(\beta + i\cdot)$ est p.s. égale à une fonction fortement mesurable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans A^β. Alors*

(a) *ϕ_β est p.s. à valeurs dans A_β.*
(b) *Pour $\theta \neq \beta$, $g'(\theta) \in A_\theta$.*
(c) *Pour tout θ, ϕ_θ est p.s. à valeurs dans un sous-espace séparable de A_θ.*
(d) *$g'(\beta) \in A_\beta$.*

Preuve. (a) (i) Comme g est holomorphe sur S, pour tous $t \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $\theta \in]0,1[$, on a, dans $A_0 + A_1$,

$$g(\theta + i(t+h)) - g(\theta + it) = \int_t^{t+h} g'(\theta + i\tau)\, d\tau. \tag{2.1}$$

Posons

$$g_1 = g - g(0) - \alpha_0$$

où $g(1) - g(0) = \alpha_0 + \alpha_1$ ($\alpha_j \in A_j$, $j = 0, 1$), avec

$$\|g(1) - g(0)\|_{A_0+A_1} = \|\alpha_0\|_{A_0} + \|\alpha_1\|_{A_1}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis et (1.1),

$$\|g(1) - g(0)\|_{A_0+A_1} \le \|g^\cdot\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}.$$

Alors $g_1 : S \to A_0 + A_1$ est continue sur S et holomorphe à l'intérieur de S. Comme $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ et $j \in \{0,1\}$, on a

$$\|g_1(j + i\tau)\|_{A_j} \le \|g(j+i\tau) - g(j)\|_{A_j} + \|\alpha_j\|_{A_j} \le (1 + |\tau|)\|g^\cdot\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}.$$

L'application $z \mapsto G_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon z^2} g_1(z)$ est donc dans $\mathcal{F}(\overline{A})$ pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_\varepsilon(\theta + it) \in A_\theta$, donc $g_1(\theta + it) \in A_\theta$. D'où

$$g_1(\theta + i(t+h)) - g_1(\theta + it) = g(\theta + i(t+h)) - g(\theta + it) \in A_\theta. \tag{2.2}$$

(ii) L'hypothèse sur ϕ_β et le théorème de différentiabilité de Lebesgue entraînent que, p.s., on a dans A^β l'égalité

$$ig'(\beta + it) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g'(\beta + i\tau)\, d\tau, \tag{2.3}$$

où h est réel. Appliquant (2.1) et (2.2) à $\theta = \beta$, comme A_β s'identifie à un sous-espace fermé de A^β, ceci entraîne que p.s., avec h réel,

$$g'(\beta + it) = \lim_{h \to 0} \frac{g(\beta + i(t+h)) - g(\beta + it)}{ih} \quad \text{dans } A_\beta.$$

(b_1) On suppose d'abord $\theta > \beta$.

(i) Soit

$$V(z) = g_1(\beta + (1-\beta)z), \qquad z \in S.$$

Cette fonction à valeurs dans $A_0 + A_1$ est holomorphe à l'intérieur de S et continue sur S, donc s'exprime à l'aide de la mesure harmonique sur le bord de S. Pour vérifier que V, vue comme fonction à valeurs dans $A_\beta + A_1$, est holomorphe à l'intérieur de S et continue sur S, il suffira donc de voir que V est continue sur l'axe imaginaire, à valeurs dans A_β.

Montrons que $V \in \mathcal{G}(A_\beta, A_1)$ avec une norme $\le (1-\beta)\|g^\cdot\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}$. L'inégalité correspondante sur la droite $\operatorname{Re} z = 1$ est évidente. Pour la vérifier sur l'axe imaginaire, posons, pour τ, τ' réels fixés,

$$F_{\tau,\tau'}(\xi) = \frac{g(\xi + i(1-\beta)\tau) - g(\xi + i(1-\beta)\tau')}{\tau - \tau'}, \qquad \xi \in S,$$

d'où

$$F_{\tau,\tau'}(\beta) = \frac{V(i\tau) - V(i\tau')}{\tau - \tau'} \quad \text{et} \quad F_{\tau,\tau'}(1) = \frac{V(1+i\tau) - V(1+i\tau')}{\tau - \tau'}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|F_{\tau,\tau'}(j + it)\|_{A_j} \le (1-\beta)\|g^\cdot\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}, \qquad j \in \{0, 1\}.$$

Comme dans (a)(i), pour tout $\varepsilon > 0$, l'application $\xi \mapsto H_{\varepsilon,\tau,\tau'}(\xi) = e^{\varepsilon\xi^2} F_{\tau,\tau'}(\xi)$ vérifie

$$\|H_{\varepsilon,\tau,\tau'}\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} \le e^{\varepsilon}(1-\beta)\|g^\cdot\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})},$$

d'où

$$\|F_{\tau,\tau'}(\beta)\|_{A_\beta} \le (1-\beta)\|g^\cdot\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}.$$

On a donc, pour tous τ, τ' réels,

$$\|V(i\tau) - V(i\tau')\|_{A_\beta} \le |\tau - \tau'|(1-\beta)\|g^\cdot\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})},$$

ce qui prouve la continuité de V sur l'axe imaginaire, à valeurs dans A_β, et l'assertion annoncée.

(ii) Par (a)(ii), pour h réel, p.s.

$$\lim_{h\to 0}(V(i(\tau + h)) - V(i\tau))/h = (1-\beta)g'(\beta + (1-\beta)i\tau) \quad \text{dans } A_\beta.$$

D'après [2, Lemma 4.3.3], on a alors

$$V'(\eta) \in (A_\beta, A_1)_\eta, \qquad \eta \in]0, 1[.$$

(iii) Choisissons η tel que $\theta = (1-\eta)\beta + \eta$. D'après le théorème de réitération [2, Theorem 4.6.1], $(A_\beta, A_1)_\eta = A_\theta$, donc

$$V'(\eta) = (1-\beta)g'(\theta) \in A_\theta.$$

(b$_2$) Si $0 < \theta < \beta$ le raisonnement est analogue, en remplaçant V par $W(z) = g_1(\beta z) \in \mathcal{G}(A_0, A_\beta)$ telle que $\lim_{h\to 0}(W(1+i(\tau+h)) - W(1+i\tau))/h$ existe dans A_β, pour presque tout τ, avec h réel.

(c) Soit $A_0' \subset A_0$ le sous-espace fermé séparable engendré par $\{g_1(it);\ t \in \mathbb{R}\}$. Comme g_1 est continue sur S, A_0' est séparable, ainsi que $(A_0', A_1)_\beta$ et son adhérence Y dans A_β. Par (a)(ii) appliqué au couple (A'_0, A_1), $g'(\beta+it)$ est p.s. dans $(A'_0, A_1)_\beta$, donc p.s. dans Y, ce qui règle le cas $\theta = \beta$.

Pour le cas $\beta < \theta$, remplaçons la fonction V de (b_1)(i) par $V_t(z) = V(z+it)$, avec t fixé réel. Comme en (b_1), $V_t \in \mathcal{G}(Y, A_1)$, $V'_t(\eta) \in (Y, A_1)_\eta$, $\eta \in]0,1[$ et $(Y, A_1)_\eta$ est séparable. Soit η défini comme en (b_1)(iii). Comme ci-dessus, $V'_t(\eta) = (1-\beta)g'(\theta + i(1-\beta)t)$. Soit Z_θ l'adhérence de $(Y, A_1)_\eta$ dans $(A_\beta, A_1)_\eta = A_\theta$; alors Z_θ est séparable et $\phi_\theta = g'(\theta + i\cdot)$ est à valeurs dans Z_θ.

On raisonne de façon analogue si $0 < \theta < \beta$ en considérant $W_t(z) = W(z+it)$: W_t est dans $\mathcal{G}(A'_0, Y)$.

(d) Soit $\theta > \beta$. Par (c) et le lemme 3, ϕ_θ est fortement mesurable à valeurs dans A_θ. Alors (b_2) appliqué en échangeant les rôles de β et θ donne $g'(\beta) \in A_\beta$. ■

Preuve du théorème 1.

Étape 1. Notons pour simplifier $\phi = \phi_\beta$. On va montrer que ϕ est p.s. égale à une fonction fortement mesurable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans A^β. Soit $(\tau_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}$ convergeant vers τ. Comme $n_\beta(\phi)$ est s.c.i. par le lemme 3,

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim}\{2[n_\beta(\phi(\tau))]^2 + 2[n_\beta(\phi(\tau_n))]^2 - [n_\beta(\phi(\tau)+\phi(\tau_n))]^2\} \\
&\quad = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, E_n \leq 2[n_\beta(\phi(\tau))]^2 + 2\,\overline{\lim}[n_\beta(\phi(\tau_n))]^2 - \underline{\lim}[n_\beta(\phi(\tau)+\phi(\tau_n))]^2 \\
&\quad \leq 2[n_\beta(\phi(\tau))]^2 + 2\,\overline{\lim}[n_\beta(\phi(\tau_n))]^2 - 4[n_\beta(\phi(\tau))]^2 \\
&\quad = 2\,\overline{\lim}[n_\beta(\phi(\tau_n))]^2 - 2[n_\beta(\phi(\tau))]^2.
\end{aligned}$$

À nouveau par la semi-continuité de $n_\beta(\phi)$, pour tout N et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_{N,\varepsilon} \subset [-N, N]$, de mesure $> 2N - \varepsilon$, sur lequel $n_\beta(\phi)$ est continue. Soit $(\tau_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $K_{N,\varepsilon}$ convergeant vers τ. D'après ce qui précède, $\overline{\lim}_{n\to+\infty} E_n = 0$. Par définition de la propriété ω-LUR de (A^β, n_β), cela entraîne que $\phi(\tau_n) \to \phi(\tau)$ faiblement dans A^β, c'est-à-dire ϕ est faiblement continue sur $K_{N,\varepsilon}$. Par le théorème de Pettis [6, Theorem II.2], cela montre le résultat annoncé.

Étape 2. Soient $a \in A^\theta$ et $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$ tels que $g'(\theta) = a$. Le lemme 4 (b) ou (d) implique $a \in A_\theta$. ■

Remarque 1. Par le lemme 3(b) appliqué en $\theta = \beta$ et le lemme 4, on obtient $A_\theta = A^\theta$ pour tout θ si A^β est séparable.

Il suffit même que A^β soit un espace WCG (voir [4]). Rappelons qu'un espace *WCG* admet une norme équivalente LUR (voir [5, Chap. VII, Proposition 2.1]). Ce fait et le théorème 1 motivent la question suivante:

Problème 1. *Si (A^β, n_β) admet une norme équivalente LUR pour un $\beta \in]0,1[$, est-ce que $A_\theta = A^\theta$ pour tout $\theta \in]0,1[$?*

Proposition 1. *Soient* A_0, A_1 *deux espaces de Banach tels que* A_0 *s'injecte continûment dans* A_1, *et* $\beta \in]0,1[$. *Si* A_β *a la propriété de Radon–Nikodym analytique (définie par exemple dans* [6]) *pour un* $\beta \in]0,1[$, *alors* $A_\theta = A^\theta$ *pour tout* $\theta \in]0,1[$.

Pour $\beta = 1$ ce résultat est [8, Proposition 3.1]; appliqué au couple (A_0, A_β), il donne la conclusion pour $\theta \in]0, \beta[$.

Preuve de la proposition 1. D'après le lemme 4, il suffit de montrer que, pour toute $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$, ϕ_β est p.s. mesurable à valeurs dans A^β.

On a mentionné en (b_2) de la preuve de ce lemme que la fonction $W = g_1(\beta\cdot)$ est dans $\mathcal{G}(A_0, A_\beta)$. À l'intérieur de S, W' est donc holomorphe à valeurs dans $A_0 + A_\beta = A_\beta$; par (1.1) elle est bornée. Comme A_β a la propriété de Radon–Nikodym analytique, W' admet p.s. des limites non tangentielles au bord de S. Soit ψ la limite p.s. (dans A_β) de W' sur la droite Re $z = 1$; ψ est donc p.s. mesurable à valeurs dans A_β. Comme g' est continue (à valeurs dans $A_0 + A_1 = A_1$) à l'intérieur de S, ψ coincide p.s. avec la fonction $t \mapsto \beta g'(\beta + i\beta t)$, ce qui achève la preuve. ∎

Proposition 2. *Si* A_0 *s'injecte continûment dans* A_1 *avec image dense, si* A_β *est un treillis de Banach, et si* $(A_0^*, A_1^*)^\beta$ *admet une norme équivalente LUR pour un* $\beta \in]0,1[$, *alors* $(A_0^*, A_1^*)_\theta = (A_0^*, A_1^*)^\theta$ *pour tout* $\theta \in]0,1[$.

Preuve. Comme ℓ^∞ n'admet aucune norme équivalente LUR [5, Chap. II, Theorem 7.10], $(A_\beta)^* = (A_0^*, A_1^*)^\beta$ ne contient pas ℓ^∞ isomorphiquement. Alors, d'après un résultat bien connu de Bessaga–Pełczyński [6, Corollary I.6], $(A_0^*, A_1^*)^\beta$ ne contient pas c_0 isomorphiquement; comme c'est un treillis de Banach, il a la propriété de Radon–Nikodym analytique [7]. Comme l'espace $(A_0^*, A_1^*)_\beta$ est isométriquement un sous-espace de $(A_0^*, A_1^*)^\beta$, on voit que $(A_0^*, A_1^*)_\beta$ conserve la propriété de Radon–Nikodym analytique. La proposition précédente achève la preuve. ∎

Remerciements. Je remercie chaleureusement F. Lust-Piquard pour ses conseils lors de la rédaction de ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] J. Bergh, *On the relation between the two complex methods of interpolation*, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 775–778.

[2] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer, Berlin, 1976.

[3] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 24 (1964), 113–190.

[4] M. Daher, *Une remarque sur l'espace d'interpolation* A^θ, C. R. Acad. Sci. Paris 322 (1996), 641–644.

[5] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and Renormings in Banach Spaces*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math. 64, Longman Sci. & Tech., Harlow, 1993.
[6] J. Diestel and J. J. Uhl Jr., *Vector Measures*, Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc., 1977.
[7] G. A. Edgar, *Banach spaces with the analytic Radon–Nikodým property and abelian groups*, dans : Almost Everywhere Convergence (Columbus, OH, 1988), 195–213, Academic Press, Boston, 1989.
[8] U. Haagerup and G. Pisier, *Factorization of analytic functions with values in non-commutative L_1-spaces and applications*, Canad. J. Math. 41 (1989), 882–906.

Mohammad Daher
32 rue Jaques Monod
77350 Le Mée-sur-Seine, France
E-mail: m.daher@orange.fr

Received 28 July 2010;
revised 21 March 2011 (5410)