COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 108 2007 NO. 1

HOMOLOGIE DES GROUPES ET GÉNÉRALISATIONS DU THÉORÈME DE BORSUK–ULAM

PAR

ROBERT CAUTY (Paris)

Abstract. We show that many generalisations of Borsuk–Ulam's theorem follow from an elementary result of homological algebra.

1. Introduction. Soit G un groupe fini. Un G-*espace* est un espace topologique X muni d'une opération à gauche du groupe G, notée $(g, x) \mapsto g \cdot x$. Un G-espace est dit *libre* si $g \cdot x \neq x$ pour tout $x \in X$ et tout $g \neq 1$ dans G. Un élément x d'un G-espace est un *point fixe* si $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$. Si X et Y sont des G-espaces, une fonction continue $f : X \to Y$ est dite *équivariante* si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ quels que soient $x \in X$ et $g \in G$.

Soit R un anneau commutatif unitaire. Nous notons $H_n(G, R)$ le n-ième groupe d'homologie de G à coefficients dans le G-module trivial R. Pour tout espace topologique X, nous notons $S(X, R)$ le complexe des chaînes singulières de X à coefficients dans R, $H_n(X, R)$ le n-ième groupe d'homologie de X à coefficients dans R et $\widetilde{H}_n(X, R)$ le groupe réduit correspondant. Nous identifions chaque simplexe singulier σ de X au générateur $1 \cdot \sigma$ de $S(X, R)$. Si X est un G-espace, nous notons $S_G(X, R)$ le complexe quotient de $S(X, R)$ par le sous-complexe engendré par les éléments de la forme $g \cdot c - c$, $g \in G$ et $c \in S(X, R)$. Pour toute application équivariante $f : X \to Y$, nous notons $f_\#$ l'homomorphisme de $S(X, R)$ dans $S(Y, R)$ et f_* les homomorphismes de $H_n(X, R)$ dans $H_n(Y, R)$ et de $H_n(S_G(X, R))$ dans $H_n(S_G(Y, R))$ induits par f.

Si $K = (K_i)$ est un complexe de chaînes et si $n \geq 0$ est un entier, nous notons $K[n] = (K'_n)$ le sous-complexe de K tel que $K'_i = K_i$ pour $i \leq n$ et $K'_i = 0$ pour $i > n$.

Étant donnés un groupe fini G et un anneau unitaire R, nous associons à tout G-espace libre X un indice $\operatorname{ind}_{G,R} X$ comme suit. Soit RG l'anneau du groupe G. Si K, K' sont deux complexes de chaînes de RG-modules, un morphisme de complexes de chaînes de RG-modules de K dans K' sera sim-

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 54H25; Secondary 55M20.

Key words and phrases: Borsuk–Ulam theorem, equivariant map, fixed point free action.

plement appelé un *G-morphisme*. Soit $L = (L_i)_{i\geq 0}$ une résolution RG-libre du RG-module trivial R. Le complexe L est augmenté par $\varepsilon : L_0 \to R$ et, si X est un G-espace, le RG-complexe de chaînes $S(X,R)$ est aussi augmenté. Posons $\operatorname{ind}_{G,R} X \geq n$ s'il existe un G-morphisme de $L[n]$ dans $S(X,R)$ préservant l'augmentation. Trivialement, $\operatorname{ind}_{G,R} X \geq 0$ pour tout X, donc nous pouvons définir $\operatorname{ind}_{G,R} X$ comme la borne supérieure des entiers n tels que $\operatorname{ind}_{G,R} X \geq n$; alors $\operatorname{ind}_{G,R} X$ est soit un entier, soit le symbole ∞. Cette définition ne dépend pas du choix de la résolution RG-libre de R, car si L' est une autre résolution de R, il existe un G-morphisme de L' dans L préservant l'augmentation.

Le résultat suivant, qui est très simple, sera prouvé dans la section 2.

THÉORÈME 1. *Soient G un groupe fini, et $f : X \to Y$ une application équivariante entre deux G-espaces libres. Si* $\operatorname{ind}_{G,R} X \geq n$, *alors il existe un homomorphisme surjectif de $H_n(S_G(Y,R))$ sur $H_n(G,R)$.*

Rappelons que si Y est un G-espace libre, alors $S_G(Y,R)$ est isomorphe à $S(Y/G,R)$, donc $H_n(S_G(Y,R))$ est isomorphe à $H_n(Y/G,R)$.

De nombreuses généralisations du théorème de Borsuk–Ulam se déduisent du théorème 1. Nous n'avons pas l'intention d'en dresser une liste complète, mais nous donnerons quelques échantillons de diverses applications. Un grand avantage de cette approche est qu'elle s'applique non seulement aux fonctions continues, mais aussi aux G-morphismes de $S(X,R)$ dans $S(Y,R)$. Cela nous permettra de donner des généralisations du théorème de Borsuk–Ulam à des fonctions discontinues et à des fonctions multivoques. Bien que la démonstration du théorème 1 utilise des particularités de la théorie singulière ou simpliciale, il est possible d'utiliser ce résultat pour l'étude d'autres théories homologiques, comme nous l'indiquerons dans la dernière section. En outre, une variante du théorème 1 s'applique aux actions sans point fixe des groupes $\mathbb{Z}_{p^k}$, p premier. Nous en déduirons une démonstration très simple du théorème de Tverberg topologique.

Il est connu et élémentaire que, si M est un complexe de chaînes augmenté tel que $\widetilde{H}_i(M) = 0$ pour $i < n$, alors, pour tout complexe augmenté de modules libres L, il existe un morphisme de chaînes préservant l'augmentation de $L[n]$ dans M. Cela implique le lemme suivant, qui fournit les exemples les plus simples d'espaces vérifiant $\operatorname{ind}_{G,R} X \geq n$.

LEMME 1. *Soit X un G-espace libre. Si $\widetilde{H}_i(X,R) = 0$ pour $i < n$, alors* $\operatorname{ind}_{G,R} X \geq n$.

Toute chaîne singulière $c \in S(X,R)$ est une combinaison linéaire $c = \sum_\sigma c_\sigma \sigma$, où σ parcourt les simplexes singuliers de X et seul un nombre fini des coefficients c_σ sont non nuls ; la réunion des images des simplexes σ tels que $c_\sigma \neq 0$ est un compact, appelé *support* de c, que nous notons $\|c\|$. Si

A est un sous-espace de X, nous identifions $S(A, R)$ à un sous-complexe de $S(X, R)$.

Nous ne faisons aucune différence entre un complexe simplicial et sa réalisation géométrique. Si s, s' sont deux simplexes d'un tel complexe, la notation $s \leq s'$ signifie que s est une face de s'. Nous notons $[v_0, \ldots, v_k]$ le simplexe de sommets $v_0, \ldots, v_k$. Pour tout complexe simplicial N, nous notons $C(N, R)$ le complexe des chaînes ordonnées de N à coefficients R. Si G opère simplicialement sur N, nous notons $C_G(N, R)$ le complexe quotient de $C(N, R)$ par le sous-complexe engendré par les chaînes de la forme $g \cdot c - c$.

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement d'un espace X et A un sous-ensemble de X, nous notons $\mathrm{St}(A, \mathcal{U})$ la réunion des éléments de $\mathcal{U}$ qui rencontrent A, et nous posons $\mathrm{St}(\mathcal{U}) = \{\mathrm{St}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$.

2. Démonstration du théorème 1 et compléments

Démonstration du théorème 1. Soit $L = (L_i)_{i \geq 0}$ une résolution RG-libre du module trivial R, et soit $\varepsilon : L_0 \to R$ l'augmentation. Les groupes d'homologie de G à coefficients R sont naturellement isomorphes à ceux du complexe $R \otimes_{RG} L$ car, ces derniers étant indépendants de la résolution, nous pouvons prendre pour L le complexe $R \otimes_{\mathbb{Z}} L'$, où L' est une $\mathbb{Z}G$-résolution libre du G-module trivial $\mathbb{Z}$, et les complexes $R \otimes_{RG} (R \otimes_{\mathbb{Z}} L')$ et $R \otimes_{\mathbb{Z}G} L'$ sont naturellement isomorphes.

Soit $\chi : L[n] \to S(X, R)$ un G-morphisme préservant l'augmentation. Puisque Y est G-libre, $S(Y, R)$ est un complexe de RG-modules libres, donc il existe un G-morphisme $\xi : S(Y, R) \to L$ préservant l'augmentation. Alors $\eta = \xi \circ f_{\#} \circ \chi$ est un G-morphisme préservant l'augmentation de $L[n]$ dans L. Comme L est acyclique, η est homotope à l'inclusion ψ de $L[n]$ dans L, donc $\mathrm{id} \otimes \eta : R \otimes_{RG} L[n] \to R \otimes_{RG} L$ est homotope à $\mathrm{id} \otimes \psi$. Les modules des n-cycles de $R \otimes_{RG} L$ et $R \otimes_{RG} L[n]$ coïncident, donc l'homomorphisme ψ_* de $H_n(R \otimes_{RG} L[n])$ dans $H_n(G, R)$ induit par $\mathrm{id} \otimes \psi$ est surjectif, et il en est de même de l'homomorphisme $\xi_* \circ f_* \circ \chi_*$ induit par $\mathrm{id} \otimes \eta$. L'homomorphisme $\xi_* : H_n(S_G(Y, R)) \to H_n(G, R)$ est donc surjectif. ∎

Dans certains cas particuliers, il est possible de compléter le théorème 1. La notion de dimension des espaces topologiques utilisée dans cet article, notée dim, est celle au sens des recouvrements.

Théorème 2. *Soient G un groupe fini, $f : X \to Y$ une application équivariante entre deux G-espaces libres, et soient $n \leq m$ des entiers. Supposons que*

(i) $\mathrm{ind}_{G,R}\, X \geq n$,
(ii) *Y est séparé, $\dim C \leq m$ pour tout compact C de Y et $H_q(Y, R) = 0$ pour $n < q \leq m$.*

Si $H_{m+1}(G,R) \neq 0$, alors l'homomorphisme de $H_n(X,R)$ dans $H_n(Y,R)$ induit par f n'est pas nul.

Démonstration. Supposons que $0 = f_* : H_n(X,R) \to H_n(Y,R)$. Puisque G est fini, il y a une résolution RG-libre $L = (L_i)_{i\geq 0}$ du module trivial R telle que chaque L_i soit engendré par un nombre fini d'éléments. Soit $\chi : L[n] \to S(X,R)$ un G-morphisme préservant l'augmentation. Si c est un générateur du RG-module libre L_{n+1}, nous avons $\partial\chi(\partial c) = \chi(\partial\partial c) = 0$, et l'hypothèse sur f_* garantit que $f_\# \circ \chi(\partial c)$ est un bord. Cela permet de prolonger $f_\# \circ \chi$ en un G-morphisme $\eta' : L[n+1] \to S(Y,R)$ et, puisque $H_q(Y,R) = 0$ pour $n < q \leq m$, η' se prolonge en un G-morphisme $\eta : L[m+1] \to S(Y,R)$. Puisque les L_i, $i \leq m+1$, sont engendrés par un nombre fini d'éléments et que l'homologie singulière est à supports compacts, nous pouvons trouver un sous-ensemble compact G-invariant C de Y tel que l'image de η soit contenue dans $S(C,R)$.

La projection $\kappa : C \to C/G$ est un revêtement à un nombre fini de feuillets, donc $\dim C/G = \dim C \leq m$. Tout point z de C/G a un voisinage ouvert H_z tel que $\kappa^{-1}(H_z) = \bigcup_{z\in G} U(z,g)$, où les $U(z,g)$ sont des ouverts deux à deux disjoints vérifiant $g \cdot U(z,h) = U(z,gh)$ quels que soient g et h dans G. Puisque $\dim C/G \leq m$, nous pouvons trouver un recouvrement ouvert fini $\mathcal{V} = \{V_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ de C/G qui est plus fin que le recouvrement formé par les H_z, $z \in C/G$, et dont le nerf est de dimension $\leq m$. Pour tout $\alpha \in A$, choisissons un point z_α de C/G tel que H_{z_α} contienne V_α. Pour $\alpha \in A$ et $g \in G$, posons $W(\alpha,g) = \kappa^{-1}(V_\alpha) \cap U(z_\alpha,g)$. Alors $\mathcal{W} = \{W(\alpha,g) \,|\, \alpha \in A \text{ et } g \in G\}$ est un recouvrement ouvert de C et, puisque $g \cdot U(z_\alpha,h) = U(z_\alpha,gh)$, nous avons $g \cdot W(\alpha,h) = W(\alpha,gh)$. Nous notons N le nerf de $\mathcal{W}$ et $w(\alpha,g)$ le sommet de N correspondant à $W(\alpha,g)$. Pour tout $\alpha \in A$, les ensembles $W(\alpha,g)$, $g \in G$, sont deux à deux disjoints. Il en résulte d'une part que la dimension de N est égale à la dimension du nerf de $\mathcal{V}$, donc au plus égale à m, et d'autre part que l'action simpliciale de G sur N définie par $g \cdot w(\alpha,h) = w(\alpha,gh)$ est libre.

Soit $\{\lambda_\alpha \mid \alpha \in A\}$ une partition de l'unité sur C/G subordonnée à $\mathcal{V}$. Pour $\alpha \in A$ et $g \in G$, définissons $\mu_{\alpha,g} : C \to [0,1]$ par

$$\mu_{\alpha,g}(y) = \begin{cases} \lambda_\alpha(\kappa(y)) & \text{si } y \in U(z_\alpha,g), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\{\mu_{\alpha,g} \mid \alpha \in A \text{ et } g \in G\}$ est une partition de l'unité sur C et la fonction $\mu : C \to N$ définie par

$$\mu(y) = \sum_{\alpha,g} \mu_{\alpha,g}(y) w(\alpha,g)$$

est continue et équivariante. Puisque $\operatorname{ind}_{G,R} C \geq m+1$, le théorème 1 entraîne l'existence d'une surjection de $H_{m+1}(S_G(N,R)) = H_{m+1}(N/G,R)$

sur $H_{m+1}(G,R)$. Mais ceci est absurde car N/G est un espace triangulable de dimension au plus m, donc $H_{m+1}(N/G,R) = 0 \neq H_{m+1}(G,R)$. ∎

REMARQUE. Pour un groupe fini G et des G-espaces libres X et Y, les théorèmes 1 et 2 peuvent être généralisés comme suit :

(1) Si $\operatorname{ind}_{G,R} X \geq n$ et s'il existe un G-morphisme $\zeta : S(X,R)[n] \to S(Y,R)$ préservant l'augmentation, alors il y a un homomorphisme surjectif de $H_n(S_G(Y,R))$ sur $H_n(G,R)$.

(2) Supposons que X et Y vérifient les conditions (i) et (ii) du théorème 2 et qu'il existe un G-morphisme $\zeta : S(X,R)[n+1] \to S(Y,R)$ préservant l'augmentation. Si $H_{m+1}(G,R) \neq 0$, alors l'homomorphisme de $H_n(X,R)$ dans $H_n(Y,R)$ induit par ζ n'est pas nul.

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de l'espace X, nous notons $S(X,\mathcal{U},R)$ le sous-complexe de $S(X,R)$ engendré par les simplexes dont l'image est contenue dans un élément de $\mathcal{U}$. Si X est un G-espace, le recouvrement $\mathcal{U}$ est dit *G-invariant* si $g \cdot U$ appartient à $\mathcal{U}$ quels que soient $U \in \mathcal{U}$ et $g \in G$. Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, il existe un opérateur de subdivision $\tau : S(X,R) \to S(X,\mathcal{U},R)$, c'est-à-dire un morphisme de chaînes qui est l'identité sur $S(X,\mathcal{U},R)$. Si $\mathcal{U}$ est G-invariant, alors τ peut être choisi G-équivariant (l'opérateur de subdivision construit dans la démonstration du théorème 4.4.14 de [12] a cette propriété). L'existence d'opérateurs de subdivision G-équivariants entraîne que, pour construire un G-morphisme de $S(X,R)[n]$ dans $S(Y,R)$, il suffit de construire un recouvrement ouvert G-invariant $\mathcal{U}$ et un G-morphisme de $S(X,\mathcal{U},R)[n]$ dans $S(Y,R)$.

3. Opérations sans point fixe des groupes $\mathbb{Z}_{p^k}$. Pour tout entier q, nous posons $\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Quand $\mathbb{Z}_q$ est regardé comme un groupe d'opérateurs, nous le noterons multiplicativement (mais nous conserverons évidemment la notation additive quand $\mathbb{Z}_q$ est l'anneau de coefficients). Si X est un $\mathbb{Z}_q$-espace, nous noterons simplement $\operatorname{ind}_{\mathbb{Z}_q} X$ au lieu de $\operatorname{ind}_{\mathbb{Z}_q,\mathbb{Z}_q} X$.

Dans toute la suite de cette section, p désigne un nombre premier. Dans le cas où $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, les théorèmes 1 et 2 ont des analogues pour les actions sans point fixe.

THÉORÈME 3. *Soient X, Y des $\mathbb{Z}_{p^k}$-espaces sans point fixe et $f : X \to Y$ une application $\mathbb{Z}_{p^k}$-équivariante.*

(i) *Si $\operatorname{ind}_{\mathbb{Z}_{p^k}} X \geq n$, alors $H_n(S_{\mathbb{Z}_{p^k}}(Y,\mathbb{Z}_{p^k})) \neq 0$.*

(ii) *En outre, si Y est séparé et s'il existe un $m \geq n$ tel que $\dim C \leq m$ pour tout compact C de Y et que $H_q(Y,\mathbb{Z}_{p^k}) = 0$ pour $n < q \leq m$, alors l'homomorphisme de $H_n(X,\mathbb{Z}_{p^k})$ dans $H_n(Y,\mathbb{Z}_{p^k})$ induit par f n'est pas nul.*

Démonstration. Nous notons G un groupe cyclique multiplicatif d'ordre p^k qui opère sur X et Y, et t un générateur de G. Soit $L = (L_i)_{i\geq 0}$ une résolution $\mathbb{Z}_{p^k}G$-libre du module trivial $\mathbb{Z}_{p^k}$, et soit $\varepsilon : L_0 \to \mathbb{Z}_{p^k}$ l'augmentation. Soit $\chi : L[n] \to S(X, \mathbb{Z}_{p^k})$ un G-morphisme préservant l'augmentation.

Construisons un G-morphisme $\xi : S(Y, \mathbb{Z}_{p^k}) \to L$ comme suit. Fixons $a \in L_0$ tel que $\varepsilon(a) = 1$. Dans chaque classe de transitivité de 0-simplexes, fixons un représentant v et posons, pour $0 \leq u < p^k$,

$$\xi(t^u \cdot v) = \sum_{r=0}^{p^{k-1}-1} t^{u+pr} \cdot a.$$

Les éléments t^{u+pr} apparaissant dans cette somme parcourent donc la classe de t^u modulo le sous-groupe G' de G d'ordre p^{k-1}. Cette définition a un sens car, G opérant sans point fixe sur Y, si $t^u \cdot v = t^{u'} \cdot v$, alors t^u et $t^{u'}$ sont dans la même classe modulo G'. Nous obtenons ainsi un G-morphisme de $S(Y, \mathbb{Z}_{p^k})[0]$ dans L vérifiant $\varepsilon(\xi(v)) = p^{k-1}$ pour tout 0-simplexe v de Y. Supposons la restriction de ξ à $S(Y, \mathbb{Z}_{p^k})[i]$ construite. Dans chaque classe de transitivité de $(i+1)$-simplexes, fixons un élément σ. Alors $\xi(\partial\sigma)$ est un cycle (relatif si $i = 0$), donc il existe $c \in L_{i+1}$ tel que $\partial c = \xi(\partial\sigma)$, et nous posons $\xi(g \cdot \sigma) = g \cdot c$ pour tout $g \in G$, ce qui a un sens puisque $\xi(g \cdot \partial\sigma) = g \cdot \xi(\partial\sigma)$.

Soit $\eta = \xi \circ f_\# \circ \chi$; c'est un G-morphisme de $L[n]$ dans L vérifiant $\varepsilon(\eta(c)) = p^{k-1}\varepsilon(c)$ pour tout $c \in L_0$. Soit ψ l'inclusion de $L[n]$ dans L, et soit $\pi : L \to L$ le G-morphisme défini par $\pi(c) = p^{k-1}c$ pour tout $c \in L$. Le G-morphisme $\pi \circ \psi : L[n] \to L$ vérifie aussi $\varepsilon(\pi \circ \psi(c)) = p^{k-1}\varepsilon(c)$ pour tout $c \in L_0$, donc est homotope à η. Alors $\mathrm{id} \otimes \eta : \mathbb{Z}_{p^k} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^k}G} L[n] \to \mathbb{Z}_{p^k} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^k}G} L$ est homotope à $\mathrm{id} \otimes (\pi \circ \psi)$. L'homomorphisme de $H_n(\mathbb{Z}_{p^k} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^k}G} L[n])$ dans $H_n(G, \mathbb{Z}_{p^k})$ induit par $\mathrm{id} \otimes \psi$ est surjectif, et $\mathrm{id} \otimes \pi$ induit la multiplication par p^{k-1} dans $H_n(G, \mathbb{Z}_{p^k})$. Comme $H_n(G, \mathbb{Z}_{p^k}) = \mathbb{Z}_{p^k}$, l'image de l'homomorphisme induit par $\mathrm{id} \otimes (\pi \circ \psi) = \mathrm{id} \otimes \eta$ n'est pas nulle, ce qui implique que l'image de l'homomorphisme $\xi_* : H_n(S_G(Y, \mathbb{Z}_{p^k})) \to H_n(G, \mathbb{Z}_{p^k})$ induit par $\mathrm{id} \otimes \xi$ n'est pas nulle, d'où (i).

(ii) Comme dans la démonstration du théorème 2, si $f_* : H_n(X, \mathbb{Z}_{p^k}) \to H_n(Y, \mathbb{Z}_{p^k})$ est nul, il existe un sous-ensemble compact G-invariant C de Y et un G-morphisme $\zeta : L[m+1] \to S(C, \mathbb{Z}_{p^k})$. Soit $\kappa : C \to C/G$ la projection. Tout point z de C/G a un voisinage ouvert H_z tel que $\kappa^{-1}(H_z) = \bigcup_{z\in G} U(z, g)$, où les $U(z, g)$ sont des ouverts tels que $g \cdot U(z, h) = U(z, g \cdot h)$, $U(z, t \cdot g) \neq U(z, g)$ et que, quels que soient g et g' dans G, ou bien $U(z, g) = U(z, g')$, ou bien $U(z, g) \cap U(z, g') = \emptyset$. Nous avons $\dim C/G \leq \dim C \leq m$ (voir [8, proposition 9.2.16]), donc nous pouvons trouver un recouvrement ouvert fini $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de C/G qui est plus fin que

$\{H_z \mid z \in C/G\}$ et dont le nerf est de dimension au plus m. Pour $\alpha \in A$ et $g \in G$, posons $W(\alpha, g) = \kappa^{-1}(Y_\alpha) \cap U(z_\alpha, g)$, où z_α est tel que H_{z_α} contienne V_α. Alors $\mathcal{W} = \{W(\alpha, g) \mid \alpha \in A \text{ et } g \in G\}$ est un recouvrement ouvert de C tel que $g \cdot W(\alpha, h) = W(\alpha, g \cdot h)$, $W(\alpha, t \cdot g) \neq W(\alpha, g)$ et que, quels que soient g et g' dans G, ou bien $W(\alpha, g) = W(\alpha, g')$, ou bien $W(\alpha, g) \cap W(\alpha, g') = \emptyset$. Cela garantit que le nerf N de $\mathcal{W}$ a la même dimension que le nerf de $\mathcal{V}$ et que G opère simplicialement et sans point fixe sur N. Nous notons $w(\alpha, g)$ le sommet de N correspondant à $W(\alpha, g)$ ($w(\alpha, g') = w(\alpha, g)$ si $W(\alpha, g') = W(\alpha, g)$). Définissons $\mu_{\alpha,g} : C \to [0, 1]$ comme dans la démonstration du théorème 2. Alors la fonction $\mu : C \to N$ définie par

$$\mu(y) = \sum_{\alpha,g} \frac{1}{n_\alpha} \mu_{\alpha,g}(y) w(\alpha, g),$$

où n_α est le cardinal du stabilisateur de $w(\alpha, g)$, est continue et équivariante. D'après (i), $H_{m+1}(S_G(N, \mathbb{Z}_{p^k})) \neq 0$, ce qui contredit le lemme suivant. ∎

Lemme 2. *Si un groupe fini G opère simplicialement sur un complexe simplicial fini N de dimension m, alors $H_q(S_G(N, R)) = 0$ pour tout $q > m$ et tout anneau R.*

Démonstration. Bien que ce résultat soit connu, nous en esquisserons la démonstration pour la commodité du lecteur. Pour tout sommet v de N, soit $\mathrm{St}(v, N)$ l'étoile ouverte de v dans N, et soit $\mathcal{V}$ le recouvrement ouvert de N formé par les $\mathrm{St}(v, N)$. Soit $\iota : S(N, \mathcal{V}, R) \to S(N, R)$ l'inclusion. Puisque G opère simplicialement sur N, $\mathcal{V}$ est G-invariant, donc il existe un opérateur de subdivision équivariant $\mathrm{Sd} : S(N, R) \to S(N, \mathcal{V}, R)$ et une homotopie équivariante $h_1 : S(N, R) \to S(N, R)$ entre l'identité et $\iota \circ \mathrm{Sd}$.

Soit N' la subdivision barycentrique de N. Pour tout simplexe s de N, soit b_s son barycentre et soit $\mathrm{Tr}(s)$ le sous-complexe de N' formé des simplexes $[b_{s_0}, \ldots, b_{s_k}]$ tels que $s \leq s_0 \leq \cdots \leq s_k$. Alors $\mathrm{Tr}(s)$ est un cône de sommet b_s, donc est acyclique et, puisque G opère simplicialement, nous avons $b_{g \cdot s} = g \cdot b_s$ et $\mathrm{Tr}(g \cdot s) = g \cdot \mathrm{Tr}(s)$. Soit $\nu : C(N', R) \to S(N, R)$ un G-morphisme tel que $\nu(C(s', R)) \subset S(s', R)$ pour tout simplexe s' de N'.

Pour tout simplexe singulier $\sigma \in S(N, \mathcal{V}, R)$, l'ensemble des sommets v de N tels que $\|\sigma\| \subset \mathrm{St}(v, N)$ est un simplexe $s(\sigma)$ de N, et nous avons $s(g \cdot \sigma) = g \cdot s(\sigma)$. Si τ est une face de σ, alors $s(\sigma) \subset s(\tau)$, donc $\mathrm{Tr}(s(\sigma))$ contient $\mathrm{Tr}(s(\tau))$. L'acyclicité des $\mathrm{Tr}(s)$ permet de construire un G-morphisme $\mu : S(N, \mathcal{V}, R) \to C(N', R)$ tel que $\mu(\sigma) \in C(\mathrm{Tr}(s(\sigma)), R)$ pour tout simplexe singulier σ de $S(N, \mathcal{V}, R)$. Alors $\|\nu \circ \mu(\sigma)\|$ est contenu dans $\mathrm{Tr}(s(\sigma)) \subset \mathrm{St}(v, N)$ pour tout sommet v de N tel que $\mathrm{St}(v, N)$ contienne $\|\sigma\|$. Comme toute intersection non vide des ensembles $\mathrm{St}(v, N)$ est contractile, il est possible de construire une homotopie équivariante $h_2 : S(N, \mathcal{V}, R) \to S(N, \mathcal{V}, R)$ entre l'identité et $\nu \circ \mu$.

Les G-morphismes $\mu_1 = \mu \circ \mathrm{Sd} : S(N,R) \to C(N',R)$ et $\nu_1 = \iota \circ \nu : C(N',R) \to S(N,R)$ sont tels que $\nu_1 \circ \mu_1$ est homotope à l'identité par une homotopie équivariante h. Alors μ_1 et ν_1 induisent des morphismes $\overline{\mu} : S_G(N,R) \to C_G(N',R)$ et $\overline{\nu} : C_G(N',R) \to S_G(N,R)$, et h induit une homotopie entre l'identité de $S_G(N,R)$ et $\overline{\nu} \circ \overline{\mu}$, donc la composée

$$H_q(S_G(N,R)) \xrightarrow{\overline{\mu}_*} H_q(C_G(N',R)) \xrightarrow{\overline{\nu}_*} H_q(S_G(N,R))$$

est l'identité. Si $q > m$, le groupe des q-chaînes de $C(N',R)$ est trivial, donc aussi $H_q(C_G(N',R))$ et l'image $H_q(S_G(N,R))$ de $\overline{\nu}_* \circ \overline{\mu}_*$. ∎

Évidemment, la remarque faite à la fin de la section 2 s'applique aussi au théorème 3.

4. Applications classiques. Puisque $H_m(\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_q) \neq 0$ pour tout m, le théorème suivant résulte immédiatement du lemme 1 et du théorème 1. Dans le cas particulier $q = 2p$, p impair, il a été démontré par Pergher [9].

THÉORÈME 4. *Soit $f : X \to Y$ une application équivariante entre $\mathbb{Z}_q$-espaces libres, et soit $n \geq 1$ un entier. Si $\widetilde{H}_i(X, \mathbb{Z}_q) = 0$ pour $i \leq n$, alors $H_{n+1}(Y/\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_q) \neq 0$.*

Pour tout espace topologique M, nous notons $F(M,q)$ le sous-ensemble de M^q formé des points $(y_1, \ldots, y_q)$ tels que $y_i \neq y_j$ quels que soient $i \neq j$. Le groupe $\mathbb{Z}_q$ opère librement sur $F(M,q)$ par permutation circulaire des facteurs.

THÉORÈME 5. *Soit M un espace séparé de dimension finie et soit N un entier tel que $H_i(F(M,q), \mathbb{Z}_q) = 0$ pour $i \geq N$. Si X est un $\mathbb{Z}_q$-espace libre tel que $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_q} X \geq N$, alors, pour toute fonction continue $f : X \to M$, il existe $x \in X$ et $1 \neq g \in \mathbb{Z}_q$ tels que $f(x) = f(g \cdot x)$.*

Démonstration. Soit t un générateur de $\mathbb{Z}_q$. Si $f(x) \neq f(g \cdot x)$ quels que soient $x \in X$ et $1 \neq g \in \mathbb{Z}_q$, nous pouvons définir une fonction continue équivariante $\varphi : X \to F(M,q)$ par

$$\varphi(x) = (f(x), f(t \cdot x), \ldots, f(t^{q-1} \cdot x)).$$

Pour tout compact C de $F(M,q)$, nous avons $\dim C \leq q \dim M < \infty$. Le théorème 2, appliqué avec $n = N$ et $m = \max(N, q \dim M)$, entraîne que l'homomorphisme $\varphi_* : H_N(X, \mathbb{Z}_q) \to H_N(Y, \mathbb{Z}_q) = 0$ n'est pas nul, ce qui est absurde. ∎

Le résultat suivant est le théorème de Tverberg topologique. Quand $k = 1$, il a été prouvé par Bárány, Shlosman et Szűcs [2]. Des démonstrations assez compliquées du cas général ont été données par Volovikov [13] et Sarkaria [10] (voir aussi [4]). Le théorème 3 permet de le démontrer simplement.

THÉORÈME 6. *Soit $q = p^k$ un entier, où p est premier. Soient Δ^N un N-simplexe et $f : \Delta^N \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Si $N \geq (d+1)(q-1)$, il existe q faces deux à deux disjointes $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ de Δ^N telles que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soit $Z = \Delta^N * \dots * \Delta^N$ le joint de q copies de Δ^N. Les points de Z peuvent se représenter sous la forme $(x_1, \dots, x_q\,;\, s_1, \dots, s_q)$ où $x_1, \dots, x_q$ appartiennent à Δ^N et $s_1, \dots, s_q$ sont des réels tels que $s_i \geq 0$ et $s_1 + \dots + s_q = 1$. Nous avons $(x_1, \dots, x_q\,;\, s_1, \dots, s_q) = (x'_1, \dots, x'_q\,;\, s'_1, \dots, s'_q)$ si, et seulement si, $s_i = s'_i$ pour tout i et $x_i = x'_i$ quand $s_i \neq 0$. Soit X le sous-ensemble de Z qui est réunion des joints $\sigma_1 * \dots * \sigma_q$ où les σ_i sont des faces deux à deux disjointes de Δ^N ($\sigma_i = \emptyset$ est admis, ce qui correspond à des points $(x_1, \dots, x_q\,;\, s_1, \dots, s_q)$ tels que $s_i = 0$).

Nous notons $D = \{(y, \dots, y) \in (\mathbb{R}^{d+1})^q \mid y \in \mathbb{R}^{d+1}\}$ la diagonale du produit $(\mathbb{R}^{d+1})^q$, E l'orthogonal de D dans $(\mathbb{R}^{d+1})^q$ (muni du produit scalaire euclidien habituel), S la sphère unité de E, $\pi : (\mathbb{R}^{d+1})^q \to E$ la projection orthogonale et $r : E \setminus \{0\} \to S$ la rétraction $r(x) = x/\|x\|$. La dimension de S est $(d+1)(q-1) - 1$.

Soit G un groupe cyclique d'ordre q et de générateur t. Le groupe G opère sur X et $(\mathbb{R}^{d+1})^q$ par permutation :

$$t \cdot (x_1, \dots, x_q\,;\, s_1, \dots, s_q) = (x_2, \dots, x_q, x_1\,;\, s_2, \dots, s_q, s_1)$$

et $t \cdot (y_1, \dots, y_q) = (y_2, \dots, y_q, y_1)$ pour $(y_1, \dots, y_q) \in (\mathbb{R}^{d+1})^q$. Alors D est l'ensemble des points fixes de $(\mathbb{R}^{d+1})^q$ et, comme G opère par des transformations orthogonales, E et S sont G-invariants et $r \circ \pi$ est un G-morphisme de $(\mathbb{R}^{d+1})^q \setminus D$ sur S

L'opération de G sur X est libre, et la démonstration du corollaire 6.5.4 de [7] montre que X est $(N-1)$-acyclique, donc $\operatorname{ind}_{\mathbb{Z}_q} X \geq N$ d'après le lemme 1. Puisque $\dim S \leq N - 1$ et que G opère sans point fixe sur S, le théorème 3 entraîne qu'il n'existe pas de fonction continue G-équivariante de X dans S.

Définissons $g : \Delta^N \to \mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ par $g(x) = (1, f(x))$ et $\varphi : X \to (\mathbb{R}^{d+1})^q$ par

$$\varphi(x_1, \dots, x_q\,;\, s_1, \dots, s_q) = (s_1 g(x_1), \dots, s_q g(x_q)).$$

La fonction φ est équivariante. Si $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) = \emptyset$ pour tout système de q faces disjointes de Δ^N, alors $\varphi(X)$ est contenu dans $(\mathbb{R}^{d+1})^q \setminus D$ et $r \circ \pi \circ \varphi$ est une application équivariante de X dans S, ce qui est impossible. ∎

5. Fonctions équivariantes discontinues. Si f est une fonction d'un espace topologique X dans un espace métrique M, le module de discontinuité $\delta(f)$ est la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ tels que tout point de X ait un voisinage dont l'image par f a un diamètre au plus égal à ε. Nous notons S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et δ_n le diamètre d'un n-simplexe régulier inscrit dans S^{n-1}. L. E. Dubins et G. Schwarz ont prouvé dans [3] que si f est une fonction de S^n dans S^{n-1} telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^n$, alors $\delta(f) \geq \delta_n$. Le théorème suivant, qui s'applique à n'importe quelle action libre d'un groupe $\mathbb{Z}_q$, $q > 1$ entier arbitraire, sur S^{n-1} est une vaste généralisation de ce résultat.

Théorème 7. *Soit X un espace topologique. Supposons que $\mathbb{Z}_q$ opère librement sur X et S^{n-1}. Si $\operatorname{ind}_{\mathbb{Z}_q} X \geq n$, alors le module de discontinuité de toute fonction équivariante de X dans S^{n-1} est au moins égal à δ_n.*

La démonstration utilise le fait suivant ([3, lemme 1]) :

Lemme 3. *Tout sous-ensemble de S^{n-1} dont l'enveloppe convexe contient l'origine de $\mathbb{R}^n$ a un diamètre au moins égal à δ_n.*

Démonstration du théorème 7. Si A est un sous-ensemble de S^{n-1}, nous notons $\operatorname{conv} A$ son enveloppe convexe. Si $\operatorname{conv} A$ ne contient pas l'origine de $\mathbb{R}^n$, nous posons $[A] = r(\operatorname{conv} A)$, où $r : \mathbb{R}^n \setminus 0 \to S^{n-1}$ est la rétraction $r(x) = x/\|x\|$. Quand il est défini, $[A]$ est contractile.

Supposons qu'il existe une fonction équivariante f de X dans S^{n-1} telle que $\delta(f) < \delta_n$. Alors tout point de X a un voisinage U tel que le diamètre de $f(g \cdot U)$ soit inférieur à δ_n pour tout $g \in \mathbb{Z}_q$. Cela nous permet de trouver un recouvrement ouvert $\mathbb{Z}_q$-invariant $\mathcal{U}$ de X tel que $\operatorname{diam} f(U) < \delta_n$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. Pour tout simplexe singulier σ appartenant à $S(X,\mathcal{U},\mathbb{Z}_q)$, le diamètre de $f(\|\sigma\|)$ est inférieur à δ_n, et le lemme 3 entraîne que $[f(\|\sigma\|)]$ est défini. Nous allons construire un $\mathbb{Z}_q$-morphisme $\zeta : S(X,\mathcal{U},\mathbb{Z}_q) \to S(S^{n-1},\mathbb{Z}_q)$ préservant l'augmentation et tel que $\|\zeta(\sigma)\| \subset [f(\|\sigma\|)]$ pour tout simplexe singulier σ de $S(X,\mathcal{U},\mathbb{Z}_q)$. Comme $H_n(\mathbb{Z}_q,\mathbb{Z}_q) \neq 0$, cela impliquera, d'après les remarques de la fin de la section 2, que $H_n(S^{n-1}/\mathbb{Z}_q,\mathbb{Z}_q) \neq 0$, ce qui est absurde puisque $S^{n-1}/\mathbb{Z}_q$ est une $(n-1)$-variété.

Sur les 0-chaînes, ζ est défini en envoyant le 0-simplexe d'image x sur le 0-simplexe d'image $f(x)$. Cet homomorphisme de $S_0(X,\mathbb{Z}_q)$ dans $S_0(S^{n-1},\mathbb{Z}_q)$ conserve l'augmentation et est $\mathbb{Z}_q$-équivariant puisque f est $\mathbb{Z}_q$-équivariante. Supposons la restriction de ζ à $S(X,\mathcal{U},\mathbb{Z}_q)[i]$ construite. Le groupe $\mathbb{Z}_q$ opère librement sur les $(i+1)$-simplexes singuliers de $S(X,\mathcal{U},\mathbb{Z}_q)$. Dans chaque classe de transitivité de tels simplexes, fixons un simplexe σ. Alors $\zeta(\partial\sigma)$ est un cycle (en homologie réduite si $i = 0$) dont le support est contenu dans $[f(\|\sigma\|)]$. Comme $[f(\|\sigma\|)]$ est contractile, il y a une $(i+1)$-chaîne c_σ à support contenu dans $[f(\|\sigma\|)]$ telle que $\partial c_\sigma = \zeta(\partial\sigma)$. Posons $\zeta(g\cdot\sigma) = g\cdot c_\sigma$ pour tout $g \in \mathbb{Z}_q$. Cela a un sens car $\partial(g\cdot c_\sigma) = g\cdot\partial c_\sigma = g\cdot\zeta(\partial\sigma) = \zeta\partial(g\cdot\sigma)$. En outre, $\|g\cdot c_\sigma\| = g\cdot\|c_\sigma\| \subset g\cdot[f(\|\sigma\|)] = [f(\|g\cdot\sigma\|)]$, et le prolongement de ζ aux $(i+1)$-chaînes a donc la propriété souhaitée. ∎

En utilisant le théorème 3, le même raisonnement s'applique aux actions sans point fixe du groupe $\mathbb{Z}_{p^k}$, p premier.

THÉORÈME 8. *Soit X un espace topologique. Supposons que $\mathbb{Z}_{p^k}$ (p premier) opère sans point fixe sur X et S^{n-1}. Si $\operatorname{ind}_{\mathbb{Z}_{p^k}} X \geq n$, alors le module de discontinuité de toute fonction équivariante de X dans S^{n-1} est au moins égal à δ_n.*

6. Fonctions multivoques. Par une fonction *multivoque*, nous entendons une fonction F faisant correspondre à tout point d'un espace topologique X un sous-ensemble fermé non vide d'un espace topologique Y. Une telle fonction est dite *semi-continue supérieurement*, ou s.c.s., si, pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de $F(x)$ dans Y, il existe un voisinage U de x dans X tel que $F(U) \subset V$.

Si $n \geq 0$ est un entier, un espace Y est dit lc^n_R si, pour tout $y \in Y$ et tout voisinage V de y dans Y, il existe un voisinage U de y contenu dans V tel que, pour tout $i \leq n$, l'homomorphisme de $\widetilde{H}_i(U, R)$ dans $\widetilde{H}_i(V, R)$ induit par l'inclusion soit trivial. Pour tout espace Z, nous notons $\check{H}_i(Z, R)$ le i-ème groupe d'homologie de Čech réduite de Z à coefficients R.

Le lemme suivant et les remarques de la section 2 permettent d'étendre certaines généralisations du théorème de Borsuk–Ulam à des fonctions multivoques.

LEMME 4. *Soient R un anneau noethérien, G un groupe fini, X et Y des G-espaces libres paracompacts et F une fonction multivoque s.c.s. et G-équivariante de X dans Y telle que $F(x)$ soit compact pour tout $x \in X$. Supposons que*

(i) *Y est lc^{n-1}_R,*
(ii) *$\check{H}_i(F(x), R) = 0$ pour tout $x \in X$ et tout $i < n$.*

Alors il existe un G-morphisme préservant l'augmentation de $S(X, R)[n]$ dans $S(Y, R)$.

Démonstration. Pour $P \subset O \subset Y$, nous notons $H_i(P|O)$ l'image de l'homomorphisme de $\widetilde{H}_i(P, R)$ dans $\widetilde{H}_i(O, R)$ induit par l'inclusion. Notons d'abord que si C est un compact de Y tel que $\check{H}_i(C, R) = 0$ pour tout $i \leq n-1$, alors, pour tout voisinage ouvert O de C dans Y, il existe un voisinage ouvert P de C contenu dans O tel que $H_i(P|O) = 0$ pour tout $i \leq n-1$. Cela résulte immédiatement des deux faits suivants, qui s'appliquent à tout compact $C \subset Y$ et tout $i \leq n-1$.

(i) Pour tout voisinage O de C, il existe un voisinage P de C contenu dans O tel que $H_i(P|O)$ soit engendré par un nombre fini d'éléments.

(ii) $\check{H}_i(C,R)$ est la limite du système projectif $\{\widetilde{H}_i(O,R),\, j^i_{PO}\}$, où O parcourt les voisinages ouverts de C et, pour $P \subset O$, j^i_{PO} est l'homomorphisme de $\widetilde{H}_i(P,R)$ dans $\widetilde{H}_i(O,R)$ induit par l'inclusion.

Que la condition lc^{n-1}_R entraîne la propriété (i) est du folklore ; une démonstration en a été donnée dans [1] (pour $R = \mathbb{Z}$, mais elle s'applique à tout anneau noethérien). Pour voir (ii), remarquons que si U est un ouvert paracompact de Y, il est lc^{n-1}_R, donc la transformation naturelle de $\widetilde{H}_i(U,R)$ dans $\check{H}_i(U,R)$ est un isomorphisme pour $i \le n-1$ (voir [5]) ([1]). Comme C a des voisinages ouverts paracompacts arbitrairement petits ([5, lemme 10]), (ii) résulte de la continuité de l'homologie de Čech ([6, II, §3.1, théorème 2]).

Par récurrence descendante, nous construirons, pour $n \ge i \ge 0$, des recouvrements ouverts localement finis G-invariants $\mathcal{U}_i = \{U_\alpha \mid \alpha \in A_i\}$ de X. Pour $\alpha \in A_i$, nous définissons $g\cdot\alpha$ comme l'élément de A_i tel que $g \cdot U_\alpha = U_{g\cdot\alpha}$, ce qui a un sens puisque $\mathcal{U}_i$ est G-invariant ; nous obtenons ainsi une action de G sur l'ensemble d'indices A_i. À chaque $\alpha \in A_i$, nous associerons un ouvert O_α de Y de façon que $F(U_\alpha) \subset O_\alpha$ et $g \cdot O_\alpha = O_{g\cdot\alpha}$ quels que soient $\alpha \in A_i$ et $g \in G$. Pour $n > i \ge 0$, nous construirons aussi une fonction équivariante $\pi_i : A_i \to A_{i+1}$ telle que $U_\alpha \subset U_{\pi_i(\alpha)}$ et que, si $P_\alpha = \bigcup\{O_\beta \mid \beta \in A_i \text{ et } U_\alpha \cap U_\beta \ne \emptyset\}$, alors $H_i(P_\alpha|O_\alpha) = 0$.

Posons $A_n = \{*\}$, $U_* = X$ et $O_* = Y$. Soit $i < n$ et supposons $\mathcal{U}_{i+1}$ et les O_α, $\alpha \in A_{i+1}$, définis. Pour $x \in X$, posons $A_x = \{\alpha \in A_{i+1} \mid x \in U_\alpha\}$ et $L_x = \bigcap_{\alpha\in A_x} O_\alpha$. Puisque $\mathcal{U}_{i+1}$ est localement fini, A_x est fini et comme $F(U_\alpha) \subset O_\alpha$, L_x est un voisinage ouvert de $F(x)$ dans Y. Puisque $\check{H}_j(F(x),R) = 0$ pour $j \le n-1$, nous pouvons trouver un voisinage ouvert Q_x de $F(x)$ dans Y contenu dans L_x et tel que $H_i(Q_x|L_x) = 0$. Puisque F est s.c.s., il y a un voisinage ouvert V_x de x dans X contenu dans $\bigcap_{\alpha\in A_x} U_\alpha$ et tel que $F(V_x) \subset Q_x$. Pour tout $g \in G$, nous avons $A_{g\cdot x} = g \cdot A_x$ par définition de l'action de G sur A_{i+1}, donc $L_{g\cdot x} = g\cdot L_x$ puisque $g\cdot O_\alpha = O_{g\cdot\alpha}$. Comme F est G-équivariante, nous pouvons choisir les Q_x de façon que $Q_{g\cdot x} = g \cdot Q_x$, puis les V_x de façon que $V_{g\cdot x} = g \cdot V_x$. Soit $\mathcal{W} = \{W_x \mid x \in X\}$ un recouvrement ouvert localement fini de X tel que $W_x \subset V_x$ pour tout x. Quitte à remplacer W_x par $\bigcup_{g\in G} g^{-1} \cdot W_{g\cdot x}$, nous pouvons supposer que $g \cdot W_x = W_{g\cdot x}$. Prenons pour $\mathcal{U}_i$ un recouvrement ouvert localement fini G-invariant tel que $\mathrm{St}(\mathcal{U}_i)$ soit plus fin que $\mathcal{W}$. Pour tout $\alpha \in A_i$, choisissons un point x_α de X de façon que $\mathrm{St}(U_\alpha,\mathcal{U}_i) \subset W_{x_\alpha}$ et que $x_{g\cdot\alpha} = g \cdot x_\alpha$ pour tout $g \in G$. Posons

$$E_\alpha = \{x_\beta \mid \beta \in A_i \text{ et } U_\alpha \cap U_\beta \ne \emptyset\}.$$

([1]) Il est prouvé dans [5] que si Y est $\mathrm{lc}^{n-1}_{\mathbb{Z}}$, alors $\widetilde{H}_i(Y,G)$ est isomorphe à $\check{H}_i(Y,G)$ pour $i \le n-1$ et tout groupe abélien G. La même démonstration s'applique à tout anneau R et montre que si Y est lc^{n-1}_R, alors $\widetilde{H}_i(Y,M)$ est isomorphe à $\check{H}_i(Y,M)$ pour tout $i \le n-1$ et tout R-module M.

Si x_β appartient à E_α, alors W_{x_β} contient U_α ; comme $\mathcal{W}$ est localement fini, E_α est fini, donc $O_\alpha = \bigcap_{x_\beta \in E_\alpha} Q_{x_\beta}$ est ouvert dans Y et nous avons

$$F(U_\alpha) \subset \bigcap_{x_\beta \in E_\alpha} F(W_{x_\beta}) \subset \bigcap_{x_\beta \in E_\alpha} Q_{x_\beta} = O_\alpha.$$

Puisque $g \cdot U_\beta = U_{g\cdot\beta}$ et $x_{g\cdot\beta} = g \cdot x_\beta$, nous avons $E_{g\cdot\alpha} = g \cdot E_\alpha$; comme $Q_{g\cdot x} = g \cdot Q_x$, il en résulte que $O_{g\cdot\alpha} = g \cdot O_\alpha$ quels que soient $\alpha \in A_i$ et $g \in G$. Pour tout $\alpha \in A_i$, choisissons $\pi_i(\alpha) \in A_{x_\alpha}$ de façon que $\pi_i(g \cdot \alpha) = g \cdot \pi_i(\alpha)$. Nous avons $U_\alpha \subset W_{x_\alpha} \subset V_{x_\alpha} \subset U_{\pi_i(\alpha)}$. En outre, si $\beta \in A_i$ est tel que $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$, alors $x_\alpha \in E_\beta$, donc O_β est contenu dans Q_{x_α}. Il en résulte que P_α est contenu dans $Q_{x_\alpha} \subset L_{x_\alpha} \subset O_{\pi_i(\alpha)}$ et, puisque $H_i(Q_{x_\alpha} | L_{x_\alpha}) = 0$, nous avons *a fortiori* $H_i(P_\alpha | O_{\pi_i(\alpha)}) = 0$, et toutes les conditions souhaitées sont vérifiées.

Comme nous l'avons remarqué à la section 2, il suffit de construire un G-morphisme ζ préservant l'augmentation de $S(X, \mathcal{U}_0, R)[n]$ dans $S(Y, R)$. Si σ est un 0-simplexe d'image x, prenons pour $\zeta(\sigma)$ un 0-simplexe d'image appartenant à $F(x)$. Comme F est G-équivariante, ce choix peut être fait de façon que $\zeta(g \cdot \sigma) = g \cdot \zeta(\sigma)$ pour tout $g \in G$, de sorte que la restriction de ζ à $S(X, \mathcal{U}_0, R)[0]$ est équivariante. Dans toute classe de transitivité de 1-simplexes de $S(X, \mathcal{U}_0, R)$, fixons un représentant σ. Il existe $\alpha \in A_0$ tel que U_α contienne $\|\sigma\|$. Alors $\zeta(\sigma)$ est un cycle relatif dont le support est contenu dans $F(U_\alpha) \subset O_\alpha \subset P_\alpha$. Puisque $H_0(P_\alpha | O_{\pi_0(\alpha)}) = 0$, il existe une 1-chaîne c telle que $\|c\| \subset O_{\pi_0(\alpha)}$ et $\partial c = \zeta(\partial\sigma)$, et nous posons $\zeta(g \cdot \sigma) = g \cdot c$, ce qui a un sens puisque $\zeta(g \cdot \sigma) = g \cdot \zeta(\partial\sigma)$. Notons que $U_{g\cdot\pi_0(\alpha)}$ contient $\|g \cdot \sigma\|$ et que $O_{g\cdot\pi_0(\alpha)}$ contient $\|\zeta(g \cdot \sigma)\|$.

Soit $0 < i < n$, et supposons la restriction de ζ à $S(X, \mathcal{U}_0, R)[i]$ construite de façon que, pour tout i-simplexe τ de $S(X, \mathcal{U}_0, R)$, il existe $\beta \in A_i$ tel que U_β contienne $\|\tau\|$ et que O_β contienne $\|\zeta(\tau)\|$. Dans chaque classe de transitivité de $(i+1)$-simplexes de $S(X, \mathcal{U}_0, R)$, fixons un élément σ, et soient $\sigma_0, \ldots, \sigma_{i+1}$ les i-faces de σ. Puisque $\mathcal{U}_0$ est plus fin que $\mathcal{U}_i$, il existe $\alpha \in A_i$ tel que U_α contienne $\|\sigma\|$; par hypothèse, il existe $\beta_j \in A_i$ tel que $\|\sigma_j\| \subset U_{\beta_j}$ et $\|\zeta(\sigma_j)\| \subset O_{\beta_j}$. Comme $\|\sigma\|$ contient $\|\sigma_j\|$, O_{β_j} est contenu dans P_α pour tout j, donc le support du cycle $\zeta(\partial\sigma)$ est contenu dans P_α. Puisque $H_i(P_\alpha | O_{\pi_i(\alpha)}) = 0$, il existe une $(i+1)$-chaîne c telle que $\|c\| \subset O_{\pi_i(\alpha)}$ et $\partial c = \zeta(\partial\sigma)$, et nous posons $\zeta(g \cdot \sigma) = g \cdot c$ pour tout $g \in G$. Alors $U_{g\cdot\pi_i(\alpha)}$ contient $\|g \cdot \sigma\|$ et $O_{g\cdot\pi_i(\alpha)}$ contient $\|\zeta(g \cdot \sigma)\|$. ∎

À titre d'exemple d'application du lemme précédent et des remarques de la section 2, mentionnons le résultat suivant, qui est une version multivoque du théorème 4.

THÉORÈME 9. *Soient X, Y des $\mathbb{Z}_q$-espaces libres paracompacts, et F une fonction multivoque s.c.s. et $\mathbb{Z}_q$-équivariante de X dans Y. Supposons que*

(i) Y *est* $\mathrm{lc}^{n-1}_{\mathbb{Z}_q}$,

(ii) *pour tout* $x \in X$, $F(x)$ *est compact et* $\check{H}_i(F(x), \mathbb{Z}_q) = 0$ *pour tout* $i < n$.

Si $\widetilde{H}_i(X, \mathbb{Z}_q) = 0$ *pour* $i < n$, *alors* $H_n(Y/\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_q) \neq 0$.

7. Application à d'autres théories homologiques. L'homologie singulière ne donne des résultats satisfaisants que pour les espaces dont la structure locale est suffisamment simple. La raison pour laquelle nous utilisons cette théorie tient à une de ses particularités : l'homologie singulière d'un espace est donnée par un complexe augmenté de modules libres, et un tel complexe admet des morphismes préservant l'augmentation dans tout complexe augmenté dont l'homologie réduite est triviale. Il est cependant possible d'appliquer le théorème 1, ou son analogue pour l'homologie simpliciale, à l'étude d'autres théories homologiques. Le but de cette section est d'illustrer cette possibilité par un exemple.

Si le groupe fini G opère librement sur un espace X, nous dirons qu'un recouvrement G-invariant $\mathcal{U}$ de X est *G-libre* si $g \cdot U \cap g' \cdot U = \emptyset$ quels que soient $U \in \mathcal{U}$ et $g \neq g'$ dans G. Si X est compact, il admet des recouvrements ouverts finis G-invariants et G-libres, et nous notons $\ell(X, G)$ le minimum des dimensions des nerfs de tels recouvrements.

THÉORÈME 10. *Soit p un nombre premier. Si $\mathbb{Z}_p$ opère librement sur le compact X, il existe $i \leq \ell(X, \mathbb{Z}_p)$ tel que $\check{H}_i(X, \mathbb{Z}_p) \neq 0$.*

Démonstration. Nous utiliserons l'homologie de Sklyarenko [11]. Un recouvrement fini $\mathcal{F}$ de X est dit *canonique* si chaque élément de $\mathcal{F}$ est la fermeture de son intérieur et si les intérieurs des éléments de $\mathcal{F}$ sont deux à deux disjoints. Si $\mathcal{F} = \{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ et $\mathcal{F}' = \{F_\beta \mid \beta \in B\}$ sont deux recouvrements canoniques de X et si $\mathcal{F}'$ est plus fin que $\mathcal{F}$, il y a une unique fonction $\pi : B \to A$ telle que $F_{\pi(\beta)}$ contienne F_β pour tout β, et π définit une surjection canonique du nerf de $\mathcal{F}'$ sur le nerf de $\mathcal{F}$. Soit $\mathfrak{A} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ une famille de recouvrements canoniques de X vérifiant

(1) Λ est filtrant pour la relation $\lambda < \mu$ si $\mathcal{F}_\mu$ est plus fin que $\mathcal{F}_\lambda$,

(2) pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $\mathcal{F}_\lambda$ soit plus fin que $\mathcal{U}$.

Pour $\lambda \in \Lambda$, soit N_λ le nerf du recouvrement $\mathcal{F}_\lambda$. Si $\lambda < \mu$, soit $\pi^\mu_\lambda : C(N_\mu, \mathbb{Z}_p) \to C(N_\lambda, \mathbb{Z}_p)$ le morphisme de chaînes induit par la surjection canonique de N_μ sur N_λ. Alors $\{C(N_\lambda, \mathbb{Z}_p), \pi^\mu_\lambda\}$ est un système projectif de complexes de chaînes dont nous notons $C_{\mathfrak{A}}$ la limite. Les groupes d'homologie de Sklyarenko sont ceux du complexe $C_{\mathfrak{A}}$; ils ne dépendent pas de la famille $\mathfrak{A}$ vérifiant (1) et (2) et, puisque $\mathbb{Z}_p$ est un corps, sont isomorphes aux groupes d'homologie de Čech de X à coefficients $\mathbb{Z}_p$.

Soit $\mathfrak{A}_*$ la famille des recouvrements canoniques $\mathbb{Z}_p$-invariants et $\mathbb{Z}_p$-libres. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux éléments de $\mathfrak{A}_*$, alors les ensembles $F \cap F'$, où F parcourt $\mathcal{F}$ et F' parcout $\mathcal{F}'$, forment un recouvrement canonique $\mathbb{Z}_p$-invariant et $\mathbb{Z}_p$-libre plus fin que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Il existe un recouvrement ouvert $\mathbb{Z}_p$-invariant et $\mathbb{Z}_p$-libre $\mathcal{V}$ tel que $\overline{V}$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{U}$ pour tout $V \in \mathcal{V}$. Soit $V_1, \ldots, V_{mp}$ une énumération des éléments de $\mathcal{V}$ telle que, pour $0 \leq j < m$, les ensembles $V_{jp+1}, \ldots, V_{(j+1)p}$ soient les transformés d'un même ensemble. Pour $0 \leq j < m$ et $1 \leq k \leq p$, soit F_{jp+k} la fermeture de $V_{jp+k} \backslash \bigcup_{r \leq jp} \overline{V}_r$ ($\bigcup_{r \leq 0} = \emptyset$). Alors les ensembles $F_1, \ldots, F_{mp}$ forment un recouvrement canonique $\mathbb{Z}_p$-invariant et $\mathbb{Z}_p$-libre de X plus fin que $\mathcal{U}$. La famille $\mathfrak{A}_*$ vérifie donc les conditions (1) et (2) et peut être utilisée pour calculer l'homologie de X.

Pour tout $F_\lambda \in \mathfrak{A}_*$, le groupe $\mathbb{Z}_p$ opère simplicialement et librement sur N_λ, donc il opère aussi sur $C(N_\lambda, \mathbb{Z}_p)$ et les projections π_λ^μ sont des $\mathbb{Z}_p$-morphismes. Par conséquent, $\mathbb{Z}_p$ opère sur $C_{\mathfrak{A}_*}$ de façon que les projections $\pi_\lambda : C_{\mathfrak{A}_*} \to C(N_\lambda, \mathbb{Z}_p)$ soient des $\mathbb{Z}_p$-morphismes.

Soit $n = \ell(X, \mathbb{Z}_p)$. Nous allons construire $\mathcal{F}_{\lambda_0} \in \mathfrak{A}_*$ tel que N_{λ_0} soit de dimension n. Soit $L = (L_i)_{i \geq 0}$ une résolution $\mathbb{Z}_p(\mathbb{Z}_p)$-libre du module trivial $\mathbb{Z}_p$. Si $\check{H}_i(X, \mathbb{Z}_p) = 0$ pour $i \leq n$, alors il existe un $\mathbb{Z}_p$-morphisme préservant l'augmentation $\eta : L[n+1] \to C_{\mathfrak{A}^*}$, et $\pi_{\lambda_0} \circ \eta$ est un $\mathbb{Z}_p$-morphisme de $L[n+1]$ dans $C(N_{\lambda_0}, \mathbb{Z}_p)$. Comme $H_{n+1}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \neq 0$, le théorème 1, appliqué à l'identité de N_{λ_0} entraîne que $H_{n+1}(N_{\lambda_0}/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \neq 0$, ce qui est absurde puisque $N_{\lambda_0}/\mathbb{Z}_p$ est un espace triangulable de dimension n.

Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert $\mathbb{Z}_p$-invariant et $\mathbb{Z}_p$-libre de X dont le nerf M est de dimension n. Alors $\mathbb{Z}_p$ opère librement et simplicialement sur M, et nous pouvons trouver une surjection équivariante φ de X sur M. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des simplexes de M. Pour tout simplexe σ de M, soit b_σ son barycentre, et soit D_σ l'étoile fermée de b_σ dans la deuxiṁe subdivision barycentrique de M. Les D_σ, $\sigma \in \mathfrak{S}$, forment un recouvrement fermé $\mathbb{Z}_p$-invariant de M dont le nerf est isomorphe à la subdivision barycentrique de M, donc de dimension n. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}$, prenons des ouverts E_σ de M de façon que $D_\sigma \subset E_\sigma$ et que les nerfs des familles $\{D_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}\}$ et $\{\overline{E}_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}\}$ soient naturellement isomorphes. Comme la famille des D_σ est $\mathbb{Z}_p$-invariante, nous pouvons choisir les E_σ de façon qu'ils forment une famille $\mathbb{Z}_p$-invariante. Par récurrence sur la dimension, définissons, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, un sous-ensemble fermé F_σ de X comme suit. Si $\dim \sigma = 0$, F_σ est la fermeture de $\varphi^{-1}(E_\sigma)$. Si $\dim \sigma > 0$, F_σ est la fermeture de $\varphi^{-1}(E_\sigma) \setminus \bigcup_{\dim \tau < \dim \sigma} F_\tau$. Puisque les ouverts E_σ recouvrent M, nous obtenons ainsi un recouvrement canonique de X dont le nerf est isomorphe au nerf de la famille $\{E_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}\}$, donc de dimension n. Puisque la famille des E_σ est $\mathbb{Z}_p$-invariante et que φ est $\mathbb{Z}_p$-équivariante, la famille des F_σ est $\mathbb{Z}_p$-invariante. Si g, g' sont des éléments distincts de $\mathbb{Z}_p$, alors $g \cdot \sigma$ et $g' \cdot \sigma$ sont des simplexes distincts de même dimension, donc $D_{g \cdot \sigma} \cap D_{g' \cdot \sigma} = \emptyset$, d'où $\overline{E}_{g\cdot\sigma} \cap \overline{E}_{g'\cdot\sigma} = \emptyset$ et, comme $F_{g\cdot\sigma}$ est contenu dans $\varphi^{-1}(\overline{E}_{g\cdot\sigma})$, nous avons $F_{g\cdot\sigma} \cap F_{g'\cdot\sigma} = \emptyset$, donc la famille des F_σ est $\mathbb{Z}_p$-libre et $\mathcal{F}_{\lambda_0} = \{F_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}\}$ est le recouvrement canonique cherché. ■

Une légère modification de la démonstration précédente montre que si $\mathbb{Z}_{p^k}$, p premier, opère sans point fixe sur un compact X, alors il existe i tel que $\check{H}_i(X, \mathbb{Z}_{p^k}) \neq 0$. En effet, $\mathbb{Z}_{p^k}$ étant fini, l'homologie de Čech de X à coefficients $\mathbb{Z}_{p^k}$ peut encore être calculée par la méthode de Sklyarenko, et il suffit de montrer que la famille $\mathfrak{A}$ des recouvrements canoniques $\mathcal{F}$ de X qui sont $\mathbb{Z}_{p^k}$-invariants et tels que $\mathbb{Z}_{p^k}$ opère sans point fixe sur le nerf de $\mathcal{F}$ vérifie les conditions (1) et (2). La démonstration s'achève ensuite comme ci-dessus à l'aide du théorème 3. Les détails de cet argument sont laissés au lecteur intéressé.

RÉFÉRENCES

[1] T. Banakh, R. Cauty and A. Karassev, *On homotopical and homological Z_n-sets*, prépublication.

[2] I. Bárány, S. B. Shlosman and A. Szűcs, *On a topological generalization of a theorem of Tverberg*, J. London Math. Soc. (2) 23 (1981), 158–164.

[3] L. E. Dubins and G. Schwarz, *Equidiscontinuity of Borsuk–Ulam functions*, Pacific J. Math. 95 (1981), 51–59.

[4] M. de Longueville, *Notes on the topological Tverberg theorem*, Discrete Math. 241 (2001), 207–233.

[5] S. Mardešić, *Comparison of singular and Čech homology in locally connected spaces*, Michigan J. Math. 6 (1959), 151–166.

[6] S. Mardešić and J. Segal, *Shape Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[7] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam Theorem*, Springer, Berlin, 2003.

[8] A. R. Pears, *Dimension Theory of General Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.

[9] P. L. Pergher, *A Z_p-index homomorphism for Z_p-spaces*, Houston J. Math. 31 (2005), 305–314.

[10] K. S. Sarkaria, *Tverberg partitions and Borsuk–Ulam theorems*, Pacific J. Math. 196 (2000), 231–241.

[11] E. G. Sklyarenko, *Sur la théorie homologique associée à la cohomologie d'Alexandroff–Čech*, Uspekhi Mat. Nauk 34 (1979), no. 6 (210), 90–118 (en russe).

[12] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[13] A. Yu. Volovikov, *Sur une généralisation topologique du théorème de Tverberg*, Mat. Zametki 59 (1996), 454–456 (en russe).

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Paris 6
Case 247, A place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: cauty@math.jussieu.fr

Received 22 March 2006;
revised 30 August 2006 (4739)