COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 116 2009 NO. 2

EXISTENCE ET RÉGULARITÉ HÖLDÉRIENNE DES FONCTIONS DE BOSSES

PAR

MOEZ BEN ABID (Sousse)

Abstract. We discuss the almost sure existence of random functions that can be written as sums of elementary pulses. We then estimate their uniform Hölder regularity by applying some results on coverings by random intervals.

1. Introduction et résultats. Les fonctions de bosses sont des fonctions aléatoires de type

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_nG(\lambda_n^{-1}(t-X_n)), \tag{1.1}$$

où G est une fonction bosse élémentaire (i.e. une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire, à support dans $[-1,1]$ et croissante sur $[-1,0]$), $(\lambda_n)_n$ est une suite de nombres réels décroissant vers 0, $(a_n)_n$ est une suite de nombres réels positifs telle que $\sum a_n$ diverge et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, uniformément distribuées sur un domaine Ω suffisamment large.

Ces fonctions aléatoires ont été introduites dans [10], [11] pour générer des mesures associées aux processus de Poisson. Dans [12] elles ont été utilisées pour modéliser les surfaces rugueuses et plusieurs autres phénomènes, par exemple le traffic dans les réseaux internet, l'évolution des prix des actifs dans les bourses, etc.

Dans [5] et [4] et dans le cas particulier $\lambda_n=1/n$ et $a_n=1/n^H$, les auteurs ont montré que la dimension de boîte de la restriction du graphe de F sur $[0,1]$ vaut presque sûrement $2-H$ et que sous des hypothèses supplémentaires sur G la dimension de Hausdorff du graphe de F vaut aussi presque sûrement $2-H$. Nous renvoyons aussi à [3] pour un large exposé sur les fonctions de bosses.

Dans ce travail, nous nous plaçons dans le cadre général. Nous commençons par étudier l'existence presque sûre de F sur l'intervalle $[0,1]$. Nous montrons, en utilisant des résultats sur les recouvrements par des intervalles

2000 *Mathematics Subject Classification*: 60D05, 60G99, 28A80, 40A30.
Key words and phrases: pulses, Hölder regularity, random covering, graph dimension.

DOI: 10.4064/cm116-2-6

aléatoires, que selon la nature de la série $\sum a_n \lambda_n$, presque sûrement $F(x)$ existe pour presque tout $x \in [0,1]$ ou pour tout $x \in [0,1]$.

La régularité höldérienne uniforme est une propriété fondamentale dans l'étude des fonctions multifractales. Plusieurs outils utilisés dans l'analyse multifractale des fonctions s'appliquent généralement pour des fonctions uniformément höldériennes. Dans ce travail nous prouvons que lorsque $\lambda_n = \alpha/n$ ($\alpha > 0$), la fonction F admet presque sûrement une régularité höldérienne uniforme sur $[0,1]$, ce qui prouve aussi dans ce cas que presque sûrement la fonction F est continue sur $[0,1]$.

Dans notre étude, nous allons utiliser des résultats sur le recouvrement d'un intervalle par des intervalles aléatoires. Cette idée n'est pas tout à fait nouvelle. Par exemple les auteurs de [5] ont remarqué que la construction de F est liée aux recouvrements par des intervalles aléatoires mais ils n'ont pas utilisé cette idée pour poursuivre leur étude.

Les résultats mentionnés dans ce travail recouvrent en partie, par une autre approche, ceux trouvés en [5] lorsqu'on on se place dans le cas particulier $\lambda_n = 1/n$ et $a_n = 1/n^H$, $H \in]0,1[$.

Dans toute la suite nous supposons que les X_n sont uniformément distribuées sur $\Omega = [-\lambda_0, 1+\lambda_0]$. Nous commençons par étudier l'existence presque sûre de F. Nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 1.1.

(1) *Supposons que* $\sum a_n \lambda_n$ *converge. Alors :*

  (a) *Presque sûrement, pour presque tout* $x \in [0,1]$, $F(x)$ *existe.*
  (b) *Si* (a_n) *est décroissante et* $\lambda_n = 1/n$, *alors presque sûrement, pour tout* $x \in [0,1]$, $F(x)$ *existe.*

(2) *Supposons que* $\sum a_n \lambda_n = \infty$ *et que* G *est positive avec* $G(0) > 0$. *Alors :*

  (a) *Presque sûrement, pour presque tout* $x \in [0,1]$, $F(x)$ *n'est pas définie.*
  (b) *Si de plus* $G(x) > 0$ *pour tout* $x \in [-1/2, 1/2]$, $(a_n)_n$ *est décroissante et* $\lambda_n = 1/n$, *alors presque sûrement, pour tout* $x \in [0,1]$, $F(x)$ *n'est pas définie.*

Dans le cas particulier $\lambda_n = 1/n$ et $a_n = 1/n^H$, $H \in]0,1[$, l'existence de F est établie dans [5] par une autre approche.

Étudions maintenant la régularité höldérienne uniforme de F, ceci va donc inclure la continuité. Rappelons qu'une fonction f bornée est dite dans $C^\beta(I)$ (I est un intervalle de $\mathbb{R}$), $\beta \in]0,1]$, si et seulement si il existe une constante C telle que pour tous $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\beta$.

Définition 1.1. Pour $j \geq 1$, posons

$$\Lambda_j = \{n;\ 2^{-j} \leq \lambda_n < 2^{-(j-1)}\} \quad \text{et} \quad H = \liminf_{j\to\infty} \left(\inf_{n\in\Lambda_j} \frac{\log a_n}{\log \lambda_n} \right).$$

Nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Supposons que* $\lambda_n = \alpha/n$, $\alpha > 0$ *et que* G *est dans* $C^1(\mathbb{R})$. *Alors, si* $H \in]0,1]$, *presque sûrement, pour tout* $\epsilon \in]0, H[$, $F \in C^{H-\epsilon}([0,1])$.

Notons que, comme $H > 0$, pour $0 < \epsilon < H$ il existe n_0 telle que pour $n \geq n_0$, $a_n \leq \lambda_n^{H-\epsilon} = \alpha^{H-\epsilon}/n^{H-\epsilon}$ et donc la série $\sum a_n \lambda_n$ converge.

La définition de H semble compliquée, mais on peut facilement l'obtenir par exemple lorsque a_n est de la forme $a_n = (\log n)^\beta / n^H$, et $\lambda_n = \alpha/n$, puisque dans ce cas

$$\liminf_{j\to\infty} \left(\inf_{n\in\Lambda_j} \frac{\log a_n}{\log \lambda_n} \right) = H.$$

Comme corollaire, nous obtenons une majoration de la dimension de boîte du graphe de F. Notons $\Gamma_F = \{(x, F(x));\ x \in [0,1]\}$. Notons $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ la dimension de boîte supérieure (nous renvoyons à [7] pour plus de détails).

Corollaire 1.1. *Presque sûrement* $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\, \Gamma_F \leq 2 - H$.

Notre travail est organisé comme suit : la section suivante est consacrée aux rappels de quelques résultats sur les recouvrements par des intervalles aléatoires en tenant compte du changement fait sur la distribution uniforme des variables aléatoires. Dans la section suivante nous utilisons ces résultats pour prouver le Théorème 1.1 et le Théorème 1.2.

2. Rappels sur les recouvrements par des intervalles aléatoires. En partant du modèle du recouvrement de Dvoretzky (cf. [6], [9]), c'est-à-dire des intervalles aléatoires I_n de longueurs l_n donnés sur le cercle de longueur 1, A. H. Fan et J.-P. Kahane donnent dans [8] des propriétés asymotiques uniformes, presque sûrement, de la suite des intervalles I_n qui recouvrent un point t du cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Les résultats établis dans [8] sont formulés pour les intervalles I_n de la forme $I_n =]X_n - l_n/2, X_n + l_n/2[$ où les X_n sont des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Dans notre travail nous nous intéressons aux recouvrements aléatoires d'un point t dans $[0,1]$, nous devons donc modifier légèrement la distribution uniforme des variables aléatoires pour l'adapter à notre situation et pour éliminer l'effet du bord. Plus précisément, nous supposons que les variables aléatoires sont uniformément distribuées sur $[-l_0/2, 1 + l_0/2]$. Nous allons donc formuler les résultats dans ce cadre mais leurs preuves sont exactement les mêmes que celles dans [8].

Soit $S := \sum a_n$ une série de nombres réels positifs divergente. Rappelons qu'un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{N}$ est dit *S-rare* si on a $\sum_{n\in\Lambda} a_n < \infty$, et il est dit *$S$-épais* si $\sum_{n\in\Lambda} a_n = \infty$.

Pour $\Lambda \subset \mathbb{N}$, on note $M_n(\Lambda) = \sharp\, \Lambda \cap [1, n]$. Pour $t \in [0,1]$, on note $\Lambda(t) = \{n;\ t \in I_n\}$ et $M_n(t) = M_n(\Lambda(t))$.

Les propositions suivantes donnent des résultats presque sûres sur la rareté et le nombre des intervalles I_n qui recouvrent un point t fixé dans $[0,1]$. Notons que leurs énoncés sont les mêmes que celles dans [8] en prenant soin de remplacer le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par $[0,1]$.

Proposition 2.1. *Soit $t \in [0,1]$. Alors on a les assertions suivantes* :

(1) $\sum a_n l_n < \infty \ \Rightarrow$ *p.s. $\Lambda(t)$ est S-rare.*
(2) $\sum a_n l_n = \infty \ \Rightarrow$ *p.s. $\Lambda(t)$ est S-épais.*
(3) *En fait, la condition* (1) [*resp.* (2)] *implique que presque sûrement pour presque tout point t dans* $[0,1]$, *$\Lambda(t)$ est S-rare* (*resp. épais*).

Nous aurons besoin aussi de l'uniformité par rapport à t de la notion de rareté. On a la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Supposons que $l_n = \alpha/n$ avec $\alpha > 0$ et que la suite (a_n) soit décroissante. On a*

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty \ \Leftrightarrow$ *presque sûrement*, $\displaystyle\max_{t\in[0,1]} \sum_{n\in\Lambda(t)} a_n < \infty.$

(2) *Si de plus $\alpha > 1$ on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \infty \ \Leftrightarrow \ \textit{presque sûrement},\ \min_{t\in[0,1]} \sum_{n\in\Lambda(t)} a_n = \infty.$$

Finalement, nous avons besoin, pour la régularité höldérienne uniforme, d'une estimation du nombre $M_n(t)$ uniformément par rapport à t. On a la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Supposons que $l_n = \alpha/n$ avec $\alpha > 0$. On a presque sûrement*

$$\alpha < \limsup_{n\to\infty} \frac{\max_{t\in[0,1]} M_n(t)}{\log n} < \infty.$$

La Proposition 2.3 affirme donc que, presque sûrement, uniformément en t dans $[0,1]$, on a $M_n(t) \approx \log n$.

Notons que pour prouver les propositions précédentes nous adaptons les preuves de [8] en tenant compte du fait que les variables aléatoires sont uniformément distribuées sur $[-l_0/2, 1 + l_0/2]$ et non pas sur tout le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Dans la section suivante nous utilisons ces résultats pour montrer le Théorème 1.1 et le Théorème 1.2.

3. Preuves des résultats

3.1. *Existence de fonction somme de bosses : Preuve du Théorème 1.1.* Nous allons appliquer les propositions de la section précédente à la suite $l_n = 2\lambda_n$. Le point (1)(a) du Théorème 1.1 résulte facilement de la Proposition 2.1. En effet, nous avons pour tout $t \in [0,1]$,

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G(\lambda_n^{-1}(t - X_n)).$$

Or G est à support dans $[-1,1]$, donc si $t \notin I_n =]X_n - \lambda_n, X_n + \lambda_n[$, on a $G(\lambda_n^{-1}(t - X_n)) = 0$; ceci implique que

$$F(t) = \sum_{n \in \Lambda(t)} a_n G(\lambda_n^{-1}(t - X_n)).$$

Comme G est continue sur $\mathbb{R}$ et à support compact, elle est bornée, d'où

$$|F(t)| \leq C \sum_{n \in \Lambda(t)} a_n.$$

La Proposition 2.1(3) entraîne que presque sûrement pour presque tout point $t \in [0,1]$, $\sum_{n \in \Lambda(t)} a_n < \infty$, ce qui prouve le point (1)(a) du Théorème 1.1.

Passons maintenant à la preuve de (1)(b). Ceci résulte facilement de la Proposition 2.2(1) en prenant $l_n = 2\lambda_n = 2/n$. En effet, comme la suite (a_n) est décroissante, nous déduisons de la Proposition 2.2(1) que presque sûrement $\max_{t \in [0,1]} \sum_{n \in \Lambda(t)} a_n < \infty$. Donc, presque sûrement pour tout $x \in [0,1]$,

$$|F(x)| \leq C \sum_{n \in \Lambda(x)} a_n \leq C \max_{t \in [0,1]} \sum_{n \in \Lambda(t)} a_n < \infty.$$

Par conséquent, presque sûrement pour tout $x \in [0,1]$, $F(x)$ est bien définie, ce qui prouve le point (1)(b) du Théorème 1.1.

Prouvons maintenant le point (2)(a). Comme G est continue et $G(0) > 0$, il existe $r > 0$ et $m > 0$ tels que pour tout $x \in]-r, r[$, $G(x) \geq m$. Notons $\widetilde{l}_n = 2r\lambda_n$ et $\widetilde{I}_n =]X_n - r\lambda_n, X_n + r\lambda_n[$. Pour $t \in [0,1]$, posons $\widetilde{\Lambda}(t) = \{n;\ t \in \widetilde{I}_n\}$. Nous appliquons la Proposition 2.1(3), en prenant $l_n = 2r\lambda_n$ et la suite des intervalles $\widetilde{I}_n$; nous obtenons alors presque sûrement pour presque tout $t \in [0,1]$, $\sum_{n \in \widetilde{\Lambda}(t)} a_n = \infty$. Maintenant, comme la fonction G est positive et que pour tout t, $\widetilde{\Lambda}(t) \subset \Lambda(t)$, nous avons pour tout $t \in [0,1]$,

$$F(t) = \sum_{n \in \Lambda(t)} a_n G(\lambda_n^{-1}(t - X_n)) \geq \sum_{n \in \widetilde{\Lambda}(t)} a_n G(\lambda_n^{-1}(t - X_n)) \geq m \sum_{n \in \widetilde{\Lambda}(t)} a_n.$$

Or nous avons presque sûrement pour presque tout $t \in [0,1]$, $\sum_{n \in \widetilde{\Lambda}(t)} a_n = \infty$, ce qui prouve le point (2)(a) du Théorème 1.1.

Il nous reste à prouver (2)(b). Il suffit d'appliquer la Proposition 2.2(2). En effet, comme G est continue et strictement positive sur $[-1/2, 1/2]$, il existe $r > 1/2$ et $c > 0$ tels que pour tout $x \in\,]-r, r[$, $G(x) \geq c$. Nous appliquons alors la Proposition 2.2(2) avec $l_n = 2r/n$ à la suite des intervalles $\widetilde{I}_n = \,]X_n - r/n, X_n + r/n[$. Avec les mêmes notations que précèdemment, nous obtenons pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} F(x) = \sum_{n\in\Lambda(x)} a_n G(\lambda_n^{-1}(x - X_n)) &\geq \sum_{n\in\widetilde{\Lambda}(x)} a_n G(\lambda_n^{-1}(x - X_n)) \\ &\geq c \sum_{n\in\widetilde{\Lambda}(x)} a_n \geq c \min_{t\in[0,1]} \sum_{n\in\widetilde{\Lambda}(t)} a_n. \end{aligned}$$

Comme $\sum a_n/n = \infty$, il résulte de la Proposition 2.2(2) que presque sûrement $\min_{x\in[0,1]} \sum_{n\in\widetilde{\Lambda}(x)} a_n = \infty$. Ceci prouve alors que presque sûrement pour tout $x \in [0,1]$, $F(x)$ n'est pas défini.

3.2. *Régularité höldérienne uniforme* : *Preuve du Théorème 1.2.* L'idée de notre démonstration est la suivante: d'abord nous montrons le résultat pour un système de points $\{(x_n, \lambda_n)\}$ qui vérifie une certaine propriété. Puis, nous en déduisons le Théorème 1.2 en montrant que cette propriété est vérifiée presque sûrement par le système $\{(X_n, \lambda_n)\}$.

Précisons cette idée. Soient $(\lambda_n)_n$ une suite décroissante vers 0 et $(x_n)_n$ une suite de $[-\lambda_0, 1 + \lambda_0]$. Définissons

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G(\lambda_n^{-1}(x - x_n)). \tag{3.1}$$

Notons $I_n = \,]x_n - \lambda_n, x_n + \lambda_n[$. Pour $t \in [0,1]$, posons $\Lambda_j(t) = \{n \in \Lambda_j;\ t \in I_n\}$ et $N_j(t) = \sharp\, \Lambda_j(t)$. Posons

$$H = \liminf_{j\to\infty} \left(\inf_{n\in\Lambda_j} \frac{\log a_n}{\log \lambda_n} \right).$$

La proposition suivante donne la régularité höldérienne uniforme de f sur $[0,1]$.

Proposition 3.1. *Posons* $N_j = \sup_t N_j(t)$. *Supposons que*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\log N_j}{j} = 0, \tag{3.2}$$

$G \in C^1(\mathbb{R})$ *et* $H \in\,]0,1]$. *Alors* :

(1) f *est bien définie sur* $[0,1]$.
(2) *Pour tout* $\epsilon \in\,]0, H[$, f *est dans* $C^{H-\epsilon}([0,1])$.

Il faut remarquer que la condition (3.2) est vérifiée par exemple lorsque le système $\{(x_n, \lambda_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ et faiblement redondant (voir [2], [1]).

Démonstration. Montrons d'abord (1). Quitte à ajouter une fonction de classe C^1, nous écrivons pour $t \in [0,1]$,

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in \Lambda_j} a_n G(\lambda_n^{-1}(t - x_n)) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in \Lambda_j(t)} a_n G(\lambda_n^{-1}(t - x_n)).$$

Pour $\epsilon \in]0, H[$, il existe une constante c qui ne dépend que de ϵ telle que

$$\text{(3.3)} \qquad \text{pour tout } j \geq 1 \text{ et tout } n \in \Lambda_j, \quad a_n \leq c 2^{-j(H-\epsilon/2)}.$$

Puis, comme la fonction G est bornée et que pour $t \in [0,1]$, $\sharp\Lambda_j(t) \leq N_j$, nous obtenons pour tout $t \in [0,1]$,

$$|f(t)| \leq C' \sum_{j=1}^{\infty} N_j 2^{-j(H-\epsilon/2)}.$$

La condition (3.2) implique qu'il existe une constante c' telle que

$$\text{(3.4)} \qquad \text{pour tout } j \geq 1, \quad N_j \leq c' 2^{-j\epsilon/2}.$$

Ceci donne alors, pour une constante C,

$$|f(t)| \leq C \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j(H-\epsilon)}.$$

Cette série est convergente et par suite est bien définie. Donc, f est définie sur $[0,1]$.

Passons maintenant à la preuve du point (2). Soient $x, h \in [0,1] \times \mathbb{R}$ tels que $x, x+h \in [0,1]$. Soit J l'unique entier qui vérifie $2^{-J} \leq |h| < 2^{-(J-1)}$. Écrivons

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in \Lambda_j} a_n (G(\lambda_n^{-1}(x + h - x_n)) - G(\lambda_n^{-1}(x - x_n))) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in Z_j(x,h)} a_n (G(\lambda_n^{-1}(x + h - x_n)) - G(\lambda_n^{-1}(x - x_n))) \\ &= \sum_{j=1}^{J} + \sum_{j=J+1}^{\infty} =: A_J + B_J, \end{aligned}$$

où $Z_j(x,h) = \{n \in \Lambda_j;\ G(\lambda_n^{-1}(x + h - x_n)) - G(\lambda_n^{-1}(x + h - x_n)) \neq 0\}$. La fonction G est dans $C^1(\mathbb{R})$, donc

$$|G(\lambda_n^{-1}(x + h - x_n)) - G(\lambda_n^{-1}(x - x_n))| \leq C \lambda_n^{-1} |h|,$$

et par suite

$$|A_J| \leq C|h| \sum_{j=1}^{J} \sum_{n \in Z_j(x,h)} \lambda_n^{-1} a_n.$$

Or $Z_j(x,h) \subset \Lambda_j(x) \cup \Lambda_j(x+h)$ et donc $\sharp\, Z_j(x,h) \leq 2N_j$ pour $x, x+h \in [0,1]$. Il s'ensuit que pour $\epsilon \in]0,H[$, en utilisant les inégalités (3.3) et (3.4), il existe une constante C (qui ne dépend que de ϵ) telle que

$$|A_J| \leq C|h| \sum_{j=1}^{J} 2^{j(1-H+\epsilon)} \leq C|h| 2^{J(1-H+\epsilon)} \leq C 2^{-J(H-\epsilon)} \leq C|h|^{H-\epsilon}.$$

Notons que la constante C n'est pas forcément la même d'une inégalité à une autre, l'essentiel est qu'elle ne dépend que de ϵ.

La fonction G est bornée, donc pour $\epsilon < H$, il existe une constante C telle que

$$\begin{aligned}|B_J| &\leq C \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{n \in Z_j(x,h)} a_n \leq C \sum_{j=J+1}^{\infty} N_j 2^{-j(H-\epsilon/2)} \leq C \sum_{j=J+1}^{\infty} 2^{-j(H-\epsilon)} \\ &\leq C 2^{-J(H-\epsilon)} \leq C|h|^{H-\epsilon}.\end{aligned}$$

En combinant les majorations de A_J et B_J, nous obtenons que pour tout $\epsilon \in]0,H[$, il existe une constante C tel que pour tous $x, h \in \mathbb{R}$,

$$|F(x+h) - F(x)| \leq C|h|^{H-\epsilon}.$$

La Proposition 3.1 est donc prouvée. ■

Maintenant nous sommes en mesure de montrer le Théorème 1.2. Ce théorème résulte de la Proposition 3.1 et de la Proposition 2.3. En effet, posons $l_n = 2/n$. Nous déduisons de la Proposition 2.3 que presque sûrement il existe $c > 0$ telle que pour tout n,

$$\sup_{t \in [0,1]} M_n(t) \leq c \log n.$$

Nous avons $N_j = \sup_{t\in[0,1]} N_j(t)$ avec $N_j(t) = \sharp\, \Lambda_j(t)$ où $\Lambda_j(t) = \{n \in \Lambda_j;\ t \in I_n\}$. Pour $n \in \Lambda_j$, $2^{-j} \leq \lambda_n = \alpha/n < 2^{-(j-1)}$, donc $\Lambda_j(t) \subset \Lambda(t) \cap [1, [2^j/\alpha]]$. D'où

$$N_j(t) \leq M_{[2^j/\alpha]}(t).$$

Donc, presque sûrement il existe $c > 0$ telle que pour tout j,

$$N_j = \sup_{t\in[0,1]} N_j(t) \leq \sup_{t\in[0,1]} M_{[2^j/\alpha]}(t) \leq c \log \left[\frac{2^j}{\alpha}\right].$$

D'où, presque sûrement,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\log N_j}{j} = 0.$$

Nous déduisons alors de la Proposition 3.1 que presque sûrement pour tout $\epsilon \in]0,H[$, F est dans $C^{H-\epsilon}([0,1])$. Ceci prouve le Théorème 1.2.

Notons à la fin que le Théorème 1.2 est établi dans [5] dans le cas particulier $a_n = 1/n^H$ ($H \in]0,1[$) et $\lambda_n = 1/n$ par une autre approche.

RÉFÉRENCES

[1] J. Barral and S. Seuret, *Functions with multifractal variation*, Math. Nachr. 274–275 (2004), 3–18.

[2] —, —, *Heterogeneous ubiquitous systems in* $\mathbb{R}^d$ *and Hausdorff dimension*, Bull. Brazil. Math. Soc. 38 (2007), 467–515.

[3] Y. Demichel, *Analyse fractale d'une famille de fonctions aléatoires : les fonctions de bosses*, Thèse, Univ. Blaise Pascal, 2006.

[4] Y. Demichel and K. Falconer, *The Hausdorff dimension of pulse-sum graphs*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 143 (2007), 145–155.

[5] Y. Demichel and C. Tricot, *Analysis of the fractal sum of pulses*, ibid. 141 (2006), 355–370.

[6] A. Dvoretzky, *On covering a circle by randomly placed arcs*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 42 (1956), 199–203.

[7] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, 1990.

[8] A. H. Fan et J.-P. Kahane, *Rareté des intervalles recouvrant un point dans un recouvrement aléatoire*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 29 (1993), 453–466.

[9] J.-P. Kahane, *Some Random Series of Functions*, 1st ed., Heath, 1968, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1985.

[10] B. Mandelbrot, *Introduction to fractal sum of pulses*, in: Levy Flights and Related Topics in Physics, Lecture Notes in Phys. 450, Springer, 1995, 110–123.

[11] B. Mandelbrot and J. Barral, *Multifractal products of cylindrical pulses*, Probab. Theory Related Fields 124 (2002), 409–430.

[12] C. Tricot, *A model for rough surfaces*, in: Proc. E-MRS 2002 Meeting (Symposium N), Composites Science and Technology 63, Elsevier, 2003, 1089–1096.

Institut Supérieur d'Informatique
et des Technologies de Communication
Sousse, Tunisia
E-mail: moezbenabid@yahoo.fr

Received 26 June 2008;
revised 10 January 2009 (5068)