COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 102 2005 NO. 2

# *FORMULES DE JACOBI ET MÉTHODES ANALYTIQUES*

PAR

HAI ZHANG (Beijing)

**Sommaire.** On se propose de retrouver, via des méthodes d'inspiration analytiques basées sur l'utilisation de formules de représentation intégrale attachées à des applications holomorphes propres d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, les formules de Jacobi généralisées obtenues par C. A. Berenstein, A. Vidras et A. Yger ; le fait de disposer de telles preuves (basées sur un raisonnement limité au cadre strictement affine et ne nécessitant pas le recours à une compactification) autorise l'extension de ces résultats au cadre singulier (à l'infini), ou plus généralement à un cadre transcendant.

**1. Introduction.** Si $a \in \mathbb{C}^n$ et $f_1, \ldots, f_n, h$ sont des fonctions holomorphes en $n$ variables au voisinage de $a$, on rappelle la définition du résidu de Grothendieck (au point $a$) de la forme

$$h(\zeta)d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n = hd\zeta$$

relativement au système $(f_1, \ldots, f_n)$ ; on définit ce résidu comme (voir par exemple [11, 18, 2])

$$\mathrm{Res}_{f;a}\,[hd\zeta] := \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int\limits_{\|\zeta-a\|=\varrho} h(\zeta)\,\Omega_f(\zeta),$$

où la $(n, n-1)$ forme $\Omega_f$ est un représentant de l'image de $[d\zeta/f_1 \cdots f_n]$ via l'isomorphisme de Dolbeault, soit

$$\Omega_f = \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \overline{f_k df_{[k]}} \wedge d\zeta}{\|f(\zeta)\|^{2n}},$$

avec

$$df_{[k]} := \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} df_j,$$

et $\varrho > 0$ est choisi suffisamment petit pour que les fonctions $f_1, \ldots, f_n, h$ soient holomorphes au voisinage de $B_n(a,\varrho) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n\,;\, \|\zeta - a\| \le \varrho\}$ et que $a$ soit le seul zéro commun à $f_1, \ldots, f_n$ dans cette boule fermée. Notons

2000 *Mathematics Subject Classification*: 14C17, 14C20, 14C20, 14C25, 14E25, 32A10, 32A15, 32A20, 32A25, 32A26, 32A27, 32A40, 32C30, 53C65, 58A05, 58A10, 58A25.

*Key words and phrases*: Jacobi formula, analytic variety, residue.

que l'on a aussi, pour presque tout choix de $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ (assez petits),

$$\operatorname{Res}_{f;a}[hd\zeta] = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{h(\zeta)\, d\zeta}{f_1 \cdots f_n},$$

où la chaîne semi-analytique

$$\Gamma_\varepsilon := \{|f_1| = \varepsilon_1, \ldots, |f_n| = \varepsilon_n\}$$

est équipée de l'orientation qui fait de $d(\arg f_1) \wedge \cdots \wedge d(\arg f_n)$ une forme différentielle positive sur le support de cette chaîne.

La notion de résidu local se transpose en une notion globale sur les variétés analytiques complexes. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ deux variétés analytiques complexes de dimension $n$, avec $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}'$ compacte, et $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ $n$ diviseurs effectifs au voisinage de $\overline{\mathcal{X}}$ dans $\mathcal{X}'$, tels que $\mathcal{D}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{D}_n$ définisse un cycle de dimension 0 et de support fini dans $\mathcal{X}$. Si $\omega$ est une $(n, 0)$ forme méromorphe dans $\mathcal{X}$ et de lieu polaire le long du support du diviseur $\mathcal{D}_1 + \cdots + \mathcal{D}_n$, on introduit la notion de résidu local de la forme $\omega$ relativement au diviseur $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 + \ldots + \mathcal{D}_n$ en un point $p$ du support du cycle $\mathcal{D}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{D}_n$ : si $f_1, \ldots, f_n$ sont des équations locales (rapportées à un système de coordonnées locales $\zeta$ centré en $p$) pour les diviseurs $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ au voisinage de $p$ et si $\omega$ s'écrit dans ce même système

$$\omega = \frac{hd\zeta}{f_1^{\nu_1+1} \cdots f_n^{\nu_n+1}},$$

avec $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{N}$ et $h$ holomorphe au voisinage de 0, alors

$$\operatorname{Res}_{\mathcal{D};p}\left[\frac{hd\zeta}{f_1^{\nu_1+1} \cdots f_n^{\nu_n+1}}\right] := \operatorname{Res}_{f^{\nu+\underline{1}};0}[hd\zeta],$$

où $f^{\nu+\underline{1}} := (f_1^{\nu_1+1}, \ldots, f_n^{\nu_n+1})$.

Si $V$ désigne une surface de Riemann compacte, $\mathcal{D}$ est un diviseur sur $V$, et $\omega$ une 1-forme méromorphe, à pôles le long du support de $\mathcal{D}$, alors

$$\sum_{p \in |\mathcal{D}|} \operatorname{Res}_{\mathcal{D};p}[\omega] = 0.$$

Ceci résulte immédiatement du théorème de Stokes ; notons d'ailleurs que si $\mathcal{X}$ est une courbe algébrique complète (même singulière) sur $\mathbb{C}$, de corps de fonctions $\mathbb{C}(\mathcal{X})$, et $\omega$ un élément de $\Omega^1_{\mathbb{C}(\mathcal{X})/\mathbb{C}}$, on a encore (voir [12, p. 264]) la formule

$$\sum_{p \in |\mathcal{D}|} \operatorname{Res}_{\mathcal{D};p}[\omega] = 0,$$

le résidu local de $\omega$ au point $p$ étant ici entendu au sens de Serre [17].

Dans le cas de $\mathcal{X} = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, on sait depuis Jacobi [13, 14] que si $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ sont $n$ diviseurs dont les supports s'intersectent proprement dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et si $\omega$ est une $(n,0)$ forme méromorphe sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de lieu polaire inclus dans l'union des supports des diviseurs $\mathcal{D}_j$, $j=1,\dots,n$, alors

$$\sum_{p\in|\mathcal{D}_1\cap\cdots\cap\mathcal{D}_n|} \mathrm{Res}_{\mathcal{D}_1+\ldots+\mathcal{D}_n;p}\,[\omega]=0.$$

Si les $n$ diviseurs ne s'intersectent que dans $\mathbb{C}^n$ et correspondent aux cycles associés aux idéaux homogènes $(P_j(X_0,\dots,X_n))$, $j=1,\dots,n$, alors, si

$$p_j(X_1,\dots,X_n):=P_j(1,X_1,\dots,X_n),$$

on a

$$\sum_{a\in\{p_1(\zeta)=\cdots=p_n(\zeta)=0\}} \mathrm{Res}_{p;a}\,[q d\zeta]=0$$

dès que $\deg q\le \deg p_1+\cdots+\deg p_n-n-1$.

On trouve dans [6] une transposition de ce type de résultats au cas où l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ se trouve remplacé par $\mathbb{P}^n_w(\mathbb{C})$, $w$ désignant un choix de poids. Plus généralement, les résultats de Jacobi ont été transposés au cadre ou $\mathcal{X}$ est une variété torique lisse et complète par A. Khovanskiĭ [15] (voir aussi [8]). Dans [20], [21], on donne un moyen de calculer des sommes complètes de résidus dans $\mathbb{T}^n$ sous des hypothèses concernant la géométrie des polyèdres $\mathit{\Delta}_1,\dots,\mathit{\Delta}_n$ auquels est associée la construction de la variété torique (voir aussi [10] et [9]).

Dans [5], [3], [19], figurent des résultats étendant ceux de Jacobi ou Khovanskiĭ au cadre où $\mathcal{X}$ est cette fois un ouvert affine d'une variété algébrique projective (par exemple $\mathbb{C}^n$ ou $(\mathbb{C}^*)^n=\mathbb{T}^n$). On se propose ici de les retrouver en ne raisonnant que dans le cadre affine, c'est-à-dire sans recours à une compactification (en l'occurrence, dans les exemples qui nous intéressent, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{X}(\mathit{\Delta}_1+\cdots+\mathit{\Delta}_n)$) de l'ouvert dans lequel on travaille. Ceci s'avérait nécessaire pour envisager, comme dans [4], l'extension de ces théorèmes au cadre "relatif", où $\mathcal{X}$ est cette fois une sous-variété algébrique affine de dimension pure, mais cette fois éventuellement singulière, de $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{T}^n$. De tels résultats, du fait que l'on dispose maintenant, avec les énoncés des théorèmes 1 et 2, d'énoncés et de preuves d'obédience analytique, s'étendent au cadre des variétés analytiques plus générales et pourraient permettre de formuler dans un cadre transcendant des résultats jusque là énoncés dans le cadre algébrique.

**2. Une première formule de Jacobi.** Avant d'énoncer notre première formule de Jacobi, donnons quelques définitions.

Soit $U$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ ; on appelle *fonction d'exhaustion* de $U$ toute fonction $\phi$ de classe $C^1$ de $U$ dans $]0,+\infty[$ telle que, pour tout $R>0$,

$U(\phi; R) := \phi^{-1}(]0, R[)$ soit un ouvert relativement compact dans $U$, et que

$$U = \bigcup_{R>0} U(\phi; R).$$

Étant donné une telle fonction d'exhaustion $\phi$ de $U$ et une fonction $\psi$ de $U$ dans $[0, +\infty[$, on note

$$M_\phi(\psi; R) = \sup_{\zeta\in U;\, \phi(\zeta)\leq R} \psi(\zeta), \qquad m_\phi(\psi; R) = \inf_{\zeta\in U;\, \phi(\zeta)=R} \psi(\zeta).$$

Pour tout sous-ensemble $\mathcal{J}$ de $\{1, \ldots, n\}$ et pour tout $R > 0$, on note $U(\phi; R; \mathcal{J})$ l'ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ constitué des points de la forme

$$(\alpha_{\mathcal{J},1}(\zeta), \ldots, \alpha_{\mathcal{J},n}(\zeta)) \in \mathbb{R}^n$$

avec $\zeta \in U(\phi; R)$ et

$$\alpha_{\mathcal{J},j}(\zeta) := \begin{cases} \operatorname{Re}\zeta_j & \text{si } j \in \mathcal{J}, \\ \operatorname{Im}\zeta_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout sous-ensemble $\mathcal{J}$ de $\{1, \ldots, n\}$, on note aussi $\omega_{\mathcal{J}}$ la $n$-forme différentielle réelle

$$\omega_{\mathcal{J}}(\zeta) := \bigwedge_{j=1}^{n} d\alpha_{\mathcal{J},j}(\zeta).$$

Nous sommes en mesure d'énoncer le premier résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $U$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ et $\phi$ une fonction d'exhaustion de cet ouvert ; soient $f_1, \ldots, f_n, h$ des fonctions holomorphes dans $U$ telles que*

$$\mathcal{Z}_U(f) := \{\zeta \in U;\ f_1(\zeta) = \cdots = f_n(\zeta) = 0\}$$

*soit un sous-ensemble fini de $U$. On suppose qu'il existe une fonction $\psi$ de classe $C^1$ sur $U$, à valeurs dans $[0, +\infty[$, et des nombres réels strictement positifs $\delta_1, \ldots, \delta_n$, $R_0 \geq 0$, tels que*

(i) *la fonction $R \mapsto m_\phi(\psi; R)$ soit croissante pour $R \geq R_0$ ;*

(ii) *l'on ait*

$$\lim_{R\to+\infty} m_\phi(\psi; R) = +\infty\,; \tag{1}$$

(iii) *il existe une constante $\gamma > 0$ telle que, pour tout $\zeta \in U$ avec $\phi(\zeta) \geq R_0$,*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|f_j(\zeta)|}{\psi(\zeta)^{\delta_j}} \geq \gamma\,; \tag{2}$$

(iv) *pour toute partie $\mathcal{J}$ de $\{1, \ldots, n\}$,*

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{M_\phi(|h|; R)}{m_\phi(\psi;\ R)^{\delta_1+\cdots+\delta_n}} \Big| \int_{U(\phi;\, R;\, \mathcal{J})} \omega_{\mathcal{J}} \Big| = 0. \tag{3}$$

*Alors*,

$$\sum_{a\in\mathcal{Z}_U(f)} \operatorname{Res}_{f;a}[hd\zeta] = 0.$$

*Preuve.* On choisit $N$ assez grand pour que, pour tout entier $j$ entre 1 et $n$, on ait

$$N\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} \delta_l > 2.$$

On pose alors

$$\delta^{[j]} := N\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} \delta_l, \qquad \delta := N\delta_1\cdots\delta_n = \delta_j\delta^{[j]}, \qquad j=1,\dots,n.$$

Il est clair que (2) implique l'existence d'une constante $\gamma_N > 0$ telle que, pour tout $\zeta$ dans $U$ avec $\phi(\zeta) \geq R_0$,

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |f_j(\zeta)|^{\delta^{[j]}}}{\psi(\zeta)^{\delta}} \geq \gamma_N.$$

Les fonctions $s_1,\dots,s_n$ définies dans $U\setminus\{f_1\cdots f_n = 0\}$ par

$$s_k(\zeta) := \frac{|f_k(\zeta)|^{\delta^{[k]}}}{f_k(\zeta)(\sum_{j=1}^{n} |f_j(\zeta)|^{\delta^{[j]}})}, \qquad k=1,\dots,n,$$

se prolongent donc en des fonctions de classe $C^1$ dans $U\setminus\mathcal{Z}_U(f)$ tout entier et $s=(s_1,\dots,s_n)$ réalise une section de Leray pour $f$ dans $U\setminus\mathcal{Z}_U(f)$, c'est-à-dire que l'on a l'identité

$$\forall\zeta\in U\setminus\mathcal{Z}_U(f), \qquad s_1(\zeta)f_1(\zeta)+\cdots+s_n(\zeta)f_n(\zeta) = 1.$$

Il résulte alors des formules de Bochner–Martinelli (voir par exemple [1, chapitre 2]) que l'on peut écrire

$$\sum_{a\in\mathcal{Z}_U(f)} \operatorname{Res}_{f;a}[hd\zeta] = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\Gamma} h(\zeta)\,\Omega_{[s]}(\zeta), \tag{4}$$

où

$$\Omega_{[s]} := \Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}s_k\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} ds_j\Big)\wedge d\zeta,$$

et $\Gamma$ désigne la frontière d'un ouvert $\omega$ relativement compact dans $U$, de frontière $C^1$ par morceaux, contenant tous les points de $\mathcal{Z}_U(f)$. Un calcul immédiat montre que, si l'on pose

$$u_k := |f_k|^{\delta^{[k]}/2}, \qquad k=1,\dots,n, \qquad S := \sum_{j=1}^{n} u_j^2 = \sum_{j=1}^{n} |f_j|^{\delta^{[j]}},$$

alors

$$\Omega_{[s]} = \frac{2^{n-1}}{S^n}\Big(\prod_{j=1}^n \frac{|f_j|}{f_j}\Big)\Big(\prod_{j=1}^n u_j^{1-2/\delta^{[j]}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n du_j\Big)\wedge d\zeta.$$

Comme la forme $\Omega_{[s]}$ est fermée dans $U \setminus \mathcal{Z}_U(f)$, on a, en utilisant (4) et la formule de Stokes,

$$\sum_{a\in\mathcal{Z}_U(f)} \operatorname{Res}_{f;a}[h d\zeta] = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\gamma_f(R)} h(\zeta)\, \Omega_{[s]}(\zeta), \tag{5}$$

où

$$\gamma_f(R) := \Big\{\zeta \in U;\ S(\zeta) = \frac{\gamma_N}{2}\, m_\phi(\psi; R)^\delta\Big\}.$$

Notons que pour $R > R_0$, le support du cycle $\gamma_f(R)$ est bien inclus dans l'ouvert $U(\phi; R)$ (car si $\phi(\zeta) \geq R$, on a $S(\zeta) \geq \gamma_N \psi(\zeta)^\delta$, soit, compte tenu de l'hypothèse (i), $S(\zeta) \geq \gamma_N m_\phi(\psi; R)^\delta$, ce qui contredit bien l'égalité $S(\zeta) = (\gamma_N/2) m_\phi(\psi; R)^\delta$). On transforme la formule de représentation (5) en

$$\begin{aligned}\sum_{a\in\mathcal{Z}_U(f)} &\operatorname{Res}_{f;a}[h d\zeta] \\ &= \frac{\kappa_{n,N}}{m_\phi(\psi; R)^{n\delta}} \int_{\gamma_f(R)} h(\zeta)\Big(\prod_{j=1}^n \frac{|f_j|}{f_j}\Big)\Big(\prod_{j=1}^n u_j^{1-2/\delta^{[j]}}\Big) \\ &\qquad \cdot \Big(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n du_j\Big)\wedge d\zeta,\end{aligned} \tag{6}$$

où $\kappa_{n,N}$ désigne une nouvelle constante, dépendant cette fois de $n$ et de $N$.

Si nous posons, pour $\mathcal{J} \subset \{1, \ldots, n\}$,

$$\Xi_{\mathcal{J}} := \Big(\prod_{j=1}^n u_j^{1-2/\delta^{[j]}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n du_j\Big)\wedge \omega_{\mathcal{J}},$$

nous pouvons écrire (6) sous la forme

$$\begin{aligned}\sum_{a\in\mathcal{Z}_U(f)} &\operatorname{Res}_{f;a}[h d\zeta] \\ &= \frac{\kappa_{n,N}}{m_\phi(\psi; R)^{n\delta}} \sum_{\mathcal{J}\subset\{1,\ldots,n\}} i^{n-\mathrm{Card}(\mathcal{J})} \alpha_{\mathcal{J}} \int_{\gamma_f(R)} h\Big(\prod_{j=1}^n \frac{|f_j|}{f_j}\Big)\Xi_{\mathcal{J}},\end{aligned} \tag{7}$$

où les $\alpha_{\mathcal{J}}$ sont des entiers.

Fixons maintenant $\mathcal{J}$ et considérons l'application (topologiquement) propre de $U$ dans $[0,+\infty[^n \times \mathbb{R}^n$ (voir les hypothèses (ii) et (iii)) définie par

$$F_{\mathcal{J}}(\zeta) = (u_1(\zeta), \ldots, u_n(\zeta), \alpha_{\mathcal{J},1}(\zeta), \ldots, \alpha_{\mathcal{J},n}(\zeta)),$$

où, comme auparavant,

$$\alpha_{\mathcal{J},j}(\zeta) := \begin{cases} \operatorname{Re}\zeta_j & \text{si } j \in \mathcal{J}, \\ \operatorname{Im}\zeta_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après les résultats classiques concernant les applications propres (voir par exemple [7] ou [16]) et la positivité de la forme $d\xi$ sur $\mathbb{R}^n$ et de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} v_k \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} dv_j$$

sur $\{v \in [0,+\infty[^n;\ v_1^2 + \cdots + v_n^2 = (\gamma_N/2) m_\phi(\psi; R)\}$, on a

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\gamma_f(R)} h\Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{|f_j|}{f_j}\Big) \Xi_{\mathcal{J}} \Big| &= \Big| \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_f(R)\cap\{|u_1\cdots u_n|\geq\varepsilon\}} h\Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{|f_j|}{f_j}\Big) \Xi_{\mathcal{J}} \Big| \\
&\leq M_\phi(|h|; R) \deg F_{\mathcal{J}} \\
&\quad \times \lim_{\varepsilon\to 0} \Big| \int_{F_{\mathcal{J}}(\gamma_R)\cap\{v_1\cdots v_n\geq\varepsilon\}} \Big(\prod_{j=1}^{n} v_j^{1-2/\delta^{[j]}}\Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} v_k \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} dv_j\Big) \wedge d\xi \Big| \\
&\leq M_\phi(|h|; R) \deg F_{\mathcal{J}} \Big| \int_{F_{\mathcal{J}}(\gamma_R)} \Big(\prod_{j=1}^{n} v_j^{1-2/\delta^{[j]}}\Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} v_k \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} dv_j\Big) \wedge d\xi \Big|.
\end{aligned}$$

Grâce au théorème de Fubini (les variables se trouvant maintenant séparées), et aussi au fait que $\gamma_f(R)$ est inclus dans l'ouvert $U(\phi; R)$, on a donc

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\gamma_f(R)} h\Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{|f_j|}{f_j}\Big) \Xi_{\mathcal{J}} \Big| &\leq M_\phi(|h|; R) \deg F_{\mathcal{J}} \\
&\quad \times \Big| \int_{\|v\|^2=(\gamma_N/2) m_\phi(\psi;R)} \Big(\prod_{j=1}^{n} v_j^{1-2/\delta^{[j]}}\Big) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} v_k \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} dv_j \Big| \\
&\quad \times \Big| \int_{U(\phi;R;\mathcal{J})} \omega_{\mathcal{J}} \Big|.
\end{aligned} \tag{8}$$

Appliquant une nouvelle fois la formule de Stokes, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\|v\|^2=(\gamma_N/2)m_\phi(\psi;R)} \Big(\prod_{j=1}^n v_j^{1-2/\delta^{[j]}}\Big) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} v_k \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n dv_j \\
&\quad = \int\limits_{\|v\|^2\le(\gamma_N/2)m_\phi(\psi;R)^\delta} d\Big[\Big(\prod_{j=1}^n v_j^{1-2/\delta^{[j]}}\Big) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} v_k \bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n dv_j\Big] \\
&\quad = \chi(\delta_1,\dots,\delta_n,n,N) \int\limits_{\|v\|^2\le(\gamma_N/2)m_\phi(\psi;R)^\delta} \Big(\prod_{j=1}^n v_j^{1-2/\delta^{[j]}}\Big) dv_1\wedge\cdots\wedge dv_n.
\end{aligned}$$

Le changement de variable

$$v = [m_\phi(\psi;R)]^{\delta/2} v'$$

conduit à

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\|v\|^2\le(\gamma_N/2)m_\phi(\psi;R)^\delta} &\Big(\prod_{j=1}^n v_j^{1-2/\delta^{[j]}}\Big) dv_1\wedge\cdots\wedge dv_n \\
&= \widetilde{\chi}(\delta_1,\dots,\delta_n,n,N)[m_\phi(\psi;R)]^{(\delta/2)\sum_{j=1}^n(2-2/\delta^{[j]})} \\
&= \widetilde{\chi}(\delta_1,\dots,\delta_n,n,N) m_\phi(\psi;R)^{n\delta-\delta_1-\cdots-\delta_n}.
\end{aligned}$$

En majorant en module, grâce aux inégalités obtenues, le second membre de (8), puis en reportant les inégalités ainsi obtenues dans (7), on trouve

$$\begin{aligned}
(9)\quad &\Big|\sum_{a\in\mathcal{Z}_U(f)} \mathrm{Res}_{f;a}\,[h d\zeta]\Big| \\
&\qquad \le \widetilde{K}_{n,N,\delta_1,\dots,\delta_n} \frac{M_\phi(|h|;R)}{m_\phi(\psi;R)^{\delta_1+\cdots+\delta_n}} \sup_{\mathcal{J}\subset\{1,\dots,n\}} \Big|\int\limits_{U(\phi;R;\mathcal{J})} \omega_{\mathcal{J}}\Big|.
\end{aligned}$$

L'hypothèse (iv) assure précisément que le membre de droite de (9) tend vers 0 lorsque $R$ tend vers l'infini. Le théorème est ainsi démontré. ∎

Nous avons les deux corollaires suivants :

Corollaire 1. *Soient $p_1,\dots,p_n$ $n$ polynômes à coefficients complexes en $n$ variables tels qu'il existe des constantes $R_0,\gamma,\delta_1,\dots,\delta_n$ strictement positives telles que*

$$\forall\zeta\in\mathbb{C}^n,\qquad |\zeta|\ge R_0 \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^n \frac{|p_j(\zeta)|}{\|\zeta\|^{\delta_j}} \ge \gamma.$$

*Les polynômes $p_1,\dots,p_n$ définissent une sous-variété discrète (donc finie)* *non vide de* $\mathbb{C}^n$ *et l'on a, pour tout polynôme* $q$ *tel que* $\deg q < \delta_1 + \cdots + \delta_n - n$,

$$\sum_{a \in \mathcal{Z}(p)} \mathrm{Res}_{p;a}\,[q d\zeta] = 0.$$

Remarque 1. Il s'agit là de l'énoncé proposé dans [19] (théorème 1.1). Signalons (voir remarque 3.1 de [19]) que le fait que $\delta_j > 0$ est crucial dans la preuve ci-dessus, tandis qu'il ne l'est plus dans la preuve donnée dans [19].

*Preuve.* Il suffit de prendre $\phi = \psi = \|\cdot\|$. On remarque qu'alors $M_\phi(|q|; R) \le C R^{\deg q}$ tandis que, pour tout $\mathcal{J} \subset \{1, \ldots, n\}$,

$$\Big| \int_{U(\phi;R)} \omega_{\mathcal{J}} \Big| \le \kappa_n R^n.$$

Le corollaire résulte alors immédiatement du fait que les quatre clauses du théorème 1 sont satisfaites. ∎

Corollaire 2. *Soit* $U$ *est un domaine borné et* $f_1, \ldots, f_n$ $n$ *fonctions holomorphes dans* $U$ *et n'ayant qu'un nombre fini de zéros communs dans cet ouvert. Soit* $h$ *une fonction holomorphe dans* $U$. *On suppose que* $U$ *admet une fonction d'exhaustion* $\phi$ *telle qu'il existe une fonction* $g$ *de classe* $C^1$ *de* $]0, +\infty[$ *dans lui même, tendant vers* $+\infty$ *à l'infini, et des constantes strictement positives* $R_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ *avec*

(i) *il existe* $\gamma > 0$ *tel que*

$$\forall \zeta \in U, \qquad \phi(\zeta) \ge R_0 \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{n} \frac{|f_j(\zeta)|}{g(\phi(\zeta))^{\delta_j}} \ge \gamma\,;$$

(ii) *la fonction* $g$ *est croissante sur* $[R_0, +\infty[$ ;

(iii) *on a*

$$\lim_{R \to +\infty} M_\phi(h; R) g(R)^{-\delta_1 - \cdots - \delta_n} = 0.$$

*Alors*,

$$\sum_{a \in \mathcal{Z}_U(f)} \mathrm{Res}_{f;a}\,[h d\zeta] = 0.$$

*Preuve.* C'est une conséquence immédiate du théorème 1 en prenant $\psi = g \circ \phi$. ∎

**3. Une seconde formule de type Jacobi.** Le résultat que nous prouverons ici en suivant le plan de la preuve du théorème 1 est le suivant :

Théorème 2. *Soit* $U$ *un domaine de* $\mathbb{C}^n$, *équipé d'une fonction d'exhaustion* $\phi$. *On suppose qu'il existe une suite* $(R_l)_{l \ge 0}$ *telle que, pour tout* $l \in \mathbb{N}$, $\{\phi = R_l\}$ *est une hypersurface réelle lisse de l'ouvert* $U$. *Soient* $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$

*$n+1$ fonctions $C^1$ par morceaux de $U$ dans $]0,+\infty[$ et $f := (f_1,\dots,f_n)$ un système de fonctions holomorphes dans $U$ tels que l'ensemble $\mathcal{Z}_U(f)$ soit fini. On suppose que $h$ est une fonction holomorphe dans $U$. On suppose de plus qu'il existe $\alpha \geq 2$ et $R_0 > 0$ tels que, si*

$$\psi^{(\alpha)} := \sqrt{\psi_0(\psi_1 \cdots \psi_n)^\alpha},$$

*on ait:*

(i) $\lim_{R\to+\infty} m_\phi(\psi^{(\alpha)}; R) = +\infty$ ;

(ii) *il existe $\gamma > 0$ tel que*

$$\forall \zeta \in U, \quad \phi(\zeta) \geq R_0 \ \Rightarrow\ \sum_{j=1}^n \frac{|f_j(\zeta)|}{\psi_j(\zeta)} \geq \gamma\,; \tag{10}$$

(iii) *pour toute partie $\mathcal{J}$ de $\{1,\dots,n\}$, on a*

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{m_\phi(\psi^{(\alpha)}; R)^n}\Big| \int_{U(\phi;\,R;\,\mathcal{J})} \omega_{\mathcal{J}} \Big| = 0\,; \tag{11}$$

(iv) *la fonction*

$$h\Big(\prod_{j=1}^n |f_j|^{\alpha/2-1}\Big)\Big(\prod_{j=1}^n \psi_j\Big)^{(n-1)\alpha/2}\psi_0^{n/2}$$

*est bornée en module dans $U$ par une constante $C$.*

*Alors*,

$$\sum_{a\in\mathcal{Z}_U(f)} \mathrm{Res}_{f;a}\,[h d\zeta] = 0.$$

*Preuve.* Il résulte de l'hypothèse (ii) qu'il existe $\gamma_\alpha > 0$ avec

$$\forall \zeta \in U, \quad \phi(\zeta) \geq R_0 \ \Rightarrow\ \frac{\sum_{j=1}^n |f_j(\zeta)|^\alpha \psi_0(\zeta)(\prod_{l=1,\,l\neq j}^n \psi_l(\zeta))^\alpha}{\psi_0(\zeta)(\prod_{l=1}^n \psi_l(\zeta))^\alpha} \geq \gamma_\alpha.$$

On pose, pour $k = 1,\dots,n$,

$$u_k = \Big(|f_k(\zeta)|^\alpha \psi_0(\zeta)\Big(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^n \psi_l(\zeta)\Big)^\alpha\Big)^{1/2};$$

on introduit aussi la fonction

$$S = \sum_{j=1}^n u_j^2,$$

et la section de Leray $s = (s_1,\dots,s_n)$ pour $f$ définie dans $U \setminus \mathcal{Z}_U(f)$ par

$$s_k = \frac{u_k^2}{S f_k} = \frac{\bar{f}_k |f_k|^{\alpha-1}\psi_0(\zeta)(\prod_{l=1,\,l\neq k}^n \psi_l(\zeta))^\alpha}{S}, \qquad k = 1,\dots,n.$$

Notons qu'il s'agit d'une section de Leray $C^1$ par morceaux (et non plus $C^1$ comme dans la preuve du théorème 1) ; néanmoins, on a toujours, si l'on pose cette fois, pour $l \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_l := \{\zeta \in U;\ \phi(\zeta) = R_l\},$$

les formules de représentation

$$\sum_{a \in \mathcal{Z}_U(f)} \operatorname{Res}_{f;a}[h d\zeta] = \tag{12}$$

$$\kappa_n \int_{\Gamma_l} \frac{h\psi_0^{n/2}\Big(\prod\limits_{j=1}^n \psi_j\Big)^{(n-1)\alpha/2}\Big(\prod\limits_{j=1}^n \frac{|f_j|}{f_j}\Big)\Big(\prod\limits_{j=1}^n |f_j|^{\alpha/2-1}\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k \bigwedge\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n du_j\Big) \wedge d\zeta}{(u_1^2 + \cdots + u_n^2)^n}$$

($l$ étant assez grand pour que $R_l \geq R_0$). Comme dans la preuve du théorème 1, on décompose $d\zeta$ sous la forme

$$d\zeta = \sum_{\mathcal{J} \subset \{1,\dots,n\}} \alpha_{\mathcal{J}} \omega_{\mathcal{J}}$$

et l'on utilise la propreté des applications

$$F_{\mathcal{J}} :\ \zeta \in U \mapsto (u_1(\zeta), \dots, u_n(\zeta), \alpha_{\mathcal{J},1}(\zeta), \dots, \alpha_{\mathcal{J},n}(\zeta)) \in [0, +\infty[^n \times \mathbb{R}^n$$

(hypothèse (i) et (ii)) pour affirmer que, si

$$\Xi_{\mathcal{J}} := \Big(\prod_{j=1}^n |f_j|^{\alpha/2-1}\Big)\Big(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n du_j\Big) \wedge \omega_{\mathcal{J}},$$

on a (hypothèse (iv))

$$\Big| \int_{\Gamma_l} \frac{h\psi_0^{n/2}(\prod_{j=1}^n \psi_j)^{(n-1)\alpha/2}(\prod_{j=1}^n |f_j|/f_j)\Xi_{\mathcal{J}}}{(u_1^2 + \cdots + u_n^2)^n} \Big|$$
$$\leq C \deg F_{\mathcal{J}} \Big| \int_{F_{\mathcal{J}}(\Gamma_l)} \frac{(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} v_k \bigwedge_{j=1, j\neq k}^n dv_j) \wedge d\xi}{(v_1^2 + \cdots + v_n^2)^n} \Big|.$$

Or, si $(v, \xi) \in F_{\mathcal{J}}(\Gamma_l)$, on a $\xi \in U(\phi; R_l; \mathcal{J})$ et

$$v_1^2 + \cdots + v_n^2 \geq \gamma_\alpha m_\phi(\psi^{(\alpha)}; R_l).$$

En appliquant le théorème de Fubini et la formule de Stokes, on trouve donc

$$\Big|\int_{\Gamma_l}\frac{h\psi_0^{n/2}(\prod_{j=1}^n\psi_j)^{(n-1)\alpha/2}(\prod_{j=1}^n|f_j|/f_j)\Xi_{\mathcal J}}{(u_1^2+\cdots+u_n^2)^n}\Big|$$
$$\le C\deg F_{\mathcal J}\Big|\int_{\|v\|^2\ge\gamma_N m_\phi(\psi^{(\alpha)};R)}\frac{dv}{(v_1^2+\cdots+v_n^2)^n}\Big|\Big|\int_{U(\phi;R_l;\mathcal J)}d\omega_{\mathcal J}\Big|$$
$$\le C\chi_n\deg F_{\mathcal J}\frac{1}{m_\phi(\psi^{(\alpha)};R_l)^n}\Big|\int_{U(\phi;R_l;\mathcal J)}d\omega_{\mathcal J}\Big|.$$

En faisant tendre $l$ vers l'infini et en utilisant l'hypothèse (iii), on voit ainsi que pour toute partie finie $\mathcal J$ de $\{1,\dots,n\}$,

$$\lim_{l\to+\infty}\int_{\Gamma_l}\frac{h\psi_0^{n/2}(\prod_{j=1}^n\psi_j)^{(n-1)\alpha/2}(\prod_{j=1}^n|f_j|/f_j)\Xi_{\mathcal J}}{(u_1^2+\cdots+u_n^2)^n}=0.$$

Il résulte alors de (12) (appliquée avec $l$ arbitrairement grand) que l'on a bien

$$\sum_{a\in\mathcal Z_U(f)}\mathrm{Res}_{f;a}\,[h d\zeta]=0.$$

Le théorème est ainsi démontré. ∎

Nous retrouvons comme corollaire le théorème suivant, déjà obtenu via le recours à une compactification torique dans [19] (théorème 1.2).

Corollaire 3. *Soient $f_1,\dots,f_n$ $n$ polynômes de Laurent en $n$ variables, de polyèdres de Newton respectifs $\Delta_1,\dots,\Delta_n$. On suppose qu'il existe $R_0,\gamma>0$, et des polyèdres $\delta_j\subset\Delta_j$, $j=1,\dots,n$, de sommets dans $\mathbb R^n$ tels que :*

(i) $\dim(\delta_1+\cdots+\delta_n)=n$ ;
(ii) *l'on ait*

$$\forall\zeta\in\mathbb C^n,\qquad \|\mathrm{Re}\,\zeta\|\ge R_0\ \Rightarrow\ \sum_{j=1}^n\frac{|f_j(e^{\zeta_1},\dots,e^{\zeta_n})|}{e^{H_{\delta_j}(\mathrm{Re}\,\zeta)}}\ge\gamma,$$

*où, pour tout convexe compact $K$ de $\mathbb R^n$, $H_K$ désigne la fonction support de $K$, i.e.*

$$\forall x\in\mathbb R^n,\qquad H_K(x):=\sup_{\xi\in K}[x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n].$$

*Alors, pour tout polynôme de Laurent $h$ de support dans l'intérieur du polyèdre $n$-dimensionnel $\delta_1+\cdots+\delta_n$, on a*

$$\sum_{a\in\mathcal Z_{\mathbb T^n}(f)}\mathrm{Res}_{f;a}\left[\frac{h d\zeta}{\zeta_1\cdots\zeta_n}\right]=0.$$

*Preuve.* Les hypothèses impliquent immédiatement que l'ensemble $\mathcal{Z}_{\mathbb{T}^n}(f)$ est fini. On choisit $y_1, \ldots, y_n$ dans $\mathbb{R}^n$ tel qu'il n'y ait aucun point de $\mathcal{Z}_{\mathbb{T}^n}(f)$ sur la frontière du cylindre

$$U := \mathbb{R}^n \times (]y_1, y_1 + 2\pi[ \times \cdots \times ]y_n, y_n + 2\pi[).$$

On prend comme fonction d'exhaustion

$$\phi(\zeta) := \max_{1 \le k \le n} |\mathrm{Re}\, \zeta_k|.$$

Si $R > 0$ est fixé, l'ouvert

$$U_R := \{\zeta \in U;\ \phi(\zeta) < R\}$$

n'est pas relativement compact dans $U$, mais le fait que les fonctions

$$F_j(\xi) := f_j(e^{\xi_1}, \ldots, e^{\xi_n})$$

soient holomorphes au voisinage de tout $\overline{U}_R$ suffira ici à nos besoins. L'ensemble $\mathcal{Z}_F(\overline{U})$ est donc un ensemble fini. D'autre part, on a, par changement de variable évident ($\zeta = e^\xi$),

$$\sum_{a \in \mathcal{Z}_{\mathbb{T}^n}(f)} \mathrm{Res}_{f;a}\left[\frac{h d\zeta}{\zeta_1 \cdots \zeta_n}\right] = \sum_{b \in \mathcal{Z}_U(F)} \mathrm{Res}_{F;b}[h(e^\xi) d\xi]. \tag{13}$$

Le problème d'annulation de sommes des résidus se traitera dans l'ouvert $U$ (en les coordonnées $\zeta$), les nouvelles fonctions étant $F_j := f_j(e^\xi)$, $j = 1, \ldots, n$, et $H := h(e^\xi)$ ; en fait, nous nous ramènerons au cas où

$$h(z) = z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}, \quad \text{soit} \quad H(\zeta) = e^{m_1 \xi_1 + \cdots + m_n \xi_n},$$

où $\underline{m} := (m_1, \ldots, m_n)$ est un point de $\mathbb{Z}^n$ intérieur au polyèdre $\delta_1 + \cdots + \delta_n$.

On pose aussi, pour $j = 1, \ldots, n$ et $\zeta \in U$,

$$\psi_j(\xi) := e^{H_{\delta_k}(\mathrm{Re}\, \xi)}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

et, si $\delta := \delta_1 + \cdots + \delta_n$,

$$\psi_0(\xi) := \exp\left(-\frac{2(n-1)}{n}\, H_\delta(\mathrm{Re}\, \xi) - \frac{2}{n}\langle \underline{m}, \mathrm{Re}\, \xi\rangle\right).$$

On a donc ainsi, comme on le vérifie immédiatement,

$$|e^{\langle \underline{m}, \xi\rangle}| \psi_0(\xi)^{n/2} \Big(\prod_{j=1}^n \psi_j(\xi)\Big)^{n-1} \equiv 1 \quad \text{dans } U.$$

L'hypothèse (iv) du théorème 2 se trouve ainsi vérifiée dès que l'on prend $\alpha = 2$. Ce choix conduit donc à poser

$$\psi^{(2)}(\xi) := \sqrt{\psi_0(\xi)}\, \psi_1(\xi) \cdots \psi_n(\xi) = \exp\left(\frac{H_{\delta - \underline{m}}(\mathrm{Re}\, \xi)}{n}\right).$$

Le fait que $\underline{m}$ soit intérieur à $\delta$ implique

$$\mu := \max_{\phi(\zeta) = 1} H_{\delta - \underline{m}}(\mathrm{Re}\, \xi) > 0\,;$$

par homogénéité, on a

$$m_\phi(\psi^{(2)}; R) = e^{\mu R/n},$$

ce qui permet d'affirmer que l'hypothèse (i) du théorème 2 est bien satisfaite.

L'hypothèse (ii) du théorème 2 correspond exactement à la l'hypothèse (ii) de notre corollaire.

On a d'autre part, pour toute partie finie $\mathcal{J}$ de $\{1, \ldots, n\}$,

$$\left| \int_{U(\phi;R;\mathcal{J})} \omega_{\mathcal{J}} \right| = (2\pi)^{n-\#\mathcal{J}} R^{\#\mathcal{J}}.$$

Comme la fonction

$$R \mapsto \frac{1}{m_\phi(\psi^{(2)}; R)^n} = e^{-\mu R}$$

a une décroissance exponentielle, l'hypothèse (iii) du théorème 2 est aussi satisfaite.

Toutes les hypothèses du théorème 2 étant remplies, on en déduit bien que, pour notre choix de $h$,

$$\sum_{b \in \mathcal{Z}_U(F)} \mathrm{Res}_{F;b}\left[h(e^\xi) d\xi\right] = 0,$$

soit, compte tenu de la formule (13),

$$\sum_{a \in \mathcal{Z}_{\mathbb{T}^n}(f)} \mathrm{Res}_{f;a}\left[\frac{h d\zeta}{\zeta_1 \cdots \zeta_n}\right] = 0,$$

ce qui achève la preuve du corollaire. ∎

## *RÉFÉRENCES*


[1] L. A. Aizenberg and A. P. Yuzhakov, *Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis*, Transl. Math. Monogr. 58, Amer. Math. Soc., 1983.

[2] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras and A. Yger, *Residue Currents and Bézout Identities*, Progr. Math. 114, Birkhäuser, 1993.

[3] C. A. Berenstein and A. Yger, *Une formule de Jacobi et ses conséquences*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 24 (1991), 363–377.

[4] C. A. Berenstein, A. Vidras and A. Yger, *Analytic residues along algebraic cycles*, math-eprints CV/0111250.

[5] E. Cattani and A. Dickenstein, *A global view of residues in the torus*, J. Pure Appl. Algebra 117/118 (1997), 119–144.

[6] E. Cattani, A. Dickenstein and B. Sturmfels, *Computing multidimensional residues*, dans : Algorithms in Algebraic Geometry and Applications, L. González-Vega and T. Recio (eds.), Progr. Math. 143, Birkhäuser, Basel, 1996, 135–164.

[7] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko and S. P. Novikov, *Modern Geometry—Methods and Applications*, Vols. 1–3, Grad. Texts in Math. 93, 104, 124, Springer, 1984, 1985, 1990.

[8] S. Ertl and R. Hübl, *The jacobian formula for Laurent polynomials*, Univ. Iagell. Acta Math. 37 (1999), 51–67.
[9] O. A. Gel'fond, *Combinatorial coefficients and the mixed volume of polytopes*, Funct. Anal. Appl. 30 (1996), 207–208.
[10] O. A. Gel'fond and A. G. Khovanskiĭ, *Newton polyhedra and Grothendieck residues*, Dokl. Akad. Nauk 350 (1996), 298–300.
[11] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Interscience, 1978.
[12] R. Hübl and E. Kunz, *On the intersection of algebraic curves and hypersurfaces*, Math. Z. 227 (1998), 263–278.
[13] C. G. J. Jacobi, *Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum*, in: Gesammelte Werke, Band III, Chelsea, New York, 1969, 285–294.
[14] —, *De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis, simul cum enodatione paradoxi algebraici*, ibid., 329–354.
[15] A. G. Khovanskiĭ, *Newton polyedra and toroidal varieties*, Funct. Anal. Appl. 11 (1977), 289–296.
[16] P. Malliavin, *Géométrie différentielle intrinsèque*, Enseign. Sci. 14, Hermann, Paris, 1972.
[17] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.
[18] A. Tsikh, *Multidimensional Residues and Their Applications*, Transl. Math. Monogr. 103, Amer. Math. Soc., 1992.
[19] A. Vidras and A. Yger, *On some generalizations of Jacobi's residue formula*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 34 (2001), 131–157.
[20] H. Zhang, *Sur certains calculs de résidus pour des systèmes de polynômes de Laurent interprétés dans le cadre des variétés toriques*, thèse, Univ. Bordeaux I, 1996.
[21] —, *Calculs de résidus toriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 327 (1998), 639–644.

Central University of Nationalities
Unit 33 of Teachers' Department
Room 8
Beijing 100081, China
E-mail: zhanghaii@hotmail.com

*Received 23 October 2002;*
*revised 16 December 2004* (4279)