COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 101 2004 NO. 2

DIAGRAMMES COCARTÉSIENS ET RÉTRACTES ABSOLUS DE VOISINAGE

PAR

ROBERT CAUTY (Paris)

Abstract. We solve a problem of Dranishnikov about pushouts of ANRs.

Tous les espaces considérés dans cette note sont supposés métrisables et munis d'une distance arbitraire mais fixée, notée d. Si $f : X \to Y$ est une fonction continue, nous posons $S(f) = \{x \in X \mid f^{-1}f(x) \neq \{x\}\}$. Nous démontrerons ici le résultat suivant :

THÉORÈME. *Soit*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_{-1}"'] & X_1 \arrow[d, "g_1"] \\ X_{-1} \arrow[r, "g_{-1}"] & Y \end{tikzcd}$$

un diagramme cocartésien, où X_0, X_1 et X_{-1} sont des rétractes absolus de voisinage compacts. Si $S(f_1) \cap S(f_{-1}) = \emptyset$, alors Y est aussi un rétracte absolu de voisinage.

Dans le cas où les X_i sont de dimension finie, ce théorème a été prouvé par Dranishnikov [2] qui a demandé s'il restait vrai sans cette restriction sur les dimensions.

Nous notons I l'intervalle $[0,1]$. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert d'un espace Y et A un sous-ensemble de Y, nous posons $\mathrm{St}(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} \mid A \cap U \neq \emptyset\}$ et $\mathrm{St}(\mathcal{U}) = \{\mathrm{St}(U,\mathcal{U}) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux recouvrements ouverts de Y, nous notons $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}$ et $V \in \mathcal{V}\}$. Si f est une fonction continue de X dans Y, nous notons $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Deux fonctions continues f et g de X dans Y sont dites *$\mathcal{U}$-proches* si, pour tout $x \in X$, $f(x)$ et $g(x)$ sont contenus dans un même élément de $\mathcal{U}$, et elles sont *$\mathcal{U}$-homotopes* s'il existe une homotopie $h : X \times I \to Y$ entre f et g telle que, pour tout $x \in X$, $h(\{x\} \times I)$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{U}$. Une fonction continue $f : X \to Y$ est une *injection homotopique fine* si, pour

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 54C55.

Key words and phrases: ANR, pushout.

tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de Y, il existe une fonction continue $g : Y \to X$ telle que $g \circ f$ soit $f^{-1}(\mathcal{U})$-homotope à id_X. Une fonction $f : X \to Y$ entre compacts est *cellulaire* si, pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est de forme triviale. La démonstration du résultat suivant se trouve dans [1].

LEMME 1. *Soit f une application cellulaire d'un rétracte absolu de voisinage compact X sur un espace Y. Alors Y est un rétracte absolu de voisinage si, et seulement si, f est une injection homotopique fine.*

Pour une fonction continue $f : X \to Y$, nous posons $R(f) = X \setminus S(f)$, $Q(f) = f(R(f))$ et, pour $\varepsilon > 0$, $S(f,\varepsilon) = \{x \in X \mid \operatorname{diam} f^{-1}(f(x)) \geq \varepsilon\}$, $R(f,\varepsilon) = X \setminus S(f,\varepsilon)$ et $Q(f,\varepsilon) = f(R(f,\varepsilon))$.

LEMME 2. *Soient X un rétracte absolu de voisinage compact et $f : X \to Y$ une fonction continue. Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de X, il existe $\varepsilon > 0$, un voisinage ouvert V de $Q(f,\varepsilon)$ dans Y et une fonction continue $g : V \to X$ telle que $g \circ (f|R(f,\varepsilon))$ soit $\mathcal{W}$-proche de l'inclusion de $R(f,\varepsilon)$ dans X.*

Preuve. Soit $\mathcal{W}_0$ un recouvrement ouvert de X tel que $\mathrm{St}(\mathcal{W}_0)$ soit plus fin que $\mathcal{W}$. Puisque X est un rétracte absolu de voisinage, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{W}_1$ de X plus fin que $\mathcal{W}_0$ et tel que, pour tout complexe simplicial K, si φ est une fonction du 0-squelette K^0 de K dans X telle que $\varphi(\sigma \cap K^0)$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{W}_1$ pour tout simplexe σ de K, alors φ se prolonge en une fonction continue ψ de K dans X telle que $\psi(\sigma)$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{W}_0$ pour tout simplexe σ de K. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre de Lebesgue du recouvrement $\mathcal{W}_1$.

Tout point de $Q(f,\varepsilon)$ a un voisinage dont l'image réciproque par f est de dimension inférieure à ε. Nous pouvons donc trouver une famille $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ d'ouverts de Y recouvrant $Q(f,\varepsilon)$ et telle que

$$\operatorname{diam} f^{-1}(\mathrm{St}(V_\alpha,\mathcal{V})) < \varepsilon \quad \text{pour tout } \alpha \in A.$$

Nous pouvons supposer que $V_\alpha \cap Q(f,\varepsilon) \neq \emptyset$ pour tout α, ce qui nous permet d'identifier les α aux sommets du nerf K de la famille $\mathcal{V}$. Pour tout α, fixons un point x_α de $f^{-1}(V_\alpha)$. Si $\sigma = \{\alpha_0,\ldots,\alpha_n\}$ est un simplexe de K, alors

$$\operatorname{diam}\{x_{\alpha_0},\ldots,x_{\alpha_n}\} \leq \operatorname{diam} f^{-1}(\mathrm{St}(V_{\alpha_0},\mathcal{V})) < \varepsilon.$$

Puisque ε est un nombre de Lebesgue de $\mathcal{W}_1$, l'ensemble $\{x_{\alpha_0},\ldots,x_{\alpha_n}\}$ est contenu dans un élément de $\mathcal{W}_1$. Nous pouvons donc trouver une fonction continue $\psi : K \to X$ telle que $\psi(\alpha) = x_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$ et que $\psi(\sigma)$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{W}_0$ pour tout simplexe σ de K.

Soient $V = \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$ et $\mu : V \to K$ une application canonique. Soit $g = \psi \circ \mu : V \to X$. Si $x \in R(f,\varepsilon)$, soit $\sigma = \{\alpha_0,\ldots,\alpha_n\}$ un simplexe de K contenant $\mu(f(x))$. Il existe $W \in \mathcal{W}_0$ contenant $\psi(\sigma)$ et, puisque $\operatorname{diam} f^{-1}(V_{\alpha_0}) < \varepsilon$, l'ensemble $f^{-1}(V_{\alpha_0})$ est contenu dans un élément de $\mathcal{W}_1$, donc aussi dans un élément W' de $\mathcal{W}_0$. Puisque μ est canonique, $f(x)$ appartient à V_{α_0}, donc x appartient à W' et $W \cup W'$ contient x et $\psi(\sigma) \ni g(f(x))$. Comme $x_{\alpha_0} \in W \cap W'$, $W \cup W'$ est contenu dans $\mathrm{St}(W, \mathcal{W}_0)$, donc aussi dans un élément de $\mathcal{W}$, ce qui montre que $g \circ f$ est $\mathcal{W}$-proche de l'inclusion de $R(f, \varepsilon)$ dans X.

Nous dirons qu'un couple ordonné $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ de recouvrements ouverts d'un espace X a la *propriété* $\mathcal{E}$ si $\mathcal{U}$ est plus fin que $\mathcal{V}$ et si, pour tout espace Z, deux fonctions continues $\mathcal{U}$-proches de Z dans X sont toujours $\mathcal{V}$-homotopes. Il est connu que si $\mathcal{V}$ est un recouvrement ouvert d'un rétracte absolu de voisinage X, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X tel que $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ ait la propriété $\mathcal{E}$ ([3, théorème IV.1.1]). Notons le fait élémentaire suivant :

(A) Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ un couple de recouvrements ouverts de X ayant la propriété $\mathcal{E}$. Si $f, g : Z \to X$ sont des fonctions continues $\mathcal{U}$-proches et A, B des fermés disjoints de Z, alors il existe une fonction continue $h : Z \to X$ qui est $\mathcal{V}$-proche de f et g et telle que $h|A = f|A$ et $h|B = g|B$.

En effet, il existe alors une $\mathcal{V}$-homotopie $H : Z \times I \to X$ entre f et g. Soit $\alpha : Z \to I$ une fonction continue telle que $\alpha(A) = \{0\}$ et $\alpha(B) = \{1\}$. Alors la fonction $h : Z \to X$ définie par $h(x) = H(x, \alpha(x))$ a les propriétés souhaitées.

Démonstration du théorème. Y est le quotient de la somme topologique $X_1 \amalg X_{-1}$ obtenu en identifiant $f_1(x)$ à $f_{-1}(x)$ pour tout $x \in X_0$. L'hypothèse $S(f_1) \cap S(f_{-1}) = \emptyset$ permet une description très simple des classes d'équivalence non dégénérées de cette relation d'équivalence. Soit $x \in X_0$. Si x n'appartient pas à $S(f_1) \cup S(f_{-1})$, alors $\{f_1(x), f_{-1}(x)\}$ est une classe d'équivalence. Si $x \in S(f_1)$, alors $f_{-1}|f_1^{-1}(f_1(x))$ est injective et $\{f_1(x)\} \cup f_{-1}(f_1^{-1}(f_1(x)))$ est une classe d'équivalence. Si $x \in S(f_{-1})$, alors $\{f_{-1}(x)\} \cup f_1(f_{-1}^{-1}(f_{-1}(x)))$ est une classe d'équivalence. Comme g_1 et g_{-1} sont les restrictions à X_1 et X_{-1} de la projection naturelle de $X_1 \amalg X_{-1}$ sur Y, il résulte de cette description que

$$g_1(S(g_1)) \cap g_{-1}(S(g_{-1})) = \emptyset. \tag{1}$$

Pour $i = \pm 1$, nous posons $Y_i = g_i(X_i)$, de sorte que $Y = Y_1 \cup Y_{-1}$. Si $g_0 = g_1 f_1 = g_{-1} f_{-1} : X_0 \to Y$, alors $Y_0 = g_0(X_0) = Y_1 \cap Y_{-1}$. La description précédente de la relation d'équivalence définissant Y montre que si $y \in Y_0$ est tel que $g_0^{-1}(y)$ contienne plus d'un point, il y a exactement un $i \in \{-1, 1\}$ tel que $f_i|g_0^{-1}(y)$ soit injective, et qu'alors $f_i(g_0^{-1}(y)) = g_i^{-1}(y)$. En outre, la restriction de g_i à $g_i^{-1}(Y_i \setminus Y_0)$ est injective, donc la fonction $g_i^{-1} : Y_i \setminus Y_0 \to X_i$ est bien définie et continue.

Soit $D(f_{-1}, f_1)$ le double cylindre des applications f_{-1} et f_1 ; c'est le quotient de la somme topologique $X_{-1} \amalg X_0 \times [-1, 1] \amalg X_1$ obtenu en identifiant

$(x,-1)$ à $f_{-1}(x)$ et $(x,1)$ à $f_1(x)$ pour tout $x \in X_0$. Nous notons p la projection de $X_{-1} \amalg X_0 \times [-1,1] \amalg X_1$ sur $D(f_{-1}, f_1)$, identifions naturellement X_0 à $p(X_0 \times \{0\})$ et X_i à $p(X_i)$ pour $i = \pm 1$. Nous posons $[x,t] = p(x,t)$ pour $(x,t) \in X_0 \times [-1,1]$. Posons $D_0 = p(X_0 \times \,]-1,1[)$ et $D_i = D_0 \cup X_i$ pour $i = \pm 1$. Pour $i = \pm 1$, il y a une rétraction naturelle r_i de D_i sur X_i qui envoie $[x,t]$ sur $f_i(x)$ pour $[x,t] \in D_0$; posons $r_0([x,t]) = x$ pour $[x,t] \in D_0$. Nous aurons besoin du fait suivant :

(B) Pour $i = 0, -1, 1$, si le couple $(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ de recouvrements ouverts de X_i a la propriété $\mathcal{E}$, alors le couple $(r_i^{-1}(\mathcal{G}), r_i^{-1}(\mathcal{G}'))$ de recouvrements ouverts de D_i a la propriété $\mathcal{E}$.

En effet, soient h_1, h_2 deux applications continues $r_i^{-1}(\mathcal{G})$-proches d'un espace Z dans D_i. Pour $j = 1, 2$, les fonctions h_j et $r_i \circ h_j$ sont homotopes par une homotopie $H_j : Z \times I \to D_i$ telle que $r_i \circ H_j(\cdot, t) = r_i \circ h_j$ pour tout t. Les fonctions $r_i \circ h_1$ et $r_i \circ h_2$ sont $\mathcal{G}$-proches, donc $\mathcal{G}'$-homotopes par une homotopie $H : Z \times I \to X_i$. Juxtaposant les homotopies H_1, H et $H_2(\cdot, 1-t)$, nous obtenons une $r_i^{-1}(\mathcal{G}')$-homotopie entre h_1 et h_2.

Puisque X_0, X_1, X_{-1} sont des rétractes absolus de voisinage, le théorème d'adjonction de Borsuk–Whitehead entraîne que $D(f_{-1}, f_1)$ en est un aussi. Définissons une application continue φ de $D(f_{-1}, f_1)$ sur Y en posant $\varphi(x) = g_i(x)$ si $x \in X_i$, $i = \pm 1$, et $\varphi([x,t]) = g_0(x)$ pour $(x,t) \in X_0 \times [-1,1]$. Comme l'a remarqué Dranishnikov [2], la condition $S(f_1) \cap S(f_{-1}) = \emptyset$ garantit que φ est cellulaire. D'après le lemme 1, il nous suffit donc de prouver que φ est une injection homotopique fine.

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de Y. Prenons un recouvrement $\mathcal{U}'$ de Y tel que $\mathrm{St}(\mathcal{U}')$ soit plus fin que $\mathcal{U}$. Nous allons construire des fonctions continues $\chi : Y \to D(f_{-1}, f_1)$ et $\psi : D(f_{-1}, f_1) \to D(f_{-1}, f_1)$ telles que $\chi \circ \varphi$ soit $\varphi^{-1}(\mathcal{U}')$-homotope à ψ et que ψ soit $\varphi^{-1}(\mathcal{U}')$-homotope à id. Alors $\chi \circ \varphi$ sera $\mathcal{U}$-homotope à id, ce qui prouvera que φ est une injection homotopique fine. La construction de ces fonctions nécéssite quelques préliminaires.

Pour $i = \pm 1$, prenons des recouvrements ouverts $\mathcal{G}_i^1, \ldots, \mathcal{G}_i^6$ de X_i vérifiant

(2) $\mathrm{St}(\mathcal{G}_i^1)$ est plus fin que $g_i^{-1}(\mathcal{U}')$,
(3) pour $1 \le j \le 5$, le couple $(\mathrm{St}(\mathcal{G}_i^{j+1}), \mathcal{G}_i^j)$ a la propriété $\mathcal{E}$.

Prenons des recouvrements ouverts $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ de X_0 vérifiant

(4) le couple $(\mathrm{St}(\mathcal{W}_1), f_1^{-1}(\mathcal{G}_1^6) \wedge f_{-1}^{-1}(\mathcal{G}_{-1}^6))$ a la propriété $\mathcal{E}$,
(5) le couple $(\mathrm{St}(\mathcal{W}_2), \mathcal{W}_1)$ a la propriété $\mathcal{E}$.

Le lemme 2 nous permet de trouver un $\varepsilon > 0$, un voisinage ouvert V de $Q(g_0, \varepsilon)$ dans Y et une fonction continue $\xi : V \to X_0$ telle que $\xi \circ (g | R(g_0, \varepsilon))$ soit $\mathcal{W}_2$-proche de l'inclusion de $R(g_0, \varepsilon)$ dans X_0. Pour $y \in V \cap Y_0$ et $x \in g_0^{-1}(y)$, il y a un élément de $\mathcal{W}_2$ contenant x et $\xi(y)$, donc $g_0^{-1}(y)$ est contenu dans $\mathrm{St}(\xi(y), \mathcal{W}_2)$. D'après (4) et (5), $\mathrm{St}(\mathcal{W}_2)$ est plus fin que $f_i^{-1}(\mathcal{G}_i^6)$, donc il y a un élément $G_i(y)$ de $\mathcal{G}_i^6$ qui contient $f_i(\xi(y))$ et $f_i(g_0^{-1}(y)) = g_i^{-1}(y)$. Nous pouvons trouver un voisinage ouvert V_y de y contenu dans V et tel que $f_i \circ \xi(V_y \cap Y_i) \cup g_i^{-1}(V_y) \subset G_i(y)$ pour $i = \pm 1$. Quitte à remplacer V par $\bigcup\{V_y \mid y \in V \cap Y_0\}$, nous pouvons donc supposer que

(6) pour $i = \pm 1$ et $y \in Y_i \cap V$, il y a un élément de $\mathcal{G}_i^6$ contenant $f_i \circ \xi(y)$ et $g_i^{-1}(y)$.

Si y appartient à $Y_0 \setminus V$, alors $\operatorname{diam} g_0^{-1}(y) \geq \varepsilon$, et il y a exactement un $i \in \{-1, 1\}$ tel que $f_i|g_0^{-1}(y)$ soit injective, donc que $g_i^{-1}(y) = f_i(g_0^{-1}(y))$ contienne plus d'un point. Posons $F_i = \{y \in Y_0 \setminus V \mid \operatorname{diam} g_i^{-1}(y) > 0\}$; alors $F_i \subset Q(g_{-i})$. Les ensembles F_1, F_{-1} sont disjoints, vérifient $F_1 \cup F_{-1} = Y \setminus V_0$ et, si $E_i = g_i^{-1}(F_i)$, alors $E_i \subset Q(f_i)$. En outre, F_1 et F_{-1} sont fermés dans Y. En effet, soit par exemple $\{y_n\}$ une suite de points de F_1 convergeant vers un point y ; alors $g_0^{-1}(y_n)$ contient des points x_n, x'_n tels que $d(x_n, x'_n) \geq \varepsilon$ et, quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{x_n\}$ et $\{x'_n\}$ convergent vers des points x, x' de $g_0^{-1}(y)$ tels que $d(x, x') \geq \varepsilon$. Pour tout n, $f_{-1}(x_n) = f_{-1}(x'_n)$, d'où aussi $f_{-1}(x) = f_{-1}(x')$. Par conséquent, $f_{-1}|g_0^{-1}(y)$ n'est pas injective, donc $f_{-1}(g_0^{-1}(y))$ est réduit à un point ; alors $f_1|g_0^{-1}(y)$ est injective, et y appartient à F_1.

Puisque E_i est contenu dans $Q(f_i)$, il existe un voisinage ouvert P_i de E_i dans X_i et une fonction continue $\eta_i : P_i \to X_0$ telle que $\eta_i(x) = f_i^{-1}(x)$ pour $x \in E_i$. Nous supposons P_i assez petit pour que la condition suivante soit vérifiée :

(7) $f_i \circ \eta_i$ est $\mathcal{G}_i^6$-proche de id_{P_i}.

Puisque F_i est contenu dans $Q(g_{-i})$, il existe un voisinage ouvert U_i de F_i dans Y et une fonction continue $\pi_i : U_i \to X_{-i}$ telle que $\pi_i(y) = g_{-i}^{-1}(y)$ pour $y \in F_i$. Pour $y \in g_0^{-1}(F_i)$, nous avons $\pi_i(g_0(y)) = g_{-i}^{-1}(g_0(y)) = f_{-i}(y)$, donc, quitte à restreindre U_i, nous pouvons supposer que

(8) $\pi_i \circ (g_0|g_0^{-1}(U_i))$ est $\mathcal{G}_{-i}^4$-proche de $f_{-i}|g_0^{-1}(U_i)$.

Pour $i = \pm 1$, nous avons $\varphi^{-1}(F_i) = p(g_0^{-1}(F_i) \times [-1, 1])$. Nous pouvons trouver un voisinage ouvert O_i de $\varphi^{-1}(F_i)$ dans $D(f_{-1}, f_1)$ et une fonction continue $\vartheta_i : O_i \to X_{-i}$ telle que $\vartheta_i(z) = z$ pour $z \in O_i \cap X_{-i}$ et $\vartheta_i([x, t]) = f_{-i}(x)$ pour $[x, t] \in \varphi^{-1}(F_i)$ (cette condition a un sens quand $t = i$ car $E_i \subset Q(f_i)$). Quitte à diminuer O_i, nous pouvons supposer qu'il existe une homotopie $\Theta_i : O_i \times I \to D(f_{-1}, f_1)$ telle que $\Theta_i(z, 0) = z$, $\Theta_i(z, 1) = \vartheta_i(z)$, $\Theta_i(z, s) = z$ si $z \in O_i \cap X_{-i}$ et $\Theta_i([x, t], s) = [x, (1 - s)t - is]$ si $[x, t] \in \varphi^{-1}(F_i)$. Pour $z \in \varphi^{-1}(F_i)$, nous avons $\varphi(\Theta_i(z, s)) = \varphi(z)$ pour tout s, donc, quitte à diminuer O_i, nous pouvons supposer que

(9) Θ_i est une $\varphi^{-1}(\mathcal{U}')$-homotopie.

Posons $D'_0 = p(X_0 \times [-1/2, 1/2])$, $D'_{-1} = p(X_0 \times [-1, -1/2]) \cup X_{-1}$ et $D'_1 = p(X_0 \times [1/2, 1]) \cup X_1$. Si $z \in \varphi^{-1}(F_i)$ et $s \in I$ sont tels que $\Theta_i(z, s) \in D'_i$, alors $z \in D_i$ et $r_i(\Theta_i(z, s)) = r_i(z)$. Quitte à diminuer O_i, nous pouvons supposer que la condition suivante est vérifiée :

(10) $\Theta_i^{-1}(D'_i) \subset D_i$ et $r_i \circ (\Theta_i|\Theta_i^{-1}(D'_i))$ est $\mathcal{G}_i^4$-proche de $r_i|\Theta_i^{-1}(D'_i)$.

Comme $\varphi^{-1}(U_i)$ est un voisinage de $\varphi^{-1}(F_i)$, nous pouvons supposer que O_i est contenu dedans. Pour $z = [x, t] \in \varphi^{-1}(F_i)$ et $s \in I$ tels que $\Theta_i(z, s) \in D'_{-i}$, nous avons $r_{-i}(\Theta_i(z, s)) = f_{-i}(x) = \pi_i(\varphi(z))$. Quitte à diminuer O_i, nous pouvons donc supposer que

(11) si $z \in O_i$ et $s \in I$ sont tels que $\Theta_i(z, s) \in D'_{-i}$, alors il y a un élément de $\mathcal{G}_{-i}^4$ contenant $r_{-i}(\Theta_i(z, s))$ et $\pi_i(\varphi(z))$.

Si $z = [x, i] \in E_i = \varphi^{-1}(F_i) \cap X_i$ et $s \in I$ sont tels que $\Theta_i(z, s) \in D'_0$, alors $r_0(\Theta_i(z, s)) = x = \eta_i(z)$. Quitte à diminuer O_i, nous pouvons supposer que

(12) si $z \in O_i \cap X_i$ et $s \in I$ sont tels que $\Theta_i(z, s) \in D'_0$, alors il existe un élément de $\mathcal{W}_1$ contenant $\eta_i(z)$ et $r_0(\Theta_i(z, s))$.

Enfin, nous pouvons aussi supposer que

(13) pour $z \in O_i \cap \varphi^{-1}(Y_0 \cap V)$ et $s \in I$ tels que $\Theta_i(z, s) \in D'_0$, il existe un élément de $\mathcal{W}_1$ contenant $\xi(\varphi(z))$ et $r_0(\Theta_i(z, s))$.

Pour voir cela, choisissons, pour chaque $x \in g_0^{-1}(F_i) = f_i^{-1}(E_i)$, un élément W_x de $\mathcal{W}_2$ contenant x. Puisque $f_i^{-1}(f_i(x)) = x$, il y a un voisinage ouvert J_x de $f_i(x)$ dans X_i tel que $f_i^{-1}(J_x) \subset W_x$. Soient $y \in \varphi^{-1}(F_i)$ et $s \in I$ tels que $\Theta_i(y, s) \in D'_0$; alors $y \in D'_i \cup D'_0$ et, si $y = [x, t]$, nous avons $r_i(y) = r_i(\Theta_i(y, s)) = f_i(x)$, donc $\{y\} \cup (\Theta_i(\{y\} \times I) \cap D'_0) \subset r_i^{-1}(J_x)$. Nous pouvons donc choisir O_i de façon que si $z \in O_i$ et s'il existe $s \in I$ tel que $\Theta_i(z, s) \in D'_0$, alors $z \in D_i$ et il existe $x \in f_i^{-1}(E_i)$ tel que $\{z\} \cup (\Theta_i(\{z\} \times I) \cap D'_0) \subset r_i^{-1}(J_x)$. La condition (13) est alors vérifiée. En effet, soient $z = [x', t'] \in O_i \cap \varphi^{-1}(Y_0 \cap V)$ et $s \in I$ tels que $\Theta_i(z, s) = [x'', t''] \in D'_0$. Il existe $x \in f_i^{-1}(E_i)$ tel que $\{z, \Theta_i(z, s)\} \subset r_i^{-1}(J_x)$; cette inclusion entraîne $\{x', x''\} \subset f_i^{-1}(J_x) \subset W_x$. Nous avons $\varphi(z) = g_0(x')$, donc il existe $W' \in \mathcal{W}_2$ contenant $\{x', \xi(g_0(x'))\}$; alors $W_x \cup W'$, qui contient $\{x'', \xi(g_0(x'))\}$, est contenu dans un élément W de $\mathcal{W}_1$, et $r_0^{-1}(W)$ contient $\Theta_i(z, s)$ et $\xi(\varphi(z))$, d'où (13).

Nous pouvons maintenant commencer la construction des fonctions χ et ψ et des homotopies, qui se fera en plusieurs étapes.

Première étape : construction, pour $i = \pm 1$, d'un voisinage B_i de $Y_0 \setminus F_{-i}$ dans Y_i et d'une fonction continue $\mu_i : B_i \setminus F_i \to X_0$.

Puisque l'ouvert P_i contient $E_i = g_i^{-1}(F_i)$, il y a un voisinage ouvert A_i de F_i dans Y_i tel que $g_i^{-1}(A_i) \subset P_i$.

Affirmation 1. *Il existe un voisinage V' de $Y_0 \setminus (F_1 \cup F_{-1})$ dans Y contenu dans V et, pour $i = \pm 1$, un voisinage A'_i de F_i dans Y_i contenu dans A_i tels que $\xi|(V' \cap A'_i) \setminus Y_0$ et $\eta_i \circ g_i^{-1}|(V' \cap A'_i) \setminus Y_0$ soient* $\mathrm{St}(\mathcal{W}_2)$*-proches.*

Preuve. Pour $y \in F_1$ et $x \in g_i^{-1}(y)$, prenons $W_y(x) \in \mathcal{W}_2$ contenant $f_i^{-1}(x) = \eta_i(x)$. Il existe un voisinage $Z_y(x)$ de x dans X_i, contenu dans P_i et tel que $W_y(x)$ contienne $\eta_i(Z_y(x)) \cup f_i^{-1}(Z_y(x))$. Soit A_y un voisinage ouvert de y dans Y_i contenu dans A_i et tel que $g_i^{-1}(A_y) \subset \bigcup\{Z_y(x) \mid x \in g_i^{-1}(y)\}$, et soit $A_i^\dagger = \bigcup\{A_y \mid y \in F_i\}$. Puisque $F_1 \cap F_{-1} = \emptyset$, nous pouvons, quitte à diminuer les A_y, supposer que $\overline{A_1^\dagger} \cap \overline{A_{-1}^\dagger} = \emptyset$. Soit A'_i un voisinage ouvert de F_i dans Y_i tel que $\overline{A'_i} \subset A_i^\dagger$.

Pour $y \in A_i^\dagger \cap Y_0$, choisissons un $z(y) \in F_i$ tel que $y \in A_{z(y)}$. Alors $T_y = \bigcup\{Z_{z(y)}(x) \mid x \in g_i^{-1}(z(y))$ et $Z_{z(y)}(x) \cap g_i^{-1}(y) \neq \emptyset\}$ est un voisinage de $g_i^{-1}(y)$ dans X_i. Comme $\mathrm{St}(\xi(y), \mathcal{W}_2)$ contient $g_0^{-1}(y)$, nous pouvons trouver un voisinage V_y de y dans Y contenu dans $V \cap A_i^\dagger$ tel que $\xi(V_y) \cup g_0^{-1}(V_y) \subset \mathrm{St}(\xi(y), \mathcal{W}_2)$ et que $g_i^{-1}(V_y \cap Y_i) \subset T_y$; nous pouvons aussi supposer que $V_y \cap \overline{A_{-i}^\dagger} = \emptyset$. Soit $V_i = \bigcup\{V_y \mid y \in A_i^\dagger \cap Y_i\}$; alors $V' = (V \setminus (\overline{A'_1} \cup \overline{A'_{-1}})) \cup V_1 \cup V_{-1}$ est un voisinage de $Y_0 \setminus (F_1 \cup F_{-1})$ contenu dans V.

Soit $y \in (V' \cap A'_i) \setminus Y_0$. Par construction, $V_i \cap A'_{-i} = \emptyset$, donc y appartient à $V_i \cap A'_i$. Il existe $y_0 \in A_i^\dagger \cap Y_0$ tel que $y \in V_{y_0}$; alors $\mathrm{St}(\xi(y_0), \mathcal{W}_2)$ contient $\xi(y)$ et $g_0^{-1}(y_0)$. Soit $z = z(y_0)$. Puisque $g_i^{-1}(V_{y_0} \cap A_i) \subset T_{y_0}$, il existe $x \in g_i^{-1}(z)$ et $x' \in g_i^{-1}(y_0)$ tels que $Z_z(x)$ contienne $g_i^{-1}(y)$ et x' ; alors $W_z(x)$ contient $\eta_i(Z_z(x)) \cup f_i^{-1}(Z_z(x)) \supset \{\eta_i(g_i^{-1}(y)\} \cup f_i^{-1}(x')$. Comme x' appartient à $g_i^{-1}(y_0)$, nous avons $\emptyset \neq f_i^{-1}(x') \subset f_i^{-1}(g_i^{-1}(y_0)) = g_0^{-1}(y_0)$, donc $W_z(x) \cap \mathrm{St}(\xi(y_0), \mathcal{W}_2) \neq \emptyset$. Alors $W_z(x) \cup \mathrm{St}(\xi(y_0), \mathcal{W}_2)$ est contenu dans un élément de $\mathrm{St}(\mathcal{W}_2)$ et contient $\eta_i \circ g_i^{-1}(y)$ et $\xi(y)$, d'où l'affirmation.

L'ensemble $B_i = A'_i \cup (V' \cap Y_i)$ est un voisinage de $F_i \cup (V \cap Y_0)$ dans Y_i. Les ensembles $(V' \setminus A'_i) \cup (V \cap Y_0)$ et $A'_i \setminus V'$ sont fermés dans $B_i \setminus F_i$ et disjoints ; soient N_i, N'_i des voisinages fermés disjoints de ces ensembles dans $B_i \setminus F_i$. L'affirmation 1, (5) et (A) nous permettent de trouver une fonction continue $\mu_i : (V' \cap A'_i) \setminus Y_0 \to X_0$ qui est $\mathcal{W}_1$-proche des restrictions de ξ et de $\eta_i \circ g_i^{-1}$ et est égale à ξ sur $N_i \cap (V' \cap A'_i) \setminus Y_0$ et à $\eta_i \circ g_i^{-1}$ sur $N'_i \cap (V' \cap A'_i) \setminus Y_0$; cette fonction se prolonge continuement à $B_i \setminus F_i$ en posant $\mu_i(x) = \xi(x)$ si $x \in (V' \setminus A'_i) \cup (V' \cap Y_0)$ et $\mu_i(x) = \eta_i \circ g_i^{-1}(x)$ si $x \in A'_i \setminus V'_i$.

Deuxième étape : construction d'une fonction continue $\zeta : Y \setminus (F_1 \cup F_{-1}) \to D(f_{-1}, f_1)$.

Affirmation 2. *Les fonctions $\mu_i|B_i \setminus Y_0$ et $g_i^{-1}|B_i \setminus Y_0$ sont $r_i^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{G}_i^6))$-proches.*

Preuve. Soit $y \in B_i \setminus Y_0$. Si $\mu_i(y) = \eta_i \circ g_i^{-1}(y)$, il résulte de (7) que $\mu_i(y)$ et $g_i^{-1}(y)$ sont contenus dans un élément de $r_i^{-1}(\mathcal{G}_i^6)$. Si $\mu_i(y) \neq \eta_i \circ g_i^{-1}(y)$, alors y appartient à V' et, puisque $r_i|X_0 = f_i$, (6) entraîne l'existence d'un élément G_1 de $r_i^{-1}(\mathcal{G}_i^6)$ contenant $\xi(y)$ et $g_i^{-1}(y)$; si $\mu_i(y) \neq \xi(y)$, il y a un élément de $\mathcal{W}_1$ contenant $\xi(y)$ et $\mu_i(y)$, donc, d'après (4), un élément G_2 de $r_i^{-1}(\mathcal{G}_i^6)$ contenant ces deux points ; alors $\xi(y) \in G_1 \cap G_2$, donc $G_1 \cup G_2$, qui contient $\mu_i(y)$ et $g_i^{-1}(y)$, est contenu dans un élément de $r_i^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{G}_i^6))$.

Les ensembles $Y_0 \setminus F_{-i}$ et $Y_i \setminus (B_i \cup F_{-i})$ sont fermés et disjoints dans $Y_i \setminus F_{-i}$; soient M_i, M_i' des voisinages fermés disjoints de ces ensembles dans $Y_i \setminus F_{-i}$. L'affirmation 2, (3), (B) et (A) nous permettent de trouver une fonction continue $\zeta_i : B_i \setminus Y_0 \to D_i$ qui est $r_i^{-1}(\mathcal{G}_i^5)$-proche de $\mu_i|B_i \setminus Y_0$ et de $g_i^{-1}|B_i \setminus Y_0$ et est égale à μ_i sur $M_i \cap (B_i \setminus Y_0)$ et à g_i^{-1} sur $M_i' \cap (B_i \setminus Y_0)$. Nous prolongeons continuement cette fonction à $Y_i \setminus (F_1 \cup F_{-1})$ en posant $\zeta_i(y) = \mu_i(y)$ si $y \in V' \cap Y_0 = Y_0 \setminus (F_1 \cup F_{-1})$ et $\zeta_i(y) = g_i^{-1}(y)$ si $y \in Y_i \setminus B_i$.

Si $y \in Y_0 \setminus (F_1 \cup F_{-1})$, nous avons $\zeta_1(y) = \mu_1(y) = \xi(y) = \mu_{-1}(y) = \zeta_{-1}(y)$, donc nous pouvons définir $\zeta : Y \setminus (F_1 \cup F_{-1}) \to D(f_{-1}, f_1)$ par $\zeta|Y_i \setminus (F_1 \cup F_{-1}) = \zeta_i$.

Troisième étape : fin de la construction de χ.

Affirmation 3. *Il existe un voisinage ouvert $U_i' \subset U_i$ de F_i dans Y tel que $U_i' \cap Y_i \subset M_i \cap A_i'$ et que $\pi_i|U_i' \setminus F_i$ soit $r_{-i}^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{G}_{-i}^5))$-proche de $\zeta|U_i' \setminus F_i$.*

Preuve. Puisque $\pi_i|F_i = g_{-i}^{-1}|F_i$, nous pouvons trouver un voisinage $U_i^\S$ de F_i contenu dans U_i et tel que $\pi_i|Q(g_{-i}) \cap U_i^\S$ soit $\mathcal{G}_{-i}^5$-proche de $g_{-i}^{-1}|Q(g_{-i}) \cap U_i^\S$; comme $\zeta|U_i^\S \setminus Y_i = \zeta_{-i}|U_i^\S \setminus Y_i$ est $r_{-i}^{-1}(\mathcal{G}_{-i}^5)$-proche de $g_{-i}^{-1}|U_i^\S \setminus Y_i$, les fonctions $\pi_i|U_i^\S \setminus Y_i$ et $\zeta|U_i^\S \setminus Y_i$ sont alors $r_{-i}^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{G}_{-i}^5))$-proches. Puisque $M_i \cap A_i'$ est un voisinage de F_i dans Y_i, nous pouvons aussi supposer que $U_i^\S \cap Y_i \subset M_i \cap A_i'$.

Pour $z \in F_i$, fixons $G_z \in \mathcal{G}_{-i}^5$ contenant $\pi_i(z)$. Nous avons $\eta_i(g_i^{-1}(z)) = f_i^{-1}(g_i^{-1}(z)) = f_{-i}^{-1}(g_{-i}^{-1}(z)) = f_{-i}^{-1}(\pi_i(z)) \subset f_{-i}^{-1}(G_z)$, donc nous pouvons trouver un voisinage U_z de z contenu dans $U_i^\S$ et tel que $\pi_i(U_z) \subset G_z$ et $\eta_i(g_i^{-1}(U_z)) \cup f_i^{-1}(g_i^{-1}(U_z)) \subset f_{-i}^{-1}(G_z) \subset r_{-i}^{-1}(G_z)$.

Soit $y \in U_z \cap (Y_i \setminus F_i)$. Si $y \in Y_0$, alors $\zeta(y) = \xi(y)$; prenant $x \in g_0^{-1}(y) = f_i^{-1}(g_i^{-1}(y))$, il y a un élément de $\mathcal{W}_2$ contenant x et $\xi(y)$, donc, d'après (5), (4) et (3), un élément G_y de $\mathcal{G}_{-i}^5$ tel que $r_{-i}^{-1}(G_y)$ contienne x et $\xi(y)$. Alors $x \in r_{-i}^{-1}(G_y) \cap r_{-i}^{-1}(G_z)$, donc $G_y \cap G_z \neq \emptyset$ et $r_{-i}^{-1}(G_y \cup G_z)$ est contenu dans un élément de $r_{-i}^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{G}_{-i}^5))$ et contient $\pi_i(y)$ et $\zeta(y)$. Si $y \in Y_i \setminus Y_0$, alors, puisque $U_z \cap Y_i \subset U_i^\S \cap Y_i \subset M_i \cap A_i'$, nous avons $\zeta(y) = \zeta_i(y) = \mu_i(y)$ et ou bien $\mu_i(y) = \eta_i(y) \circ g_i^{-1}(y)$, ou bien il y a un élément de $\mathcal{W}_1$ contenant $\mu_i(y)$ et $\eta_i \circ g_i^{-1}(y)$; d'après (4) et (3), il y a donc un $G_y \in \mathcal{G}_{-i}^5$ tel que $r_{-i}^{-1}(G_y)$ contienne $\mu_i(y)$ et $\eta_i \circ g_i^{-1}(y)$. Alors $\eta_i \circ g_i^{-1}(y) \in r_{-i}^{-1}(G_y \cap G_z)$, donc $r_{-i}^{-1}(G_y \cup G_z)$ est contenu dans un élément de $r_{-i}^{-1}(\mathcal{G}_{-i}^5)$ et contient $\pi_i(y)$ et $\zeta(y)$.

Il résulte de ce qui précède que $U_i' = \bigcup\{U_z \mid z \in F_i\}$ vérifie les conditions de l'affirmation.

Nous supposerons aussi les U_i' assez petits pour que $U_1' \cap U_{-1}' = \emptyset$. Puisque O_i est un voisinage de $\varphi^{-1}(F_i)$, nous pouvons trouver des voisinages ouverts U_i^1, U_i^2 et U_i^3 de F_i dans Y vérifiant $\overline{U_i^1} \subset U_i^2$, $\overline{U_i^2} \subset U_i^3$, $\overline{U_i^3} \subset U_i'$ et $\varphi^{-1}(\overline{U_i^3}) \subset O_i$. L'affirmation 3, (3), (B) et (A) nous permettent de trouver une fonction continue $\chi_i : U_i' \setminus F_i \to D_{-i}$ qui est $r_{-i}^{-1}(\mathcal{G}_{-i}^4)$-proche de $\pi_i|U_i' \setminus F_i$ et de $\zeta|U_i' \setminus F_i$ et telle que $\chi_i|\overline{U_i^1} \setminus F_i = \pi_i|\overline{U_i^1} \setminus F_i$ et $\chi_i|U_i' \setminus U_i^2 = \zeta|U_i' \setminus U_i^2$. Nous pouvons maintenant définir la fonction $\chi : Y \to D(f_{-1}, f_1)$ par

$$\chi(y) = \begin{cases} \pi_i(y) & \text{si } y \in \overline{U_i^1},\ i = \pm 1, \\ \chi_i(y) & \text{si } y \in \overline{U_i^2} \setminus U_i^1,\ i = \pm 1, \\ \zeta(y) & \text{si } y \in Y \setminus (U_1^2 \cup U_{-1}^2). \end{cases}$$

Quatrième étape : construction de ψ.

Soit $\alpha_i : D(f_{-1}, f_1) \to I$ une fonction continue égale à un sur $\varphi^{-1}(\overline{U_i^2})$ et à zéro sur $D(f_{-1}, f_1) \setminus \varphi^{-1}(U_i^3)$. Comme $U_1' \cap U_{-1}' = \emptyset$, nous pouvons définir $\psi : D(f_{-1}, f_1) \to D(f_{-1}, f_1)$ par

$$\psi(z) = \begin{cases} \Theta_i(z, \alpha_i(z)) & \text{si } z \in \varphi^{-1}(\overline{U_i^3}),\ i = \pm 1, \\ z & \text{si } z \notin \varphi^{-1}(U_1^3 \cup U_{-1}^3). \end{cases}$$

L'identité et ψ sont homotopes par l'homotopie

$$\Psi(z, s) = \begin{cases} \Theta_i(z, s\alpha_i(z)) & \text{si } z \in \varphi^{-1}(\overline{U_i^3}),\ i = \pm 1, \\ z & \text{si } z \notin \varphi^{-1}(U_1^3 \cup U_{-1}^3). \end{cases}$$

Il résulte de (9) que Ψ est une $\varphi^{-1}(\mathcal{U}')$-homotopie.

Dernière étape : construction d'une $\varphi^{-1}(\mathcal{U}')$-homotopie entre $\chi \circ \varphi$ et ψ.

Pour $i = 0, \pm 1$, soit $L_i = \psi^{-1}(D_i')$.

Affirmation 4. (i) $L_0 \subset (\chi \circ \varphi)^{-1}(D_0)$ *et* $\psi|L_0$ *est* $r_0^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{W}_1))$*-proche de* $\chi \circ \varphi|L_0$.

(ii) *Pour* $i = \pm 1$, $L_i \subset (\chi \circ \varphi)^{-1}(D_i)$ *et* $\psi|L_i$ *est* $r_i^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{G}_i^4))$*-proche de* $\chi \circ \varphi|L_i$.

Preuve. Puisque $D_1' \cap D_{-1}' = \emptyset$, les cinq cas suivants exhaustent toutes les possibilités.

(a) $\varphi(z) \in Y_i \cap \overline{U_i^2}$, $i = \pm 1$. Alors $\psi(z) = \vartheta_i(z)$, donc $z \in L_{-i} \setminus L_0$. La construction de la fonction χ garantit l'existence d'un élément G_1 de $\mathcal{G}_{-i}^4$ tel que $r_{-i}^{-1}(G_1)$ contienne $\chi(\varphi(z))$ et $\pi_i(\varphi(z))$. D'après (11), il y a un élément

G_2 de $\mathcal{G}^4_{-i}$ contenant $\vartheta_i(z)$ et $\pi_i(\varphi(z))$. Alors $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, donc $r^{-1}_{-i}(G_1 \cup G_2)$ est contenu dans un élément de $r^{-1}_{-i}(\mathrm{St}(\mathcal{G}^4_{-i}))$ et contient $\psi(z)$ et $\chi \circ \varphi(z)$.

(b) $z = [x,t] \in p(X_0 \times [-1,1])$ et $\varphi(z) \notin U^3_1 \cup U^3_{-1}$. Alors $\psi(z) = z$ et $\chi(\varphi(z)) = \zeta(\varphi(z)) = \xi(\varphi(z)) = \xi(g_0(z))$. Il existe $W \in \mathcal{W}_2$ contenant $\{x, \xi(g_0(x))\}$. Si $z \in L_0$, alors $r_0^{-1}(W)$ contient $\{z, \xi(\varphi(z))\}$. Si $z \in L_i$, $i = \pm 1$, il existe, d'après (4) et (5), un élément G de $\mathcal{G}^4_i$ contenant $f_i(W)$; alors $r_i^{-1}(G)$ contient $\{z, \xi(\varphi(z))\}$.

(c) $z = [x,t]$ et $\varphi(z) \in \overline{U^3_i} \setminus U^2_i$, $i = \pm 1$. Alors $\psi(z) = \Theta_i(z, \alpha_i(z))$ et $\chi(\varphi(z)) = \zeta(\varphi(z)) = \xi(\varphi(z))$. Si $\psi(z) \in D'_0$, il résulte de (13) qu'il existe un élément de $r_0^{-1}(\mathcal{W}_1)$ contenant $\psi(z)$ et $\chi(\varphi(z))$.

Si $z \in D'_i$, il résulte de (10) qu'il existe $G_1 \in \mathcal{G}^4_i$ tel que $r_i^{-1}(G_1)$ contienne z et $\psi(z)$. Il existe $W \in \mathcal{W}_2$ contenant x et $\xi(g_0(x)) = \xi(\varphi(z))$ et, d'après (5), (4) et (3), il existe $G_2 \in \mathcal{G}^4_i$ contenant $f_i(W)$. Alors $f_i(x) = r_i(z) \in G_1 \cap G_2$, donc $r_i^{-1}(G_1 \cup G_2)$, qui contient $\psi(z)$ et $\xi(\varphi(z)) = \chi(\varphi(z))$, est contenu dans un élément de $r_i^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{G}^4_i))$.

Si $z \in D'_{-i}$, il y a, d'après (11), un élément G_1 de $\mathcal{G}^4_{-i}$ contenant $r_{-i}(\psi(z))$ et $\pi_i(\varphi(z))$. Puisque $\overline{U^3_i} \subset U'_i$, l'affirmation 3 et (3) entraînent l'existence d'un élément G_2 de $\mathcal{G}^4_{-i}$ contenant $\pi_i(\varphi(z))$ et $r_{-i}(\zeta(\varphi(z))$. Alors $r^{-1}_{-i}(G_1 \cup G_2)$ est contenu dans un élément de $r^{-1}_{-i}(\mathrm{St}(\mathcal{G}^4_{-i}))$ et contient $\psi(z)$ et $\chi(\varphi(z)) = \zeta(\varphi(z))$.

(d) $\varphi(z) \in Y_i \setminus (Y_0 \cup U^3_i)$. Alors $z \in X_i$ et $\psi(z) = z$ (même si $\varphi(z) \in Y_i \cap U^3_{-i}$, car dans ce cas $\Theta_{-i}(z,s) = z$ pour tout s), donc $z \in L_i \setminus L_0$. Si $z \in \overline{U^1_{-i}}$, alors $\chi(\varphi(z)) = \pi_{-i}(\varphi(z))$ et, d'après (11), il y a un élément de $\mathcal{G}^4_i$ contenant $\pi_{-i}(\varphi(z))$ et $r_i(\vartheta_{-i}(z)) = r_i(z) = z$.

Si $z \notin \overline{U^1_{-i}}$, ou bien $\chi(\varphi(z)) = \zeta(\varphi(z))$, ou bien il y a un élément de $r_i^{-1}(\mathcal{G}^4_i)$ contenant $\chi(\varphi(z)) = \chi_{-i}(\varphi(z))$ et $\zeta(\varphi(z)) = \zeta_i(g_i(z))$. Par construction de ζ_i, ou bien $\zeta_i(g_i(z)) = g_i^{-1}(g_i(z)) = z$, ou bien il y a un élément de $r_i^{-1}(\mathcal{G}^5_i)$ contenant $z = g_i^{-1}(g_i(z))$ et $\zeta_i(g_i(z))$. Dans tous les cas, $\psi(z) = z$ et $\chi(\varphi(z))$ sont contenus dans un élément de $r_i^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{G}^4_i))$.

(e) $\psi(z) \in (Y_1 \setminus Y_0) \cap (U^3_i \setminus U^2_i)$. Alors z appartient à X_i, $\psi(z) = \Theta_i(z, \alpha_i(z))$ et $\chi(\varphi(z)) = \zeta(\varphi(z)) = \zeta_i(g_i(z)) = \mu_i(g_i(z))$ (puisque $g_i(z) \in U'_i \cap Y_i \subset M_i$). Comme $U'_i \cap Y_i \subset M_i \cap A'_i$, la construction de μ_i garantit l'existence d'un élément W_z de $\mathcal{W}_1$ contenant $\mu_i(g_i(z))$ et $\eta_i \circ g_i^{-1}(g_i(z)) = \eta_i(z)$.

Si $\psi(z) \in D'_0$, (12) entraîne l'existence d'un élément W de $\mathcal{W}_1$ contenant $\eta_i(z)$ et $r_0(\psi(z))$. Alors $r_0^{-1}(W_z \cup W)$ est contenu dans un élément de $r_0^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{W}_1))$ et contient $\psi(z)$ et $\chi(\varphi(z))$.

Si $\psi(z) \in D'_i$, il existe, d'après (10), un élément G_1 de $\mathcal{G}^4_i$ contenant $r_i(\psi(z))$ et $r_i(z) = z$. D'après (7) et (3), il existe $G_2 \in \mathcal{G}^4_i$ contenant z et $f_i(\eta_i(z))$. D'après (4) et (3), $f_i(W_z) = r_i(W_z)$ est contenu dans un élément G_3 de $\mathcal{G}^4_i$. Alors $r_i^{-1}(\mathrm{St}(G_2, \mathcal{G}^4_i))$ contient $\psi(z)$ et $\psi(\varphi(z))$.

Si $\psi(z) \in D'_{-i}$, il existe, d'après (11), un élément G_1 de $\mathcal{G}^4_{-i}$ contenant $r_{-i}(\psi(z))$ et $\pi_i(\varphi(z)) = \pi_i(g_i(z))$. D'après l'affirmation 3 et (3), il existe $G_2 \in \mathcal{G}^4_{-i}$ contenant $\pi_i(g_i(z))$ et $\zeta(g_i(z)) = \chi(\varphi(z))$. Alors $r^{-1}_{-i}(\mathrm{St}(G_2, \mathcal{G}^4_{-i}))$ contient $\psi(z)$ et $\chi \circ \varphi(z)$.

L'affirmation 4(i) entraîne l'existence d'un voisinage fermé $\widehat{L}_0$ de L_0 tel que $\chi\circ\varphi(\widehat{L}_0) \subset D_0$, $\psi(\widehat{L}_0) \subset D_0$ et que $\chi\circ\varphi|\widehat{L}_0$ et $\psi|\widehat{L}_0$ soient $r_0^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{W}_1))$-proches. D'après (4) et (B), il y a donc une $r_0^{-1}(f_1^{-1}(\mathcal{G}^6_1) \wedge f_{-1}^{-1}(\mathcal{G}^6_{-1}))$-homotopie $\Xi_0 : \widehat{L}_0 \times I \to D_0$ telle que $\Xi_0(z,0) = \chi \circ \varphi(z)$ et $\Xi_0(z,1) = \psi(z)$.

Pour $i = \pm 1$, l'affirmation 4(ii), (3) et (B) nous fournissent une $r_i^{-1}(\mathcal{G}^3_i)$-homotopie $\Xi_i : L_i \times I \to D_i$ telle que $\Xi_i(z,0) = \chi\circ\varphi(z)$ et $\Xi_i(z,1) = \psi(z)$.

Puisque $f_i \circ r_0 = r_i|D_0$, Ξ_0 est une $r_i^{-1}(\mathcal{G}^6_i)$-homotopie, et comme $\Xi_0(z,0) = \Xi_i(z,0)$ pour $z \in \widehat{L}_0 \cap L_i$, les fonctions $\Xi_0|(\widehat{L}_0 \cap L_i) \times I$ et $\Xi_i|(\widehat{L}_0 \cap L_i) \times I$ sont $r_i^{-1}(\mathrm{St}(\mathcal{G}^3_i))$-proches. D'après (3) et (B), il existe une homotopie $\Delta^0_i : (\widehat{L}_0 \cap L_i) \times I \times I \to D_i$ telle que $\Delta^0_i(z,s,0) = \Xi_0(z,s)$, $\Delta^0_i(z,s,1) = \Xi_i(z,s)$ et que $\Delta^0_i(\{(z,s)\} \times I)$ soit contenu dans un élément de $r_i^{-1}(\mathcal{G}^2_i)$ pour tout $(z,s) \in (\widehat{L}_0 \cap L_i) \times I$.

Soit $K_i = (\widehat{L}_0 \cap L_i) \times ((\{0,1\} \times I) \cup (I \times \{0,1\}))$. Définissons une fonction $\Delta'_i : K_i \to D_i$ par

$$\Delta'_i(z,0,u) = \chi\circ\varphi(z), \quad \Delta'_i(z,s,0) = \Xi_0(z,s),$$
$$\Delta'_i(z,1,u) = \psi(z), \quad \Delta'_i(z,s,1) = \Xi_i(z,s).$$

Pour $j = 0,1$, nous avons $\Delta'_i(z,s,j) = \Delta^0_i(z,s,j)$ et, comme $\chi\circ\varphi(z) = \Delta^0_i(z,0,0)$ et $\psi(z) = \Delta^0_i(z,1,1)$, les points $\Delta'(z,j,u)$ et $\Delta^0_i(z,j,u)$ sont contenus dans un même élément de $r_i^{-1}(\mathcal{G}^2_i)$. Les fonctions Δ'_i et $\Delta^0_i|K_i$ sont donc $r_i^{-1}(\mathcal{G}^2_i)$-proches ; d'après (3) et (B), il existe une $r_i^{-1}(\mathcal{G}^1_i)$-homotopie $\Omega'_i : K_i \times I \to D_i$ telle que $\Omega'_i(z,s,u,0) = \Delta^0_i(z,s,u)$ et $\Omega'_i(z,s,u,1) = \Delta'_i(z,s,u)$. Le théorème d'extension des homotopies de Borsuk permet de prolonger Ω'_i en une homotopie $\Omega_i : (\widehat{L}_0 \cap L_i) \times I \times I \times I \to D_i$ telle que $\Omega_i(z,s,u,0) = \Delta^0_i(z,s,u)$ et que $\Omega_i(\{(z,s,u)\} \times I)$ soit contenu dans un élément de $r_i^{-1}(\mathcal{G}^1_i)$ pour $(z,s,u) \in (\widehat{L}_0 \cap L_i) \times I \times I$. Posons $\Delta^1_i(z,s,u) = \Omega_i(z,s,u,1)$.

Pour $i = \pm 1$, prenons une fonction continue $\beta_i : D(f_{-1}, f_1) \to I$ nulle sur L_0 et égale à un sur $L_i \setminus \mathrm{Int}\,\widehat{L}_0$. Définissons $\Phi : D(f_{-1}, f_1) \times I \to D(f_{-1}, f_1)$ par

$$\Phi(z,s) = \begin{cases} \Xi_0(z,s) & \text{si } z \in L_0, \\ \Xi_i(z,s) & \text{si } z \in L_i \setminus \mathrm{Int}\,\widehat{L}_0,\ i = \pm 1, \\ \Delta^1_i(z,s,\beta_i(z)) & \text{si } z \in \widehat{L}_0 \cap L_i,\ i = \pm 1. \end{cases}$$

Cette définition a un sens. En effet, si $z \in L_i \cap L_0$, alors $\beta_i(z) = 0$ et $\Delta_i^1(z, s, \beta_i(z)) = \Omega_i(z, s, 0, 1) = \Omega_i'(z, s, 0, 1) = \Delta_i'(z, s, 0) = \Xi_0(z, s)$ et si $z \in \widehat{L}_0 \cap L_i \setminus \operatorname{Int} \widehat{L}_0$, alors $\beta_i(z) = 1$ et $\Delta_i^1(z, s, \beta_i(z)) = \Omega_i(z, s, 1, 1) = \Delta_i'(z, s, 1) = \Xi_i(z, s)$.

Nous avons $\Phi(z, 0) = \chi \circ \varphi(z)$ et $\Phi(z, 1) = \psi(z)$. Cela est clair si $z \in L_0$ ou si $z \in L_i \setminus \operatorname{Int} \widehat{L}_0$. Dans le troisième cas, $\Phi(z, 0) = \Delta_i^1(z, 0, \beta_i(z)) = \Omega_i(z, 0, \beta_i(z), 1) = \Delta_i'(z, 0, \beta_i(z)) = \chi \circ \varphi(z)$ et $\Phi(z, 1) = \Delta_i^1(z, 1, \beta_i(z)) = \Delta_i'(z, 1, \beta_i(z)) = \psi(z)$.

Reste à vérifier que $\Phi(\{z\} \times I)$ est contenu dans un élément de $\varphi^{-1}(\mathcal{U}')$. D'après le choix de Ξ_0 et Ξ_i, cela est évident si $z \in L_0$ ou si $z \in L_i \setminus \operatorname{Int} \widehat{L}_0$. Soit $z \in \widehat{L}_0 \cap L_i$. Il existe un élément G de $\mathcal{G}_i^2$ tel que $\Xi_0(\{z\} \times I) \subset r_i^{-1}(G)$. Pour tout $s \in I$, il existe $G_s \in \mathcal{G}_i^2$ tel que $\Delta_i^0(\{(z, s)\} \times I) \subset r_i^{-1}(G_s)$; comme $\Delta_i^0(z, s, 0) = \Xi_0(z, s)$, nous avons donc $\Delta_i^0(\{z\} \times I \times I) \subset r_i^{-1}(\operatorname{St}(G, \mathcal{G}_i^2))$, et il y a un élément G^1 de $\mathcal{G}_i^1$ contenant $\Delta_i^0(\{z\} \times I \times I)$. Pour tout s, il existe $G_s^1 \in \mathcal{G}_i^1$ contenant $\Delta_i^0(z, s, \beta_i(z))$ et $\Delta_i^1(z, s, \beta_i(z))$. Par suite, $\Phi(\{z\} \times I) = \Delta_i^1(\{z\} \times I \times \{\beta_i(z)\})$ est contenu dans $r_i^{-1}(\operatorname{St}(G^1, \mathcal{G}_i^1))$, qui, d'après (2), est contenu dans un élément de $r_i^{-1}(g_i^{-1}(\mathcal{U}'))$; comme $\varphi | D_i = g_i \circ r_i$, $\Phi(\{z\} \times I)$ est bien contenu dans un élément de $\varphi^{-1}(\mathcal{U}')$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. D. Ancel, *The role of countable dimensionality in the theory of cell-like relations*, Trans. Amer. Math. Soc. 287 (1985), 1–40.

[2] A. N. Dranishnikov, *A generalization of Borsuk's pasting theorem and its application*, Topology Appl. 120 (2002), 169–174.

[3] S. T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.

Université Paris 6
UFR 920, Boîte courrier 172
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: cauty@math.jussieu.fr

Received 12 May 2003 (4344)