COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 105 2006 NO. 1

INÉGALITÉS À POIDS POUR L'OPÉRATEUR DE HARDY–LITTLEWOOD–SOBOLEV DANS LES ESPACES MÉTRIQUES MESURÉS À DEUX DEMI-DIMENSIONS

PAR

DAVID MASCRÉ (Cergy-Pontoise)

Abstract. On a metric measure space (X,ϱ,μ), consider the weight functions

$$w_\alpha(x)=\begin{cases}\varrho(x,z_0)^{-\alpha_0} & \text{if } \varrho(x,z_0)<1,\\ \varrho(x,z_0)^{-\alpha_1} & \text{if } \varrho(x,z_0)\ge 1,\end{cases}$$

$$w_\beta(x)=\begin{cases}\varrho(x,z_0)^{-\beta_0} & \text{if } \varrho(x,z_0)<1,\\ \varrho(x,z_0)^{-\beta_1} & \text{if } \varrho(x,z_0)\ge 1,\end{cases}$$

where z_0 is a given point of X, and let $\kappa_a : X\times X\to\mathbb{R}_+$ be an operator kernel satisfying

$$\kappa_a(x,y)\le\begin{cases}c\varrho(x,y)^{a-d} & \text{for all } x,y\in X \text{ such that } \varrho(x,y)<1,\\ c\varrho(x,y)^{a-D} & \text{for all } x,y\in X \text{ such that } \varrho(x,y)\ge 1,\end{cases}$$

where $0<a<\min(d,D)$, and d and D are respectively the local and global volume growth rate of the space X. We determine conditions on $a,\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1\in\mathbb{R}$ for the Hardy–Littlewood–Sobolev operator with kernel $\kappa(x,y)=w_\beta(x)\kappa_a(x,y)w_\alpha(y)$ to be bounded from $L^p(X)$ to $L^q(X)$ for $1<p\le q<\infty$.

INTRODUCTION

Le point de départ des résultats qui vont être établis dans cet article nous a été fourni par les travaux de Elias Stein et de Guido Weiss. Dans un article [23] de 1958, ces auteurs démontrent en effet le théorème suivant :

THÉORÈME 0.1. *Soit* $|\cdot|$ *la distance euclidienne et* dx *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^n$. *Soient* $p,q,\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}$ *tels que*

$$0<\lambda<n,\quad \alpha<\frac{n}{p'},\quad \beta<\frac{n}{q},\quad 0\le\alpha+\beta,$$

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{\lambda+\alpha+\beta}{n}-1,\quad 1<p\le q<\infty.$$

Soit κ *le noyau défini en posant*

$$\kappa(x,y)=|x|^{-\beta}|x-y|^{-\lambda}|y|^{-\alpha}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 26A33, 42B35.

Key words and phrases: metric measure space, Vitali space, Hardy–Littlewood–Sobolev operator, fractional integral, volume growth rate, non-doubling measure.

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\kappa(x,y)g(x)\,dy\,dx \le C\|f\|_p\|g\|_{q'} \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \forall g \in L^{q'}(\mathbb{R}^n).\ (^1)$$

En d'autres termes, l'opérateur T de noyau $\kappa(x,y)$ est borné de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Ce théorème peut être vu comme une généralisation à poids du théorème de Hardy–Littlewood–Sobolev. Ce dernier s'énonce en effet comme suit (cf. [23], [18], [11, p. 98]) :

Théorème 0.2. *Soit $|\cdot|$ la distance euclidienne et dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Soient $p, q, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < n$, $1/q = 1/p + \lambda/n - 1$, $1 < p < q < \infty$. Soit κ le noyau défini en posant*

$$\kappa(x,y) = |x-y|^{-\lambda}$$

et soit T_λ l'opérateur associé au noyau $\kappa(x,y)$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |T_\lambda f(x)|^q\,dx\Big)^{1/q} \le C\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

En d'autres termes, l'opérateur T_λ est borné de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Avec ces notations le théorème de Stein et Weiss prend la forme suivante :

Théorème 0.3. *Soit $|\cdot|$ la distance euclidienne et dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Soient $p, q, \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que*

$$0 < \lambda < n, \qquad \alpha < \frac{n}{p'}, \qquad \beta < \frac{n}{q}, \qquad 0 \le \alpha + \beta,$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\lambda + \alpha + \beta}{n} - 1, \qquad 1 < p \le q < \infty.$$

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |T_\lambda f(x)|^q |x|^{-\beta q}\,dx\Big)^{1/q} \le C\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p |x|^{\alpha p}\,dx\Big)^{1/p} \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

En d'autres termes, T_λ est borné de $L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{\alpha p})$ dans $L^q(\mathbb{R}^n, |x|^{-\beta q})$.

Notons qu'ici, le cas $p = q$ est admis, ce qui n'est pas le cas pour l'inégalité de Hardy–Littlewood–Sobolev sans poids.

Le but de cet article est de montrer que l'on peut obtenir un résultat analogue lorsque l'on se place dans le cadre beaucoup plus général d'espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume. Étant donné une

(^{1}) Étant donné un nombre réel $p > 1$, on désignera dans toute la suite par p' le conjugué de p, i.e. le nombre tel que $1/p + 1/p' = 1$.

distance ϱ, une mesure borélienne μ, on peut en tout point de l'espace métrique mesuré (X, ϱ, μ) définir une notion de croissance du volume en posant $V(x, r) = \mu(B(x, r))$, où $B(x, r) = \{y \in X \mid \varrho(x, y) < r\}$ désigne la boule de centre x et de rayon r. On dit alors que l'espace métrique mesuré (X, ϱ, μ) est *à croissance polynomiale d'ordre* n si

$$(V_n) \qquad V(x, r) \leq Cr^n \quad \forall x \in X, \forall r \in \mathbb{R}_+^*.$$

Sur un tel espace, on ne dispose plus, en règle générale, ni de la structure de groupe, ni de la structure de dilatation, ni du formalisme de la théorie de Fourier. Les techniques et arguments habituellement utilisés dans le cadre euclidien (cf. [21]–[23]) ne peuvent donc plus s'appliquer tels quels. On peut néanmoins contourner ces obstacles en faisant interagir d'une part les conditions de croissance du volume des boules et la notion de découpage en couronnes dyadiques, d'autre part certaines inégalités classiques de type inégalités maximales de Hardy–Littlewood et inégalité de Hardy–Littlewood–Sobolev. Ces inégalités restent en effet vraies sous une hypothèse fondamentale : que l'espace métrique mesuré considéré vérifie le lemme de recouvrement de Vitali.

On dit que (X, ϱ, μ) *vérifie le lemme de Vitali* si, pour tout ensemble $E \subseteq X$ borné (c'est-à-dire contenu dans une boule) tel que pour tout $x \in E$ une boule $B(x, r(x))$ de rayon $r(x) > 0$ soit donnée, il existe une suite (finie ou infinie) de points $x_k \in E$ telle que les boules $B(x_k, r(x_k))_k$ soient deux à deux disjointes et que la famille $B(x_k, Cr(x_k))_k$ (où C est une constante dépendant des caractéristiques de l'espace) forme un recouvrement de E.

Plusieurs auteurs (cf. [9], [7]) ont déjà souligné l'importance de cette hypothèse. Elle peut être satisfaite sans que l'espace soit de mesure doublante (cf. [9, p. 8]) et permet de s'assurer de l'existence d'un théorème de Hardy–Littlewood pour un certain type de fonction maximale. Suivant ces auteurs, nous dirons qu'un espace métrique mesuré *vérifie le lemme de recouvrement de Vitali* s'il est un espace de Vitali (cf. [9, p. 6]). Un exemple classique d'espace de Vitali est fourni par le cas de l'espace $(\mathbb{R}^n, \mu)$, où μ est une mesure de Radon (i.e. une mesure borélienne régulière telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$) non nécessairement doublante.

Dans toute la suite, on supposera toujours que l'espace considéré est un espace de Vitali. On montre alors, par des arguments classiques et dans la ligne des résultats établis par Gatto et Vagi (cf. [8]), García-Cuerva et Martell (cf. [7]) ou encore Cowling, Meda et Pasquale (cf. [3]), que dans le cas où l'espace d'étude est en outre à croissance polynomiale d'ordre n, l'inégalité de Hardy–Littlewood–Sobolev reste vraie. En effet, on a le

Théorème 0.4. *Soit (X, ϱ, μ) un espace métrique mesuré de Vitali à croissance polynomiale d'ordre n. Soient $p, q, a \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < n$, $1/q = 1/p - a/n$, $1 < p < q < \infty$. Soit $\kappa_a : X \times X \to \mathbb{R}_+$ une fonction* *mesurable vérifiant*

$$\kappa_a(x,y) \le c\varrho(x,y)^{a-n} \qquad \forall x,y \in X.$$

Alors il existe une constante $C>0$ telle que

$$\int_X \int_X g(x)\kappa_a(x,y)f(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) \le C\|f\|_p\|g\|_{q'} \qquad \forall f \in L^p(X),\ \forall g \in L^{q'}(X).$$

En d'autres termes, l'opérateur T de noyau $\kappa_a(x,y)$ est borné de $L^p(X)$ dans $L^q(X)$.

Ce résultat (cf. section 1) nous permet à notre tour d'obtenir une extension à poids du théorème de Hardy–Littlewood–Sobolev qui prend la forme suivante :

Théorème 0.5. *Soit (X,ϱ,μ) un espace métrique mesuré de Vitali à croissance polynomiale d'ordre n. Soit z_0 un point fixé de X. Soient $p,q,a,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha+\beta-a}{n}, \qquad 1 < p \le q < \infty,$$

$$\alpha < \frac{n}{p'}, \qquad \beta < \frac{n}{q}, \qquad 0 \le \alpha+\beta.$$

Soit $\kappa_a : X \times X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable vérifiant

$$\kappa_a(x,y) \le c\varrho(x,y)^{a-n} \qquad \forall x,y \in X.$$

Soit $\kappa : X \times X \to \mathbb{R}_+$ le noyau à poids défini en posant

$$\kappa(x,y) = w_\beta(x)\kappa_a(x,y)w_\alpha(y),$$

où

$$w_\beta(x) = \varrho(x,z_0)^{-\beta} \quad \text{et} \quad w_\alpha(y) = \varrho(y,z_0)^{-\alpha} \qquad \forall x,y \in X.$$

Alors il existe une constante $C>0$ telle que

$$\int_X \int_X g(x)\kappa(x,y)f(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) \le C\|f\|_p\|g\|_{q'} \qquad \forall f \in L^p(X),\ \forall g \in L^{q'}(X).$$

En d'autres termes, l'opérateur T de noyau $\kappa_a(x,y)$ est borné de $L^p(X, w^p_{-\alpha})$ dans $L^q(X, w^q_\beta)$.

Ce résultat s'inscrit dans la ligne des nombreux travaux qui s'attachent depuis quelques années à déterminer les conditions suffisantes pour obtenir des inégalités à poids pour l'opérateur fractionnaire et l'opérateur maximal dans le cadre d'espaces de type homogène (cf. [19], [20]) ou bien d'espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume (cf. [5]–[7], [13], [15]). Dans cet article, nous nous situerons toujours dans ce dernier cadre : tous les résultats obtenus le seront donc sans hypothèse de doublement du volume.

Ceci mérite d'être souligné : dans le cas où l'espace est de type homogène (autrement dit, il vérifie la condition de doublement du volume), Sawyer et Wheeden ont en effet obtenu un théorème général donnant les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur T soit borné de $L^p(X, w)$ dans $L^q(X, v)$ (cf. [19], [20]). En appliquant ce résultat au cas particulier où les poids sont de la forme $w(x) = \varrho(x, z_0)^{-\alpha p}$ et $v(x) = \varrho(x, z_0)^{\beta q}$ pour tout $x \in X$, on retrouve les conditions sur les indices $p, q, a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ obtenues dans les théorèmes 0.3 et 0.5. Ces énoncés sont donc des conséquences, dans le cas où l'espace est de type homogène, des théorèmes de Sawyer et Wheeden. Il n'en reste pas moins que, même dans ce cas, la méthode ici proposée présente l'avantage de fournir une démonstration directe du résultat annoncé.

On peut se demander quelle forme prend le théorème 0.5 dans le cas d'espaces métriques mesurés à croissance polynomiale d'ordre local et global différents (i.e. pour lesquels l'ordre de croissance du volume des boules diffère selon que le rayon r de ces boules est < 1 ou ≥ 1). L'exemple le plus simple d'un tel espace est celui fourni par le groupe de Heisenberg H. Ce groupe est défini en munissant $\mathbb{R}^3$ du produit de Lie suivant :

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + (xy' - yx')/2).$$

Si l'on note par X, Y, Z les champs invariants à gauche dont les valeurs à l'origine sont $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, alors on a

$$X(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\, y\, \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\, y\, \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Les champs de vecteurs X, Y, Z forment une base de l'algèbre de Lie de H et on a

$$[X, Y] = Z, \qquad [X, Z] = 0, \qquad [Y, Z] = 0.$$

Muni de la distance de contrôle associée au système de champs de vecteurs $\{X, Y, Z\}$ (distance qui est équivalente à une distance riemannienne sur H) et de la mesure de Haar bi-invariante (qui n'est autre que la mesure de Lebesgue, cf. [16], [25]), H est alors un groupe de dimension locale $d = 3$ et de dimension globale $D = 4$ (cf. [25], [4], [14]).

Plus généralement, soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et soit $X = \{X_i\}_{i=1}^k$ un système de Hörmander sur G. Soit K_X^α l'espace engendré par les crochets successifs de $\{X_i\}_{i=1}^k$ de longueur inférieure ou égale à α. Soit L l'algèbre de Lie de G et soit $\{L_i\}_{i=1}^r$ la suite décroissante de sous-algèbres de Lie de L définie en posant $L_i = [L, L_{i-1}]$ et $L_1 = L$. Si G est de rang r (i.e. si $L_{r+1} = 0$), alors la *dimension globale* (ou *dimension à l'infini*) de G est

$$D = \sum_{i=1}^{r} i \dim[L_i/L_{i+1}],$$

tandis que sa *dimension locale* (ou *dimension à l'origine*, cf. [12]) est

$$d = d(G, X) = \sum_{i=1}^{\infty} i \dim[K_X^i / K_X^{i-1}].$$

Muni de la distance de contrôle associée au système de champs de vecteurs X et de la mesure de Haar bi-invariante, G est alors un espace métrique mesuré à croissance polynomiale du volume de dimension locale d et de dimension globale D (cf. [2], [17], [25, p. 55]). On remarque que pour un tel groupe de Lie, on a toujours $d \leq D$.

Un autre exemple d'espace où les dimensions locale et globale diffèrent est le cylindre d'ordre $(d; D)$, i.e. le produit cartésien de la sphère S^{d-D} avec $\mathbb{R}^D$ pour $d > D$. Muni de la mesure de Lebesgue et de la distance euclidienne, cet espace vérifie $V(x,r) \approx r^d$ pour $r < 1$ et $V(x,r) \approx r^D$ pour $r \geq 1$. Son ordre de croissance local est donc d et son ordre de croissance global D, avec cette fois $d > D$. On note dans ce cas que l'exposant figurant dans (V_n) peut n'être ni unique, ni optimal. En effet on a alors $V(x,r) \leq cr^n$ pour tout $n \in [D, d]$, inégalité qui est moins précise que les estimations locales et globales.

On peut encore citer le cas du "jungle gym" qui est l'espace obtenu en épaississant les arêtes de $\mathbb{Z}^D$ en tubes de $\mathbb{R}^d$. Pour cet espace on a en effet $V(x,r) \approx r^d$ pour $r < 1$ et $V(x,r) \approx r^D$ pour $r \geq 1$, il est donc d'ordre de croissance local d et d'ordre de croissance global D. On note cette fois que dans le cas où $D > d$, l'inégalité $V(x,r) \leq cr^n$ pour tout $r > 0$ n'est vraie pour aucun n.

Ces exemples montrent qu'il est naturel de chercher à obtenir une formulation du théorème de Hardy–Littlewood–Sobolev à poids aussi générale que possible en se plaçant dès le départ dans le cadre d'espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume à deux demi-dimensions.

Étant données une distance ϱ et une mesure borélienne μ, on dit que l'espace métrique mesuré (X, ϱ, μ) est *à croissance polynomiale du volume d'ordre local d et d'ordre global D* si son volume satisfait aux conditions de croissance suivantes :

$$(V_d^{\mathrm{loc}}) \qquad V(x,r) \leq Cr^d \quad \forall x \in X, \forall r < 1$$

et

$$(V_D^{\mathrm{glob}}) \qquad V(x,r) \leq Cr^D \quad \forall x \in X, \forall r \geq 1.$$

On remarque que ces conditions vérifient une propriété de monotonie évidente. En effet, on a

$$(V_d^{\mathrm{loc}}) \ \Rightarrow\ (V_{d'}^{\mathrm{loc}}) \quad \text{si } d' \leq d, \qquad (V_D^{\mathrm{glob}}) \ \Rightarrow\ (V_{D'}^{\mathrm{glob}}) \quad \text{si } D' \geq D.$$

Dans toute la suite, on se place dans le cadre d'un espace métrique mesuré de Vitali (X, ϱ, μ) à croissance polynomiale du volume d'ordre local d et d'ordre global D. Sous ces hypothèses on a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 0.6. *Soit* (X, ϱ, μ) *un espace métrique mesuré de Vitali à croissance polynomiale du volume d'ordre local* d *et d'ordre global* D. *Soit* z_0 *un point fixé de* X. *Soient* $p, q, a, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha_0 + \beta_0 - a}{d} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p} + \frac{\alpha_1 + \beta_1 - a}{D}, \qquad 1 < p \le q < \infty,$$
$$\alpha_0 < \frac{d}{p'}, \qquad \alpha_1 < \frac{D}{p'}, \qquad \beta_0 < \frac{d}{q},$$
$$\beta_1 < \frac{D}{q}, \qquad 0 \le \alpha_0 + \beta_0 \le a \le \alpha_1 + \beta_1.$$

Soit $\kappa_a : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *une fonction mesurable satisfaisant aux conditions de croissance (en* 0 *et en* ∞*) suivantes :*

(i) $\kappa_a(x, y) \le c\varrho(x, y)^{a-d}$ *pour tous* $x, y \in X$ *tels que* $\varrho(x, y) < 1$,
(ii) $\kappa_a(x, y) \le c\varrho(x, y)^{a-D}$ *pour tous* $x, y \in X$ *tels que* $\varrho(x, y) \ge 1$,

où $0 < a < d$ *et* $0 < a < D$. *Soit* $\kappa(x, y) = w_\beta(x)\kappa_a(x, y)w_\alpha(y)$, *où*

(iii) $w_\beta(x) = \begin{cases} \varrho(x, z_0)^{-\beta_0} & \textit{si } \varrho(x, z_0) < 1, \\ \varrho(x, z_0)^{-\beta_1} & \textit{si } \varrho(x, z_0) \ge 1, \end{cases}$

(iv) $w_\alpha(y) = \begin{cases} \varrho(y, z_0)^{-\alpha_0} & \textit{si } \varrho(y, z_0) < 1, \\ \varrho(y, z_0)^{-\alpha_1} & \textit{si } \varrho(y, z_0) \ge 1. \end{cases}$

Alors il existe une constante $C > 0$ *telle que*

$$\int_X \int_X g(x)\kappa(x, y)f(y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \le C\|f\|_p \|g\|_{q'} \qquad \forall f \in L^p(X), \forall g \in L^{q'}(X).$$

En d'autres termes, l'opérateur T *de noyau* $\kappa_a(x, y)$ *est borné de* $L^p(X, w^p_{-\alpha})$ *dans* $L^q(X, w^q_\beta)$.

1. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

L'opérateur intégral fractionnaire. Pour démontrer le théorème 0.6, nous aurons besoin du résultat suivant, que nous empruntons à Cowling, Meda et Pasquale [3], et qui étend le théorème 0.4 et donc l'inégalité de Hardy–Littlewood–Sobolev aux espaces métriques mesurés à deux demi-dimensions.

THÉORÈME 1.1. *Soit* (X, ϱ, μ) *un espace métrique mesuré à croissance polynomiale du volume d'ordre local* d *et d'ordre global* D. *Soit* $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid \varrho(x, y) < 1\}$ *l'ensemble des points "proches de la diagonale" et soit* $\Delta^{\mathrm{c}} = \{(x, y) \in X \times X \mid \varrho(x, y) \ge 1\}$ *son complémentaire* *dans* $X \times X$. *Soient* $b_0, b_1, p, q, r, s \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$b_0 > 0, \quad b_1 > 0, \quad 1 < p < q < \infty, \quad 1 < r < s < \infty,$$
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq 1 - \frac{b_0}{d}, \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \geq 1 - \frac{b_1}{D}.$$

Soit $\kappa_0 : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *une fonction mesurable sur* $X \times X$ *telle que*

$$\kappa_0(x,y) \leq c\varrho(x,y)^{-b_0}\chi_\Delta(x,y) \quad \forall x, y \in X.$$

Alors, l'opérateur T_0 *de noyau* $\kappa_0(x,y)$ *est borné de* $L^p(X)$ *dans* $L^q(X)$.

Soit $\kappa_1 : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *une fonction mesurable sur* $X \times X$ *telle que*

$$\kappa_1(x,y) \leq c\varrho(x,y)^{-b_1}\chi_{\Delta^c}(x,y) \quad \forall x, y \in X.$$

Alors, l'opérateur T_1 *de noyau* $\kappa_1(x,y)$ *est borné de* $L^r(X)$ *dans* $L^s(X)$.

En particulier, si $p = r$, *si* $q = s$ *et si* $\kappa : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction mesurable sur* $X \times X$ *telle que*

$$\kappa(x,y) \leq c\varrho(x,y)^{-b_0}\chi_\Delta(x,y) + c\varrho(x,y)^{-b_1}\chi_{\Delta^c}(x,y) \quad \forall x, y \in X,$$

alors l'opérateur T *de noyau* $\kappa(x,y)$ *est borné de* $L^p(X)$ *dans* $L^q(X)$.

Démonstration. La preuve repose de manière essentielle sur le résultat suivant qui généralise l'inégalité de Young (cf. [4] ainsi que [10] pour un exemple d'application). Soit N un espace mesuré muni d'une mesure ν et soit $g : N \times N \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que

$$\nu(\{y \in N \mid g(x,y) + g(y,x) > \lambda\}) \leq C\lambda^{-t} \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in N.$$

Alors l'opérateur G de noyau g est borné de $L^p(N)$ dans $L^q(N)$ dès que $1 < p < q < \infty$ et $1/p - 1/q = 1 - 1/t$. Dans ce cas, la norme de l'opérateur G dépend seulement de p, q et C.

Montrons que l'opérateur T_0 est borné de $L^p(X)$ dans $L^q(X)$. Pour tout $x \in X$ on a

$$\begin{aligned}
\mu(\{y \in X \mid \kappa_0(x,y) > \lambda\}) &\leq \mu(\{y \in X \mid \varrho(x,y)^{-b_0}\chi_\Delta(x,y) > \lambda\}) \\
&= \mu(B(x,1) \cap B(x, \lambda^{-1/b_0})) \\
&\leq \mu(B(x, \min(1, \lambda^{-1/b_0})) \\
&\leq c(\min(1, \lambda^{-1/b_0}))^d \quad (\text{par } (V_d^{\text{loc}})) \\
&\leq c\lambda^{-d/b_0} \quad \forall \lambda > 0,
\end{aligned}$$

et de même, pour tout $y \in X$ on a

$$\mu(\{x \in X \mid \kappa_0(x,y) > \lambda\}) \leq c\lambda^{-d/b_0} \quad \forall \lambda > 0.$$

Par suite, et en vertu du théorème de Young généralisé, l'opérateur T_0 est borné de $L^p(X)$ dans $L^q(X)$. Montrons de même que T_1 est borné de $L^r(X)$

dans $L^s(X)$. Comme ci-dessus, il suffit de noter que pour tout $x \in X$ on a

$$\begin{aligned}\mu(\{y \in X \mid \kappa_1(x,y) > \lambda\}) &\le \mu(\{y \in X \mid \varrho(x,y)^{-b_1}\chi_{\Delta^c}(x,y) > \lambda\}) \\ &= \mu(\{y \in X \mid \varrho(x,y) < \lambda^{-1/b_1} \text{ et } \varrho(x,y) \ge 1\}) \\ &\le c\lambda^{-D/b_1} \quad \forall \lambda > 0 \text{ (par } (V_d^{\text{glob}})),\end{aligned}$$

et de même, pour tout $y \in X$ on a

$$\mu(\{x \in X \mid \kappa_1(x,y) > \lambda\}) \le c\lambda^{-D/b_1} \quad \forall \lambda > 0.$$

Enfin, pour montrer que l'opérateur T de noyau $\kappa(x,y)$ est borné de $L^p(X)$ dans $L^q(X)$, il suffit, puisque

$$\kappa(x,y) \le c\varrho(x,y)^{-b_0}\chi_{\Delta}(x,y) + c\varrho(x,y)^{-b_1}\chi_{\Delta^c}(x,y) \quad \forall x,y \in X,$$

de montrer que les opérateurs T_0 et T_1, de noyau associé respectivement $\kappa_0(x,y) = \varrho(x,y)^{-b_0}\chi_{\Delta}(x,y)$ et $\kappa_1(x,y) = \varrho(x,y)^{-b_1}\chi_{\Delta^c}(x,y)$, sont bornés de $L^p(X)$ dans $L^q(X)$. D'après ce qui précède, ceci est vrai dès que $1 - b_1/D \le 1/p - 1/q \le 1 - b_0/d$.

Remarque. La preuve ci-dessus est inspirée de celle exposée par Cowling, Meda et Pasquale dans [3]. On aurait également pu établir ce résultat en reprenant les arguments classiques utilisés dans [7] par García-Cuerva et Martell. On remarquera que l'énoncé de ces derniers constitue un cas particulier du nôtre dans le cas où $d = n = D$.

L'opérateur maximal de Hardy–Littlewood. Soient (X,ϱ,μ) un espace métrique mesuré et f une fonction localement μ-intégrable sur X. On définit classiquement (cf. par exemple [1], [22], [11], [18]) la fonction maximale de Hardy–Littlewood de f en posant

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(y)\, d\mu(y).$$

Dans le cas particulier où l'espace (X,ϱ,μ) considéré est de type homogène, on sait (cf. [1], [22]) que cet opérateur est borné de $L^p(X)$ dans $L^p(X)$ (pour $p > 1$) et de $L^1(X)$ dans $L^{1,\infty}(X)$. Ceci est dû au double fait: 1) que X satisfait au lemme de recouvrement de Vitali ; 2) que μ vérifie la condition de doublement du volume.

Dans le cas où l'espace (X,ϱ,μ) est par contre un espace métrique mesuré quelconque, ce dernier résultat de bornitude n'est généralement plus vrai (cf. par exemple [13, p. 2014]). Une solution possible, en l'absence de la condition de doublement du volume, est alors d'introduire l'opérateur $\mathcal{M}$ défini en posant

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{r(B)^n} \int_B |f(y)\, d\mu(y).$$

Cet opérateur s'appelle l'*opérateur de Hardy–Littlewood maximal radial.* La différence essentielle entre cet opérateur et l'opérateur de Hardy–Littlewood classique est qu'il ne fait pas entrer dans sa définition une moyennisation sur la mesure des boules mais sur $r(B)^n$, nombre qui représente le rayon de la boule porté à la puissance n et qui, de ce fait, est "doublant". García-Cuerva et Martell ont alors montré (cf. [7, p. 1245]) que si l'espace considéré est un espace de Vitali à croissance polynomiale du volume d'ordre n, l'opérateur $\mathcal{M}$ est de type (p,p) fort (pour $p>1$) et de type $(1,1)$ faible.

Il est assez facile d'étendre ce dernier résultat au cas des espaces métriques mesurés à deux demi-dimensions. Il suffit pour cela, étant donné un espace métrique mesuré à croissance polynomiale du volume d'ordre local d et d'ordre global D, de définir un nouvel opérateur de Hardy–Littlewood maximal radial en posant

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{\substack{B \ni x \\ r(B)=r}} r^{-\delta} \int_B |f(y)|\, d\mu(y)$$

où $\delta = d$ si $r<1$ et $\delta = D$ si $r \geq 1$.

Cette définition posée, on a le résultat suivant :

Lemme 1.2. *Soit (X,ϱ,μ) un espace de Vitali à croissance polynomiale du volume d'ordre local d et d'ordre global D. Alors l'opérateur maximal radial de Hardy–Littlewood $\mathcal{M}$ est borné de $L^p(X)$ dans $L^p(X)$ (pour $p>1$) et de $L^1(X)$ dans $L^{1,\infty}(X)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}$ désigne l'opérateur maximal centré défini en posant

$$\mathcal{M}^{\mathrm{c}} f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^\delta} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y),$$

où $\delta = d$ si $r<1$ et $\delta = D$ si $r \geq 1$, alors on a clairement

$$\mathcal{M}^{\mathrm{c}} f(x) \leq \mathcal{M}f(x) \leq c_0^\delta \mathcal{M}^{\mathrm{c}} f(x),$$

où c_0 est une constante ne dépendant que de la constante de structure associée à la quasimétrique ϱ.

La première inégalité est triviale. La seconde repose sur le fait suivant : Si B est une boule de rayon r contenant x, alors $B \subset B(x,c_0 r)$ et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^\delta} \int_B |f(y)|\, d\mu(y) &\leq \frac{1}{r^\delta} \int_{B(x,c_0 r)} |f(y)|\, d\mu(y) = c_0^\delta \frac{1}{(c_0 r)^\delta} \int_{B(x,c_0 r)} |f(y)|\, d\mu(y) \\ &\leq c_0^\delta \mathcal{M}^{\mathrm{c}} f(x), \end{aligned}$$

où $\delta = d$ si $r<1$ et $\delta = D$ si $r \geq 1$. En prenant dans cette dernière inégalité le supremum sur toutes les boules B contenant x, on en déduit aussitôt $\mathcal{M}f(x) \leq c_0^\delta \mathcal{M}^{\mathrm{c}} f(x)$.

Soit maintenant $f \in L^1(X)$ et soit $E_\lambda = \{x \in X \mid \mathcal{M}f(x) > \lambda\}$. Si $x \in E_\lambda$, alors par ce qui précède, il existe $r_x > 0$ tel que

$$\frac{1}{r_x^\delta} \int\limits_{B(x,r_x)} |f(y)|\, d\mu(y) > c_0^{-\delta}\lambda.$$

où $\delta = d$ si $r_x < 1$ et $\delta = D$ si $r_x \geq 1$. En particulier, $r_x \leq (c_0^\delta \lambda^{-1} \|f\|_{L^1(X)})^{1/\delta}$. Par suite, et par le fait que X vérifie le lemme de recouvrement de Vitali, il existe une suite de boules disjointes $B(x_j, r_j)$, où $x_j \in E_\lambda$ et $r_j = r_{x_j}$, telles que

$$E_\lambda \subset \bigcup_{x \in E_\lambda} B(x, r_x) \subset \bigcup_j B(x_j, 3r_j).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\mu(E_\lambda) &\leq \sum_j \mu(B(x_j, 3r_j)) \\
&\leq 3^\delta \sum_j r_j^\delta \qquad (\text{où } \delta = d \text{ si } r_j < 1 \text{ et } \delta = D \text{ si } r_j \geq 1) \\
&\leq 3^\delta \sum_j \left(\frac{1}{c_0^{-\delta}\lambda} \int\limits_{B(x_j,r_j)} |f(y)|\, d\mu(y) \right) \\
&\leq C \left(\sum_j \frac{1}{\lambda} \int\limits_{B(x_j,r_j)} |f(y)|\, d\mu(y) \right) \leq C \left(\frac{1}{\lambda} \int\limits_X |f(y)|\, d\mu(y) \right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que les boules $B(x_j, r_j)$ soient disjointes.

Par ailleurs on a $\mathcal{M}f(x) \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$. Par le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, ceci entraîne $\mathcal{M} : L^p(X) \to L^p(X)$.

Ce résultat constitue l'un des éléments clés de la démonstration du théorème 0.6. Il nous servira plus particulièrement à obtenir l'inégalité cherchée dans le cas $p = q$.

Soit en effet $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < \min(d, D)$ et soit $\kappa_a : X \times X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable sur $X \times X$ telle que

$$\kappa_a(x,y) \leq c_1 \varrho(x,y)^{a-d} \chi_\Delta(x,y) + c_2 \varrho(x,y)^{a-D} \chi_{\Delta^c}(x,y) \quad \forall x, y \in X.$$

On a le lemme suivant :

Lemme 1.3. *Soit (X, ϱ, μ) un espace métrique mesuré à croissance polynomiale du volume d'ordre local d et d'ordre global D. Soit $\mathcal{M}$ l'opérateur maximal radial de Hardy–Littlewood. Soit $r > 0$ et soit P_r l'opérateur défini en posant*

$$P_r f(x) = \int\limits_{B(x,r)} \kappa_a(x,y) |f(y)|\, d\mu(y).$$

Il existe une constante $C > 0$ (indépendante de r) telle que

$$P_r f(x) \leq C r^a \mathcal{M} f(x) \quad \forall x \in X, \forall r > 0, \forall f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X).$$

Démonstration. Soit $H_k(x,r) = \{y \in X \mid 2^{-k}r \le \varrho(x,y) < 2^{-k+1}r\}$ la couronne dyadique de centre x et d'ordre $2^{-k}r$. Soit $k_0 = \sup\{k \in \mathbb{Z}_* \mid 2^{-k+1}r \ge 1\}$ si $r \ge 1$ et $k_0 = 0$ si $r < 1$. Par hypothèse on a

$$P_rf(x) \le \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{H_k(x,r)} (c_1\varrho(x,y)^{a-d}\chi_\Delta(x,y) + c_2\varrho(x,y)^{a-D}\chi_{\Delta^c}(x,y))|f(y)|\,d\mu(y).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_rf(x) &\le c_2\sum_{k=1}^{k_0} \int\limits_{H_k(x,r)} \varrho(x,y)^{a-D}|f(y)|\,d\mu(y) \\ &\qquad + c_1\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \int\limits_{H_k(x,r)} \varrho(x,y)^{a-d}|f(y)|\,d\mu(y) \\ &\le c_2\sum_{k=1}^{k_0}(2^{-k}r)^{a-D} \int\limits_{H_k(x,r)} |f(y)|\,d\mu(y) \quad (\text{car } a < D) \\ &\qquad + c_1\sum_{k=k_0+1}^{\infty}(2^{-k}r)^{a-d} \int\limits_{H_k(x,r)} |f(y)|\,d\mu(y) \quad (\text{car } a < d) \\ &\le c_2'\sum_{k=1}^{k_0}(2^{-k+1}r)^a \frac{1}{(2^{-k+1}r)^D} \int\limits_{B(x,2^{-k+1}r)} |f(y)|\,d\mu(y) \\ &\qquad + c_1'\sum_{k=k_0+1}^{\infty}(2^{-k+1}r)^a \frac{1}{(2^{-k+1}r)^d} \int\limits_{B(x,2^{-k+1}r)} |f(y)|\,d\mu(y) \\ &\le c\sum_{k=1}^{\infty}(2^{-k+1}r)^a\mathcal{M}f(x) \le Cr^a\mathcal{M}f(x) \quad (\text{car } a > 0). \end{aligned}$$

Notons enfin qu'en corollaire du résultat précédent, on a le

LEMME 1.4. *Soit (X,ϱ,μ) un espace métrique mesuré à croissance polynomiale d'ordre local d et d'ordre global D. Soit $x \in X$. Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int\limits_{B(x,r)} \kappa_a(x,y)\,d\mu(y) \le Cr^a \qquad \forall r > 0.$$

2. DÉMONSTRATION DU RÉSULTAT

Venons-en maintenant à la démonstration du théorème 0.6. Commençons par introduire quelques notations. Soit $\{D_1, D_2, D_3\}$ la partition de l'espace produit $X \times X$ définie en posant

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) \in X^2 \mid \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0) < 1/2\},\\
D_2 &= \{(x,y) \in X^2 \mid \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0) \geq 2\},\\
D_3 &= \{(x,y) \in X^2 \mid 1/2 \leq \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0) < 2\}.
\end{aligned}$$

Pour $j \in \mathbb{Z}$, soit R_j le sous-ensemble de $X \times X$ défini par

$$R_j = \big\{(x,y) \in X^2 \mid 2^j \leq \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0) < 2^{j+1}\big\}.$$

Avec cette notation, on aura donc

$$D_1 = \bigcup_{j=-\infty}^{-2} R_j, \qquad D_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j, \qquad D_3 = \bigcup_{j=-1}^{0} R_j.$$

Étant données $f \in L^p(X)$ et $g \in L^{q'}(X)$, on pose en outre

$$I = \int\limits_X \int\limits_X f(y)\kappa(x,y)g(x)\,d\mu(x)\,d\mu(y),$$

et pour $i = 1,2,3$,

$$I_i = \int\limits_X \int\limits_X f(y)\kappa(x,y)\chi_{D_i}(x,y)g(x)\,d\mu(x)\,d\mu(y),$$

de sorte que $I = I_1 + I_2 + I_3$.

Pour établir le résultat, il nous suffira donc de montrer que pour chacun des indices $i = 1,2,3$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que

$$I_i \leq C_i \|f\|_p \|g\|_{q'}, \qquad \forall f \in L^p(X),\, \forall g \in L^{q'}(X).$$

Pour ce faire, on distingue deux cas selon que $p = q$ ou $p < q$. Dans le cas $p = q$, la démonstration fait appel aux lemmes 1.2 et 1.3 (pour l'étude sur D_3) ainsi qu'au lemme 1.4 (pour l'étude sur D_1 et D_2). Dans le cas $p < q$ la démonstration fait appel, d'une part au théorème 1.1 (dans le cas où le domaine d'étude est D_3), d'autre part au lemme 1.4 ainsi qu'aux résultats obtenus dans la démonstration du cas $p = q$ (dans le cas où le domaine d'étude est D_1 ou D_2).

2.1. Cas $p = q$

2.1.1. *Étude sur D_3.* Soit $k \in \mathbb{Z}$ et soit $Q_k = \{x \in X \mid 2^{k-1} \leq \varrho(x,z_0) < 2^k\}$ la couronne dyadique de centre z_0 et d'ordre k. On note $f_k = f\chi_{Q_k}$ et $g_k = g\chi_{Q_k}$. On a

$$\begin{aligned}
x \in Q_k \text{ et } (x,y) \in D_3 &\Rightarrow 2^{k-1} \leq \varrho(x,z_0) < 2^k \text{ et } 1/2 \leq \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0) < 2\\
&\Rightarrow 2^{k-2} \leq \varrho(y,z_0) < 2^{k+1}\\
&\Rightarrow y \in Q_{k-1} \cup Q_k \cup Q_{k+1}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \iint_{D_3} g(x)\kappa(x,y)f(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \iint_{D_3} g_k(x)\kappa(x,y)(f_{k-1}+f_k+f_{k+1})(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \iint_{D_3} g_k(x)\kappa(x,y)f_{k-1}(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&\quad + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \iint_{D_3} g_k(x)\kappa(x,y)f_k(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&\quad + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \iint_{D_3} g_k(x)\kappa(x,y)f_{k+1}(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y).
\end{aligned}
$$

Considérons l'une quelconque de ces trois intégrales doubles, la seconde par exemple ; notons-le A_k. Par hypothèse on a, pour tous $x, y \in X$,

$$\kappa(x,y) = \varrho(x,z_0)^{-\beta}\kappa_a(x,y)\varrho(y,z_0)^{-\alpha}$$

où par convention α et β sont définis en posant

$$\varrho(x,z_0)^{\alpha} = \begin{cases} \varrho(x,z_0)^{\alpha_0} & \text{si } \varrho(x,z_0) < 1,\\ \varrho(x,z_0)^{\alpha_1} & \text{si } \varrho(x,z_0) \geq 1.\end{cases} \tag{2.1}$$

$$\varrho(x,z_0)^{\beta} = \begin{cases} \varrho(x,z_0)^{\beta_0} & \text{si } \varrho(x,z_0) < 1,\\ \varrho(x,z_0)^{\beta_1} & \text{si } \varrho(x,z_0) \geq 1.\end{cases} \tag{2.2}$$

Or,

$$
\begin{aligned}
x \in Q_k \text{ et } (x,y)\in D_3 \;&\Rightarrow\; 2^{k-1} \leq \varrho(x,z_0) < 2^k \text{ et } 1/2 \leq \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0) < 2\\
&\Rightarrow\; \text{il existe } c, c' > 0 \text{ tel que}\\
&\qquad c' 2^{k(\alpha+\beta)} \leq \varrho(x,z_0)^{\beta}\varrho(y,z_0)^{\alpha} \leq c 2^{k(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}
$$

De plus,

$$x \in Q_k \text{ et } y \in Q_k \;\Rightarrow\; \varrho(x,y) \leq \varrho(x,z_0) + \varrho(y,z_0) \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

Par suite, on a

$$
\begin{aligned}
A_k &\leq c 2^{-k(\alpha+\beta)} \int_X g_k(x)\Big(\int_{\{y \mid \varrho(x,y)<2^{k+1}\}} \kappa_a(x,y) f_k(y)\,d\mu(y)\Big) d\mu(x)\\
&\leq c 2^{k(a-\alpha-\beta)} \int g_k(x)\mathcal{M}f_k(x)\,d\mu(x)\\
&\qquad \text{(par le lemme 1.3 appliqué avec } r = 2^{k+1} \text{ et } 0 < a < \min(d,D))\\
&\leq c 2^{k(a-\alpha-\beta)} \|\mathcal{M}f_k\|_p \|g_k\|_{p'} \qquad \text{(par Hölder)}\\
&\leq c 2^{k(a-\alpha-\beta)} \|f_k\|_p \|g_k\|_{p'} \qquad \text{(par le lemme 1.2).}
\end{aligned}
$$

En sommant ces inégalités sur $k \in \mathbb{Z}$, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k &\le c\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_-} 2^{k(a-\alpha_0-\beta_0)}\|f_k\|_p\|g_k\|_{p'} + \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} 2^{k(a-\alpha_1-\beta_1)}\|f_k\|_p\|g_k\|_{p'}\Big)\\ &\le c\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|f_k\|_p\|g_k\|_{p'} \quad (\text{car } a-\alpha_0-\beta_0 \ge 0 \text{ et } a-\alpha_1-\beta_1\le 0)\\ &\le c\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|f_k\|_p^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|g_k\|_{p'}^{p'}\Big)^{1/p'} = c\|f\|_p\|g\|_{p'}.\end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement aux intégrales

$$\iint_{D_3} g_k(x)\kappa(x,y)f_{k-1}(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)$$

et

$$\iint_{D_3} g_k(x)\kappa(x,y)f_{k+1}(y)d\,\mu(x)\,d\mu(y),$$

puis en sommant, on obtient l'inégalité cherchée

$$I_3 \le C_3\|f\|_p\|g\|_{p'} \quad \forall f\in L^p(X),\ \forall g\in L^{p'}(X).$$

2.1.2. *Étude sur D_2.* Notons comme précédemment $\varDelta = \{(x,y)\in X^2 \mid \varrho(x,y)<1\}$ et $\varDelta^c = \{(x,y)\in X^2 \mid \varrho(x,y)\ge 1\}$. Avec cette notation on a

$$\begin{aligned}I_2 &= \Big(\iint_{\varDelta\cap D_2} + \iint_{\varDelta^c\cap D_2}\Big)g(x)\kappa(x,y)f(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\ &= I_{2,0}+I_{2,\infty}.\end{aligned}$$

Commençons par montrer que

$$I_{2,0}\le c\|f\|_p\|g\|_{p'}.$$

Comme

$$|\varrho(x,z_0)-\varrho(y,z_0)| \le \varrho(x,y) \quad \forall x,y\in X,$$

on a

$$\begin{aligned}(*)\quad (x,y)\in D_2\cap\varDelta \;&\Leftrightarrow\; \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0)\ge 2 \text{ et } \varrho(x,y)<1\\ &\Rightarrow\; \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0)\ge 2 \text{ et}\\ &\qquad 1>\varrho(x,y)\ge\varrho(y,z_0)-\varrho(x,z_0)\ge 2^{-1}\varrho(y,z_0)\\ &\Rightarrow\; \varrho(y,z_0)<2 \text{ et } \varrho(x,z_0)<1.\end{aligned}$$

Comme en outre

$$\varrho(x,y)<1 \;\Rightarrow\; \kappa(x,y)\le c\varrho(x,z_0)^{-\beta}\varrho(x,y)^{a-d}\varrho(y,z_0)^{-\alpha}$$

et

$$\begin{aligned}&\varrho(x,y)\ge 2^{-1}\varrho(y,z_0)\\ &\qquad\Rightarrow\; \varrho(x,y)^{a-d}\varrho(y,z_0)^{-\alpha}\le 2^{d-a}\varrho(y,z_0)^{a-d-\alpha} \quad (\text{car } d-a>0),\end{aligned}$$

on a finalement l'inégalité

$$\begin{aligned} I_{2,0} &\le c \iint\limits_{\Delta\cap D_2} g(x)f(y)\varrho(x,z_0)^{-\beta}\varrho(y,z_0)^{a-d-\alpha}\,d\mu(x)\,d\mu(y) \\ &= c\sum_{j=1}^{\infty} \iint\limits_{\Delta\cap R_j} g(x)f(y)\varrho(x,z_0)^{-\beta}\varrho(y,z_0)^{a-d-\alpha}\,d\mu(x)\,d\mu(y), \end{aligned}$$

puisque $D_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$. Comme par ailleurs (cf. $(*)$) $\varrho(x,z_0) < 1$, i.e. $x \in \bigcup_{k=-\infty}^{0} Q_k$, on a

$$I_{2,0} \le c\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{0} \iint\limits_{\Delta\cap R_j} g_k(x)f(y)\varrho(x,z_0)^{-\beta}\varrho(y,z_0)^{a-d-\alpha}\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

Or,

$$\begin{aligned} x\in Q_k \text{ et } (x,y)\in R_j\cap\Delta \ &\Rightarrow\ 2^{k-1} \le \varrho(x,z_0) < 2^k, \\ &\ \ 2^j \le \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0) < 2^{j+1} \text{ et } \varrho(y,z_0) < 2 \\ &\ \ (\text{par } (*)) \\ &\Rightarrow\ 2^{k+j-1} \le \varrho(y,z_0) < 2^{k+j+1} \text{ et } \varrho(y,z_0) < 2 \\ &\Rightarrow\ y \in Q_{k+j}\cup Q_{k+j+1} \ \text{ avec } k+j\le 1. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} I_{2,0} \le c\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{-j+1} &\iint\limits_{\Delta\cap R_j} g_k(x)(f_{k+j}(y)+f_{k+j+1}(y)) \\ &\times \varrho(x,z_0)^{-\beta}\varrho(y,z_0)^{a-d-\alpha}\,d\mu(x)\,\mu(y), \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} I_{2,0} &\le c\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{-j+1} \int\limits_X g_k(x)\varrho(x,z_0)^{-\beta}\,d\mu(x) \int\limits_X f_{k+j}(y)\varrho(y,z_0)^{a-d-\alpha}\,d\mu(y) \\ &\quad + c\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{-j+1} \int\limits_X g_k(x)\varrho(x,z_0)^{-\beta}\,d\mu(x) \int\limits_X f_{k+j+1}(y)\varrho(y,z_0)^{a-d-\alpha}\,d\mu(y) \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chacune des intégrales dans J_1, on trouve

$$\begin{aligned} J_1 \le c\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{-j+1} &\Big(\Big(\int\limits_{Q_k} \varrho(x,z_0)^{-p\beta}\,d\mu(x)\Big)^{1/p}\|g_k\|_{p'}\Big) \\ &\times\Big(\Big(\int\limits_{Q_{k+j}} \varrho(y,z_0)^{p'(a-d-\alpha)}\,d\mu(y)\Big)^{1/p'}\|f_{k+j}\|_p\Big) \end{aligned}$$

$$\leq c\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{-j+1} 2^{k(d/p-\beta_0)}2^{(k+j)(a-\alpha_0-d+d/p')}\|f_{k+j}\|_p\|g_k\|_{p'}$$

$$= c\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{-j+1} 2^{k(d/p-\beta_0)}2^{(k+j)(a-\alpha_0-d/p)}\|f_{k+j}\|_p\|g_k\|_{p'}.$$

Or, $a-\alpha_0-\beta_0 \geq 0$ et $k+j\leq 1$. Par suite,

$$\begin{aligned} J_1 &\leq c\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(\beta_0-d/p)}\sum_{k=-\infty}^{-j+1}\|f_{k+j}\|_p\|g_k\|_{p'} \\ &\leq c\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(\beta_0-d/p)}\|f\|_p\|g\|_{p'} \qquad \text{(par Hölder).}\end{aligned}$$

Comme par ailleurs $\beta_0 < d/p$, ceci entraîne

$$J_1 \leq c\|f\|_p\|g\|_{p'}. \tag{2.3}$$

En appliquant le même raisonnement à J_2, on trouve

$$J_2 \leq c\|f\|_p\|g\|_{p'}. \tag{2.4}$$

En sommant les inégalités (2.3) et (2.4), on trouve finalement

$$I_{2,0} \leq c\|f\|_p\|g\|_{p'} \quad \forall f\in L^p(X),\ \forall g\in L^{p'}(X). \tag{2.5}$$

Montrons de même que

$$I_{2,\infty} \leq c\|f\|_p\|g\|_{p'} \quad \forall f\in L^p(X),\ \forall g\in L^{p'}(X). \tag{2.6}$$

Clairement, on a

$$\begin{aligned} (**) \quad (x,y)\in D_2\cap\Delta^c &\Leftrightarrow \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0)\geq 2 \text{ et } \varrho(x,y)\geq 1 \\ &\Rightarrow 1\leq \varrho(x,y)\leq \varrho(x,z_0)+\varrho(y,z_0)\leq \tfrac{3}{2}\varrho(y,z_0) \\ &\Rightarrow \varrho(y,z_0)\geq \tfrac{2}{3}\geq 2^{-1}.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (x,y)\in D_2 &\Rightarrow \varrho(y,z_0)\leq \varrho(y,x)+\varrho(x,z_0)\leq \varrho(y,x)+\tfrac{1}{2}\varrho(y,z_0) \\ &\Rightarrow \varrho(y,z_0)\leq 2\varrho(y,x) \\ &\Rightarrow \varrho(x,y)^{a-D}\leq 2^{D-a}\varrho(y,z_0)^{a-D} \qquad \text{(car } a-D<0) \\ &\Rightarrow \varrho(x,z_0)^{-\beta}\varrho(x,y)^{a-D}\varrho(z_0,y)^{-\alpha} \\ &\qquad \leq 2^{D-a}\varrho(x,z_0)^{-\beta}\varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha}.\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} I_{2,\infty} &\leq c\iint_{\Delta^c\cap D_2} g(x)f(y)\varrho(x,z_0)^{-\beta}\varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha}\,d\mu(x)\,d\mu(y) \\ &= c\sum_{j=1}^{\infty}\iint_{\Delta^c\cap R_j} g(x)f(y)\varrho(x,z_0)^{-\beta}\varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha}\,d\mu(x)\,d\mu(y),\end{aligned}$$

puisque $D_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$. Comme

$$\begin{aligned} x \in Q_k \text{ et } (x,y) \in R_j \cap \Delta^{\mathrm{c}} \ &\Rightarrow\ 2^{k-1} \le \varrho(x,z_0) < 2^k, \\ &\qquad 2^j \le \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0) < 2^{j+1} \text{ et} \\ &\qquad \varrho(y,z_0) \ge 2^{-1} \text{ (par } (**)) \\ &\Rightarrow\ 2^{k+j-1} \le \varrho(y,z_0) < 2^{k+j+1} \text{ et } \varrho(y,z_0) \ge 2^{-1} \\ &\Rightarrow\ y \in Q_{k+j} \cup Q_{k+j+1} \text{ avec } k+j \ge -1, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} I_{2,\infty} \le c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j-1}^{\infty} \iint_{\Delta^{\mathrm{c}} \cap R_j} & g_k(x)(f_{k+j}(y) + f_{k+j+1}(y)) \\ & \times \varrho(x,z_0)^{-\beta} \varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha}\, d\mu(x)\, d\mu(y) \\ \le c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j-1}^{\infty} & \int_X g_k(x)\varrho(x,z_0)^{-\beta}\, d\mu(x) \int_X f_{k+j}(y)\varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha}\, d\mu(y) \\ + c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j-1}^{\infty} & \int_X g_k(x)\varrho(x,z_0)^{-\beta}\, d\mu(x) \int_X f_{k+j+1}(y)\varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha}\, d\mu(y) \\ = J_3 + J_4. & \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chacune des intégrales dans J_3, on trouve

$$\begin{aligned} J_3 \le c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j-1}^{\infty} & \Big(\int_{Q_k} \varrho(x,z_0)^{-p\beta}\, d\mu(x) \Big)^{1/p} \|g_k\|_{p'} \\ & \times \Big(\int_{Q_{k+j}} \varrho(y,z_0)^{p'(a-D-\alpha)}\, d\mu(y) \Big)^{1/p'} \|f_{k+j}\|_p, \end{aligned}$$

où α et β sont définis respectivement par (2.1) et (2.2). Par suite,

$$\begin{aligned} J_3 \le c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j-1}^{-j} & 2^{k(d/p-\beta_0)} 2^{(k+j)(a-\alpha_0-D+D/p')} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'} \\ + c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j+1}^{-1} & 2^{k(d/p-\beta_0)} 2^{(k+j)(a-\alpha_1-D+D/p')} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'} \\ + c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} & 2^{k(D/p-\beta_1)} 2^{(k+j)(a-\alpha_1-D+D/p')} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'}. \end{aligned}$$

On remarque ici que pour chaque j fixé, l'indice k parcourt $\{-j-1, -j, -j+1, -j+2, \ldots, -1\}$, puis l'ensemble des valeurs de l'ensemble $\mathbb{Z}$. Posons donc

$$B = a - \alpha_1 - \frac{D}{p}, \quad b = a - \alpha_0 - \frac{D}{p}, \quad E = \frac{D}{p} - \beta_1, \quad e = \frac{d}{p} - \beta_0.$$

On a par hypothèse

$$B + E = a - \alpha_1 - \beta_1 \leq 0 \quad \text{et} \quad B = a - \alpha_1 - \frac{D}{p} \leq \beta_1 - \frac{D}{p} < 0.$$

Avec ces notations, l'inégalité précédente s'écrit alors

$$\begin{aligned} J_3 \leq c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j-1}^{-j} & 2^{ke} 2^{(k+j)b} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'} \\ & + c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j+1}^{-1} 2^{ke} 2^{(k+j)B} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'} \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kE} 2^{(k+j)B} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kE} 2^{(k+j)B} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'} &= \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jB} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(E+B)} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jB} \sum_{k=0}^{\infty} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'} \qquad (\text{car } E + B \leq 0) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jB} \|f\|_p \|g\|_{p'} \qquad (\text{par Hölder}) \\ &\leq c_1 \|f\|_p \|g\|_{p'} \qquad (\text{car } B < 0). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j+1}^{-1} 2^{ke} 2^{(k+j)B} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'} &\leq \Big(\sum_{l=1}^{\infty} 2^{lB} \|f_l\|_p \Big) \Big(\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-me} \|g_{-m}\|_{p'} \Big) \\ \leq \Big(\sum_{l=1}^{\infty} (2^{lB})^{p'} \Big)^{1/p'} \Big(\sum_{l=1}^{\infty} \|f_l\|_p^p \Big)^{1/p} & \Big(\sum_{m=1}^{\infty} (2^{-me})^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \|g_{-m}\|_{p'}^{p'} \Big)^{1/p'} \\ \leq c_2 \|f\|_p \|g\|_{p'} \qquad (\text{par Hölder et car } B < 0 \text{ et } e > 0). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j-1}^{-j} 2^{ke} 2^{(k+j)b} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'} \leq c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j-1}^{-j} 2^{ke} \|f_{k+j}\|_p \|g_k\|_{p'}$$

$$\begin{aligned}
&\le c\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-je}\sum_{k=-j-1}^{-j}\|f_{k+j}\|_p\|g_k\|_{p'} \quad (\text{car } e>0)\\
&\le c\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-je}\|f\|_p\|g\|_{p'} \quad (\text{par Hölder})\\
&\le c_3\|f\|_p\|g\|_{p'} \quad (\text{car } e>0).
\end{aligned}$$

Par suite, il existe une constante $c>0$ telle que

$$J_3 \le c\|f\|_p\|g\|_{p'}. \tag{2.7}$$

De même, il existe une constante $c>0$ telle que

$$J_4 \le c\|f\|_p\|g\|_{p'}. \tag{2.8}$$

En sommant les inégalités (2.7) et (2.8), on trouve que

$$I_{2,\infty} \le c\|f\|_p\|g\|_{p'} \quad \forall f\in L^p(X), \forall g\in L^{p'}(X),$$

et par suite que

$$I_2 \le I_{2,0}+I_{2,\infty} \le c\|f\|_p\|g\|_{p'} \quad \forall f\in L^p(X), \forall g\in L^{p'}(X).$$

2.1.3. *Étude sur D_1.* Elle se fait de manière exactement analogue à celle sur D_2.

2.2. Cas $p<q$

2.2.1. *Étude sur D_3.* Clairement,

$$\begin{aligned}
(x,y)\in D_3 &\Rightarrow \varrho(x,y)\le\varrho(y,z_0)+\varrho(x,z_0)\le 3\varrho(x,z_0)\\
&\Rightarrow \varrho(x,y)^{\alpha+\beta}\le 3^{\alpha+\beta}\varrho(x,z_0)^{\alpha+\beta} \ (\text{car } 0\le\alpha+\beta),\\
&\Rightarrow \varrho(x,y)^{\alpha+\beta}\le 3^{\alpha+\beta}2^{|\beta|}\varrho(x,z_0)^{\alpha}\varrho(y,z_0)^{\beta}\\
&\qquad (\text{car } 1/2\le\varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0)<2).
\end{aligned}$$

où α et β sont définis respectivement par (2.1) et (2.2).

Trois cas sont alors possibles. Si $\varrho(x,z_0)<1$, alors $\varrho(y,z_0)<2$ et $\varrho(x,y)<3$. Par suite,

$$\kappa(x,y)\le c\varrho(x,z_0)^{-\beta_0}\kappa_a(x,y)\varrho(y,z_0)^{-\alpha_0}\le c\varrho(x,y)^{a-d-\alpha_0-\beta_0}.$$

Si $\varrho(x,z_0)\ge 1$ et $\varrho(x,y)<3$, alors $\varrho(y,z_0)\ge 2^{-1}$ et $\varrho(x,y)<3$. Par suite,

$$\kappa(x,y)\le c\varrho(x,z_0)^{-\beta_1}\kappa_a(x,y)\varrho(y,z_0)^{-\alpha_1}\le c\varrho(x,y)^{a-d-\alpha_1-\beta_1}.$$

Si $\varrho(x,z_0)\ge 1$ et $\varrho(x,y)\ge 3$, alors $\varrho(y,z_0)\ge 2^{-1}$ et $\varrho(x,y)\ge 3$. Par suite,

$$\kappa(x,y)\le c\varrho(x,z_0)^{-\beta_1}\kappa_a(x,y)\varrho(y,z_0)^{-\alpha_1}\le c\varrho(x,y)^{a-D-\alpha_1-\beta_1}.$$

Comme par ailleurs $\alpha_0+\beta_0\le a\le\alpha_1+\beta_1$, on obtient, pour le deuxième cas (où $\varrho(x,y)<3$), la majoration

$$\kappa(x,y)\le c\varrho(x,y)^{a-d-\alpha_1-\beta_1}\le c\varrho(x,y)^{a-d-\alpha_0-\beta_0}.$$

Par suite, on a

$$\kappa(x,y)\chi_{D_3}(x,y) \leq c\varrho(x,y)^{a-d-\alpha_0-\beta_0}\chi_{D_3\cap\Delta'}(x,y) \\ + c'\varrho(x,y)^{a-D-\alpha_1-\beta_1}\chi_{D_3\cap\Delta'^{\mathrm{c}}}(x,y)$$

où $\Delta' = \{(x,y) \in X^2 \mid \varrho(x,y) < 3\}$ et $\Delta'^{\mathrm{c}} = \{(x,y) \in X^2 \mid \varrho(x,y) \geq 3\}$. Or par hypothèse, on a

$$d-a > 0, \quad D-a > 0, \quad 0 \leq \alpha_0+\beta_0 \leq a \leq \alpha_1+\beta_1, \quad 1 < p < q < \infty, \\ \frac{1}{p} + \frac{\alpha_0+\beta_0-a}{d} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{\alpha_1+\beta_1-a}{D},$$

ce qui entraîne

$$d-a+\alpha_0+\beta_0 > 0, \quad D-a+\alpha_1+\beta_1 > 0, \quad 1 < p < q < \infty, \\ \frac{1}{p} + \frac{\alpha_0+\beta_0+d-a}{d} - 1 \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{\alpha_1+\beta_1+D-a}{D} - 1.$$

Par suite on peut appliquer le théorème 1.1 au noyau

$$c\varrho(x,y)^{a-d-\alpha_0-\beta_0}\chi_{\Delta'}(x,y) + c'\varrho(x,y)^{a-D-\alpha_1-\beta_1}\chi_{\Delta'^{\mathrm{c}}}(x,y),$$

ce qui donne

$$I_3 \leq C_3\|f\|_p\|g\|_{q'}.$$

2.2.2. *Étude sur D_2.* Soit comme précédemment

$$I_{2,0} = \iint\limits_{\Delta\cap D_2} g(x)\kappa(x,y)f(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y),$$

$$I_{2,\infty} = \iint\limits_{\Delta^{\mathrm{c}}\cap D_2} g(x)\kappa(x,y)f(y)\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

Commençons par montrer que

$$I_{2,0} \leq c\|f\|_p\|g\|_{q'} \quad \forall f \in L^p(X),\, \forall g \in L^{q'}(X).$$

Pour ce faire, montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit*

$$(D_2\cap\Delta)(y) = \{x \in X \mid (x,y) \in D_2\cap\Delta\} \\ = \{x \in X \mid \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0) \geq 2 \text{ et } \varrho(x,y) < 1\}$$

et soit S_{β_0} l'opérateur défini en posant

$$S_{\beta_0}g(y) = \chi_{B(z_0,2)}(y)\varrho(y,z_0)^{\beta_0-d} \int\limits_{(D_2\cap\Delta)(y)} \varrho(x,z_0)^{-\beta_0}g(x)\chi_{B(z_0,2)}(x)\,d\mu(x).$$

Si $\beta_0 < d/q$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|S_{\beta_0}g\|_{q'} \leq c\|g\|_{q'} \quad \forall g \in L^{q'}(X).$$

Démonstration. Clairement, $S_{\beta_0}g(y) = \int_X k(x,y)g(x)\,d\mu(x)$, où

$$k(x,y) = \varrho(y,z_0)^{\beta_0-d}\chi_{B(z_0,2)}(y)\varrho(x,z_0)^{-\beta_0}\chi_{B(z_0,2)}(x)\chi_{D_2\cap\Delta}(y)(x).$$

Or, pour $p=q$ et $a-\alpha_0=\beta_0$ ceci n'est autre que le noyau

$$\kappa(x,y) = \varrho(y,z_0)^{a-d-\alpha_0}\chi_{B(z_0,2)}(y)\varrho(x,z_0)^{-\beta_0}\chi_{B(z_0,2)}(x)\chi_{D_2\cap\Delta}(x,y)$$

dont on a montré dans le cas $p=q$ (cf. section 2.1.2, (2.5)) qu'il vérifie, pour $\beta_0<d/q$,

$$\int_X\int_X f(y)\kappa(x,y)g(x)\,d\mu(y)\,d\mu(x) \le c\|f\|_q\|g\|_{q'} \quad \forall f\in L^q(X),\ \forall g\in L^{q'}(X).$$

Par suite,

$$\int_X\int_X f(y)k(x,y)g(x)\,d\mu(y)\,d\mu(x) \le c\|f\|_q\|g\|_{q'} \quad \forall f\in L^q(X),\ \forall g\in L^{q'}(X).$$

Ceci montre que $\|S_{\beta_0}g\|_{q'}\le c\|g\|_{q'}$ pour tout $g\in L^{q'}(X)$, et achève la preuve du lemme.

Ceci établi, on remarque que

$$\begin{aligned}(x,y)\in D_2\cap\Delta\ &\Leftrightarrow\ \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0)\ge 2 \text{ et } \varrho(x,y)<1\\ &\Rightarrow\ \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0)\ge 2 \text{ et}\\ &\qquad 1>\varrho(x,y)\ge\varrho(y,z_0)-\varrho(x,z_0)\ge 2^{-1}\varrho(y,z_0)\\ &\Rightarrow\ \varrho(y,z_0)<2 \text{ et } \varrho(x,z_0)<1.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} I_{2,0} &\le c\int_X f(y)\varrho(y,z_0)^{a-d-\alpha_0}\chi_{B(z_0,2)}(y)\\ &\qquad\times\Big(\int_{D_2(y)} g(x)\varrho(x,z_0)^{-\beta_0}\chi_{B(z_0,1)}(x)\,d\mu(x)\Big)\,d\mu(y)\\ &\le c\int_X f(y)\varrho(y,z_0)^{a-d-\alpha_0-\beta_0+d}\chi_{B(z_0,2)}(y)\varrho(y,z_0)^{\beta_0-d}\\ &\qquad\times\Big(\int_{D_2(y)} g(x)\varrho(x,z_0)^{-\beta_0}\chi_{B(z_0,2)}(x)\,d\mu(x)\Big)\,d\mu(y)\\ &\le c\int_X f(y)\varrho(y,z_0)^{a-\alpha_0-\beta_0}S_{\beta_0}g(y)\,d\mu(y).\end{aligned}$$

En appliquant Hölder à cette dernière intégrale, on trouve

$$\begin{aligned} I_{2,0} &\le c\|f\|_p\|S_{\beta_0}g(\cdot)\varrho(\cdot,z_0)^{a-\alpha_0-\beta_0}\|_{p'}\\ &\le c\|f\|_p\Big(\int_X (S_{\beta_0}g(y))^{q'}(S_{\beta_0}g(y))^{p'-q'}\varrho(y,z_0)^{(a-\alpha_0-\beta_0)p'}\,d\mu(y)\Big)^{1/p'}.\end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in B(z_0, 2)$ et toute fonction $g \in L^{q'}(X)$,

$$
\begin{aligned}
|S_{\beta_0} g(y)| &\le \chi_{B(z_0,2)}(y)\varrho(y,z_0)^{\beta_0-d} \int\limits_{D_2(y)} \varrho(x,z_0)^{-\beta_0}|g(x)|\,d\mu(x)\\
&\le \chi_{B(z_0,2)}(y)\varrho(y,z_0)^{\beta_0-d}\Big(\int\limits_{D_2(y)} \varrho(x,z_0)^{-\beta_0 q}\,d\mu(x)\Big)^{1/q}\|g\|_{q'}\\
&\le \chi_{B(z_0,2)}(y)\varrho(y,z_0)^{\beta_0-d}\Big(\int\limits_{\{x \mid \varrho(x,z_0)\le\varrho(y,z_0)\}} \varrho(x,z_0)^{(d-\beta_0 q)-d}\,d\mu(x)\Big)^{1/q}\|g\|_{q'}\\
&\le c\chi_{B(z_0,2)}(y)\varrho(y,z_0)^{\beta_0-d}\varrho(y,z_0)^{d/q-\beta_0}\|g\|_{q'}\\
&\qquad\qquad\text{(par le lemme 1.4 et car } \beta_0 < d/q)\\
&\le c\chi_{B(z_0,2)}(y)\varrho(y,z_0)^{-d/q'}\|g\|_{q'}.
\end{aligned}
$$

Comme en outre $1 < p < q < \infty \Rightarrow p' - q' > 0$, ceci entraîne

$$
\begin{aligned}
&(S_{\beta_0} g(y))^{p'-q'}\varrho(y,z_0)^{(a-\alpha_0-\beta_0)p'}\\
&\qquad\le c\varrho(y,z_0)^{(a-\alpha_0-\beta_0)p'-\frac{d}{q'}(p'-q')}\chi_{B(z_0,2)}(y)\|g\|_{q'}^{p'-q'}.
\end{aligned}
$$

Or,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p}+\frac{\alpha_0+\beta_0-a}{d} \le \frac{1}{q} \ \Rightarrow\ -\frac{d}{q'}(p'-q') &= dp'\Big(\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}\Big) = dp'\Big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\Big)\\
&\ge dp'\Big(\frac{\alpha_0+\beta_0-a}{d}\Big) = p'(\alpha_0+\beta_0-a).
\end{aligned}
$$

Par suite, il existe une constante $c > 0$ telle que $\varrho(y,z_0)^{(a-\alpha_0-\beta_0)p'-\frac{d}{q'}(p'-q')}$ $\le c$ pour tout $y \in B(z_0,2)$, et on a

$$
\int\limits_X (S_{\beta_0} g(y))^{p'}\varrho(y,z_0)^{(a-\alpha_0-\beta_0)p'}\,d\mu(y) \le c\|g\|_{q'}^{p'-q'}\int\limits_X (S_{\beta_0} g(y))^{q'}\,d\mu(y).
$$

Comme en outre $\beta_0 < d/q$, les conditions du lemme 2.1 sont remplies et on a

$$
\|S_{\beta_0} g\|_{q'} \le c\|g\|_{q'}.
$$

Par suite,

$$
\int\limits_X (S_{\beta_0} g(y))^{p'}\varrho(y,z_0)^{(a-\alpha_0-\beta_0)p'}\,d\mu(y) \le c\|g\|_{q'}^{p'-q'}\|g\|_{q'}^{q'} = c\|g\|_{q'}^{p'},
$$

ce qui montre que

$$
I_{2,0} \le c\|f\|_p\|g\|_{q'} \quad \forall f \in L^p(X),\ \forall g \in L^{q'}(X).
$$

Passons maintenant à l'estimation de $I_{2,\infty}$. Soient

$$I_{2,\infty,-} = \iint_{\Delta^c\cap D_2} g(x)\chi_{B(z_0,1)}(x)f(y)\varrho(x,z_0)^{-\beta_0}\varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha_1}\,d\mu(x)\,d\mu(y),$$
$$I_{2,\infty,+} = \iint_{\Delta^c\cap D_2} g(x)\chi_{B^c(z_0,1)}(x)f(y)\varrho(x,z_0)^{-\beta_1}\varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha_1}\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

Comme précédemment, on a

$$\begin{aligned}I_{2,\infty,-} &\le c\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-j-1}^{\infty}\int_X g_k(x)\varrho(x,z_0)^{-\beta_0}\,d\mu(x)\int_X f_{k+j}(y)\varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha_1}\,d\mu(y)\\ &\quad + c\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-j-1}^{\infty}\int_X g_k(x)\varrho(x,z_0)^{-\beta_0}\,d\mu(x)\int_X f_{k+j+1}(y)\varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha_1}\,d\mu(y)\\ &= J_3+J_4.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chacune des intégrales dans J_3, on trouve

$$J_3 \le c\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-j}^{-1}2^{k(d/q-\beta_0)}2^{(k+j)(a-\alpha_1-D+D/p')}\|f_{k+j}\|_p\|g_k\|_{q'}.$$

Posons

$$B = a-\alpha_1-\frac{D}{p}\quad\text{et}\quad e=\frac{d}{q}-\beta_0.$$

On a par hypothèse

$$e=\frac{d}{q}-\beta_0>0\quad\text{et}\quad B=a-\alpha_1-\frac{D}{p}<\beta_1-\frac{D}{p}\qquad(\text{car } a-\alpha_1-\beta_1\ge 0).$$

Avec cette notation, l'inégalité précédente s'écrit alors

$$J_3 \le c\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-j}^{-1}2^{ke}2^{(k+j)B}\|f_{k+j}\|_p\|g_k\|_{q'}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-j}^{-1}2^{ke}2^{(k+j)B}\|f_{k+j}\|_p\|g_k\|_{q'} &\le \Big(\sum_{l=1}^{\infty}2^{lB}\|f_l\|_p\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty}2^{-me}\|g_{-m}\|_{q'}\Big)\\ &\le c_1\|f\|_p\|g\|_{q'}\end{aligned}$$

puisque

$$\sum_{l=1}^{\infty}2^{lB}\|f_l\|_p \le \Big(\sum_{l=1}^{\infty}(2^{lB})^{p'}\Big)^{1/p'}\Big(\sum_{l=1}^{\infty}\|f_l\|_p^p\Big)^{1/p} \le c_2\|f\|_p$$

(car $B < 0$) et

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-me}\|g_{-m}\|_{q'} \le \Big(\sum_{m=1}^{\infty}(2^{-me})^q\Big)^{1/q}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\|g_{-m}\|_{q'}^{q'}\Big)^{1/q'} \le c_3\|g\|_{q'}$$

(car $e > 0$). Par suite, il existe une constante $c > 0$ telle que $J_3 \le c\|f\|_p\|g\|_{q'}$. De même, $J_4 \le c\|f\|_p\|g\|_{q'}$. Par suite, on a

$$I_{2,\infty,-} \le c\|f\|_p\|g\|_{q'} \quad \forall f \in L^p(X),\, \forall g \in L^{q'}(X).$$

Montrons maintenant l'estimation de $I_{2,\infty,+}$.

LEMME 2.2. *Soit*

$$\begin{aligned}(D_2 \cap \Delta^{\mathrm{c}})(y) &= \{x \in X \mid (x,y) \in D_2 \cap \Delta^{\mathrm{c}}\}\\ &= \{x \in X \mid \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0) \ge 2 \text{ et } \varrho(x,y) \ge 1\}\end{aligned}$$

et soit S_{β_1} l'opérateur défini en posant

$$S_{\beta_1}g(y) = \chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1})}(y)\varrho(y,z_0)^{\beta_1-D}\int_{(D_2\cap\Delta^{\mathrm{c}})(y)} g(x)\varrho(x,z_0)^{-\beta_1}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,1)}(x)\,d\mu(x).$$

Si $\beta_1 < D/q$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|S_{\beta_1}g\|_{q'} \le c\|g\|_{q'} \quad \forall g \in L^{q'}(X).$$

Démonstration. Clairement, $S_{\beta_1}g(y) = \int_X k(x,y)g(x)\,d\mu(x)$ où

$$k(x,y) = \varrho(y,z_0)^{\beta_1-D}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1})}(y)\varrho(x,z_0)^{-\beta_1}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,1)}(x)\chi_{(D_2\cap\Delta^{\mathrm{c}})(y)}(x).$$

Or, pour $p = q$ et $a - \alpha_1 = \beta_1$, ceci n'est autre que le noyau

$$\kappa(x,y) = \varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha_1}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1})}(y)\varrho(x,z_0)^{-\beta_1}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,1)}(x)\chi_{D_2\cap\Delta^{\mathrm{c}}}(x,y),$$

dont on a montré dans le cas $p = q$ (cf. section 2.1.2, (2.6)) qu'il vérifie, pour $\beta_1 < D/q$,

$$\int_X\int_X f(y)\kappa(x,y)g(x)\,d\mu(y)\,d\mu(x) \le c\|f\|_q\|g\|_{q'} \quad \forall f \in L^q(X),\, \forall g \in L^{q'}(X).$$

Par suite, on a

$$\int_X\int_X f(y)k(x,y)g(x)\,d\mu(y)\,d\mu(x) \le c\|f\|_q\|g\|_{q'} \quad \forall f \in L^q(X),\, \forall g \in L^{q'}(X).$$

Ceci montre que

$$\|S_{\beta_1}g\|_{q'} \le c\|g\|_{q'} \quad \forall g \in L^{q'}(X)$$

et achève la preuve du lemme.

Ceci établi, on remarque que

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in D_2\cap \Delta^{\mathrm{c}} \;&\Rightarrow\; \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0)\ge 2 \text{ et } \varrho(x,y)\ge 1\\
&\Rightarrow\; \varrho(y,z_0)/\varrho(x,z_0)\ge 2 \text{ et}\\
&\qquad 1\le \varrho(x,y)\le \varrho(x,z_0)+\varrho(y,z_0)\le \tfrac{3}{2}\varrho(y,z_0)\le 2\varrho(y,z_0)\\
&\Rightarrow\; y\in B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1}).
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
I_{2,\infty,+} &\le c\int_X f(y)\varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha_1}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1})}(y)\\
&\qquad\times\Big(\int_{D_2(y)} g(x)\varrho(x,z_0)^{-\beta_1}\,d\mu(x)\Big)\,d\mu(y)\\
&\le c\int_X f(y)\varrho(y,z_0)^{a-D-\alpha_1-\beta_1+D}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1})}(y)\varrho(y,z_0)^{\beta_1-D}\\
&\qquad\times\Big(\int_{D_2(y)} g(x)\varrho(x,z_0)^{-\beta_1}\,d\mu(x)\Big)\,d\mu(y)\\
&\le c\int_X f(y)\varrho(y,z_0)^{a-\alpha_1-\beta_1}S_{\beta_1}g(y)\,d\mu(y).
\end{aligned}
$$

En appliquant Hölder à cette dernière intégrale, on trouve

$$
\begin{aligned}
I_{2,\infty,+} &\le c\|f\|_p\|S_{\beta_1}g(\cdot)\varrho(\cdot,z_0)^{a-\alpha_1-\beta_1}\|_{p'}\\
&= c\|f\|_p\Big(\int_X (S_{\beta_1}g(y))^{q'}(S_{\beta_1}g(y))^{p'-q'}\varrho(y,z_0)^{(a-\alpha_1-\beta_1)p'}\,d\mu(y)\Big)^{1/p'}.
\end{aligned}
$$

Or, pour tout $y\in B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1})$ et toute fonction $g\in L^{q'}(X)$,

$$
\begin{aligned}
&|S_{\beta_1}g(y)|\le \varrho(y,z_0)^{\beta_1-D}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1})}(y)\int_{D_2(y)}\varrho(x,z_0)^{-\beta_1}|g(x)|\,d\mu(x)\\
&\le \varrho(y,z_0)^{\beta_1-D}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1})}(y)\Big(\int_{D_2(y)}\varrho(x,z_0)^{-\beta_1 q}\,d\mu(x)\Big)^{1/q}\|g\|_{q'}\\
&\le \varrho(y,z_0)^{\beta_1-D}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1})}(y)\Big(\int_{\{x\,|\,\varrho(x,z_0)\le\varrho(y,z_0)\}}\varrho(x,z_0)^{(D-\beta_1 q)-D}\,d\mu(x)\Big)^{1/q}\\
&\le c\varrho(y,z_0)^{\beta_1-D}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1})}(y)\varrho(y,z_0)^{D/q-\beta_1}\|g\|_{q'}\\
&\hspace{6cm}\text{(par le lemme 1.4 et car } \beta_1<D/q)\\
&\le c\varrho(y,z_0)^{-D/q'}\chi_{B^{\mathrm{c}}(z_0,2^{-1})}(y)\|g\|_{q'}.
\end{aligned}
$$

Comme en outre $1 < p < q < \infty \Rightarrow p' - q' > 0$, ceci entraîne

$$(S_{\beta_1} g(y))^{p'-q'} \varrho(y, z_0)^{(a-\alpha_1-\beta_1)p'} \leq c\varrho(y, z_0)^{(a-\alpha_1-\beta_1)p' - \frac{D}{q'}(p'-q')} \chi_{B^c(z_0, 2^{-1})}(y) \|g\|_{q'}^{p'-q'}.$$

Or,

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha_1 + \beta_1 - a}{D} \geq \frac{1}{q} \;\Rightarrow\; -\frac{D}{q'}(p'-q') = Dp'\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{q'}\right) = Dp'\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \leq Dp'\left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 - a}{D}\right) = p'(\alpha_1 + \beta_1 - a) \leq 0.$$

Par suite, il existe une constante $c > 0$ telle que $\varrho(y, z_0)^{(a-\alpha_1-\beta_1)p' - \frac{D}{q'}(p'-q')} \leq c$ pour tout $y \in B^c(z_0, 2^{-1})$, et on a

$$\int_X (S_{\beta_1} g(y) \varrho(y, z_0)^{(a-\alpha_1-\beta_1)})^{p'} \, d\mu(y) \leq c\|g\|_{q'}^{p'-q'} \int_X (S_{\beta_1} g(y))^{q'} \, d\mu(y).$$

Comme $\beta_1 < D/q$, les conditions du lemme 2.2 sont satisfaites et on a

$$\|S_{\beta_1} g\|_{q'} \leq c\|g\|_{q'}.$$

Par suite,

$$\int_X (S_{\beta_1} g(y) \varrho(y, z_0)^{(a-\alpha_1-\beta_1)})^{p'} \, d\mu(y) \leq c\|g\|_{q'}^{p'-q'} \|g\|_{q'}^{q'} = c\|g\|_{q'}^{p'}.$$

Il en résulte que

$$I_{2,\infty,+} \leq c\|f\|_p \|g\|_{q'},$$

et par suite que

$$I_{2,\infty} \leq I_{2,\infty,-} + I_{2,\infty,+} \leq c\|f\|_p \|g\|_{q'} \quad \forall f \in L^p(X), \forall g \in L^{q'}(X).$$

2.2.3. *Étude sur D_1.* Elle se fait de manière exactement analogue à celle sur D_2. Ceci achève la preuve du théorème.

RÉFÉRENCES

[1] R. Coifman et G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math. 242, Springer, 1971.

[2] T. Coulhon and L. Saloff-Coste, *Semi-groupes d'opérateurs et espaces fonctionnels sur les groupes de Lie*, J. Approx. Theory 65 (1991), 176–199.

[3] M. Cowling, S. Meda and R. Pasquale, *Riesz potentials and amalgams*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 51 (2001), 5–26.

[4] G. B. Folland and E. M. Stein, *Estimates for the ∂_b-complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 429–522.

[5] B. Franchi, C. Pérez and R. Wheeden, *Sharp geometric Poincaré inequalities for vector fields and non-doubling measures*, Proc. London Math. Soc. 80 (2000), 665–689.

[6] J. García-Cuerva and J. M. Martell, *Weighted inequalities and vector-valued Calderón–Zygmund operators on non-homogeneous spaces*, Publ. Math 44 (2000), 613–640.
[7] —, —, *Two-weight norm inequalities for maximal operators and fractional integrals on non-homogeneous spaces*, Indiana Univ. Math. J. 50 (2001), 1241–1279.
[8] A. E. Gatto and S. Vági, *Fractional integrals on spaces of homogeneous type*, in: Analysis and Partial Differential Equations, C. Sadosky (ed.), Dekker, 1990, 171–216.
[9] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer, New York, 2001.
[10] R. A. Hunt, *On* $L(p,q)$ *spaces*, Enseign. Math. 12 (1966), 249–276.
[11] E. Lieb and M. Loss, *Analysis*, Grad. Stud. Math. 14, Amer. Math. Soc., 1997.
[12] A. Nagel, E. Stein and M. Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields*, Acta Math. 155 (1985), 103–147.
[13] J. Orobitg and C. Pérez, A_p *weights for nondoubling measures in* $\mathbb{R}^n$ *and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 2013–2033.
[14] P. Pansu, *Une inégalité isopérimétrique sur le groupe de Heisenberg*, C. R. Acad. Sci. Paris 295 (1982), 127–130.
[15] C. Pérez, *Two weighted inequalities for potential and fractional type maximal operators*, Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), 663–683.
[16] L. Saloff-Coste, *Analyse sur les groupes de Lie nilpotents*, C. R. Acad. Sci. Paris 302 (1986), 499–502.
[17] —, *Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynomiale*, Ark. Mat. 28 (1990), 315–331.
[18] S. G. Samko, A. A. Kimbas and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, 1993.
[19] E. T. Sawyer and R. L. Wheeden, *Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous type spaces*, Amer. J. Math. 114 (1992), 813–874.
[20] E. T. Sawyer, R. L. Wheeden and S. Zhao, *Weighted norm inequalities for operators of potential type and fractional maximal functions*, Potential Anal. 5 (1996), 523–580.
[21] E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, 1970.
[22] —, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, 1993.
[23] E. M. Stein and G. Weiss, *Fractional integrals on* n*-dimensional Euclidean spaces*, J. Math. Mech. 7 (1958), 503–514.
[24] —, —, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, 1971.
[25] N. Varopoulos, L. Saloff-Coste and T. Coulhon, *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge Univ. Press, 1992.

Département de Mathématiques
Université de Cergy-Pontoise
95 302 Cergy-Pontoise Cedex, France
E-mail: david.mascre@diplomatie.gouv.fr, david.mascre@caramail.com

Received 25 January 2004;
revised 13 August 2004 (4481)