COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 137 2014 NO. 2

PROPRIÉTÉS MULTIPLICATIVES DES ENTIERS FRIABLES TRANSLATÉS

PAR

SARY DRAPPEAU (Montréal)

Abstract. An integer n is said to be y-friable if its greatest prime factor $P(n)$ is less than y. In this paper, we study numbers of the shape $n-1$ when $P(n) \leq y$ and $n \leq x$. One expects that, statistically, their multiplicative behaviour resembles that of all integers less than x. Extending a result of Basquin (2010), we estimate the mean value over shifted friable numbers of certain arithmetic functions when $(\log x^c) \leq y$ for some positive c, showing a change in behaviour according to whether $\log y/\log\log x$ tends to infinity or not. In the same range in (x, y), we prove an Erdős–Kac-type theorem for shifted friable numbers, improving a result of Fouvry & Tenenbaum (1996). The results presented here are obtained using recent work of Harper (2012) on the statistical distribution of friable numbers in arithmetic progressions.

1. Introduction. Un entier n est dit *y-friable* si son plus grand facteur premier $P(n)$ est inférieur ou égal à y, avec la convention $P(1) = 1$. On note $S(x, y)$ l'ensemble des entiers inférieurs à x qui sont y-friables, et $\Psi(x, y) := \operatorname{card} S(x, y)$. Il est intéressant d'étudier dans quelle mesure les propriétés multiplicatives des entiers friables *translatés*, de la forme $n - 1$ où $P(n) \leq y$, sont similaires en moyenne à celles des entiers *normaux*, c'est-à-dire pris dans leur globalité. On pose $S^*(x, y) := S(x, y) \smallsetminus \{1\}$. Dans ce travail, on présente deux résultats concernant la répartition des entiers friables translatés, qui améliorent des estimations antérieures en faisant usage d'un article récent de Harper [6].

On étudie d'abord le problème du calcul de la valeur moyenne de fonctions arithmétiques sur les friables translatés. Cette question est abordée par Fouvry et Tenenbaum [3] pour le cas de la fonction $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, et récemment par Loiperdinger et Shparlinski [12] dans le cas de la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$, puis par Basquin [1] qui améliore leurs résultats.

À toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ on associe la fonction λ définie par

$$\lambda(n) := (f * \mu)(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11N25; Secondary 11N37.
Key words and phrases: shifted friable numbers, saddle-point method, equidistribution in arithmetic progressions, Bombieri–Vinogradov.

DOI: 10.4064/cm137-2-1

où μ désigne la fonction de Möbius, ainsi que la quantité

$$R_f(x,y) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n\in S^*(x,y)} f(n-1)$$

définie pour $2 \le y \le x$. On pose $u := \log x/\log y$ et on définit le domaine

$$(\mathrm{H}_\varepsilon) \qquad 2 \le \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \le y \le x$$

où $\log_k x$ désigne le k-ième itéré du logarithme évalué en x. On s'intéresse au résultat suivant de Basquin [1].

Théorème A. *Pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplicative vérifiant pour deux réels positifs B, β et tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité $|\lambda(n)| \le Bn^{-\beta}$, on a l'estimation*

$$R_f(x,y) = R_f(x,x) + O_{B,\beta}\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \qquad ((x,y) \in H_\varepsilon). \tag{1}$$

Sous l'hypothèse sur f de cet énoncé, le terme principal du membre de droite de (1) converge lorsque $x \to \infty$ vers la valeur moyenne de f, qui s'exprime en fonction de λ grâce à la relation

$$\lim_{x\to\infty} R_f(x,x) = \sum_{q\ge 1} \frac{\lambda(q)}{q}.$$

On établit ici une estimation de même nature que (1), valable pour des fonctions f plus générales et dans un plus grand domaine en (x,y). On note $u := \log x/\log y$ et $\alpha = \alpha(x,y)$ l'unique solution réelle positive à l'équation

$$\log x = \sum_{p\le y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1}.$$

On a $\alpha \in [0,1]$ et $1-\alpha \sim \log(u+1)/\log y$ lorsque $\min\{y/\log x, u\} \to \infty$. Ainsi lorsque $y = (\log x)^\kappa$ pour $\kappa > 1$ fixé et $x \to \infty$, on a $\alpha \to 1 - 1/\kappa$. On pose également pour tout $\beta \in [0,1]$,

$$g_q(\beta) := \prod_{p|q} (1 - p^{-\beta}). \tag{2}$$

On note que $g_q(1) = \varphi(q)/q$.

Théorème 1. *Supposons que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ soit une fonction telle que pour certains réels $B, \beta > 0$ on ait*

$$\sum_{q\ge 1} \frac{|\lambda(q)|}{q^{1-\beta}} \le B, \tag{3}$$

*et telle que l'*une des deux conditions *suivantes soit vérifiée :*

(i) $|\lambda(n)| \le B$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et un certain* $B > 0$ *fixé,*
(ii) f *est multiplicative,* λ *l'étant alors également.*

Alors il existe $c > 0$ dépendant au plus de β telle que lorsque

$$2 \le (\log x)^c \le y \le x,$$

on ait

$$R_f(x,y) = \sum_{q \ge 1} \frac{\lambda(q) g_q(\alpha)}{\varphi(q)} + O_{B,\beta}\Big(\min\Big\{\frac{1}{u}, \frac{\log(u+1)}{\log y}\Big\}\Big). \tag{4}$$

En particulier, dans le même domaine,

$$R_f(x,y) = R_f(x,x) + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big). \tag{5}$$

Remarque. Lorsque f est multiplicative, le terme principal du membre de droite de (4) peut s'écrire comme un produit eulérien :

$$\sum_{q \ge 1} \frac{\lambda(q) g_q(\alpha)}{\varphi(q)} = \prod_p \Big(1 + \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{-1}} \sum_{\nu \ge 1} \frac{\lambda(p^\nu)}{p^\nu}\Big). \tag{6}$$

On rappelle que la quantité α dépend implicitement de x et y.

L'estimation (5) correspond à l'approximation du terme principal de (4) par sa valeur au point $\alpha = 1$. Si cette valeur est non nulle, l'estimation (5) n'est un équivalent asymptotique que lorsque $\alpha \to 1$ ou de façon équivalente $\log y / \log_2 x \to \infty$. Par ailleurs le terme d'erreur de (4) est borné par $O(\log_2 x / \sqrt{\log x})$ uniformément par rapport à y.

Une autre question concernant les friables translatés et étudiée par Fouvry et Tenenbaum [4] est leur nombre de facteurs premiers distincts. On note $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de $n > 1$, et $\omega(1) = 0$. Posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $2 \le y \le x$,

$$\Phi(t) := \int_{-\infty}^{t} e^{-v^2/2}\, dv / \sqrt{2\pi},$$

$$\Psi(x,y;t) := \operatorname{card}\Big\{n \in S^*(x,y) \;\Big|\; \frac{\omega(n-1) - \log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}} \le t\Big\},$$

Fouvry et Tenenbaum obtiennent l'estimation suivante.

Théorème B. *Soit A un réel positif. Lorsque $t \in \mathbb{R}$ et*

$$\exp\{\log x / (\log_2 x)^A\} \le y \le x,$$

on a

$$\frac{\Psi(x,y;t)}{\Psi(x,y)} = \Phi(t) + O\Big(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\Big). \tag{7}$$

Dans le cas $y = x$ ceci découle du théorème d'Erdős–Kac (cf. par exemple le théorème III.4.15 de [14]). On montre ici que cette estimation est valable dans un plus large domaine en (x, y).

Théorème 2. *Il existe un réel $c > 0$ telle que l'estimation* (7) *soit valable uniformément lorsque $t \in \mathbb{R}$ et $2 \le (\log x)^c \le y \le x$.*

2. Théorème de Bombieri–Vinogradov pondéré pour les entiers friables. On définit pour tous $a, q \in \mathbb{N}$ et tous réels x, y avec $2 \le y \le x$,

$$\begin{aligned} \Psi(x, y; a, q) &:= \operatorname{card}\{n \in S(x, y) \mid n \equiv a \ (\mathrm{mod}\ q)\}, \\ \Psi_q(x, y) &:= \operatorname{card}\{n \in S(x, y) \mid (n, q) = 1\}, \end{aligned}$$

et on note

$$H(u) := \exp\left\{\frac{u}{\log(u+2)^2}\right\}.$$

Un aspect important de l'étude des entiers friables est la question de l'uniformité des résultats en y. Par exemple, Hildebrand [8] a montré que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'assertion que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Psi(x, y) \sim_\varepsilon x\rho(u) \quad (x \to \infty,\ (\log x)^{2+\varepsilon} \le y \le x) \tag{8}$$

où ρ est la *fonction de Dickman*, solution continue sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation

$$u\rho'(u) + \rho(u-1) = 0$$

avec la condition initiale $\rho(u) = 1$ pour $u \in [0, 1]$, ainsi que la convention $\rho(u) = 0$ si $u < 0$. Dans [9], Hildebrand montre que l'assertion (8) est vraie lorsque $x, y \to \infty$ avec $(x, y) \in (\mathrm{H}_\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé. L'exposant $5/3$ dans la définition de (H_ε) est lié à l'exposant $2/3$ apparaissant dans la région sans zéro de ζ de Vinogradov–Korobov.

Les travaux de Hildebrand et Tenenbaum [10] et La Bretèche et Tenenbaum [2], qui font usage de la méthode du col, élucident en partie le comportement de $\Psi(x, y)$, et plus généralement $\Psi_q(x, y)$, en dehors du domaine (H_ε), notamment par le biais de résultats locaux : on peut établir un lien entre les valeurs de $\Psi_q(x, y)$ et celles de $\Psi(x, y)$ même pour des valeurs de y où aucune approximation régulière de $\Psi(x, y)$ n'est connue. On a en particulier les deux résultats suivants.

Lemme C.

(i) *Lorsque $x, y \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$ vérifient*

$$2 \le (\log x)^2 \le y \le x, \quad P(m) \le y, \quad \text{et} \quad \omega(m) \ll \sqrt{y},$$

on a

$$\Psi_m(x, y) = \Psi(x, y) g_m(\alpha)\left\{1 + O\left(\frac{E_m(1 + E_m)}{u}\right)\right\} \tag{9}$$

où, ayant posé $\gamma_m := \log(\omega(m) + 2)\log(u + 1)/\log y$, $E_m = E_m(x, y)$ vérifie

$$E_m \ll (\log u)^{-1}\{\exp(2\gamma_m) - 1\}. \tag{10}$$

(ii) *Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque $m \in \mathbb{N}$ vérifie $P(m) \leq y$ et $\omega(m) \ll \sqrt{y}$, on a*

$$(11) \quad \Psi_m(x,y) = \Psi(x,y)\left\{\frac{\varphi(m)}{m} + O_\varepsilon\left(\frac{2^{\omega(m)}\log(u+1)}{\log y}\right)\right\} \quad ((x,y) \in (\mathrm{H}_\varepsilon)).$$

Preuve. La formule (9) est un cas particulier du théorème 2.1 de [2]. La formule (11) découle aisément des calculs de Fouvry–Tenenbaum [4] ; on en reprend ici la démonstration. Posons, pour $t \in \mathbb{R}$ et $2 \leq y \leq x$,

$$R_m(t) := \frac{1}{t}\,\mathrm{card}\{n \leq t \mid (n,m) = 1\},$$
$$\Lambda_m(x,y) := \begin{cases} x\int_{-\infty}^{\infty}\rho(u-v)\,dR_m(y^v) & \text{si } x \notin \mathbb{N}, \\ \Lambda_m(x-0,y) & \text{sinon.}\end{cases}$$

L'estimation (4.1) de [2] montre qu'afin d'établir la formule (11) il suffit de montrer que

$$(12) \qquad \Lambda_m(x,y) = \frac{\varphi(m)}{m}\Psi(x,y) + O\left(\Psi(x,y)\frac{2^{\omega(m)}\log(u+1)}{\log y}\right).$$

On suppose sans perte de généralité que $x \notin \mathbb{N}$. Il découle d'une intégration par parties (ou de la formule (4.22) de [4] avec $k = 0$) que l'on a

$$(13) \qquad \begin{aligned}\frac{\Lambda_m(x,y)}{x} &= \frac{\varphi(m)}{m}\rho(u) + \left\{R_m(x) - \frac{\varphi(m)}{m}\right\} \\ &\quad - \int_0^\infty \rho'(u-v)\left\{\frac{\varphi(m)}{m} - R_m(y^v)\right\}dv,\end{aligned}$$

où ρ' est définie sur $\mathbb{R}$ comme la dérivée à droite de la fonction ρ. On a par une inversion de Möbius $R_m(t) = \varphi(m)m^{-1} + O(2^{\omega(m)}t^{-1})$ pour $t \geq 0$; en injectant cela ainsi que l'estimation (4.4) de [4] dans le membre de droite de (13), on obtient l'estimation

$$\Lambda_m(x,y) = \frac{\varphi(m)}{m}x\rho(u) + O\left(x2^{\omega(m)}\left\{\frac{\rho(u)\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{x}\right\}\right)$$

et on en déduit l'estimation voulue (12) lorsque $(x,y) \in (H_\varepsilon)$, grâce au théorème de Hildebrand [9, Theorem]. ∎

Considérons maintenant $\Psi(x,y;a,q)$. Cette quantité est nulle lorsque le pgcd $d := (a,q)$ n'est pas un entier y-friable ; dans le cas contraire, $\Psi(x,y;a,q) = \Psi(x/d,y;a/d,q/d)$. Ainsi on peut toujours se ramener au cas où $(a,q) = 1$. Dans ce cas on sait suite à des travaux de Soundararajan [13] précisés par Harper [7] qu'il y a équirépartition dans une large mesure : pour tout $\varepsilon > 0$, la relation

$$\Psi(x,y;a,q) \sim_\varepsilon \frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)}$$

est valable lorsque $(a,q)=1$, $\log x/\log q\to\infty$, $y\geq y_0(\varepsilon)$ et $q\leq y^{4\sqrt{e}-\varepsilon}$. Comme le mentionnent Granville [5] et Soundararajan [13], il paraît difficile d'améliorer la valeur $4\sqrt{e}$ de l'exposant. Il est cependant possible d'obtenir des résultats si l'on considère le problème plus faible de l'erreur moyenne de la répartition de $S(x,y)$ dans les différentes classes modulo q pour $q\leq Q$ avec Q de l'ordre d'une puissance de x. Les théorèmes 1 et 2 découlent plus précisément de bonnes estimations pour la quantité

$$\Delta(x,y;Q):=\sum_{q\leq Q}\left|\Psi(x,y;1,q)-\frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)}\right|.$$

Fouvry et Tenenbaum [4] donnent un panorama des résultats antérieurs et obtiennent pour tous réels positifs ε, A fixés la majoration

$$\Delta(x,y;\sqrt{x}\exp\{-(\log x)^{1/3}\})\ll\Psi(x,y)H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A}$$

lorsque $\exp\{(\log x)^{2/3+\varepsilon}\}\leq y\leq x$, pour un certain $\delta=\delta(\varepsilon,A)$. Harper [6], améliorant leurs résultats, obtient pour tout $A>0$ et $Q\leq\sqrt{\Psi(x,y)}$, et pour deux constantes absolues $c,\delta>0$, la majoration

$$\Delta(x,y;Q)\ll_A\Psi(x,y)\{y^{-\delta}+H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A}\}+Q\sqrt{\Psi(x,y)}\,(\log x)^4$$

lorsque $(\log x)^c\leq y\leq x$. C'est cette majoration qui est à l'œuvre dans les théorèmes 1 et 2.

La proposition qui suit est une version pondérée de [6, Theorem 1].

Proposition 1. *Soit $\vartheta>0$. Il existe trois constantes $c,\delta,\eta>0$ pouvant dépendre de ϑ telles que lorsque $2\leq(\log x)^c\leq y\leq x$ et $1\leq Q\leq\sqrt{\Psi(x,y)}$, pour toute fonction $\lambda:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ vérifiant pour un certain $B\geq 0$ les conditions suivantes :*

(i) $\lambda(mn)\leq\lambda(m)\lambda(n)$ $((m,n)\in\mathbb{N}^2)$,
(ii) $\sum_{n\leq z}\lambda(n)\ll z(\log z)^B$ $(z\geq 2)$,
(iii) $\lambda(n)\ll n^{1-\vartheta}$ $(n\geq 1)$,

et pour tout $A>0$, on ait

$$\begin{aligned}(14)\qquad\sum_{q\leq Q}\lambda(q)\max_{(a,q)=1}&\left|\Psi(x,y;a,q)-\frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)}\right|\\ &=O_B(\Psi(x,y)\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A}+y^{-\delta}\})\\ &\quad+O\Big((\log x)^6\sqrt{\Psi(x,y)}\,\{Q+\sqrt{\Psi(x,y)}\,x^{-\eta/2}\}\max_{q\leq Q}\lambda(q)\Big).\end{aligned}$$

De plus, lorsque $Q\leq x^\eta$, le membre de gauche de (14) est

$$O_B(\Psi(x,y)\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A}+y^{-\delta}\}).$$

Autrement dit, le deuxième terme d'erreur de (14) n'est à prendre en compte que lorsque $Q>x^\eta$.

Preuve. Le résultat énoncé dans [6, Theorem 1] correspond au cas particulier $\lambda = \mathbf{1}$. Le cas général se montre par une méthode exactement identique, c'est pourquoi on se contente ici d'indiquer les modifications à apporter à la preuve de [6, Theorem 1].

Le membre de gauche de (14) est majoré par

$$\sum_{1<r\leq Q} \sum_{\substack{\chi^* \,(\mathrm{mod}\, r)\\ \chi^* \text{ primitif}}} \sum_{q\leq Q} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)\\ \chi \text{ induit par } \chi^*}} \Big| \sum_{n\in S(x,y)} \chi(n) \Big|. \tag{15}$$

Pour tout $\eta > 0$ fixé, les calculs de Harper (voir [6, Proposition 2 et paragraphe 4.4]) montrent que la contribution des indices $r > x^\eta$ à la première somme de (15) est

$$O\Big((\log x)^{7/2}\sqrt{\Psi(x,y)}\{Q + x^{1/2-\eta}(\log x)^2\} \max_{q\leq Q} \lambda(q)\Big)$$

en majorant trivialement $\lambda(q)$. Ceci fournit le second terme d'erreur de (14) en remarquant que $\Psi(x,y) \gg x^{1-\eta}$ lorsque c est choisi suffisamment grand en fonction de η.

Il s'agit ensuite de vérifier que la contribution des indices $r \leq x^\eta$ à la première somme de (15) vérifie la majoration

$$\sum_{1<r\leq x^\eta} \sum_{\substack{\chi^* \,(\mathrm{mod}\, r)\\ \chi^* \text{ primitif}}} \sum_{q\leq Q} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)\\ \chi \text{ induit par } \chi^*}} \Big| \sum_{n\in S(x,y)} \chi(n) \Big| \\ \ll \Psi(x,y)(H(u)^{-c_2} + y^{-c_2}).$$

Cela est l'analogue de la formule (3.1) de [6] ; il convient de modifier la preuve de Harper de la façon suivante. Tout d'abord, il faut changer la définition de $\mathcal{G}_2$ en remplaçant la condition $\mathfrak{Re}(s) > 299/300$ par $\mathfrak{Re}(s) > 1 - \vartheta/300$. Lors la majoration de la contribution des caractères de $\mathcal{G}_2$, il convient de poser

$$\epsilon := \min\{\vartheta/300, 10\log r/\log y\}$$

en vérifiant que ce choix de ϵ vérifie encore $40\log\log(qyH)/\log y \leq \epsilon$, quitte à augmenter la valeur de c (appellée K dans la notation de [6]), et quitte à diminuer celle de η en fonction de ϑ. Le reste des calculs sont valables avec le poids $\lambda(q)$ grâce aux propriétés suivantes, qui découlent des hypothèses sur λ :

(a) lorsque $q = rs$, on a $\lambda(q)/\varphi(q) \leq \lambda(r)\lambda(s)/(\varphi(r)\varphi(s))$,
(b) on a $\sum_{s\leq Q} \lambda(s)/\varphi(s) \ll (\log Q)^{B+2}$ et $\sum_{r\geq R} \lambda(r)/r^2 \ll (\log R)^B/R$,
(c) étant donné $R \geq 1$, on a

$$\sum_{R<r\leq 2R} \sideset{}{^\sharp}\sum_{\chi^* \,(\mathrm{mod}\, r)} \frac{\lambda(r)}{\varphi(r)} \ll \frac{\log_2 R}{R^\vartheta} (R^{102})^{(5/2)(\vartheta/300)} \ll R^{-\vartheta/10},$$

où la somme $\sum^\sharp$ porte sur les caractères primitifs χ^* modulo r tels que la série de Dirichlet associée $L(s,\chi^*)$ ait au moins un zéro $\rho = \beta + i\gamma$ avec $\beta > 1 - \vartheta/300$ et $|\gamma| \le r^{100}$,

(d) on a enfin pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{q\le Q\\ r|q}} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \sum_{d|q/r} \frac{1}{\sqrt{d}} \ll \frac{\lambda(r)}{\varphi(r)} \sum_{d\le Q/r} \frac{\lambda(d)}{\sqrt{d}\,\varphi(d)} \sum_{m\le Q/(rd)} \frac{\lambda(m)}{\varphi(m)} \ll (\log Q)^{B+2}\frac{\lambda(r)}{\varphi(r)}.$$

Les facteurs additionnels qui proviennent de ces modifications sont tous $O((\log x)^{c_3})$ pour un certain réel $c_3 = c_3(B) > 0$, et cela est absorbé dans le terme d'erreur quitte à diviser par 2 la valeur de δ. ∎

3. Valeur moyenne de certaines fonctions arithmétiques. On démontre dans cette section le théorème 1. On se place dans un cadre qui regroupe les deux hypothèses possibles sur f : on suppose qu'il existe une fonction $\widetilde{\lambda} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telle que l'on ait

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\lambda(n)| \le B\widetilde{\lambda}(n)$,
(ii) $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\widetilde{\lambda}(mn) \le \widetilde{\lambda}(m)\widetilde{\lambda}(n)$,
(iii) $\forall z \ge 2$, $\sum_{n\le z} \widetilde{\lambda}(n) \le Bz(\log z)^B$,
(iv) $\widetilde{\lambda}(n) \le Bn^{1-\beta}$.

Lorsque $\lambda(n) \le B$ (resp. λ est multiplicative), le choix $\widetilde{\lambda} = \mathbf{1}$ (resp. $\widetilde{\lambda} = |\lambda|$) est admissible. On rappelle que l'on dispose en plus de la majoration (3).

Soit $c \ge 2$ un réel. On suppose $(\log x)^c \le y \le x$. On remarque tout d'abord que sous ces hypothèses,

$$\sum_{q\ge1} \frac{\lambda(q) g_q(\alpha)}{\varphi(q)} = \sum_{q\ge1} \frac{\lambda(q)}{q} + O_{B,\beta}\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big). \tag{16}$$

En effet, puisque $\alpha \gg 1$, on a $\sup_{\beta\in[\alpha,1]} |g_q'(\beta)| \ll \log q$, ainsi $g_q(\alpha) = g_q(1) + O((\log q)(1-\alpha))$. L'estimation (16) découle alors de la majoration $\sum_q \lambda(q)\log q/\varphi(q) \ll_{B,\beta} 1$ ainsi que de [14, formule III.5.74]. Comme

$$\frac{1}{u} \le \frac{\log(u+1)}{\log y} \;\Leftrightarrow\; \log y \le \{1/2 + \varepsilon(x)\}\sqrt{\log x \log_2 x}$$

pour une certaine fonction $\varepsilon(x) = o(1)$, on en conclut que l'estimation (4) implique (5), et que ces deux estimations sont en réalité équivalentes lorsque $y \ge \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$.

On suppose toujours $(\log x)^c \le y \le x$. On part de l'expression

$$R_f(x,y) = \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{q\ge1} \lambda(q)\{\Psi(x,y;1,q) - 1\}$$

obtenue en écrivant $f(n) = \sum_{q|n} \lambda(q)$ et en intervertissant les sommes. Posons

$$Q := \left\lceil \left(\frac{x(\log x)^2}{\Psi(x,y)} \right)^{1/\beta} \right\rceil.$$

Lorsque x tend vers l'infini, on a $\Psi(x,y) = x^{\alpha+o(1)}$, donc $Q = x^{(1-\alpha)/\beta+o(1)}$. Une majoration triviale ainsi que l'hypothèse (3) fournissent

$$\sum_{q>Q} \lambda(q)\{\Psi(x,y;1,q) - 1\} \ll x \sum_{q>Q} \frac{|\lambda(q)|}{q} \leq BxQ^{-\beta} \leq B\frac{\Psi(x,y)}{(\log x)^2}.$$

On applique la proposition 1 avec le poids $\widetilde{\lambda}$ pour $\vartheta = \beta$. Si η est le réel positif donné par cette proposition, quitte à supposer c suffisamment grand en fonction de β, on a $Q \leq x^\eta$. Par ailleurs $\sum_{q\leq Q} |\lambda(q)| \leq BQ$, on obtient donc

$$\sum_{q\leq Q} \lambda(q)\left\{\Psi(x,y;1,q) - \frac{1}{\varphi(q)}\Psi_q(x,y)\right\} \ll_B \frac{\Psi(x,y)}{\log x}.$$

Ainsi,

$$R_f(x,y) = \sum_{q\leq Q} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \frac{\Psi_q(x,y)}{\Psi(x,y)} + O_B\left(\frac{1}{\log x}\right). \tag{17}$$

Supposons tout d'abord $y \leq \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$, de sorte que l'on a $1/u \ll \log(u+1)/\log y$. L'hypothèse (3) sur λ implique

$$\sum_{q>u^{2/\beta}} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \frac{\Psi_q(x,y)}{\Psi(x,y)} \ll_{B,\beta} \frac{1}{u}$$

puisque $1/\varphi(q) \ll_\beta q^{-1+\beta/2}$. Lorsque c est supposé assez grand en fonction de β, les conditions de l'estimation (9) du lemme C sont vérifiées avec $m = q$ lorsque $q \leq u^{2/\beta}$, et on a uniformément

$$\Psi_q(x,y) = g_q(\alpha)\Psi(x,y)\left\{1 + O\left(\frac{E_q(1+E_q)}{u}\right)\right\}$$

où E_q vérifie (10). On a $\log(\omega(q)+1) = o(\log q)$ lorsque $q \to \infty$, ainsi que $\log(u+2)/\log y \ll 1$. On en déduit que lorsque $q \to \infty$, $\gamma_q = o(\log q)$, d'où $E_q = q^{o(1)}$, et ainsi

$$\sum_{q\leq u^{2/\beta}} \frac{|\lambda(q)|E_q(1+E_q)}{\varphi(q)} \ll_{B,\beta} 1.$$

On en déduit

$$R_f(x,y) = \sum_{q\leq u^{2/\beta}} \frac{\lambda(q)g_q(\alpha)}{\varphi(q)} + O_{B,\beta}\left(\frac{1}{u}\right) = \sum_{q\geq 1} \frac{\lambda(q)g_q(\alpha)}{\varphi(q)} + O_{B,\beta}\left(\frac{1}{u}\right)$$

grâce à l'hypothèse (3), ce qui montre l'estimation (4) sous la condition $y \leq \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$.

On suppose maintenant que $y \geq \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$ et on reprend l'étude précédente à partir de la formule (17). Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on note

$$q_y := \prod_{\substack{p^\nu \| q \\ p \leq y}} p^\nu$$

le plus grand diviseur y-friable de q. On a $\Psi_q(x,y) = \Psi_{q_y}(x,y)$ ainsi que $\omega(q_y) \ll \log x \leq \sqrt{y}$ lorsque $q \leq x$, l'estimation (11) du lemme C fournit donc

$$R_f(x,y) = \sum_{q \leq Q} \frac{\varphi(q_y)\lambda(q)}{q_y \varphi(q)} + O_B\bigg(\frac{1}{\log x} + \sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{2^{\omega(q)}\lambda(q)}{\varphi(q)} \frac{\log(u+1)}{\log y}\bigg).$$

On a $2^{\omega(q)} q/\varphi(q) \ll_\beta q^\beta$, et l'hypothèse (3) sur λ montre que le terme d'erreur est majoré par $O_{B,\beta}(\log(u+1)/\log y)$. Par ailleurs, on remarque que

$$\sum_{q \leq Q} \frac{\varphi(q_y)\lambda(q)}{q_y \varphi(q)} = \sum_{q \geq 1} \frac{\lambda(q)}{q} + O\bigg(\sum_{q > \min\{Q,y\}} \frac{|\lambda(q)|}{\varphi(q)}\bigg)$$

et le terme d'erreur est $O_{B,\beta}(y^{-\beta/2} + Q^{-\beta/2}) = O_{B,\beta}(\log(u+1)/\log y)$ par construction de Q. Cela montre (5) lorsque $y \geq \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$. L'estimation (4) en découle d'après (16).

4. Théorème d'Erdős–Kác sur les friables translatés. On démontre dans cette section le théorème 2. On reprend la preuve de Fouvry et Tenenbaum [4], avec deux changements notables : le choix du paramètre Y et l'utilisation de la majoration (24) *infra*. Lorsque la condition $y \geq \exp\{\log x/(\log_2 x)^2\}$ est vérifiée, le corollaire 5 de [4] s'applique, on peut donc supposer sans perte de généralité $y \leq \exp\{\log x/(\log_2 x)^2\}$. En particulier $H(u)^{-\delta} \ll_\delta 1/\log x$. La proposition 1 s'applique pour la valeur $\vartheta = 1/2$ et $\widetilde{\lambda}(n) = \tau(n)^3$ où $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ (l'hypothèse (ii) étant satisfaite avec $B = 7$) et fournit, pour un réel positif δ et quitte à augmenter la valeur de c, l'estimation

$$\sum_{q \leq Q} \tau(q)^3 \max_{(a,q)=1} \bigg|\Psi(x,y;a,q) - \frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)}\bigg| \ll \Psi(x,y)(H(u)^{-\delta} + y^{-\delta}) + \sqrt{\Psi(x,y)}\, Q^{9/8}(\log x)^6 \tag{18}$$

uniformément lorsque $2 \leq (\log x)^c \leq y \leq x$ et $Q \leq \sqrt{\Psi(x,y)}$. Il sera fait usage du résultat suivant, qui est issu de [11, Lemma].

Lemme D. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\tau(n) \ll \sum_{d|n,\, d\le n^{1/3}} \tau(d)^3.$$

On pose $Y := \exp\{\log x/(\log_2 x)^c\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\omega(n, Y) := \sum_{p|n,\, p\le Y} 1.$$

Pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{card}\{n \in S^*(x, y) \mid \omega(n-1) - \omega(n-1, Y) > \kappa\} \le 2^{-\kappa} \sum_{n\in S^*(x,y)} 2^{\omega(n-1)-\omega(n-1,Y)}.$$

Or, grâce au lemme D,

$$2^{\omega(n-1)-\omega(n-1,Y)} \le \sum_{\substack{d|n-1\\ P^-(d)>Y}} 1 \ll \sum_{\substack{d|n-1,\, d\le x^{1/3}\\ P^-(d)>Y}} \tau(d)^3$$

où $P^-(d)$ désigne le plus petit facteur premier de l'entier $d > 1$, avec la convention $P^-(1) = \infty$. Une interversion de sommation fournit

$$\operatorname{card}\{n \in S^*(x, y) \mid \omega(n-1) - \omega(n-1, Y) > \kappa\} \ll 2^{-\kappa} \sum_{\substack{d\le x^{1/3}\\ P^-(d)>Y}} \tau(d)^3 \Psi(x, y; 1, d). \tag{19}$$

Quitte à augmenter la valeur de c pour avoir $x^{3/4} \le \Psi(x, y)/(\log x)^8$, la formule (18) avec $Q = x^{1/3}$ et les calculs de [4] (plus précisément précédant (7.6)) montrent que le membre de droite de (19) est

$$\ll 2^{-\kappa} \sum_{\substack{d\le x^{1/3}\\ P^-(d)>Y}} \frac{\tau(d)^3\Psi_d(x, y)}{\varphi(d)} + O(2^{-\kappa}\Psi(x, y)) \ll 2^{-\kappa}(\log_2 x)^{8c}\Psi(x, y).$$

Le choix $\kappa = c_1 \log_3 x$ pour $c_1 > 0$ fixé suffisamment grand en fonction de c assure que cela est $\ll \Psi(x, y)/\sqrt{\log_2 x}$.

On pose $\xi := \log_2 Y = \log_2 x + O(\log_3 x)$ et

$$\Psi^*(x, y; t) := \operatorname{card}\{n \in S^*(x, y) \mid \omega(n-1, Y) \le \xi + t\sqrt{\xi}\}.$$

Alors

$$\operatorname{card}\{n \in S^*(x, y) \mid \omega(n-1, Y) \le \log_2 x + t\sqrt{\log_2 x}\} = \Psi^*(x, y; \widetilde{t}\,)$$

pour un certain réel $\widetilde{t}$ dépendant de x et t, vérifiant

$$\widetilde{t} = t + O((1 + |t|) \log_3 x/\sqrt{\log_2 x}).$$

L'argument qui précède montre donc que pour un certain $\kappa = O(\log_3 x)$ indépendant de t, on a

$$\Psi^*(x,y;\widetilde{t}-\kappa/\sqrt{\log_2 x}) + O\biggl(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\Psi(x,y)\biggr) \leq \Psi(x,y;t) \leq \Psi^*(x,y;\widetilde{t}\,) \tag{20}$$

Puisque

$$\max\{|\Phi(\widetilde{t}) - \Phi(t)|, |\Phi(\widetilde{t}-\kappa/\sqrt{\log_2 x}) - \Phi(t)|\} = O(\log_3 x/\sqrt{\log_2 x})$$

uniformément par rapport à t, il suffit de montrer l'estimation (7) avec $\Psi(x,y;t)$ remplacé par $\Psi^*(x,y;t)$. De même que dans [4], on fait appel à l'inégalité de Berry–Esseen sous la forme énoncée dans [14, théorème II.7.16] :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{\Psi^*(x,y;t)}{\Psi(x,y)} - \Phi(t)\right| \ll \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \int_0^{\sqrt{\xi}} |R(x,y;\vartheta)|\,\frac{d\vartheta}{\vartheta} \tag{21}$$

avec

$$R(x,y;\vartheta) := \biggl(\frac{1}{\Psi(x,y)}\sum_{n\in S^*(x,y)} e^{i\vartheta(\omega(n-1,Y)-\xi)/\sqrt{\xi}}\biggr) - e^{-\vartheta^2/2}$$

en remarquant que $R(x,y;-\vartheta) = \overline{R(x,y;\vartheta)}$. On fixe $\vartheta \in [0,\sqrt{\xi}]$.

Suivant les calculs de [4, formule (7.10)], on obtient

$$R(x,y;\vartheta) \ll \vartheta^2 + \vartheta\biggl(\frac{1}{\xi\Psi(x,y)}\sum_{n\in S^*(x,y)}(\omega(n-1,Y)-\xi)^2\biggr)^{1/2}. \tag{22}$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{n\in S^*(x,y)}\omega(n-1,Y) &= \sum_{p\leq Y}\Psi(x,y;1,p) + O(Y/\log Y),\\ \sum_{n\in S^*(x,y)}\omega(n-1,Y)^2 &= \sum_{p\leq Y}\Psi(x,y;1,p)\\ &\quad + \sum_{\substack{p,q\leq Y\\ p\neq q}}\Psi(x,y;1,pq) + O(Y^2/\log^2 Y).\end{aligned}$$

Quitte à augmenter la valeur de c, pour x assez grand on a $Y \leq \sqrt{\Psi(x,y)}$, ainsi d'après [6, Theorem 1] on déduit

$$\sum_{p\leq Y}\Psi(x,y;1,p) = \sum_{p\leq Y}\frac{\Psi_p(x,y)}{p-1} + O(\Psi(x,y)) = \xi\Psi(x,y) + O(\Psi(x,y))$$

où l'on a utilisé $\Psi_p(x,y) = \Psi(x,y)\{1+O(1/p^\alpha + 1/u)\}$ pour tout $p \leq Y$, grâce à l'estimation (9) si $p \leq y$, l'égalité étant triviale sinon. De même,

$$\sum_{\substack{p,q \leq Y \\ p \neq q}} \Psi(x,y;1,pq) = \xi^2 \Psi(x,y) + O(\xi \Psi(x,y)).$$

On a donc, en développant,

$$\sum_{n \in S^*(x,y)} (\omega(n-1,Y) - \xi)^2 = O(\xi \Psi(x,y))$$

et en reportant cela dans (22), on obtient

$$R(x,y;\vartheta) \ll \vartheta + \vartheta^2. \tag{23}$$

On montre ensuite une estimation plus précise que la précédente pour les valeurs de ϑ loin de 0. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$e^{i\vartheta\omega(m,Y)/\sqrt{\xi}} = \sum_{d|m,\, P(d) \leq Y} f_\vartheta(d)$$

avec

$$f_\vartheta(d) := \mu(d)^2 (e^{i\vartheta/\sqrt{\xi}} - 1)^{\omega(d)} = O(\mu(d)^2 e^{-c_2 \omega(d)})$$

pour un certain $c_2 > 0$, puisque $\vartheta/\sqrt{\xi} \leq 1 < \pi/3$. Lorsque d est sans facteur carré, on a $d \leq P(d)^{\omega(d)}$; alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{d|m,\, P(d) \leq Y \\ d > x^{1/3}}} f_\vartheta(d) \ll e^{-c_3 \log x/\log Y} \tau(m) \ll e^{-c_3 (\log_2 x)^c} \sum_{d|m,\, d \leq m^{1/3}} \tau(d)^3 \tag{24}$$

pour un certain $c_3 > 0$, où l'on a utilisé le Lemme D. Une interversion de sommation fournit

$$\begin{aligned}\sum_{n \in S^*(x,y)} \sum_{\substack{d|n-1,\, P(d) \leq Y \\ d > x^{1/3}}} f_\vartheta(d) &\ll e^{-c_3 (\log_2 x)^c} \sum_{d \leq x^{1/3}} \tau(d)^3 \Psi(x,y;1,d) \\ &\ll e^{-c_3 (\log_2 x)^c} \prod_{p \leq x} \Big(1 + \frac{8}{p}\Big) \Psi(x,y) \ll \frac{\Psi(x,y)}{\log x}.\end{aligned}$$

D'autre part, étant donné que $f_\vartheta(d) \ll 1$, le théorème 1 de [6] (ou la proposition 1 pour $\widetilde{\lambda} = \mathbf{1}$) fournit, quitte à augmenter la valeur de c,

$$\sum_{d \leq x^{1/3}} f_\vartheta(d) \Big\{ \Psi(x,y;1,d) - \frac{\Psi_d(x,y)}{\varphi(d)} \Big\} \ll \frac{\Psi(x,y)}{\log x}.$$

Ainsi on a

$$(25)\qquad \sum_{n\in S^*(x,y)} e^{i\vartheta\omega(n-1,Y)/\sqrt{\xi}} = \sum_{d\leq x^{1/3},\, P(d)\leq Y} f_\vartheta(d)\Psi(x,y;1,d) + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{\log x}\Big) = \sum_{d\leq x^{1/3},\, P(d)\leq Y} \frac{f_\vartheta(d)\Psi_d(x,y)}{\varphi(d)} + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{\log x}\Big).$$

La contribution à la dernière somme des d vérifiant $\omega(d)\geq\sqrt{y}$ est majorée par

$$O(e^{-c_2\sqrt{y}}(\log x)\Psi(x,y)) = O(\Psi(x,y)/\log x).$$

Notons temporairement $m=m(d):=d_y$ le plus grand diviseur y-friable de d. Lorsque $\omega(d)\leq\sqrt{y}$, l'estimation (9) du lemme C fournit

$$(26)\qquad \Psi_d(x,y)=\Psi_m(x,y)=g_m(\alpha)\Psi(x,y)\Big\{1+O\Big(\frac{E_m(1+E_m)}{u}\Big)\Big\} \quad\text{avec}$$
$$E_m = O((\log u)^{-1}\gamma_m\exp\{2\gamma_m\}) = O\Big(\frac{\omega(d)}{\log y}\Big)$$

et où $g_m(\beta)$ est défini en (2). On a en effet $\gamma_m\leq\log(\omega(m)+2)/4$ quitte à supposer c suffisamment grand. On reporte l'estimation (26) dans (25) : le terme d'erreur induit est dominé par

$$\frac{\Psi(x,y)}{u\log y}\sum_{P(d)\leq Y}\frac{|f_\vartheta(d)|\omega(d)^2}{\varphi(d)} \ll \Psi(x,y)\frac{\log Y}{\log x} = \frac{\Psi(x,y)}{(\log_2 x)^c}.$$

On a donc

$$\sum_{n\in S^*(x,y)} e^{i\vartheta\omega(n-1,Y)/\sqrt{\xi}} = \Psi(x,y)\sum_{\substack{d\leq x^{1/3},\, P(d)\leq Y\\ \omega(d)\leq\sqrt{y}}}\frac{f_\vartheta(d)g_{m(d)}(\alpha)}{\varphi(d)} + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{\log_2 x}\Big) = \Psi(x,y)\sum_{d\leq x^{1/3},\, P(d)\leq Y}\frac{f_\vartheta(d)g_{m(d)}(\alpha)}{\varphi(d)} + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{\log_2 x}\Big).$$

Par ailleurs,

$$\sum_{d>x^{1/3},\, P(d)\leq Y}\frac{|f_\vartheta(d)|}{\varphi(d)} \ll \int_{x^{1/3}}^{\infty}\frac{d\Psi(z,Y)}{z} \ll (\log Y)e^{-(\log x)/(6\log Y)} \ll \frac{1}{\log x}.$$

On obtient donc

$$\sum_{n\in S^*(x,y)} e^{i\vartheta\omega(n-1,Y)/\sqrt{\xi}} = \Psi(x,y)\sum_{P(d)\le Y}\frac{f_\vartheta(d)g_{m(d)}(\alpha)}{\varphi(d)} + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{\log_2 x}\Big).$$

Quitte à supposer c assez grand on a $\sum_p p^{-1-\alpha} \ll 1$, et les calculs de [4] (en particulier ceux menant à la formule (7.16)) montrent que le terme principal du membre de droite vaut

$$\begin{aligned}&\Psi(x,y)\exp\{(e^{i\vartheta/\sqrt{\xi}}-1)\xi + O(\vartheta/\sqrt{\xi})\}\\ &\quad=\begin{cases}\Psi(x,y)e^{i\vartheta\sqrt{\xi}-\vartheta^2/2}\{1+O((\vartheta+\vartheta^3)/\sqrt{\xi})\} & \text{si } 0\le\vartheta\le\xi^{1/6},\\ O(\Psi(x,y)e^{-c_4\vartheta^2}) = O(\Psi(x,y)/\xi) & \text{si } \xi^{1/6}\le\vartheta\le\sqrt{\xi}\end{cases}\end{aligned}$$

pour un certain $c_4 > 0$; on a donc, en notant que $\log_2 x \sim \xi$,

$$R(x,y;\vartheta) \ll \begin{cases} e^{-\vartheta^2/2}(\vartheta+\vartheta^3)/\sqrt{\xi} + 1/\xi & \text{si } 0\le\vartheta\le\xi^{1/6},\\ 1/\xi & \text{si } \xi^{1/6}\le\vartheta\le\sqrt{\xi}.\end{cases} \tag{27}$$

En regroupant les estimations (23) et (27) on obtient

$$R(x,y;\vartheta) \ll \begin{cases}\vartheta & \text{si } 0\le\vartheta\le 1/\xi,\\ e^{-\vartheta^2/2}(\vartheta+\vartheta^3)/\sqrt{\xi} + 1/\xi & \text{si } 1/\xi\le\vartheta\le\sqrt{\xi},\end{cases}$$

ce qui, en injectant dans (21), fournit finalement

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{\Psi^*(x,y;t)}{\Psi(x,y)} - \Phi(t)\right| \ll \frac{1}{\sqrt{\xi}}.$$

Cela démontre le théorème 2 grâce à l'estimation (20).

Remerciements. L'auteur est très reconnaissant à son directeur de thèse Régis de la Bretèche pour ses remarques et conseils durant la rédaction de ce papier, ainsi qu'à Gérald Tenenbaum pour sa relecture et ses encouragements.

RÉFÉRENCES

[1] J. Basquin, *Valeurs moyennes de fonctions multiplicatives sur les entiers friables translatés*, Acta Arith. 145 (2010), 285–304.

[2] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum, *Propriétés statistiques des entiers friables*, Ramanujan J. 9 (2005), 139–202.

[3] É. Fouvry et G. Tenenbaum, *Diviseurs de Titchmarsh des entiers sans grand facteur premier*, dans : Analytic Number Theory, Lecture Notes in Math. 1434, Springer, 1990, 86–102.

[4] É. Fouvry et G. Tenenbaum, *Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques*, Proc. London Math. Soc. 72 (1996), 481–514.

[5] A. Granville, *Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. II*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 345 (1993), 349–362.

[6] A. J. Harper, *Bombieri–Vinogradov and Barban–Davenport–Halberstam type theorems for smooth numbers*, pré-publication, 2012.

[7] A. J. Harper, *On a paper of K. Soundararajan on smooth numbers in arithmetic progressions*, J. Number Theory 132 (2012), 182–199.

[8] A. Hildebrand, *Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis*, Mathematika 31 (1984), 258–271.

[9] A. Hildebrand, *On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$*, J. Number Theory 22 (2986), 289–307.

[10] A. Hildebrand and G. Tenenbaum, *On integers free of large prime factors*, Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986), 265–290.

[11] B. Landreau, *A new proof of a theorem of van der Corput*, Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 366–368.

[12] S. S. Loiperdinger and I. E. Shparlinski, *On the distribution of the Euler function of shifted smooth numbers*, Colloq. Math. 120 (2010), 139–148.

[13] K. Soundararajan, *The distribution of smooth numbers in arithmetic progressions*, dans : Anatomy of Integers, CRM Proc. Lecture Notes 46, Amer. Math. Soc., 2008, 115–128.

[14] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3ème éd., Belin, 2007.

Sary Drappeau
Centre de recherches mathématiques
Université de Montréal
CP 6128, succ. Centre-Ville
Montréal H3C 3J7, Canada
E-mail: drappeaus@dms.umontreal.ca

Received April 5, 2014 (6223)