COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 103 2005 NO. 2

SUR LES PROCESSUS QUASI-MARKOVIENS ET CERTAINS DE LEURS FACTEURS

PAR

THIERRY DE LA RUE (Rouen)

Abstract. We study a class of stationary finite state processes, called *quasi-Markovian*, including in particular the processes whose law is a Gibbs measure as defined by Bowen. We show that, if a factor with integrable coding time of a quasi-Markovian process is maximal in entropy, then this factor splits off, which means that it admits a Bernoulli shift as an independent complement. If it is not maximal in entropy, then we can find a splitting finite extension of this factor, which generalizes a theorem of Rahe. In particular, this result applies to a factor of a hyperbolic automorphism of the torus generated by a partition which is regular enough.

1. Introduction. Suite au célèbre travail d'Ornstein montrant que deux schémas de Bernoulli de même entropie sont isomorphes, plusieurs caractérisations des processus stationnaires engendrant un système dynamique isomorphe à un schéma de Bernoulli ont été données. En 1970, Friedman et Ornstein [2] ont notamment introduit la propriété d'être *weak Bernoulli* pour montrer qu'un processus de Markov mélangeant engendre un système isomorphe à un schéma de Bernoulli. En 1976, Ledrappier [3] propose une propriété un peu plus forte que weak Bernoulli, qu'il appelle *quasi-Bernoulli* (définition 2.1 ci-dessous), qui permet entre autres d'étendre de manière simple le résultat de Friedman et Ornstein aux processus dont la loi est une mesure de Gibbs au sens défini par Bowen [1].

Parallèlement, Thouvenot [9] développe en 1975 une version de la théorie d'Ornstein *relative à un facteur donné* (c'est-à-dire conditionnellement à la sous-tribu engendrée par un processus). Elle lui permet de caractériser les situations où un système donné avec un facteur peut se décomposer comme un produit direct de ce facteur avec un schéma de Bernoulli (ce facteur sera dit *splittant*, voir la définition 3.2). Utilisant cette théorie relative de l'isomorphisme, Rahe [7] donne en 1979 l'analogue conditionnel du résultat de Friedman et Ornstein. Il traite en particulier le cas d'un facteur d'un processus de Markov codé par un nombre fini de coordonnées de

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 37A35.

Key words and phrases: Bernoulli shift, factor of a dynamical system, quasi-Markovian process.

ce processus, et montre qu'à une extension finie près, ce facteur est splittant.

Après avoir légèrement affaibli la propriété quasi-Bernoulli de Ledrappier, de manière à pouvoir inclure même les processus de Markov dont certaines probabilités de transition sont nulles (les processus satisfaisant cette propriété affaiblie seront appelés *quasi-markoviens*, voir définition 2.2), on donne dans ce travail une version conditionnelle de cette propriété qui permet d'étendre le résultat de Rahe à une classe plus large de processus. On montre notamment que si un processus générateur du système est quasi-markovien relativement à un facteur donné, alors ce facteur est splittant à une extension finie près (théorème 4.10). Ce théorème s'applique par exemple aux facteurs d'un processus de Markov à temps de codage d'espérance finie, dont un cas particulier est le facteur d'un automorphisme hyperbolique du tore engendré par une partition assez régulière (théorème 4.11).

Quelques notations. Dans tout ce travail, T désigne un automorphisme ergodique de l'espace de Lebesgue non atomique $(X,\mathscr{A},\mu)$. Pour toute partition finie mesurable $\mathscr{Q}=\{Q_1,\dots,Q_q\}$ de X, on note $\mathscr{Q}_T:=\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty}T^{-k}\mathscr{Q}$ la plus petite sous-tribu de $\mathscr{A}$ qui contienne les Q_j et qui soit T-invariante. On appelle *passé de* $\mathscr{Q}$ la sous-tribu $\mathscr{Q}^-:=\bigvee_{k=-\infty}^{-1}T^{-k}\mathscr{Q}$, et *futur de* $\mathscr{Q}$ la sous-tribu $\mathscr{Q}^+:=\bigvee_{k=0}^{+\infty}T^{-k}\mathscr{Q}$.

On fixe une partition $\mathscr{P}=\{P_1,\dots,P_p\}$, génératrice, c'est-à-dire telle que $\mathscr{A}=\mathscr{P}_T$. Sans changer les propriétés du système dynamique $(X,\mathscr{A},\mu,T)$, on peut donc toujours supposer que $X=\{1,\dots,p\}^{\mathbb{Z}}$, T est le décalage à gauche des coordonnées, et $\mathscr{P}$ est la partition de X définie par la coordonnée x_0. Dans ce cadre, le passé de $\mathscr{P}$ est engendré par les coordonnées $(x_n)_{n<0}$, et le futur de $\mathscr{P}$ par $(x_n)_{n\geq 0}$. Si ν est une mesure de probabilité sur la tribu $\mathscr{A}$, on note $\nu|_{-\infty}^{-1}$ la restriction de ν au passé de $\mathscr{P}$, et $\nu|_0^{+\infty}$ la restriction de ν au futur de $\mathscr{P}$. On note alors $\nu|_{-\infty}^{-1}\otimes\nu|_0^{+\infty}$ la probabilité sur $\mathscr{A}$ dont les marginales sur le passé et le futur de $\mathscr{P}$ sont respectivement $\nu|_{-\infty}^{-1}$ et $\nu|_0^{+\infty}$, mais qui rend le passé et le futur de $\mathscr{P}$ indépendants. Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux sous-tribus de $\mathscr{A}$, on écrit $\mathscr{B}\overset{\nu}{\subset}\mathscr{C}$ lorsque, pour tout $B\in\mathscr{B}$, on peut trouver $C\in\mathscr{C}$ tel que $\nu(B\triangle C)=0$. On écrit $\mathscr{B}\overset{\nu}{=}\mathscr{C}$ lorsque $\mathscr{B}\overset{\nu}{\subset}\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}\overset{\nu}{\subset}\mathscr{B}$. Enfin, on dit que $\mathscr{B}$ est *ν-triviale* si tout $B\in\mathscr{B}$ vérifie $\nu(B)\in\{0,1\}$.

2. Processus quasi-markovien

2.1. *De quasi-Bernoulli à quasi-markovien.* Après avoir noté que le processus $(\mathscr{P},T)$ est Bernoulli si et seulement si $\mu=\mu|_{-\infty}^{-1}\otimes\mu|_0^{+\infty}$, Ledrappier définit dans [3] la propriété suivante.

DÉFINITION 2.1. Le processus $(\mathscr{P}, T)$ est dit *quasi-Bernoulli* si $\mu|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu|_0^{+\infty}$ et μ sont deux mesures équivalentes.

Il montre ensuite que cette propriété entraîne l'isomorphisme du système dynamique engendré par le processus $(\mathscr{P}, T)$ avec un schéma de Bernoulli. On remarque cependant que si $(\mathscr{P}, T)$ est un processus de Markov dont certaines probabilités de transition sont nulles, alors $(\mathscr{P}, T)$ n'est pas quasi-Bernoulli, même s'il engendre un système mélangeant, donc isomorphe à un schéma de Bernoulli. Ceci nous amène à introduire une propriété plus faible, qui permet d'englober notamment tous les processus de Markov.

DÉFINITION 2.2. Le processus $(\mathscr{P}, T)$ est dit *quasi-markovien* si μ est absolument continue par rapport à $\mu|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu|_0^{+\infty}$.

2.2. *Exemples de processus quasi-markoviens.* Comme on l'a annoncé juste avant, si $(\mathscr{P}, T)$ est un processus de Markov (éventuellement d'ordre $k \geq 1$), alors $(\mathscr{P}, T)$ est quasi-markovien. Un autre cas intéressant dans lequel on obtient la même propriété est celui où la mesure μ sur $\{1, \ldots, p\}^{\mathbb{Z}}$ est une *mesure de Gibbs*, au sens défini par exemple dans [1]. Dans ces deux cas, le lecteur pourra vérifier la propriété de processus quasi-markovien en s'inspirant du lemme suivant.

LEMME 2.3. *Supposons qu'il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2, et une fonction $\theta : X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant : pour tout $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in X$, pour tout $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned} C_1\, \theta(y)\, \theta(Ty) \cdots \theta(T^{n-1}y) &\leq \mu(\{x \in X \mid x_0 = y_0, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1}\}) \\ &\leq C_2 \theta(y) \theta(Ty) \ldots \theta(T^{n-1}y). \end{aligned}$$

Alors le processus $(\mathscr{P}, T)$ est quasi-markovien.

Preuve. Sous cette hypothèse, on vérifie facilement que pour tout cylindre C, donc pour tout $C \in \mathscr{A}$, on a

$$\mu(C) \leq \frac{C_2}{C_1^2}\, \mu|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu|_0^{+\infty}(C). \quad \blacksquare$$

2.3. *Propriétés des systèmes engendrés par un processus quasi-markovien.* On se propose d'étudier quelques propriétés d'un système engendré par un processus $(\mathscr{P}, T)$ quasi-markovien.

On note $\Pi(T)$ le *facteur de Pinsker* de T, c'est-à-dire la sous-tribu de $\mathscr{A}$ constituée des parties A telles que le processus $(\mathscr{Q}_A, T)$ soit d'entropie nulle, où $\mathscr{Q}_A$ est la partition $\{A, X \setminus A\}$. Rappelons que, puisque $\mathscr{P}$ est supposée ici génératrice, on a

$$\Pi(T) \stackrel{\mu}{=} \bigcap_{n \geq 1} \bigvee_{k=-\infty}^{-n} T^{-k} \mathscr{P} \stackrel{\mu}{=} \bigcap_{n \geq 1} \bigvee_{k=n}^{+\infty} T^{-k} \mathscr{P}. \tag{1}$$

Proposition 2.4. *Si le système ergodique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est engendré par le processus $(\mathscr{P}, T)$ quasi-markovien, alors l'action de T sur son facteur de Pinsker est isomorphe à l'action d'une permutation cyclique sur un ensemble fini.*

Preuve. On doit prouver qu'il existe un ensemble A $\Pi(T)$-mesurable et un entier $r \geq 1$ tels que

- $\mu(T^i A \cap T^j A) = 0$ pour $0 \leq i < j \leq r-1$,
- $T^r A \overset{\mu}{=} A$,
- tout ensemble B qui est $\Pi(T)$-mesurable coïncide μ-p.s. avec une réunion de $T^j A$.

Comme T est supposé ergodique, il suffit pour cela de trouver un *atome* A de $\Pi(T)$, c'est-à-dire $A \in \Pi(T)$ tel que $\mu(A) > 0$, A ne contenant aucun $B \in \Pi(T)$ dont la mesure est strictement comprise entre 0 et $\mu(A)$. Or, si $\Pi(T)$ n'avait pas d'atome, on pourrait construire une application $\varphi : X \to [0,1]$, $\Pi(T)$-mesurable et telle que la mesure image $\varphi(\mu)$ soit continue. Puis, grâce à (1), on pourrait trouver φ^- mesurable par rapport au passé de $\mathscr{P}$, et φ^+ mesurable par rapport au futur de $\mathscr{P}$, telles que pour μ-presque tout x, $\varphi(x) = \varphi^-(x) = \varphi^+(x)$. Mais, sous $\mu|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu|_0^{+\infty}$, φ^- et φ^+ seraient indépendantes, et par continuité de $\varphi(\mu)$ on aurait

$$\mu|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu|_0^{+\infty}(\{x \mid \varphi^-(x) = \varphi^+(x)\}) = 0,$$

ce qui contredirait l'absolue continuité de μ par rapport à $\mu|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu|_0^{+\infty}$. ∎

En corollaire immédiat de la proposition précédente, on voit qu'un système engendré par un processus quasi-markovien est un K-système dès qu'il est faiblement mélangeant. Mais, en s'inspirant fortement de [3], on peut montrer mieux.

Définition 2.5. Le processus $(\mathscr{P}, T)$ est dit *faiblement Bernoulli* si μ et $\mu|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu|_0^{+\infty}$ coïncident sur la tribu $\bigcap_{n\geq 0}(\bigvee_{k\leq -n} T^{-k}\mathscr{P} \vee \bigvee_{k\geq n} T^{-k})$.

Ledrappier montre l'équivalence entre cette propriété et le fait que le processus $(\mathscr{P}, T)$ soit *weak Bernoulli*, propriété introduite par Friedman et Ornstein dans [2], et qui entraîne l'isomorphisme du système dynamique engendré par le processus $(\mathscr{P}, T)$ avec un schéma de Bernoulli.

Définition 2.6. Le processus $(\mathscr{P}, T)$ est dit *weak Bernoulli* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que pour tout entier $m \geq 1$,

$$\sum_{\substack{A \text{ atome de } \bigvee_{k=-m}^{-1} T^{-k}\mathscr{P} \\ B \text{ atome de } \bigvee_{k=n}^{n+m-1} T^{-k}\mathscr{P}}} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| < \varepsilon.$$

La démonstration du lemme qui suit est laissée au lecteur.

LEMME 2.7. *Soient ν une mesure de probabilité sur X, $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathscr{B}_n)_{n\geq 0}$ deux suites décroissantes de tribus telles que*

- *$\bigcap_{n\geq 0}\mathscr{A}_n$ et $\bigcap_{n\geq 0}\mathscr{B}_n$ sont ν-triviales,*
- *sous ν, $\mathscr{A}_0$ et $\mathscr{B}_0$ sont indépendantes.*

Alors $\bigcap_{n\geq 0}(\mathscr{A}_n\vee\mathscr{B}_n)$ est aussi ν-triviale.

PROPOSITION 2.8. *Pour que le système $(X,\mathscr{A},\mu,T)$, engendré par le processus $(\mathscr{P},T)$ quasi-markovien, soit isomorphe à un schéma de Bernoulli, il suffit qu'il soit faiblement mélangeant.*

Preuve. On note ici $\nu := \mu|_{-\infty}^{-1}\otimes\mu|_0^{+\infty}$, et

$$\mathscr{B} := \bigcap_{n\geq 0}\Big(\bigvee_{k\leq -n} T^{-k}\mathscr{P}\vee\bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P}\Big).$$

Pour montrer que $(X,\mathscr{A},\mu,T)$ est isomorphe à un schéma de Bernoulli, il suffit de montrer que μ et ν coïncident sur la tribu $\mathscr{B}$. Or, T étant supposé faiblement mélangeant, on sait déjà que $\Pi(T)$ est μ-triviale. Les tribus $\bigcap_{n\geq 0}\bigvee_{k\leq -n}T^{-k}\mathscr{P}$ et $\bigcap_{n\geq 0}\bigvee_{k\geq n}T^{-k}\mathscr{P}$ étant μ-triviales, elles sont également ν-triviales. En utilisant le lemme 2.7, on en déduit que $\mathscr{B}$ est elle-même ν-triviale. Mais on a supposé que $\mu\ll\nu$, donc μ ne peut qu'être égale à ν sur la tribu $\mathscr{B}$. ■

3. Processus quasi-markovien relativement à un facteur donné. Soit maintenant $\mathscr{H}$ une autre partition finie mesurable de X, et $\mathscr{H}_T = \bigvee_{k=-\infty}^{+\infty}T^{-k}\mathscr{H}$ le facteur engendré par cette partition. On appelle *fibre du facteur $\mathscr{H}_T$* une classe d'équivalence pour la relation

$$x\sim x' \;:\Leftrightarrow\; \forall k\in\mathbb{Z},\ \mathscr{H}(T^kx)=\mathscr{H}(T^kx'),$$

c'est-à-dire l'ensemble de tous les points de X qui partagent un même $\mathscr{H}$-nom. On note ensuite H l'ensemble des fibres du facteur $\mathscr{H}_T$, et φ_H la projection canonique de X sur H. (On écrira parfois $h(x)$ au lieu de $\varphi_H(x)$.) On munit H de la tribu $\mathscr{A}_H$ formée des images par φ_H des parties mesurables de X qui sont saturées par la relation d'équivalence décrite ci-dessus, et de la mesure μ_H image de μ par φ_H. On note enfin T_H l'automorphisme de $(H,\mathscr{A}_H,\mu_H)$ défini par

$$T_H(h) := \varphi_H(Tx),$$

où x est n'importe quel point dans h.

On peut montrer l'existence (voir par exemple [8]), pour μ_H-presque toute fibre h du facteur $\mathscr{H}_T$, d'une probabilité conditionnelle μ_h sachant h sur X, portée par la fibre h, de telle sorte que pour tout $A\in\mathscr{A}$,

$$\mu(A)=\int_H\mu_h(A\cap h)\,d\mu_H(h).$$

Pour n'importe quelle mesure de probabilité ν sur $(X, \mathscr{A})$, on définit de manière similaire la mesure image ν_H sur $(H, \mathscr{A}_H)$, et les probabilités conditionnelles $(\nu_h)_{h \in H}$ sur $(X, \mathscr{A})$. On utilisera dans la suite le lemme suivant.

LEMME 3.1. *Soient λ et ν deux probabilités sur $(X, \mathscr{A})$ avec $\lambda \ll \nu$. Alors pour λ_H-presque toute fibre $h \in H$, on a $\lambda_h \ll \nu_h$.*

Preuve. En effet, soit φ une version de la densité de λ par rapport à ν. Il est facile de voir que pour λ_H-presque toute fibre h, on a $\int_X \varphi \, d\nu_h > 0$. On peut alors définir φ_h par

$$\varphi_h(x) := \frac{\varphi(x)}{\int_X \varphi \, d\nu_h},$$

et on vérifie par un simple calcul que pour λ_H-presque toute fibre h, pour tout $A \in \mathscr{A}$,

$$\lambda_h(A) = \int_A \varphi_h(x) \, d\nu_h(x),$$

d'où $\lambda_h \ll \nu_h$, φ_h étant une densité de λ_h par rapport à ν_h. ∎

3.1. *Facteur splittant*

DÉFINITION 3.2. On dit que le facteur $\mathscr{H}_T$ est un *facteur splittant* si dans le système $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$, $\mathscr{H}_T$ admet un complément indépendant sur lequel l'action de T est isomorphe à un schéma de Bernoulli. Plus précisément, $\mathscr{H}_T$ est un facteur splittant si on peut trouver une autre partition finie $\mathscr{Q}$ de X, telle que

- les partitions $T^{-k}\mathscr{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$, sont indépendantes,
- les tribus $\mathscr{H}_T$ et $\mathscr{Q}_T$ sont indépendantes,
- $\mathscr{A} \overset{\mu}{=} \mathscr{H}_T \vee \mathscr{Q}_T$.

Dans [9, 10], Thouvenot donne des conditions nécessaires et suffisantes sur le comportement du processus $(\mathscr{P}, T)$ relativement à $\mathscr{H}_T$ (c'est-à-dire sous les mesures de probabilité μ_h) pour que $\mathscr{H}_T$ soit un facteur splittant. De son travail, on déduit facilement que si le processus $(\mathscr{P}, T)$ est $\mathscr{H}_T$-conditionnellement weak Bernoulli, alors $\mathscr{H}_T$ est un facteur splittant (voir [7], et la définition suivante).

DÉFINITION 3.3. Le processus $(\mathscr{P}, T)$ est dit *$\mathscr{H}_T$-conditionnellement weak Bernoulli* si pour μ_H-presque toute fibre h du facteur $\mathscr{H}_T$, la probabilité conditionnelle μ_h vérifie la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que pour tout entier $m \geq 1$,

$$\sum_{\substack{A \text{ atome de } \bigvee_{k=-m}^{-1} T^{-k}\mathscr{P}, \\ B \text{ atome de } \bigvee_{k=n}^{n+m-1} T^{-k}\mathscr{P}}} |\mu_h(A \cap B) - \mu_h(A)\mu_h(B)| < \varepsilon.$$

Il est naturel de considérer maintenant la version relative de la propriété "faiblement Bernoulli".

DÉFINITION 3.4. Le processus $(\mathscr{P}, T)$ est dit *$\mathscr{H}_T$-conditionnellement faiblement Bernoulli* si pour μ_H-presque toute fibre h du facteur $\mathscr{H}_T$, la probabilité conditionnelle μ_h coïncide avec $\mu_h|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_h|_0^{+\infty}$ sur la tribu

$$\bigcap_{n\geq 0} \Big(\bigvee_{k\leq -n} T^{-k}\mathscr{P} \vee \bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P} \Big).$$

La démonstration donnée dans [3] pour l'équivalence entre "weak Bernoulli" et "faiblement Bernoulli" s'adapte sans problème au cas des propriétés relatives au facteur $\mathscr{H}_T$, et on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 3.5. *Le processus $(\mathscr{P}, T)$ est $\mathscr{H}_T$-conditionnellement weak Bernoulli si et seulement si il est $\mathscr{H}_T$-conditionnellement faiblement Bernoulli.*

3.2. *Processus quasi-markovien relativement à un facteur*

DÉFINITION 3.6. Le processus $(\mathscr{P}, T)$ est dit *$\mathscr{H}_T$-conditionnellement quasi-markovien* si pour μ_H-presque toute fibre h du facteur $\mathscr{H}_T$, la probabilité conditionnelle μ_h est absolument continue par rapport à $\mu_h|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_h|_0^{+\infty}$.

Pour vérifier cette propriété dans certains cas particuliers, le lemme suivant sera bien utile.

LEMME 3.7. *Soient $(X_1, \mathscr{A}_1)$ et $(X_2, \mathscr{A}_2)$ deux espaces mesurables, et λ une mesure de probabilité sur l'espace produit $(X_1 \times X_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$, dont les marginales sur $(X_1, \mathscr{A}_1)$ et $(X_2, \mathscr{A}_2)$ sont notées respectivement λ_1 et λ_2. On suppose qu'il existe une probabilité ν_1 sur $(X_1, \mathscr{A}_1)$ et une probabilité ν_2 sur $(X_2, \mathscr{A}_2)$ telles que λ soit absolument continue par rapport au produit $\nu_1 \otimes \nu_2$. Alors λ est absolument continue par rapport au produit $\lambda_1 \otimes \lambda_2$.*

Preuve. Soit

$$\varphi := \frac{d\lambda}{d(\nu_1 \otimes \nu_2)}.$$

Pour $A_1 \in \mathscr{A}_1$, on a

$$\lambda_1(A_1) = \int\limits_{A_1\times X_2} d\lambda(x_1, x_2) = \int\limits_{A_1} \varphi_1(x_1)\, d\nu_1(x_1),$$

où

$$\varphi_1(x_1) := \int\limits_{X_2} \varphi(x_1, x_2)\, d\nu_2(x_2),$$

ce qui prouve que $\lambda_1 \ll \nu_1$. De même, on a aussi $\lambda_2 \ll \nu_2$, avec

$$\frac{d\lambda_2}{d\nu_2}(x_2) = \varphi_2(x_2) := \int\limits_{X_1} \varphi(x_1, x_2)\, d\nu_1(x_1).$$

On a forcément $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) > 0$, λ-presque sûrement. Puis, pour $A_1 \in \mathscr{A}_1$ et $A_2 \in \mathscr{A}_2$, on a

$$\begin{aligned}\lambda(A_1 \times A_2) &= \int_{A_1} \frac{1}{\varphi_1(x_1)} \left(\int_{A_2} \frac{\varphi(x_1,x_2)}{\varphi_2(x_2)}\, \varphi_2(x_2)\, d\nu_2(x_2) \right) \varphi_1(x_1)\, d\nu_1(x_1) \\ &= \int_{A_1} \frac{1}{\varphi_1(x_1)} \left(\int_{A_2} \frac{\varphi(x_1,x_2)}{\varphi_2(x_2)}\, d\lambda_2(x_2) \right) d\lambda_1(x_1),\end{aligned}$$

d'où $\lambda \ll \lambda_1 \otimes \lambda_2$, avec

$$\frac{d\lambda}{d(\lambda_1 \otimes \lambda_2)}(x_1,x_2) = \frac{\varphi(x_1,x_2)}{\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)}. \ \blacksquare$$

Exemple 1 : *facteur de Pinsker.* Étudions maintenant une première situation où la propriété d'être quasi-markovien relativement à un facteur intervient. On se place à nouveau dans le cas où le processus $(\mathscr{P}, T)$ générateur est quasi-markovien. On sait alors qu'il existe un ensemble $A \in \mathscr{A}$ et un entier $r \geq 1$ tels que

- $\mu(T^i A \cap T^j A) = 0$ pour $0 \leq i < j \leq r-1$,
- $T^r A \overset{\mu}{=} A$,
- $\Pi(T) \overset{\mu}{=} \mathscr{H}_T$, où $\mathscr{H} = \{A, X \setminus A\}$.

Le facteur de Pinsker n'a donc ici qu'un nombre fini r de fibres $h_1, \ldots, h_r$, et on a alors

$$\mu = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_{h_j}.$$

On en déduit immédiatement

$$\forall j \in \{1, \ldots, r\}, \qquad \mu_{h_j} \ll \mu \ll \mu|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu|_0^{+\infty}.$$

Le lemme 3.7 donne alors

$$\forall j \in \{1, \ldots, r\}, \qquad \mu_{h_j} \ll \mu_{h_j}|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_{h_j}|_0^{+\infty},$$

i.e. le processus $(\mathscr{P}, T)$ est $\Pi(T)$-conditionnellement quasi-markovien.

Exemple 2 : *facteur finiment codé*

Définition 3.8. On dit que le processus $(\mathscr{H}, T)$ est *finiment codé par le processus* $(\mathscr{P}, T)$ s'il existe un entier $m \geq 0$ tel que la partition $\mathscr{H}$ soit moins fine que $\bigvee_{k=-m}^{m} T^{-k}\mathscr{P}$.

Dans [7], Rahe montre que si le processus générateur $(\mathscr{P}, T)$ est Markov, et si $(\mathscr{H}, T)$ est finiment codé par $(\mathscr{P}, T)$, alors $(\mathscr{P}, T)$ se comporte encore comme un Markov relativement à $\mathscr{H}_T$. On montre ici que ce résultat reste valable en remplaçant *Markov* par *quasi-markovien.*

Proposition 3.9. *Supposons* $(\mathscr{H},T)$ *finiment codé par le processus* $(\mathscr{P},T)$ *quasi-markovien. Alors* $(\mathscr{P},T)$ *est* $\mathscr{H}_T$*-conditionnellement quasi-markovien.*

Preuve. On note ici $\nu := \mu|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu|_0^{+\infty}$. Puisque $(\mathscr{P},T)$ est quasi-markovien, on a $\mu \ll \nu$; on en déduit grâce au lemme 3.1 que pour μ_H-presque toute fibre h,

$$\mu_h \ll \nu_h. \tag{2}$$

Il suffit maintenant de vérifier que pour ν_H-presque toute fibre h,

$$\nu_h \ll \nu_h|_{-\infty}^{-1} \otimes \nu_h|_0^{+\infty}. \tag{3}$$

En effet, si h vérifie à la fois (2) et (3), le lemme 3.7 montre que $\mu_h \ll \mu_h|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_h|_0^{+\infty}$.

Introduisons la partition $\mathscr{Q} := \bigvee_{k=-m}^{m} T^{-k}\mathscr{P}$. Pour tout atome Q de $\mathscr{Q}$, notons $\nu^{(Q)}$ la restriction normalisée de ν à Q, c'est-à-dire la probabilité portée par Q donnée par

$$\forall A \in \mathscr{A}, \qquad \nu^{(Q)}(A) := \nu(A \cap Q)/\nu(Q).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que l'on a toujours

$$\nu^{(Q)} = \nu^{(Q)}|_{-\infty}^{-1} \otimes \nu^{(Q)}|_0^{+\infty}, \tag{4}$$

et que, puisque $\mathscr{H}$ est moins fine que $\bigvee_{k=-m}^{m} T^{-k}\mathscr{P}$, on a

$$\mathscr{H}^- \overset{\nu^{(Q)}}{\subset} \mathscr{P}^-, \qquad \mathscr{H}^+ \overset{\nu^{(Q)}}{\subset} \mathscr{P}^+. \tag{5}$$

De (4) et (5), on déduit que, pour $\nu_H^{(Q)}$-presque toute fibre h, on a

$$\nu_h^{(Q)} = \nu_h^{(Q)}|_{-\infty}^{-1} \otimes \nu_h^{(Q)}|_0^{+\infty} \ll \nu_h|_{-\infty}^{-1} \otimes \nu_h|_0^{+\infty}. \tag{6}$$

Enfin, comme $\nu_h = \sum_{Q \text{ atome de } \mathscr{Q}} \nu_h^{(Q)}$, on obtient (3) pour ν_H-presque toute fibre h. ∎

3.3. *Facteurs finitaires à temps de codage d'espérance finie.* On propose ici d'étendre l'étude faite dans l'exemple 2 à une classe un peu plus générale de facteurs.

Définition 3.10. On dit que $\mathscr{H}_T$ est un *facteur finitaire à temps de codage d'espérance finie* du processus $(\mathscr{P},T)$ si, pour μ-presque tout x, il existe un plus petit entier $m(x) \geq 0$ tel que l'atome de $\bigvee_{k=-m(x)}^{m(x)} T^{-k}\mathscr{P}$ où se trouve x soit contenu (à un négligeable près) dans un atome de $\mathscr{H}$, et si

$$\int_X m(x)\, d\mu < +\infty.$$

Proposition 3.11. *Si* $\mathscr{H}_T$ *est un facteur finitaire à temps de codage d'espérance finie du processus* $(\mathscr{P},T)$ *quasi-markovien, alors* $(\mathscr{P},T)$ *est quasi-markovien relativement à* $\mathscr{H}_T$*.*

Preuve. Remarquons tout d'abord que sous ces hypothèses, pour μ-presque tout x il existe un plus petit entier $m_1(x)$ tel que, pour $|k| > m_1(x)$, $m(T^k x) < |k|$. En effet, soit

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{m(T^k x)\geq |k|}.$$

Comme m est d'espérance finie, on a

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(m \geq |k|) = 1 + 2\sum_{k\geq 1} \mu(m\geq k) < +\infty,$$

ce qui prouve que f est μ-presque sûrement finie. On définit ensuite

$$m_2(x) := \max_{|k|\leq m_1(x)} (|k| + m_1(T^k x)).$$

Notons alors que l'atome de $\bigvee_{k=-m_2(x)}^{m_2(x)} T^{-k}\mathscr{P}$ où se trouve x est contenu (à un négligeable près) dans un atome de $\bigvee_{k=-m_1(x)}^{m_1(x)} T^{-k}\mathscr{H}$. Soit ensuite $\mathscr{Q}$ la partition dénombrable de X dont les atomes sont les intersections de ceux de $\bigvee_{-m}^{m} T^{-k}\mathscr{P}$ avec l'ensemble $(m_2 = n)$, pour tout $n\geq 0$. Si Q est un atome non négligeable de $\mathscr{Q}$, on note $\mu^{(Q)}$ la restriction normalisée de μ à Q. Remarquons alors que pour $\mu_H^{(Q)}$-presque toute fibre h, la probabilité conditionnelle $\mu_h^{(Q)}$ est aussi la restriction normalisée de μ_h à Q.

Si on définit ici

$$\nu^{(Q)} := \mu^{(Q)}|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu^{(Q)}|_0^{+\infty},$$

on conserve évidemment (4) avec cette notation. De plus, on vérifie aussi (5) par construction de la partition $\mathscr{Q}$. On en déduit comme pour (6) que, pour $\nu_H^{(Q)}$-presque toute fibre h, on a

$$\nu_h^{(Q)} = \nu_h^{(Q)}|_{-\infty}^{-1} \otimes \nu_h^{(Q)}|_0^{+\infty}. \tag{7}$$

Puis, $(\mathscr{P}, T)$ étant quasi-markovien, on a

$$\mu^{(Q)} \ll \mu \ll \mu|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu|_0^{+\infty},$$

d'où, d'après le lemme 3.7,

$$\mu^{(Q)} \ll \mu^{(Q)}|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu^{(Q)}|_0^{+\infty} = \nu^{(Q)}.$$

Puis, le lemme 3.1 donne, pour $\mu^{(Q)}$-presque toute fibre h,

$$\mu_h^{(Q)} \ll \nu_h^{(Q)}.$$

De (7) et du lemme 3.7, on en conclut que pour $\mu_H^{(Q)}$-presque toute fibre h,

$$\mu_h^{(Q)} \ll \mu_h^{(Q)}|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_h^{(Q)}|_0^{+\infty} \ll \mu_h|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_h|_0^{+\infty}. \tag{8}$$

Enfin, puisque pour μ_H-presque toute fibre h on a

$$\mu_h = \sum_{Q \text{ atome de } \mathscr{Q}} \mu_h(Q)\mu_h^{(Q)},$$

on obtient

$$\mu_h \ll \mu_h|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_h|_0^{+\infty},$$

i.e. $(\mathscr{P}, T)$ est $\mathscr{H}_T$-conditionnellement quasi-markovien. ∎

Donnons ici un exemple d'application de cette proposition. Soit T_M un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbb{T}^d$ (défini par une matrice $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{Z})$, de déterminant 1 ou -1, sans valeur propre de module 1), et notons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$, T_M-invariante. Dans ce cadre, on peut toujours trouver une partition de Markov $\mathscr{R}$ génératrice, et comme λ est d'entropie maximale pour T_M, la loi du processus $(\mathscr{R}, T_M)$ sous λ est une mesure de Gibbs (voir [1]). En fait, dans ce cas précis le processus $(\mathscr{R}, T_M)$ est même un processus de Markov (voir [5]). Ainsi, le processus générateur $(\mathscr{R}, T_M)$ est quasi-markovien.

Si $\mathscr{Q}$ est une partition finie de $\mathbb{T}^d$, on note $\partial\mathscr{Q}$ la réunion des frontières des atomes de $\mathscr{Q}$, et pour $\varepsilon > 0$, soit $\partial_\varepsilon\mathscr{Q}$ l'ensemble des points du tore qui sont à une distance inférieure à ε de $\partial\mathscr{Q}$.

Définition 3.12. La partition $\mathscr{Q}$ de $\mathbb{T}^d$ est dite *assez régulière* s'il existe deux constantes K et α strictement positives telles que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lambda(\partial_\varepsilon\mathscr{Q}) \leq K\varepsilon^\alpha.$$

Proposition 3.13. *Si $\mathscr{Q}$ est une partition assez régulière de T_M, alors $(\mathscr{R}, T_M)$ est $\mathscr{Q}_{T_M}$-conditionnellement quasi-markovien.*

Preuve. Grâce aux bonnes propriétés des partitions de Markov, on peut trouver deux constantes $L > 0$ et $\beta \in]0,1[$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous les atomes de $\bigvee_{j=-n}^{n} T_M^{-j}\mathscr{R}$ soient de diamètre inférieur à $L\beta^n$. Puis, si $x \in \mathbb{T}^d \setminus \partial\mathscr{Q}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x \notin \partial_\varepsilon\mathscr{Q}$, et si n est suffisamment grand pour que $L\beta^n < \varepsilon$, l'atome de $\bigvee_{j=-n}^{n} T_M^{-j}\mathscr{R}$ contenant x est entièrement contenu dans un atome de $\mathscr{Q}$. En notant $n(x)$ le plus petit n vérifiant cette dernière propriété, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda(n(x) > k) \leq \lambda(\partial_{L\beta^k}\mathscr{Q}) \leq KL^\alpha(\beta^\alpha)^k.$$

On en déduit que $\int n(x)\,d\lambda(x) < +\infty$, et donc $\mathscr{Q}_{T_M}$ est un facteur finitaire à temps de codage d'espérance finie du processus $(\mathscr{R}, T_M)$. ∎

4. Résultats de décomposition utilisant la propriété de quasi Markov relative

4.1. *Pinsker relatif à un facteur.* De même qu'un processus quasi-markovien n'engendre pas toujours un système dynamique isomorphe à un schéma de Bernoulli, il ne suffit pas que $(\mathscr{P}, T)$ soit $\mathscr{H}_T$-conditionnellement quasi-markovien pour que $\mathscr{H}_T$ soit un facteur splittant dans le système dynamique engendré par $(\mathscr{P}, T)$. (On peut trouver à la fin de [7] un exemple simple de processus finiment codé par un processus de Bernoulli, mais qui n'engendre pas un facteur splittant.) On a besoin pour cela d'une condition supplémentaire, faisant intervenir le facteur de Pinsker relatif à $\mathscr{H}_T$.

Définition 4.1. On appelle *facteur de Pinsker relatif à* $\mathscr{H}_T$ la sous-tribu de $\mathscr{A}$, notée $\Pi(T|\mathscr{H}_T)$, constituée des A tels que

$$E(\mathscr{Q}_A \vee \mathscr{H}, T) - E(\mathscr{H}, T) = 0.$$

On trouve dans l'appendice de [6] une présentation de quelques propriétés du facteur de Pinsker relatif à un facteur $\mathscr{H}_T$. On a en particulier le résultat suivant.

Proposition 4.2.

$$\begin{aligned}\Pi(T|\mathscr{H}_T) &\overset{\mu}{=} \bigcap_{n\geq 1}\Big(\bigvee_{k\leq -n} T^{-k}\mathscr{P} \vee \bigvee_{k\in\mathbb{Z}} T^{-k}\mathscr{H}\Big)\\ &\overset{\mu}{=} \bigcap_{n\geq 1}\Big(\bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P} \vee \bigvee_{k\in\mathbb{Z}} T^{-k}\mathscr{H}\Big).\end{aligned}$$

Corollaire 4.3. *Pour μ_H-presque toute fibre h du facteur $\mathscr{H}_T$, on a*

$$\bigcap_{n\geq 1}\bigvee_{k\leq -n} T^{-k}\mathscr{P} \overset{\mu_h}{=} \bigcap_{n\geq 1}\bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P}.$$

Preuve. Soient

$$\mathscr{B} := \bigcap_{n\geq 1}\Big(\bigvee_{k\leq -n} T^{-k}\mathscr{P} \vee \mathscr{H}_T\Big), \qquad \overline{\mathscr{B}} := \bigcap_{n\geq 1}\Big(\bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P} \vee \mathscr{H}_T\Big).$$

Puisque $\mathscr{H}_T \subset \mathscr{B}$, conditionner par rapport à $\mathscr{B}$ puis par rapport à $\mathscr{H}_T$ revient à conditionner uniquement par rapport à $\mathscr{B}$. On a donc, pour tout $C \in \mathscr{A}$,

$$\mathbb{E}_{\mu_{h(x)}}[\mathbb{1}_C|\mathscr{B}] \overset{\mu}{=} \mathbb{E}_{\mu}[\mathbb{1}_C|\mathscr{B}]. \tag{9}$$

Pour la même raison, la même égalité reste valable en remplaçant $\mathscr{B}$ par $\overline{\mathscr{B}}$. Puis, comme $\mathscr{B} \overset{\mu}{=} \overline{\mathscr{B}}$ d'après la proposition 4.2, on a aussi

$$\mathbb{E}_{\mu}[\mathbb{1}_C|\mathscr{B}] \overset{\mu}{=} \mathbb{E}_{\mu}[\mathbb{1}_C|\overline{\mathscr{B}}].$$

On en déduit

$$\mathbb{E}_{\mu_{h(x)}}[\mathbb{1}_C|\mathscr{B}] \overset{\mu}{=} \mathbb{E}_{\mu_{h(x)}}[\mathbb{1}_C|\overline{\mathscr{B}}],$$

i.e., pour tout $C \in \mathscr{A}$, pour μ_H-presque toute fibre h,

$$\mathbb{E}_{\mu_h}[\mathbb{1}_C|\mathscr{B}] \overset{\mu_h}{=} \mathbb{E}_{\mu_h}[\mathbb{1}_C|\overline{\mathscr{B}}]. \tag{10}$$

Rappelons que si $\mathscr{C}$ est une algèbre dénombrable de parties de X qui engendre la tribu $\mathscr{A}$, alors pour tout $A \in \mathscr{A}$, tout $\varepsilon > 0$ et toute probabilité ν sur $(X, \mathscr{A})$, on peut trouver $C \in \mathscr{C}$ tel que $\nu(A \triangle C) < \varepsilon$. En appliquant

(10) lorsque C décrit une telle algèbre (par exemple l'algèbre des réunions finies de cylindres de X), on obtient donc pour μ_H-presque toute fibre h,

$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad \mathbb{E}_{\mu_h}[\mathbb{1}_A|\mathscr{B}] \stackrel{\mu_h}{=} \mathbb{E}_{\mu_h}[\mathbb{1}_A|\overline{\mathscr{B}}]. \tag{11}$$

Or, si h vérifie (11), on a $\mathscr{B} \stackrel{\mu_h}{=} \overline{\mathscr{B}}$. Mais la tribu $\mathscr{H}_T$ étant μ_h-triviale pour presque toute fibre h, on a aussi

$$\mathscr{B} \stackrel{\mu_h}{=} \bigcap_{n\geq 1} \bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P}, \qquad \overline{\mathscr{B}} \stackrel{\mu_h}{=} \bigcap_{n\geq 1} \bigvee_{k\leq -n} T^{-k}\mathscr{P},$$

ce qui donne le résultat annoncé. ∎

Définition 4.4. On dit que le système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est un *K-système relativement au facteur $\mathscr{H}_T$* si

$$\Pi(T|\mathscr{H}_T) \stackrel{\mu}{=} \mathscr{H}_T,$$

c'est-à-dire si on ne peut pas trouver un facteur de même entropie que $\mathscr{H}_T$ contenant strictement $\mathscr{H}_T$. (On dit aussi que $\mathscr{H}_T$ est *maximal en entropie.*)

Remarquons ici que la démonstration du corollaire 4.3, où l'on remplace $\mathscr{B}$ ou $\overline{\mathscr{B}}$ par $\mathscr{H}_T$, prouve aussi que si T est un K-système relativement à $\mathscr{H}_T$, alors pour presque toute fibre h de $\mathscr{H}_T$ les tribus $\bigcap_{n\geq 1}\bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P}$ et $\bigvee_{k\leq -n} T^{-k}\mathscr{P}$ sont μ_h-triviales.

Thouvenot montre dans [9] que si $\mathscr{H}_T$ est un facteur splittant, alors T est un K-système relativement au facteur $\mathscr{H}_T$. Cette condition n'est pas suffisante en général (voir [4]), mais on a le résultat suivant.

Proposition 4.5. *Si $(\mathscr{P}, T)$ est $\mathscr{H}_T$-conditionnellement quasi-markovien, et si $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est un K-système relativement à $\mathscr{H}_T$, alors $(\mathscr{P}, T)$ est $\mathscr{H}_T$-conditionnellement weak Bernoulli, et $\mathscr{H}_T$ est un facteur splittant.*

Preuve. Grâce aux hypothèses, on sait que pour μ_H-presque toute fibre h du facteur $\mathscr{H}_T$, on a

(1) $\mu_h \ll \mu_h|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_h|_0^{+\infty}$ (car $(\mathscr{P}, T)$ est $\mathscr{H}_T$-conditionnellement quasi-markovien),

(2) les tribus $\bigcap_{n\geq 0}\bigvee_{k\leq -n} T^{-k}\mathscr{P}$ et $\bigcap_{n\geq 0}\bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P}$ sont μ_h-triviales (car T est un K-système relativement à $\mathscr{H}_T$).

En reprenant les mêmes arguments que pour la preuve de la proposition 2.8, mais en remplaçant μ par μ_h, on voit que lorsque les propriétés ci-dessus sont vérifiées, les probabilités μ_h et $\mu_h|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_h|_0^{+\infty}$ coïncident sur la tribu $\bigcap_{n\geq 0}(\bigvee_{k\leq -n} T^{-k}\mathscr{P} \vee \bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P})$. La proposition 3.5 permet alors d'en déduire que $(\mathscr{P}, T)$ est $\mathscr{H}_T$-conditionnellement weak Bernoulli, et donc que $\mathscr{H}_T$ est un facteur splittant. ∎

Revenons maintenant au cas où le système est engendré par le processus $(\mathscr{P}, T)$ quasi-markovien. On sait déjà que $(\mathscr{P}, T)$ est $\Pi(T)$-conditionnellement quasi-markovien. Mais T est toujours un K-système relativement à son facteur de Pinsker, et donc le processus $(\mathscr{P}, T)$ est $\Pi(T)$-conditionnellement weak Bernoulli. En utilisant de plus le résultat établi dans la proposition 2.4, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 4.6. *Tout système ergodique engendré par un processus $(\mathscr{P}, T)$ quasi-markovien est isomorphe au produit d'une permutation cyclique sur un ensemble fini avec un schéma de Bernoulli.*

4.2. *Extensions finies splittantes.* Comme on l'a déjà dit précédemment, il ne suffit pas que $(\mathscr{P}, T)$ soit $\mathscr{H}_T$-conditionnellement quasi-markovien pour que $\mathscr{H}_T$ soit un facteur splittant dans le système dynamique engendré par $(\mathscr{P}, T)$. Cependant, on va maintenant voir qu'il suffit de grossir légèrement $\mathscr{H}_T$ pour obtenir un facteur splittant.

DÉFINITION 4.7. Soit $\mathscr{F}$ un autre facteur du système, contenant $\mathscr{H}_T$. On dit que $\mathscr{F}$ est une *extension finie de $\mathscr{H}_T$* s'il existe une partition finie $\mathscr{Q}$ de X telle que

$$\mathscr{F} \stackrel{\mu}{=} \mathscr{H}_T \vee \mathscr{Q}.$$

On aura dans la suite besoin du lemme suivant, valable pour tout facteur $\mathscr{H}_T$ d'un système dynamique ergodique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$.

LEMME 4.8. *Les mesures conditionnelles μ_h, $h \in H$, vérifient l'une des deux propriétés suivantes :*

(1) *ou bien, pour μ_H-presque toute fibre h, la mesure conditionnelle μ_h n'a pas d'atome,*
(2) *ou bien il existe un entier $n \geq 1$ tel que pour μ_H-presque toute fibre h, la mesure conditionnelle μ_h a n atomes, chacun de mesure $1/n$.*

Dans le second cas, il existe une partition finie $\mathscr{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ indépendante de $\mathscr{H}_T$, avec $\mu(Q_1) = \cdots = \mu(Q_n) = 1/n$, telle que $\mathscr{A} \stackrel{\mu}{=} \mathscr{H}_T \vee \mathscr{Q}$. Alors $\mathscr{A}$ est une extension finie de $\mathscr{H}_T$.

Preuve. Pour toute fibre h, notons $m_1(h)$ la mesure du plus gros atome de μ_h, avec $m_1(h) = 0$ si μ_h n'a pas d'atome. Rokhlin ([8]) a montré que l'application $h \mapsto m_1(h)$ est mesurable ; par ailleurs elle est clairement T_H-invariante, donc elle est μ_H-presque sûrement constante par ergodicité de T (donc de T_H). Si $m_1 = 0$, on est dans le premier cas. Sinon on peut, toujours d'après [8], trouver $A \in \mathscr{A}$ tel que

(1) pour μ_H-presque toute fibre h, $h \cap A$ est un singleton,
(2) pour μ_H-presque toute fibre h, $\mu_h(h \cap A) = m_1$ (d'où $\mu(A) = m_1 > 0$).

Mais il est facile de voir que ces deux propriétés restent vraies pour tout $T^k A$, $k \in \mathbb{Z}$. Comme $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k A$ remplit presque tout X (encore par ergodicité), on en déduit que presque toute mesure μ_h est concentrée sur un nombre fini d'atomes, tous de mesure m_1. On est alors dans le second cas. La dernière partie du lemme est alors une conséquence immédiate des résultats de [8]. ∎

COROLLAIRE 4.9. *Pour qu'un facteur $\mathscr{F}$ contenant $\mathscr{H}_T$ soit une extension finie de $\mathscr{H}_T$, il suffit que l'ensemble des fibres $h \in H$ telles que la restriction de μ_h à $\mathscr{F}$ ait un atome soit de mesure μ_H non nulle.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme précédent en remplaçant $\mathscr{A}$ par $\mathscr{F}$. ∎

On peut maintenant préciser, et démontrer, le résultat annoncé au début de la section. Ce théorème constitue la généralisation de celui obtenu par Rahe ([7]) dans le cas des processus de Markov.

THÉORÈME 4.10. *Si le processus générateur $(\mathscr{P}, T)$ est $\mathscr{H}_T$-conditionnellement quasi-markovien, alors*

(1) *$\Pi(T|\mathscr{H}_T)$ est une extension finie de $\mathscr{H}_T$,*
(2) *$(\mathscr{P}, T)$ reste $\Pi(T|\mathscr{H}_T)$-conditionnellement quasi-markovien,*
(3) *$\Pi(T|\mathscr{H}_T)$ est un facteur splittant.*

Preuve. Puisque $(\mathscr{P}, T)$ est $\mathscr{H}_T$-conditionnellement quasi-markovien, pour μ_H-presque toute fibre h on a

$$\mu_h \ll \mu_h|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_h|_0^{+\infty}. \tag{12}$$

Par ailleurs, on a également d'après le corollaire 4.3,

$$\bigcap_{n\geq 1} \bigvee_{k\leq -n} T^{-k}\mathscr{P} \overset{\mu_h}{=} \bigcap_{n\geq 1} \bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P}. \tag{13}$$

Lorsque h est une fibre vérifiant (12) et (13), le même argument que celui donné dans la preuve de la proposition 2.4 prouve que la restriction de μ_h à $\bigcap_{n\geq 1} \bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P}$, donc à $\bigcap_{n\geq 1}(\bigvee_{k\geq n} T^{-k}\mathscr{P} \vee \mathscr{H}_T)$, a au moins un atome. Appliquant le corollaire 4.9, on voit alors que $\Pi(T|\mathscr{H}_T)$ est une extension finie de $\mathscr{H}_T$.

En conséquence, presque toute fibre h de $\mathscr{H}_T$ est une réunion finie de fibres de $\Pi(T|\mathscr{H}_T)$. Pour presque toute fibre h' de $\Pi(T|\mathscr{H}_T)$, en notant h la fibre de $\mathscr{H}_T$ qui la contient, on a donc

$$\mu_{h'} \ll \mu_h \ll \mu_h|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_h|_0^{+\infty},$$

d'où grâce au lemme 3.7,

$$\mu_{h'} \ll \mu_{h'}|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu_{h'}|_0^{+\infty},$$

i.e. T est $\Pi(T|\mathscr{H}_T)$-conditionnellement quasi-markovien.

Mais on sait que T est toujours un K-système relativement à $\Pi(T|\mathscr{H}_T)$. La proposition 4.5 prouve alors que $\Pi(T|\mathscr{H}_T)$ est un facteur splittant. ∎

En utilisant la proposition 3.13, on en déduit par exemple l'application suivante aux automorphismes hyperboliques du tore.

Théorème 4.11. *Si T_M est un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbb{T}^d$, et si $\mathscr{Q}$ est une partition assez régulière de $\mathbb{T}^d$, le facteur engendré par $\mathscr{Q}$ est, à une extension finie près, un facteur splittant.*

4.3. *Des questions.* Dans la proposition 3.11, l'intégrabilité du temps de codage semble essentielle pour obtenir le résultat. Que peut-il se passer si on relâche cette hypothèse ? Pourrait-on par exemple trouver un facteur finitaire (engendré par une partition $\mathscr{H}$ pour laquelle le temps de codage $m(x)$ est presque sûrement fini, mais pas nécessairement d'espérance finie) d'un processus quasi-markovien, qui soit maximal en entropie mais non splittant?

On peut également se demander si des hypothèses de régularité plus générales du facteur, du type "le facteur $\mathscr{F}$ est engendré par une fonction höldérienne des coordonnées d'un processus quasi-markovien", peuvent avoir des conséquences sur le comportement du système relativement à ce facteur.

Remerciements. L'auteur tient à remercier le rapporteur anonyme pour les améliorations qu'il a suggérées dans la rédaction de ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. 470, Springer, Berlin, 1975.

[2] N. A. Friedman and D. S. Ornstein, *On isomorphism of weak Bernoulli transformations*, Adv. Math. 5 (1970), 365–394.

[3] F. Ledrappier, *Sur la condition de Bernoulli faible et ses applications*, dans : Lecture Notes in Math. 532, Springer, Berlin, 1976, 152–159.

[4] D. S. Ornstein, *Factors of Bernoulli shifts*, Israel J. Math. 21 (1975), 145–153.

[5] W. Parry, *Intrinsic Markov chains*, Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964), 55–66.

[6] M. Rahe, *Relatively finitely determined implies relatively very weak Bernoulli*, Canad. J. Math. 30 (1978), 531–548.

[7] —, *Finite coding factors of Markov generators*, Israel J. Math. 32 (1979), 349–355.

[8] V. A. Rokhlin, *On the fundamental ideas of measure theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 1 10 (1963), 2–53 (première publication en russe, Mat. Sb. (N.S.) 25 (67) (1949), 107–150).

[9] J.-P. Thouvenot, *Quelques propriétés des systèmes dynamiques qui se décomposent en un produit de deux systèmes dont l'un est un schéma de Bernoulli*, Israel J. Math. 21 (1975), 177–207.

[10] —, *Remarques sur les sytèmes dynamiques donnés avec plusieurs facteurs*, ibid., 215–232.

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
UMR 6085 CNRS – Université de Rouen
Avenue de l'Université, B.P. 12
F-76801 Saint-Étienne-du-Rouvray Cedex, France
E-mail: thierry.de-la-rue@univ-rouen.fr

Received 9 August 2004;
revised 31 December 2004 (4478)