COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 90 2001 NO. 2

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE FADELL SUR LES FIBRÉS

PAR

ROBERT CAUTY (Paris)

Abstract. Let E be the total space of a Hurewicz fiber space whose base and all fibers are ANRs. We prove that if E is metrisable, then it is also an ANR.

1. Introduction. Le problème suivant a été posé en 1959 par E. Fadell [6]. Soit (E, p, B) un fibré de Hurewicz où l'espace total E est métrisable et séparable. Si la base B et toutes les fibres sont des rétractes absolus de voisinage, en est-il de même de E ? La réponse à cette question est connue dans deux cas particuliers, quand E est de dimension finie [1] et quand B et toutes les fibres sont localement compacts [7]. Le théorème suivant résout ce problème, sans hypothèse de séparabilté sur E.

THÉORÈME. *Soit (E, p, B) un fibré de Hurewicz avec E métrisable. Si B et toutes les fibres sont des rétractes absolus de voisinage, alors il en est de même de E.*

La démonstration se fera en deux étapes. Nous prouverons d'abord ce résultat quand B est un complexe simplicial localement de dimension finie avec la topologie métrique, puis nous déduirons le cas général de ce cas particulier.

2. Préliminaires. Nous notons I le segment $[0,1]$ et, pour tout espace B, B^I l'espace des chemins dans B avec la topologie compacte-ouverte. Si $p : E \to B$ est une fonction continue, nous posons $\Omega_p = \{(e,\omega) \in E \times B^I : p(e) = \omega(0)\}$. Il est connu que p est un fibré de Hurewicz si, et seulement si, il existe une fonction de relèvement des chemins $\Lambda : \Omega_p \to E^I$ vérifiant $\Lambda(e,\omega)(0) = e$ et $p \circ \Lambda(e,\omega) = \omega$. Si B est métrisable, cette fonction Λ peut être supposée régulière, i.e. telle que $\Lambda(e,\omega)$ soit le chemin constant en e quand ω est le chemin constant en $p(e)$.

Tous les résultats sur les rétractes absolus de voisinage que nous utiliserons ici se trouvent dans le livre de S. T. Hu [8], à l'exception du suivant dont la démonstration peut se trouver dans [9].

2000 *Mathematics Subject Classification*: 54C55, 55R05.

Lemme 1. *Soit A un fermé d'un espace métrisable X tel qu'il existe un voisinage V de A dans X et une homotopie $\varphi : V \times I \to X$ vérifiant $\varphi(x,0) = x$, $\varphi(V \times \{1\}) \subset A$ et $\varphi(a,t) = a$ pour $(a,t) \in A \times I$. Si A et $X \setminus A$ sont des rétractes absolus de voisinage, il en est de même de X.*

Pour toute fonction continue $f : X \to Y$, nous notons $M(f)$ le cylindre de f. En tant qu'ensemble, c'est le quotient de la réunion disjointe $(X \times I) \amalg Y$ par la relation d'équivalence qui identifie $(x,1)$ à $f(x)$ pour tout $x \in X$. Soit q l'application naturelle de $(X \times I) \amalg Y$ sur $M(f)$. Nous munissons $M(f)$ de la topologie, moins fine que la topologie quotient, ayant pour base les ensembles $q(V)$, où V est ouvert dans $X \times [0,1[$, et $q(U \cup (f^{-1}(U) \times]\varepsilon,1]))$ où U est ouvert dans Y et $0 < \varepsilon < 1$. Nous identifions naturellement X et Y à $q(X \times \{0\})$ et $q(Y)$ respectivement, de sorte que $q(x,0) = x$ et $q(x,1) = f(x)$ pour tout $x \in X$. À l'aide du théorème de Nagata–Smirnov ([5], théorème 4.4.7), il est facile de voir que $M(f)$ est métrisable si X et Y le sont. En outre, puisque Y est un rétracte par déformation forte de $M(f)$, le lemme 1 entraîne que $M(f)$ est un rétracte absolu de voisinage si X et Y en sont.

Pour alléger les notations, nous ne ferons aucune distinction entre un complexe simplicial et sa réalisation géométrique. *Tous les complexes simpliciaux considérés dans cet article seront supposés munis de la topologie métrique.* Si A est l'ensemble des sommets du complexe simplicial B et si $v_\alpha(b)$ désigne la coordonnée barycentrique du point b de B sur le sommet α, alors la topologie métrique est définie par la distance $d(b,c) = \sum_{\alpha \in A} |v_\alpha(b) - v_\alpha(c)|$. Il est connu que cette topologie ne change pas quand B est subdivisé barycentriquement (voir par exemple [10], App. 1), ce qui nous permettra d'identifier naturellement les réalisations géométriques de B et de ses subdivisions barycentriques itérées. Par un simplexe de B, nous entendons toujours un simplexe fermé; si σ est un simplexe, nous notons $\partial\sigma$ son bord.

3. Un cas particulier

Lemme 2. *Le théorème est vrai quand B est un complexe simplicial localement de dimension finie.*

Preuve. Pour $k \geq 0$, soit B^k le k-squelette de B, et soit O_k l'intérieur de B^k. Puisque B est localement de dimension finie, les ouverts $p^{-1}(O_k)$ recouvrent E. Puisque la propriété d'être un rétracte absolu de voisinage est locale, il suffit de montrer que les $p^{-1}(O_k)$ sont des rétractes absolus de voisinage, ce qui sera le cas si les $p^{-1}(B^k)$ en sont. Il suffit donc de prouver le lemme quand B est de dimension finie.

Le lemme est trivial si B est de dimension zéro. Soit $k \geq 1$, et supposons le lemme vrai quand la base est de dimension $k-1$. Soit (E,p,B)

un fibré de Hurewicz vérifiant les hypothèses du théorème où B est un complexe simplicial de dimension k. D'après [8, théorème 6.3, pp. 139–140], pour montrer que E est un rétracte absolu de voisinage, il suffit de construire, pour tout $n \geq 1$, un rétracte absolu de voisinage Y_n, des fonctions continues $\varrho_n : Y_n \to E$ et $\varphi_n : E \to Y_n$ et une homotopie $H_n : E \times I \to E$ entre l'identité de E et $\varrho_n \circ \varphi_n$ de façon que la suite $\{H_n\}$ converge vers l'identité au sens que, pour tout $x \in E$ et pour tout voisinage V de x, il existe un voisinage W de x et un entier m tels que $H_n(W \times I) \subset V$ pour tout $n \geq m$.

Fixons une fonction régulière de relèvement des chemins $\Lambda : \Omega_p \to E^I$. Si les points a et b appartiennent à un même simplexe de B, soit $\omega(a, b)$ le chemin linéaire de a à b : $\omega(a, b)(t) = (1 - t)a + tb$. Pour x dans E et b_1, b_2 dans B tels qu'il existe un simplexe de B contenant les points $p(x), b_1$ et b_2, posons, pour $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$,

$$\begin{aligned} \lambda_1(x, b_1, t_1) &= \Lambda(x, \omega(p(x), b_1))(t_1), \\ \lambda_2(x, b_1, b_2, t_1, t_2) &= \lambda_1(\lambda_1(x, b_1, t_1), b_2, t_2). \end{aligned}$$

Soit B_n le $(k - 1)$-squelette de la n-ième subdivision barycentrique de B, et soit Σ_n l'ensemble des k-simplexes de cette n-ième subdivision barycentrique. Pour $\sigma \in \Sigma_n$, soit c_σ le barycentre de σ. Posons $K_n = p^{-1}(B_n)$. Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, soient $E_\sigma = p^{-1}(\partial\sigma)$ et $F_\sigma = p^{-1}(c_\sigma)$. Pour $x \in E_\sigma$, soit $f_\sigma(x) = \lambda_1(x, c_\sigma, 1)$; alors f_σ est une fonction continue de E_σ dans F_σ. Soient $M(f_\sigma)$ le cylindre de l'application f_σ et $q_\sigma : (E_\sigma \times I) \amalg F_\sigma \to M(f_\sigma)$ la projection naturelle. Nous avons $M(f_\sigma) \cap K_n = E_\sigma$ et $M(f_\sigma) \cap M(f_\tau) \subset K_n$ pour $\sigma \neq \tau$. Soit $Y_n = K_n \cup \bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} M(f_\sigma)$ muni de la topologie ayant pour base les ouverts de $M(f_\sigma)$ contenus dans $M(f_\sigma) \setminus E_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_n$, et les ensembles de la forme $U \cup \bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} q_\sigma((E_\sigma \cap U) \times [0, \varepsilon[)$, où U est ouvert dans K_n et $0 < \varepsilon < 1$. À l'aide du théorème de Nagata–Smirnov, il est facile de voir que Y_n est métrisable.

L'hypothèse de récurrence entraîne que K_n et les E_σ sont des rétractes absolus de voisinage. Puisque les fibres F_σ en sont par hypothèse, les $M(f_\sigma)$ sont aussi des rétractes absolus de voisinage. Puisque $Y_n \setminus K_n$ est la réunion disjointe des ouverts $M(f_\sigma) \setminus E_\sigma$, c'est un rétracte absolu de voisinage. L'ensemble $P = Y_n \setminus \bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} F_\sigma$ est un voisinage ouvert de K_n dans Y_n et la fonction $k : P \times I \to P$ définie pour $0 \leq t \leq 1$ par $k(z, t) = z$ si $z \in K_n$ et $k(q_\sigma(x, s), t) = q_\sigma(x, ts)$ pour $(x, s) \in E_\sigma \times [0, 1[$ est une rétraction par déformation forte de P sur K_n. Le lemme 1 entraîne alors que Y_n est un rétracte absolu de voisinage.

Définissons $\varrho_n : Y_n \to E$ par $\varrho_n(y) = y$ si $y \in K_n$ ou si $y \in F_\sigma$ et, pour $(x, t) \in E_\sigma \times I$, $\sigma \in \Sigma_n$, par

$$\varrho_n(q_\sigma(x, t)) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq t \leq 1/4, \\ \lambda_1(x, c_\sigma, \min(2t - 1/2)) & \text{si } 1/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La continuité de ϱ_n est immédiate aux points de $Y_n \setminus (K_n \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma_n} F_\sigma)$. La continuité aux points de K_n résulte du fait que, pour tout ouvert U de K_n, $\varrho_n(U \cup \bigcup_\sigma q_\sigma((U\cap E_\sigma)\times[0,1/4[)) = U$. La continuité aux points de F_σ résulte du fait que si $t > 3/4$, on a $\varrho_n(q_\sigma(x,t)) = f_\sigma(x)$.

Pour $x \in E$, soit $\theta_\sigma(x)$ la coordonnée barycentrique (relative à la n-ième subdivision barycentrique) du point $p(x)$ sur c_σ. Fixons une rétraction r_n de $B \setminus \{c_\sigma : \sigma \in \Sigma_n\}$ sur B_n et posons $r_n(c_\sigma) = c_\sigma$ pour tout $\sigma \in \Sigma_n$. Définissons $\varphi_n : E \to Y_n$ par $\varphi_n(x) = x$ si $x \in K_n$ et, pour $x \in p^{-1}(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma_n$, par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} q_\sigma(\lambda_1(x, r_n(p(x)), 1), 2\theta_\sigma(x)) & \text{si } 0 \le \theta_\sigma(x) \le 1/2, \\ \lambda_2(x, r_n(p(x)), c_\sigma, \max(0, 3-4\theta_\sigma(x)), 1) & \text{si } 1/2 \le \theta_\sigma(x) \le 1. \end{cases}$$

La régularité de Λ entraîne que $\lambda_1(x, r_n(p(x)), 1) = x$ quand $x \in K_n$, et, en utilisant les définitions de λ_2 et de f_σ, on constate que les deux formules définissent le même point $\varphi_n(x) = f_\sigma(\lambda_1(x, r_n(p(x)), 1))$ quand $\theta_\sigma(x) = 1/2$, donc φ_n est bien définie. La continuité de φ_n aux points de $E \setminus (K_n \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma_n} F_\sigma)$ est immédiate. La continuité de φ_n aux points de F_σ résulte du fait que, sur l'ouvert $\theta^{-1}(]3/4,1])$, on a $\varphi_n(x) = \lambda_1(x, c_\sigma, 1)$. Soit $x_0 \in K_n$ et soient U un voisinage de x_0 dans E et $0 < \varepsilon < 1$. La régularité de Λ permet de trouver un voisinage W_0 de x_0 et un voisinage V_0 de $p(x_0)$ tels que $\Lambda(x,\omega)(1) \in U$ pour $(x,\omega) \in \Omega_p$ tel que $x \in W_0$ et $\omega(I) \subset V_0$; soit $V \subset V_0$ un voisinage de $p(x_0)$ tel que $\omega(a,b)(I) \subset V_0$ lorsque a et b sont deux points de V pour lesquels $\omega(a,b)$ est défini. D'autre part, la fonction $\theta_n(x) = \max\{\theta_\sigma(x) : \sigma \in \Sigma_n\}$ est continue (cela résulte facilement de la continuité des coordonnées barycentriques et du fait que leur somme vaut un). Par suite, $W = W_0 \cap p^{-1}(V) \cap \theta^{-1}([0,\varepsilon/2[)$ est un voisinage de x_0 tel que $\varphi_n(W) \subset (U \cap K_n) \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma_n} q_\sigma((U\cap E_\sigma)\times[0,\varepsilon[)$, d'où la continuité de φ_n aux points de K_n.

Nous avons $\varrho_n \circ \varphi_n(x) = x$ si $x \in K_n$ et, en explicitant les formules donnant ϱ_n et φ_n dans les trois cas $\theta_\sigma(x) \le 1/8$, $1/8 \le \theta_\sigma(x) \le 1/2$ et $1/2 \le \theta_\sigma(x) \le 1$, on constate que si $x \in p^{-1}(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma_n$, alors $\varrho_n \circ \varphi_n(x) = \lambda_2(x, r_n(p(x)), c_\sigma, \delta_1(x), \delta_2(x))$ où

$$\delta_1(x) = \max(0, \min(1, 3-4\theta_\sigma(x))),$$
$$\delta_2(x) = \min(1, \max(0, 4\theta_\sigma(x) - 1/2)).$$

L'homotopie H_n entre l'identité et $\varrho_n \circ \varphi_n$ peut alors être définie par $H_n(x,t) = x$ si $x \in K_n$ et pour $x \in p^{-1}(\sigma)$ par

$$H_n(x,t) = \begin{cases} \lambda_2(x, r_n(p(x)), c_\sigma, 2t\delta_1(x), 0) & \text{pour } 0 \le t \le 1/2, \\ \lambda_2(x, r_n(p(x)), c_\sigma, \delta_1(x), (2t-1)\delta_2(x)) & \text{pour } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

La continuité de H_n est claire aux points de $E \setminus (K_n \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma_n} F_\sigma)$. Pour voir la continuité de H_n aux points de F_σ, remarquons que sur l'ouvert $\theta_\sigma^{-1}(]3/4,1])$, nous avons $\delta_1(x)=0$ et $\delta_2(x)=1$, donc $H_n(x,t)=x$ pour $t\le 1/2$ et $H_n(x,t)=\lambda_1(x,c_\sigma,2t-1)$ pour $t\ge 1/2$. Enfin, pour voir la continuité de H_n aux points de K_n, remarquons que sur l'ouvert $\theta_\sigma^{-1}([0,1/8[)$, nous avons $\delta_1(x)=1$ et $\delta_2(x)=0$, donc $H_n(x,t)=\lambda_1(x,r_n(p(x)),2t)$ pour $t\le 1/2$ et $H_n(x,t)=\lambda_1(x,r_n(p(x)),1)$ pour $t\ge 1/2$.

Soit $x_0\in E$ et soit V un voisinage de x_0. La régularité de Λ nous permet de trouver un voisinage W_0 de x_0 contenu dans V et un voisinage U_0 de $p(x_0)$ dans B tels que $\Lambda(\Lambda(x,\omega_1)(s),\omega_2)(t)$ appartienne à V quel que soit t et quels que soient le point x et les chemins ω_1 et ω_2 vérifiant $p(x)=\omega_1(0)$, $\omega_1(s)=\omega_2(0)$, $\omega_1(I)\subset U_0$ et $\omega_2(I)\subset U_0$. Pour la distance d sur B définie dans l'introduction, le diamètre d'un k-simplexe de la n-ième subdivision barycentrique de B est $2k^n/(k+1)^n$ (voir par exemple [4], p. 63). Nous pouvons donc trouver un voisinage U de $p(x_0)$ contenu dans U_0 et un entier m tels que, pour tout $n\ge m$, tout k-simplexe de la n-ième subdivision barycentrique de B rencontrant U soit contenu dans U_0. $W=V_0\cap p^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0. Soit $x\in W$ et soit $n\ge m$. Si $x\in K_n$, alors $H_n(x,t)=x$ pour tout t. Si $x\notin K_n$ et si $\sigma\in\Sigma_n$ contient $p(x)$, alors $\sigma\cap U\ne\emptyset$ et tous les chemins de la forme $\omega(a,b)$ intervenant dans les formules définissant $H_n(x,t)$ sont contenus dans σ, donc dans U_0, donc, d'après le choix de U_0 et W_0, $H_n(x,t)\in V$ pour tout t. Nous avons donc $H_n(W\times I)\subset V$ pour $n\ge m$, ce qui montre que $\{H_n\}$ converge vers l'identité.

4. Démonstration du théorème. Comme dans la démonstration du lemme 2, il suffit de construire, pour tout $n\ge 1$, un rétracte absolu de voisinage E_n, des fonctions continues $\varphi_n: E\to E_n$ et $\varrho_n: E_n\to E$ et une homotopie H_n entre l'identité et $\varrho_n\circ\varphi_n$ de façon que la suite $\{H_n\}$ converge vers l'identité de E.

Fixons une distance définissant la topologie de B. Puisque B est un rétracte absolu de voisinage, nous pouvons trouver un voisinage O de la diagonale dans $B\times B$ et une fonction continue $\mu: O\times I\to B$ vérifiant $\mu(x,y,0)=x$, $\mu(x,y,1)=y$ et $\mu(x,x,t)=x$. Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert de B tel que $V\times V\subset O$ pour tout $V\in\mathcal{V}$. Soit $\Lambda:\Omega_p\to E^I$ une fonction régulière de relèvement des chemins. Si $(a,b)\in O$, définissons le chemin $\omega(a,b)$ de a à b par $\omega(a,b)(t)=\mu(a,b,t)$. Pour $x\in E$ et $b\in B$ tels qu'il existe un élément de $\mathcal{V}$ contenant $p(x)$ et b, posons $\lambda(x,b,t)=\Lambda(x,\omega(p(x),b))(t)$ pour $0\le t\le 1$. Pour tout entier $n\ge 1$, prenons un recouvrement ouvert $\mathcal{U}_n$ de B vérifiant

(1) $\mathcal{U}_n$ est plus fin que $\mathcal{V}$,

(2) diam $U<1/n$ pour tout $U\in\mathcal{U}_n$.

Nous pouvons trouver un complexe simplicial K_n localement de dimension finie et des fonctions continues $f_n : B \to K_n$ et $g_n : K_n \to B$ telles que

(3) $\forall b \in B$, $\{b, g_n(f_n(b))\}$ est contenu dans un élément de $\mathcal{U}_n$.

(Voir le théorème B.3 de [2]. Pour obtenir un complexe localement de dimension finie, utiliser le lemme 3.3 de [3] dans la démonstration de ce théorème.) Soit (E_n, p_n, K_n) l'image réciproque de (E, p, B) par g_n. Alors $E_n = \{(y, x) \in K_n \times E : g_n(y) = p(x)\}$, et nous définissons $\varrho_n : E_n \to E$ par $\varrho_n(y, x) = x$. Puisque les fibres de p_n sont homéomorphes à des fibres de p, ce sont des rétractes absolus de voisinage, donc le lemme 2 s'applique pour montrer que E_n est un rétracte absolu de voisinage. Définissons $\varphi_n : E \to E_n$ par $\varphi_n(x) = (f_n \circ p(x), \lambda(x, g_n \circ f_n \circ p(x), 1))$, ce qui est possible d'après (1). Nous avons $\varrho_n \circ \varphi_n(x) = \lambda(x, g_n \circ f_n \circ p(x), 1)$, donc nous pouvons définir l'homotopie H_n entre l'identité et $\varrho_n \circ \varphi_n$ par $H_n(x, t) = \lambda(x, g_n \circ f_n \circ p(x), t)$.

Soit $x_0 \in E$ et soit V un voisinage de x_0. La régularité de Λ nous permet de trouver un voisinage W_0 de x_0 et un voisinage Z_0 de $p(x_0)$ tels que $\Lambda(x, \omega)(I) \subset V$ quel que soit $(x, \omega) \in \Omega_p$ vérifiant $x \in W_0$ et $\omega(I) \subset Z_0$. Soit Z_1 un voisinage de $p(x_0)$ tel que $\mu(Z_1 \times Z_1 \times I) \subset Z_0$. En utilisant (2), nous pouvons trouver un voisinage Z de $p(x_0)$ contenu dans Z_1 et un entier m tels que, pour tout $n \geq m$, tout élément de $\mathcal{U}_n$ rencontrant Z soit contenu dans Z_1. $W = W_0 \cap p^{-1}(Z)$ est un voisinage de x_0. Si $x \in W$ et $n \geq m$, alors $\{p(x), g_n \circ f_n \circ p(x)\}$ est contenu dans un élément de $\mathcal{U}_n$ rencontrant Z, donc dans Z_1, et $\omega(p(x), g_n \circ f_n \circ p(x))(I)$ est contenu dans $\mu(Z_1 \times Z_1 \times I) \subset Z_0$, ce qui, vu la définition de λ, entraîne que $H_n(\{x\} \times I)$ est contenu dans V. Nous avons donc $H_n(W \times I) \subset V$ pour $n \geq m$, ce qui montre la convergence de la suite $\{H_n\}$ vers l'identité.

RÉFÉRENCES

[1] G. Allaud and E. Fadell, *A fiber homotopy extension theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 239–251.

[2] F. D. Ancel, *The role of countable dimensionality in the theory of cell-like relations*, ibid. 287 (1985), 1–40.

[3] C. H. Dowker, *Mapping theorems for non-compact spaces*, Amer. J. Math. 69 (1947), 200–242.

[4] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1952.

[5] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.

[6] E. Fadell, *On fiber spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 1–14.

[7] S. Ferry, *Strongly regular mappings with compact ANR fibers are Hurewicz fiberings*, Pacific J. Math. 75 (1978), 373–382.

[8] S. T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.

[9] D. M. Hyman, *A generalization of the Borsuk–Whitehead–Hanner theorem*, Pacific J. Math. 23 (1967), 263–271.

[10] S. Mardešić and J. Segal, *Shape Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1982.

Université Paris 6
U.F.R. 920, Boîte courrier 172
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: cauty@math.jussieu.fr

Received 20 September 2000 (3973)