COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 98 2003 NO. 2

SUR UNE APPLICATION DE LA FORMULE DE SELBERG–DELANGE

PAR

F. BEN SAÏD (Monastir) et J.-L. NICOLAS (Lyon)

Abstract. E. Landau has given an asymptotic estimate for the number of integers up to x whose prime factors all belong to some arithmetic progressions. In this paper, by using the Selberg–Delange formula, we evaluate the number of elements of somewhat more complicated sets. For instance, if $\omega(m)$ (resp. $\Omega(m)$) denotes the number of prime factors of m without multiplicity (resp. with multiplicity), we give an asymptotic estimate as $x \to \infty$ of the number of integers m satisfying $2^{\omega(m)} m \le x$, all prime factors of m are congruent to 3, 5 or 6 modulo 7, $\Omega(m) \equiv i \pmod 2$ (where $i = 0$ or 1), and $m \equiv l \pmod b$.

The above quantity has appeared in the paper [3] to estimate the number of elements up to x of the set $\mathcal{A}$ of positive integers containing 1, 2 and 3 and such that the number $p(\mathcal{A}, n)$ of partitions of n with parts in $\mathcal{A}$ is even, for all $n \ge 4$.

1. Introduction et énoncés des résultats. Nous désignerons par φ la fonction d'Euler, par μ la fonction de Möbius et par $\omega(n)$ (resp. $\Omega(n)$) le nombre de facteurs premiers distincts (resp. avec répétition) de l'entier n. Nous désignerons par p un nombre premier générique. Pour k entier, $k \ge 1$, on note

$$(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^* = \{h \in \mathbb{N} : 1 \le h \le k,\ (h,k) = 1\} \tag{1.1}$$

l'ensemble des classes inversibles modulo k. Soit $J \subset (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$; on note $|J|$ le cardinal de J ; on a donc $|J| \le \varphi(k)$. Pour $j \in J$, on pose

$$\mathcal{P}_j = \{p : p \equiv j \pmod k\} \tag{1.2}$$

et

$$\mathcal{P}_J = \bigcup_{j \in J} \mathcal{P}_j. \tag{1.3}$$

Dans [9, §§176–183], E. Landau a estimé le nombre d'entiers inférieurs à x et dont tous les diviseurs premiers appartiennent à $\mathcal{P}_J$. Plus précisément, il

2000 *Mathematics Subject Classification*: 11N25, 11N37.

Recherche soutenue par le programme d'échange franco-tunisien n°99/F 1507, par le contrat MIRA 2002 *Théorie des nombres Lyon–Monastir* de la Région Rhône-Alpes et par le CNRS, Institut Girard Desargues, UMR 5028.

a montré que

$$\sum_{\substack{n\le x\\ p|n\Rightarrow p\in\mathcal{P}_J}} 1 \sim \frac{C}{\Gamma(|J|/\varphi(k))}\,\frac{x}{(\log x)^{1-|J|/\varphi(k)}}, \tag{1.4}$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler et C une constante dépendant de k et de J. Ce résultat a été précisé par E. Wirsing ([18]) et par G. Tenenbaum et J. Wu ([17, problème II.8.6]).

Dans [15], par une méthode utilisant la variable complexe, A. Selberg a obtenu une estimation asymptotique des sommes

$$\sum_{n\le x} z^{\omega(n)},\qquad \sum_{n\le x}\mu(n)z^{\omega(n)},\qquad \sum_{n\le x} z^{\Omega(n)}. \tag{1.5}$$

H. Delange (cf. par exemple [7]) a déduit de ce type de formules plusieurs applications en théorie des nombres ; on trouvera dans le livre de G. Tenenbaum [16] un exposé de synthèse sur le sujet. Soit $g(n)$ une fonction arithmétique satisfaisant

$$g(n) \text{ multiplicative},\qquad g(n)>0,\qquad \lim_{n\to\infty} g(n)=\infty \tag{1.6}$$

(par exemple $g(n) = n2^{\omega(n)}$) et a_n une suite également multiplicative. Dans les articles [11], [12], [2, pp. 90–102], [1] et [10], sous des hypothèses raisonnables, les sommes en (1.5) sont étendues à

$$\sum_{g(n)\le x} a_n. \tag{1.7}$$

Notre but est d'évaluer les sommes de type

$$\sum_{\substack{g(n)\le x\\ p|n\Rightarrow p\in\mathcal{P}_J\\ n\equiv a \bmod b}} a_n \tag{1.8}$$

qui incluent les sommes (1.5) et (1.7) en ajoutant même la condition $n\equiv a \pmod b$, où a et b sont des entiers satisfaisant

$$1\le a\le b,\qquad (a,b)=1,\qquad (b,k)=1. \tag{1.9}$$

Nous désignerons par χ et ξ des caractères de Dirichlet génériques de modules respectifs k et b avec χ_0 et ξ_0 comme caractère principal. Nous noterons $\zeta(s)$ la fonction de Riemann et $L(s,\chi)$ la fonction de Dirichlet associée au caractère χ. Pour $|z|<1$, $\log(1+z)$ sera défini comme la somme de la série $\sum_{n\ge1}(-z)^n/n$.

Soient k et j deux entiers positifs premiers entre eux. On définit

$$P(k,j) = \prod_{p\equiv j \pmod k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varphi(k)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}. \tag{1.10}$$

Aucun des deux produits ci-dessus n'est convergent, mais nous prendrons comme valeur

$$P(k,j)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\theta(p)} \tag{1.11}$$

avec $\theta(p)=\varphi(k)-1$ si $p\equiv j \pmod k$ et $\theta(p)=-1$ sinon. La convergence du produit (1.11) peut se démontrer directement à l'aide du théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques ; dans le lemme 4, nous en donnerons une autre démonstration qui permet de calculer numériquement $P(k,j)$ avec une grande précision.

Au paragraphe 3 nous démontrerons le résultat suivant permettant d'estimer les somme du type (1.8) :

Théorème 1. *Soient b un entier positif, ξ un caractère de Dirichlet de module b et $J\subset(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$; soit $g(n)$ une fonction arithmétique satisfaisant* (1.6) ; *soit $a_{J,\xi}(n)$ (resp. $b_{J,\xi}(n)$) une suite multiplicative de nombres complexes (resp. de nombres réels). On suppose que, pour tout $n\geq 1$, $|a_{J,\xi}(n)|\leq b_{J,\xi}(n)$ et que les séries*

$$F_{g,J,\xi}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{J,\xi}(n)g(n)^{-s} \tag{1.12}$$

et

$$F^+_{g,J,\xi}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{J,\xi}(n)g(n)^{-s} \tag{1.13}$$

sont analytiques dans le demi-plan $\Re s>1$; on suppose qu'il existe trois constantes réelles $B>0$, $0<c<1/2$, $0\leq\delta<1$ et des fonctions $(f_j(s))_{j\in J}$ et $f^+(s)$, holomorphes dans le domaine

$$\mathcal{D}_c:\quad \Re s\geq 1-\frac{c}{\log(3+|\Im s|)} \tag{1.14}$$

vérifiant

$$\max(|f_j(s)|,|f^+(s)|)\leq B(\log(3+|\Im s|))^{\delta}\qquad \textit{pour } j\in J \textit{ et } s\in\mathcal{D}_c\,; \tag{1.15}$$

on suppose que, dans le demi-plan $\Re s>1$, la série $F_{g,J,\xi}(s)$ définie par (1.12) *admet une représentation en produit eulérien du type*

$$F_{g,J,\xi}(s)=H_{g,J,\xi}(s)\prod_{j\in J}\left(\prod_{p\equiv j\,(\mathrm{mod}\,k)}\left(1-\frac{\xi(p)}{p^s}\right)^{-f_j(s)}\right) \tag{1.16}$$

et que, de plus, $H_{g,J,\xi}(s)$ est une fonction analytique dans $\mathcal{D}_c$, et satisfait dans ce domaine la majoration

$$|H_{g,J,\xi}(s)|\leq B(3+|\Im s|)^{\delta}\,; \tag{1.17}$$

on suppose similairement que, dans le demi-plan $\Re s > 1$, *la série* $F^+_{g,J,\xi}(s)$ *définie par* (1.13) *admet la représentation*

$$F^+_{g,J,\xi}(s) = H^+_{g,J,\xi}(s)\zeta(s)^{f^+(s)}, \tag{1.18}$$

que $H^+_{g,J,\xi}(s)$ *est une fonction analytique dans* $\mathcal{D}_c$, *et satisfait dans ce domaine la majoration*

$$|H^+_{g,J,\xi}(s)| \le B(3 + |\Im s|)^\delta. \tag{1.19}$$

Alors, si l'on note

$$A_{g,J,\xi}(x) = \sum_{n\ge 1,\ g(n)\le x} a_{J,\xi}(n), \tag{1.20}$$

$$f(s) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{j\in J} f_j(s), \tag{1.21}$$

on a, pour $\xi \ne \xi_0$,

$$A_{g,J,\xi}(x) = O\left(x\,\frac{\log\log x}{(\log x)^2}\right) \tag{1.22}$$

et, pour $\xi = \xi_0$,

$$A_{g,J,\xi_0}(x) = \frac{x}{(\log x)^{1-f(1)}}\left(\frac{H_{g,J,\xi_0}(1)C_{J,k}}{\Gamma(f(1))} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right) \tag{1.23}$$

(*avec la convention* $1/\Gamma(0) = 0$) ; *la constante* $C_{J,k}$ *vaut*

$$C_{J,k} = \prod_{j\in J}\left(P(k,j)^{-f_j(1)/\varphi(k)} \prod_{\substack{p\mid b\\ p\equiv j\ (\mathrm{mod}\, k)}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{f_j(1)}\right), \tag{1.24}$$

avec la définition de $P(k,j)$ *donnée en* (1.10) ; *la constante contenue dans le* O *des formules* (1.22) *et* (1.23) *dépend de* k, b, B, c *et* δ.

Dans l'article [3], nous considérons les ensembles

$$\mathcal{W} = \{2^j p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_j^{\alpha_j} : j \ge 0,\ \alpha_j \ge 1,\ p_1,\ldots,p_j \equiv 3,5,6 \pmod 7\} \tag{1.25}$$

et, pour $i = 0$ ou 1, $r \ge 0$ et l impair,

$$\mathcal{W}_{i,r,l} = \{2^j m \in \mathcal{W} : \Omega(m) \equiv i \pmod 2 \text{ et } m \equiv l \pmod{2^{r+1}}\} \tag{1.26}$$

et les fonctions associées

$$\mathcal{W}(x) = \mathrm{Card}\{n \in \mathcal{W} : n \le x\}, \tag{1.27}$$

$$\mathcal{W}_{i,r,l}(x) = \mathrm{Card}\{n \in \mathcal{W}_{i,r,l} : n \le x\}. \tag{1.28}$$

Au paragraphe 4, comme application du théorème 1, nous démontrerons le théorème 2 :

THÉORÈME 2. *Pour $x \geq 2$, on a*

$$\mathcal{W}(x) = \frac{x}{(\log x)^{3/4}}\left\{\gamma + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right\}, \tag{1.29}$$

$$\mathcal{W}_{i,r,l}(x) = \frac{x}{(\log x)^{3/4}}\left\{\frac{\gamma}{2^{r+1}} + O_r\left(\frac{1}{(\log x)^{1/2}}\right)\right\} \tag{1.30}$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{\Gamma(1/4)}\left(\frac{6}{\pi\sqrt{7}}\right)^{1/4}\gamma_1 = 0.2733451113\ldots \tag{1.31}$$

et

$$\gamma_1 = \prod_{p\equiv 3,5,6 \,(\mathrm{mod}\, 7)}\left(1+\frac{1}{2p-2}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{1/2}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1/4} = 1.0751753443\ldots$$

Le produit γ_1 a été calculé par la formule (2.18) avec la méthode décrite dans [5] que nous rappelons dans le paragraphe 2 ; cette méthode permet d'obtenir une grande précision.

Notons ici que le théorème 2 est utilisé dans [3] pour donner une estimation de $\mathcal{A}(x) = \mathrm{Card}\{a \in \mathcal{A} : a \leq x\}$, où $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0(\{1,2,3\},3)$ désigne l'unique ensemble d'entiers strictement positifs qui contient $\{1,2,3\}$ et tel que, pour $n > 3$, le nombre $p(\mathcal{A},n)$ de partitions de n en parts dans $\mathcal{A}$ est pair. En particulier, il est démontré dans [3] que $\mathcal{W}$ est inclus dans $\mathcal{A}$.

Dans les articles [13] et [14] on trouvera des applications du théorème 1 en vue d'obtenir une minoration de $\mathcal{A}(x)$ lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0(\{1,2,3,4,5\},5)$. Ces applications sont détaillées aux paragraphes 5 et 6.

2. Quelques lemmes

LEMME 1. *Soient j et k deux entiers positifs premiers entre eux et ξ un caractère de Dirichlet modulo $b \geq 1$. Pour $\Re s > 1$, on a*

$$\varphi(k)\sum_{p\equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)}\frac{\xi(p)}{p^s} = \sum_{\chi \bmod k}\overline{\chi}(j)\log L(s,\chi\xi) - \sum_{\chi \bmod k}\overline{\chi}(j)\sum_{p}\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{(\chi\xi)(p^\alpha)}{\alpha p^{\alpha s}}.$$

Démonstration. Pour $\Re s > 0$ et $t \geq 2$, on définit

$$\log L_t(s,\chi\xi) = -\sum_{p\leq t}\log\left(1-\frac{\chi(p)\xi(p)}{p^s}\right) = \sum_{p\leq t}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(\chi\xi)(p^\alpha)}{\alpha p^{\alpha s}}. \tag{2.1}$$

En utilisant la relation d'orthogonalité

$$\sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(j)\chi(p) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } p \equiv j \pmod k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.2}$$

on obtient

$$\varphi(k) \sum_{\substack{p \equiv j \pmod k \\ p \le t}} \frac{\xi(p)}{p^s} = \sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(j) \log L_t(s, \chi\xi) - \sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(j) \sum_{p \le t} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{(\chi\xi)(p^\alpha)}{\alpha p^{\alpha s}}. \tag{2.3}$$

Mais pour $\Re s > 1$, on a

$$\lim_{t \to \infty} \log L_t(s, \chi\xi) = \log L(s, \chi\xi) \tag{2.4}$$

et l'on conclut en faisant tendre t vers ∞. ∎

Lemme 2. *Avec les notations du lemme* 1, *pour* $\Re s > 1$, *définissons* $G_{j,k,\xi}(s)$ *par*

$$-\varphi(k) \sum_{p \equiv j \pmod k} \log\left(1 - \frac{\xi(p)}{p^s}\right) = G_{j,k,\xi}(s) + \sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(j) \log L(s, \chi\xi)\,; \tag{2.5}$$

alors, $G_{j,k,\xi}(s)$ *est prolongeable par holomorphie dans le demi-plan* $\Re s > 1/2$ *par la fonction notée aussi* $G_{j,k,\xi}(s)$ *et donnée par*

$$G_{j,k,\xi}(s) = \sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(j) \sum_{p} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{\xi(p^\alpha)(\chi(p) - \chi(p^\alpha))}{\alpha p^{\alpha s}}. \tag{2.6}$$

De plus, *pour* $\Re s \ge \sigma_0 > 1/2$, *on a*

$$|G_{j,k,\xi}(s)| \le \frac{2(2+\sqrt{2})\sigma_0}{2\sigma_0 - 1}\, \varphi(k). \tag{2.7}$$

Démonstration. Pour $\Re s > 0$ et $t \ge 2$, on définit $G^{(t)}_{j,k,\xi}(s)$ par

$$G^{(t)}_{j,k,\xi}(s) = -\varphi(k) \sum_{\substack{p \equiv j \pmod k \\ p \le t}} \log\left(1 - \frac{\xi(p)}{p^s}\right) - \sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(j) \log L_t(s, \chi\xi), \tag{2.8}$$

où $\log L_t(s, \chi\xi)$ est défini en (2.1). Par (2.3) et (2.2), (2.8) donne

$$G^{(t)}_{j,k,\xi}(s) = \sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(j) \sum_{p \le t} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{\xi(p^\alpha)(\chi(p) - \chi(p^\alpha))}{\alpha p^{\alpha s}}. \tag{2.9}$$

En faisant tendre t vers ∞ dans (2.9), on obtient (2.6).

L'holomorphie de $G_{j,k,\xi}(s)$ pour $\Re s > 1/2$ découle du fait que

$$\Big|\sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(j)\sum_p\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{\xi(p^\alpha)(\chi(p)-\chi(p^\alpha))}{\alpha p^{\alpha s}}\Big| \le \varphi(k)\sum_p\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{2}{\alpha p^{\alpha\Re s}}$$

$$\le \varphi(k)\sum_p\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{1}{p^{\alpha\Re s}} = \varphi(k)\sum_p\frac{1}{p^{2\Re s}}\left(\frac{p^{\Re s}}{p^{\Re s}-1}\right)$$

$$\le \varphi(k)\,\frac{2^{1/2}}{2^{1/2}-1}\sum_p\frac{1}{p^{2\Re s}} \le (2+\sqrt{2})\varphi(k)\zeta(2\Re s).$$

Il y a donc convergence normale dans tout demi-plan $\Re s \ge \sigma_0 > 1/2$ et donc dans tout compact du demi-plan $\Re s > 1/2$.

L'inégalité (2.7) s'obtient en majorant $\zeta(2\Re s)$ par $1 + \int_1^\infty t^{-2\Re(s)}\,dt = 2\Re(s)/(2\Re(s)-1)$.

Lemme 3. *Soient $k \ge 1$ un entier et χ un caractère de Dirichlet de module k.*

(i) *Il existe une constante $c = c(k) > 0$ telle que la série $L(s,\chi)$ n'ait aucun zéro dans le domaine*

$$\mathcal{D}_c = \left\{s \in \mathbb{C} : \Re s \ge 1 - \frac{c}{\log(3+|\Im s|)}\right\}.$$

(ii) *Pour $s \in \mathcal{D}_c$ et $\chi \ne \chi_0$, on a*

$$L(s,\chi)^{\pm 1} \ll_k \log(3+|\Im s|).$$

(iii) *Si $\chi \ne \chi_0$, le produit $\prod_p(1-\chi(p)/p)$ est convergent et vaut $1/L(1,\chi)$.*

Démonstration. (i) est un résultat classique qui permet de trouver une région sans zéro pour toutes les fonctions L de Dirichlet associées à un caractère de module fixé. Le lecteur pourra consulter [6, chap. 14], et [16, notes 8.2 et 8.3, p. 265].

(ii) Pour l'exposant $+1$, on a $|L(s,\chi)| \le |\zeta(s)|$, et l'on sait (cf. [16, théorème 7, p. 149]) que $|\zeta(s)| \ll \log(|\Im s|)$ pour $s \in \mathcal{D}_c$ et $|\Im s| \ge 2$. Comme $\chi \ne \chi_0$, $L(s,\chi)$ est continue pour $\Re s > 0$, ce qui prouve le résultat. Pour l'exposant -1, la majoration est démontrée dans [8, théorème 8.7, p. 286].

(iii) On trouvera une démonstration dans [9, paragraphe 109]. ■

Lemme 4. *Avec les notations des lemmes* 1 *et* 2, *le produit $P(k,j)$ défini en* (1.10) *converge et sa valeur est*

$$P(k,j) = \exp\Big(-G_{j,k,\xi_0}(1) - \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(j)\log L(1,\chi\xi_0)\Big) \times \prod_{\substack{p\mid b\\ p\equiv j\,(\mathrm{mod}\,k)}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varphi(k)} \prod_{p\mid bk}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}. \tag{2.10}$$

Démonstration. Soit t un nombre réel que nous ferons tendre vers ∞. La définition (2.1) de $\log L_t(s,\chi\xi)$ a un sens pour s réel, $s>0$, ainsi que la relation (2.3) qui s'en déduit. La définition (2.8) a un sens pour $\Re s>0$, ainsi que la relation (2.9). En comparant (2.9) et (2.6) pour $s=1$, on voit que

$$\lim_{t\to\infty} G^{(t)}_{j,k,\xi}(1) = G_{j,k,\xi}(1), \tag{2.11}$$

et par le lemme 3(iii), lorsque $\chi\xi$ n'est pas principal,

$$\lim_{t\to\infty} L_t(1,\chi\xi) = L(1,\chi\xi). \tag{2.12}$$

On écrit la relation (2.8) avec $s=1$ et $\xi=\xi_0$:

$$\varphi(k)\sum_{\substack{p\equiv j\,(\mathrm{mod}\,k)\\ p\le t}} \log\left(1-\frac{\xi_0(p)}{p}\right) + \overline{\chi}_0(j)\log L_t(1,\chi_0\xi_0) = -G^{(t)}_{j,k,\xi_0}(1) - \sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(j)\log L_t(1,\chi\xi_0). \tag{2.13}$$

Par (2.11) et (2.12), le membre de droite de (2.13) a pour limite, lorsque t tend vers ∞,

$$-G_{j,k,\xi_0}(1) - \sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(j)\log L(1,\chi\xi_0).$$

Si l'on choisit t plus grand que bk, l'exponentielle du membre de gauche de (2.13) s'écrit (car $\overline{\chi}_0(j)=1$)

$$\prod_{\substack{p\equiv j\,(\mathrm{mod}\,k)\\ p\le t}} \left(1-\frac{\xi_0(p)}{p}\right)^{\varphi(k)} \prod_{p\le t}\left(1-\frac{\chi_0(p)\xi_0(p)}{p}\right)^{-1} = \left\{\prod_{\substack{p\equiv j\,(\mathrm{mod}\,k)\\ p\le t}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varphi(k)} \prod_{p\le t}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right\} \times \prod_{\substack{p\mid b\\ p\equiv j\,(\mathrm{mod}\,k)}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\varphi(k)} \prod_{p\mid bk}\left(1-\frac{1}{p}\right). \tag{2.14}$$

Il s'ensuit que l'expression entre accolade de (2.14) a une limite quand t tend vers ∞, soit $P(k,j)$, et que la valeur de $P(k,j)$ est donnée par (2.10). ∎

Calcul numérique. La formule (2.10), en faisant $b = 1$, permet de calculer les produits $P(k,j)$, en utilisant la méthode décrite dans [5], que nous rappelons ci-dessous.

Soit s réel, $s > 1$; pour évaluer $L(s,\chi)$, on écrira

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{j=1}^{k-1} \chi(j) \biggl(\sum_{n \equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{1}{n^s} \biggr)$$

et la somme intérieure sera évaluée avec la formule sommatoire d'Euler–Maclaurin :

$$\begin{aligned} \sum_{n \equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{1}{n^s} &= \sum_{r=0}^{R-1} \frac{1}{(rk+j)^s} + \frac{1}{(s-1)k(Rk+j)^{s-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(Rk+j)^s} \\ &\quad + \sum_{m \geq 1} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\,\frac{s(s+1)\ldots(s+2m-2)k^{2m-1}}{(Rk+j)^{s+2m-1}}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

où R est un paramètre à déterminer ; les coefficients B_{2m} sont les nombres de Bernoulli qui alternent en signe, ce qui fait que le membre de droite de (2.15) donne, en s'arrêtant à deux valeurs consécutives de m, un encadrement pour le membre de gauche.

Ensuite, on définit

$$P_s(\chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}. \tag{2.16}$$

On a

$$\log L(s,\chi) = \sum_p -\log\Bigl(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Bigr) = \sum_p \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\chi^\alpha(p)}{\alpha p^{\alpha s}} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\, P_{\alpha s}(\chi^\alpha)$$

et par la formule d'inversion de Möbius, on obtient

$$P_s(\chi) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\mu(\alpha)}{\alpha} \log L(\alpha s, \chi^\alpha). \tag{2.17}$$

La série (2.17) est rapidement convergente, car

$$|L(s,\chi) - 1| \leq \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots \leq \frac{1}{2^s} + \int_2^\infty \frac{dt}{t^s} = \frac{s+1}{s-1}\,\frac{1}{2^s} \leq \frac{3}{2^s}$$

pour $s \geq 2$. Ainsi, (2.17) permet le calcul de $P_s(\chi)$.

Pour calculer $G_{j,k,\xi_0}(1)$, on écrit la formule (2.6) :

$$G_{j,k,\xi_0}(1) = \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(j)(P_\alpha(\chi\xi_0^\alpha) - P_\alpha(\chi^\alpha \xi_0^\alpha)).$$

La série en α converge rapidement puisque

$$|P_\alpha(\chi)| \le \sum_p \frac{1}{p^\alpha} \le \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots \le \frac{3}{2^\alpha}.$$

Enfin, dans (2.10), pour évaluer $L(1,\chi)$, on emploie les formules de [4, p. 376] qui utilisent les sommes de Gauss ; on obtient ainsi la valeur numérique de $P(k,j)$.

Par ailleurs, pour évaluer le produit infini $\prod_{p\equiv j \pmod k} f(1/p)$, où $f(z)$ est une fonction analytique au voisinage de $z=0$, on développe $\log f(z)$ en série entière et l'on suppose que $\log f(z) = c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$; par (2.16), on a

$$\log\Big(\prod_{p\equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)} f(1/p)\Big) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi}(j) \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n(\chi). \tag{2.18}$$

Pour la suite, on aura besoin de la terminologie introduite dans [16, chap. II.5] et [11]. Soient des nombres réels strictement positifs c, δ, $0 \le \delta < 1$, B, $g(n)$ une fonction arithmétique satisfaisant (1.6), et f une fonction analytique dans le domaine $\mathcal{D}_c$ défini par (1.14). On dit qu'une série $F_g(s) = \sum_{n\ge 1} a_n g(n)^{-s}$, où a_n est une suite multiplicative, possède la *propriété* $\mathcal{P}(f,c,\delta,B)$ si :

(i) La série $F_g(s)$ est absolument convergente dans le demi-plan $\Re s > 1$ et y admet une représentation du type

$$F_g(s) = H_f(s)\zeta(s)^{f(s)}, \quad \Re s > 1. \tag{2.19}$$

(ii) La fonction $H_f(s)$ est prolongeable en une fonction analytique dans le domaine $\mathcal{D}_c$ défini par (1.14) et satisfait dans ce domaine la majoration

$$|H_f(s)| \le B(3 + |\Im s|)^\delta. \tag{2.20}$$

(iii) La fonction $f(s)$ vérifie

$$|f(s)| \le B(\log(3 + |\Im s|))^\delta \qquad \text{pour } s \in \mathcal{D}_c. \tag{2.21}$$

Soit $f^+(s)$ une fonction analytique dans $\mathcal{D}_c$. On dira que la série $F_g(s)$ possède la *propriété* $\mathcal{P}^+(f, f^+, c, \delta, B)$ si elle possède la propriété $\mathcal{P}(f,c,\delta,B)$ et s'il existe une suite multiplicative de coefficients réels b_n tels que $|a_n| \le b_n$ pour tout n et $F_g^+(s) = \sum_{n\ge1} b_n g(n)^{-s}$ possède la propriété $\mathcal{P}(f^+,c,\delta,B)$. Autrement dit, il existe une fonction $H_{f^+}^+(s)$ telle que les trois propriétés (i), (ii) et (iii) soient satisfaites lorsque l'on remplace F_g, H_f et f par F_g^+, $H_{f^+}^+$ et f^+.

Dans [12], Naimi et Smida annoncent un développement asymptotique de $A_g(x) = \sum_{n\geq 1,\, g(n)\leq x} a_n$ dans le cas où $F_g(s) = \sum_{n\geq 1} a_n g(n)^{-s}$ possède la propriété $\mathcal{P}^+(f, f^+, c, \delta, B)$; nous énonçons ici leur résultat sous une forme plus faible :

Théorème A ([12]). *Soient* $F_g(s) = \sum_{n\geq 1} a_n g(n)^{-s}$ *une série vérifiant la propriété* $\mathcal{P}^+(f, f^+, c, \delta, B)$ *et* $A_g(x) = \sum_{n\geq 1,\, g(n)\leq x} a_n$. *Alors,*

$$A_g(x) = x(\log x)^{f(1)-1}\left\{\frac{H_f(1)}{\Gamma(f(1))} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right\} \tag{2.22}$$

(*avec la convention* $1/\Gamma(0) = 0$), *où* H_f *est définie en* (2.19) *et la constante dans le symbole de Landau* O *dépend de* c, δ, B.

Dans son livre [16], G. Tenenbaum démontre le théorème A lorsque $g(n) = n$ et $f(s)$ est une constante complexe. Le terme de reste dans (2.22) peut alors être remplacé par $O(1/\log x)$.

Le théorème A est démontré dans [11] dans le cas où $g(n) = \mathrm{id}(n) = n$. La preuve repose sur la formule de Perron

$$\int_0^x A_g(t)\,dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} F_g(s)\,\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds$$

et ensuite les propriétés analytiques de la fonction $F_{\mathrm{id}}(s)$ sont utilisées. La propriété $\mathcal{P}(f^+, c, \delta, B)$ sur la fonction $F^+_{\mathrm{id}}(s)$ permet de contrôler les variations locales de $A_{\mathrm{id}}(t)$. La formule de Perron reste valable dans le cas où $g(n)$ est une fonction arithmétique vérifiant (1.6) et la démonstration de [11] se généralise au théorème A (cf. [12]).

3. Preuve du théorème 1. Pour $\Re s > 1$, la relation (1.16) peut s'écrire

$$F_{g,J,\xi}(s) = H_{g,J,\xi}(s)\exp\left(-\sum_{j\in J} f_j(s)\sum_{p\equiv j\,(\mathrm{mod}\,k)}\log\left(1 - \frac{\xi(p)}{p^s}\right)\right),$$

qui devient en utilisant le lemme 2 :

$$\begin{aligned} F_{g,J,\xi}(s) &\\ &= H_{g,J,\xi}(s)\exp\left(\sum_{j\in J}\frac{f_j(s)}{\varphi(k)}\Big(G_{j,k,\xi}(s) + \sum_{\chi\,\mathrm{mod}\,k}\overline{\chi}(j)\log L(s,\chi\xi)\Big)\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Distinguons deux cas :

Premier cas : $\xi \neq \xi_0$. Par le lemme 3, puisque $\chi\xi$ n'est pas un caractère principal, en diminuant éventuellement c, $L(s,\chi\xi)$ est holomorphe dans $\mathcal{D}_c$ (défini par (1.14)) pour tout caractère χ modulo k. D'après les hypothèses du théorème 1, $H_{g,J,\xi}(s)$ et chaque $f_j(s)$ sont holomorphes dans $\mathcal{D}_c$; par le lemme 2, $G_{j,k,\xi}(s)$ est holomorphe dans le domaine $\Re s > 1/2$ qui contient $\mathcal{D}_c$. Il s'ensuit, par (3.1), que $F_{g,J,\xi}(s)$ est holomorphe dans $\mathcal{D}_c$.

Par (2.7), puisque $c < 1/2$, $G_{j,k,\xi}(s)$ est bornée dans $\mathcal{D}_c$, et par (1.15) et le lemme 3(ii), on a

$$(3.2)\qquad \Big|\sum_{j\in J}\frac{f_j(s)}{\varphi(k)}\Big(G_{j,k,\xi}(s)+\sum_{\chi \bmod k}\overline{\chi}(j)\log L(s,\chi\xi)\Big)\Big| \ll_{k,b,B,c} (\log(3+|\Im s|))^{\delta}(1+\log\log(3+|\Im s|))$$

et donc (3.1) et (1.17) entraînent, pour $s\in\mathcal{D}_c$,

$$|F_{g,J,\xi}(s)| \le M_F(\xi)(3+|\Im s|)^{(1+\delta)/2}$$

pour une certaine constante $M_F = M_F(\xi)$ dépendant de k, b, B, c, δ. Ainsi, la fonction $F_{g,J,\xi}(s)$ possède la propriété $\mathcal{P}(0, c, (1+\delta)/2, M_F)$.

Ensuite, par (1.18) et (1.19), on voit que $F^+_{g,J,\xi}(s)$ possède la propriété $\mathcal{P}(f^+, c, \delta, B)$ et ainsi, $F_{g,J,\xi}(s)$ possède la propriété $\mathcal{P}^+(0, f^+, c, (1+\delta)/2, \max(M_F, B))$.

On peut donc appliquer le théorème A avec $f(s) = 0$ et l'on obtient (1.22).

Deuxième cas : $\xi = \xi_0$. Dans la somme en χ de (3.1), on sépare le caractère principal χ_0. On a

$$(3.3)\qquad L(s,\chi_0\xi_0) = \prod_{(p,bk)=1}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{-1} = \zeta(s)\prod_{p\mid bk}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)$$

et, comme $\overline{\chi}_0(j) = 1$ pour $j\in J$, on déduit de (3.1) et (1.21)

$$(3.4)\qquad F_{g,J,\xi_0}(s) = H_{g,J,\xi_0}(s)\exp\Big[\sum_{j\in J}\frac{f_j(s)}{\varphi(k)}\Big(G_{j,k,\xi_0}(s)+\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}(j)\log L(s,\chi\xi_0)\Big)\Big] \times \zeta(s)^{f(s)}\prod_{p\mid bk}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{f(s)}.$$

Par un raisonnement analogue à celui du cas précédent, tous les facteurs du membre de droite de (3.4) sauf $\zeta(s)^{f(s)}$ sont holomorphes dans $\mathcal{D}_c$. Puisque $|J| \le \varphi(k)$, par (1.21) et (1.15), on a $|f(s)| \le B(\log(3+|\Im s|))^{\delta}$ pour $s\in\mathcal{D}_c$. Maintenant $s\in\mathcal{D}_c \Rightarrow \Re s \ge 1/2$, et pour p premier et $s\in\mathcal{D}_c$, $|\log(1-1/p^s)| \le -\log(1-1/\sqrt{2}) \le 2$. On a donc

$$\Big|\sum_{p\mid bk} f(s)\log\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)\Big| \ll_{k,b} |f(s)| \le B(\log(3+|\Im s|))^{\delta}.$$

Le crochet de (3.4) se majore comme dans (3.2), et en utilisant la majoration (1.17), on obtient

$$|F_{g,J,\xi_0}(s)/\zeta(s)^{f(s)}| \leq M_F(\xi_0)(3+|\Im s|)^{(1+\delta)/2}$$

pour une certaine constante $M_F(\xi_0)$ dépendant de k, b, B, c, δ. Ainsi la fonction $F_{g,J,\xi_0}(s)$ possède la propriété $\mathcal{P}(f, c, (1+\delta)/2, M_F(\xi_0))$.

Comme dans le cas $\xi \neq \xi_0$, $F^+_{g,J,\xi_0}(s)$ possède la propriété $\mathcal{P}(f^+, c, \delta, B)$ et ainsi, $F_{g,J,\xi_0}(s)$ possède la propriété $\mathcal{P}^+(f, f^+, c, (1+\delta)/2, \max(M_F(\xi_0), B))$.

On peut donc appliquer le théorème A et l'on obtient (1.23) avec

$$C_{J,k} = \exp\biggl(\sum_{j\in J}\frac{f_j(1)}{\varphi(k)}\Bigl[G_{j,k,\xi_0}(1) + \sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(j)\log L(1,\chi\xi_0)\Bigr]\biggr) \times \prod_{p|bk}\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr)^{f(1)}. \tag{3.5}$$

Par le lemme 4, le crochet de (3.5) vaut

$$-\log P(k,j) + \varphi(k)\sum_{\substack{p|b\\ p\equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)}}\log\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr) - \sum_{p|bk}\log\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr),$$

ce qui, reporté dans (3.5), fournit à travers (1.21) la valeur de $C_{J,k}$ annoncée en (1.24).

4. Preuve du théorème 2. Pour la preuve du théorème 2, nous utiliserons les deux résultats classiques suivants :

LEMME 5 (cf. [7, p. 108]). *Soient $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ un ensemble d'indices, et pour $n \in \mathcal{N}$, des fonctions complexes u_n et v_n définies sur un même ensemble $\mathcal{E}$. On suppose que pour tout $n \in \mathcal{N}$ et tout $x \in \mathcal{E}$,*

$$|u_n(x)| \leq U_n, \qquad |u_n(x) + v_n(x)| \leq V_n,$$

où les U_n et les V_n sont des constantes telles que

$$\sum_{n\in\mathcal{N}} U_n^2 < \infty, \qquad \sum_{n\in\mathcal{N}} V_n < \infty.$$

Alors le produit infini

$$\prod_{n\in\mathcal{N}}(1+u_n(x))\exp(v_n(x))$$

est normalement convergent pour $x \in \mathcal{E}$ et sa valeur est bornée pour $x \in \mathcal{E}$.

LEMME 6. *Soit t un nombre complexe vérifiant $|t| \leq 1/\sqrt{3}$. On a*

$$|\log(1-t) + t| \leq |t|^2.$$

Démonstration. Soit a un nombre réel positif, $a < 1$. Pour $|t| \leq a$ on a

$$|\log(1-t)+t| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right| \le |t|^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^{n-2}}{n} = |t|^2 f(a)$$

avec $f(a) = (-\log(1-a)-a)/a^2$. De plus, $f(1/\sqrt{3}) = 0.85158 < 1$. ∎

En vue d'appliquer le théorème 1, on choisit $k=7$, $J=\{3,5,6\}$, $g(n) = n2^{\omega(n)}$, $b = 2^{r+1}$ et

$$\mathcal{P}_J = \mathcal{P}_{\{3,5,6\}} = \{p : p \equiv 3,5,6 \pmod 7\}. \tag{4.1}$$

On définit la fonction arithmétique complètement multiplicative δ_3 par

$$\delta_3(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in \mathcal{P}_{\{3,5,6\}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Pour x réel, $x \ge 1$, et $i=0$ ou $i=1$, la quantité $\mathcal{W}_{i,r,l}(x)$ définie par (1.28) peut s'écrire

$$\mathcal{W}_{i,r,l}(x) = \sum_{\substack{n2^{\omega(n)} \le x \\ n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, 2^{r+1})}} \delta_3(n)\left(\frac{1+(-1)^{\Omega(n)+i}}{2}\right),$$

ou encore

$$\mathcal{W}_{i,r,l}(x) = \tfrac{1}{2}(A_1(x) + (-1)^i A_{-1}(x)) \tag{4.3}$$

avec

$$A_z(x) = A_{z,r,l}(x) = \sum_{\substack{n2^{\omega(n)} \le x \\ n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, 2^{r+1})}} \delta_3(n) z^{\Omega(n)}. \tag{4.4}$$

Maintenant, si ξ est un caractère de Dirichlet modulo $b = 2^{r+1}$, on pose $a(n) = \delta_3(n) z^{\Omega(n)}\xi(n)$ et $b(n) = |z|^{\Omega(n)}$; la série

$$F_\xi(s,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_3(n) z^{\Omega(n)}\xi(n)}{(n2^{\omega(n)})^s} \tag{4.5}$$

se développe, pour $\Re s > 1$ et $|z| < 3$, en un produit eulérien donné par

$$\begin{aligned} F_\xi(s,z) &= \prod_{p \in \mathcal{P}_{\{3,5,6\}}} \left(1 + \frac{z\xi(p)}{2^s p^s} + \ldots + \frac{z^j \xi(p^j)}{2^s p^{js}} + \ldots\right) \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}_{\{3,5,6\}}} \left(1 + \frac{2^{-s} z\xi(p)}{p^s - z\xi(p)}\right), \end{aligned}$$

qui peut encore s'écrire

$$F_\xi(s,z) = H_\xi(s,z) \prod_{p \in \mathcal{P}_{\{3,5,6\}}} \left(1 - \frac{\xi(p)}{p^s}\right)^{-z2^{-s}} \tag{4.6}$$

avec

$$H_\xi(s,z)=\prod_{p\in\mathcal{P}_{\{3,5,6\}}}\left(1+\frac{2^{-s}z\xi(p)}{p^s-z\xi(p)}\right)\left(1-\frac{\xi(p)}{p^s}\right)^{z2^{-s}}. \tag{4.7}$$

On fixe σ_0 tel que $1/2<\sigma_0<1$. Dans (1.14), on choisit $c\le(1-\sigma_0)\log 3$, de telle sorte que $\mathcal{D}_c\subset\{s:\Re s\ge\sigma_0\}$.

En vue d'appliquer le lemme 5 pour majorer $|H_\xi(s,z)|$ dans l'ensemble $\Re s\ge\sigma_0>1/2$ et $|z|\le z_0<\sqrt{3}$, on remarque

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_{\{3,5,6\}}}\left|\frac{2^{-s}z\xi(p)}{p^s-z\xi(p)}\right|^2\le\sum_{p\in\mathcal{P}_{\{3,5,6\}}}\left(\frac{2^{-\sigma_0}z_0}{p^{\sigma_0}-z_0}\right)^2<\infty$$

et, en appliquant le lemme 6 avec $t=\xi(p)/p^s$, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathcal{P}_{\{3,5,6\}}}&\left|\frac{2^{-s}z\xi(p)}{p^s-z\xi(p)}+z2^{-s}\log\left(1-\frac{\xi(p)}{p^s}\right)\right|\\&=\sum_{p\in\mathcal{P}_{\{3,5,6\}}}\left|\frac{2^{-s}z^2\xi^2(p)}{p^s(p^s-z\xi(p))}+z2^{-s}\left(\log\left(1-\frac{\xi(p)}{p^s}\right)+\frac{\xi(p)}{p^s}\right)\right|\\&\le\sum_{p\in\mathcal{P}_{\{3,5,6\}}}\left(\frac{2^{-\sigma_0}z_0^2}{p^{\sigma_0}(p^{\sigma_0}-z_0)}+\frac{z_0 2^{-\sigma_0}}{p^{2\sigma_0}}\right)<\infty.\end{aligned}$$

Les hypothèses du lemme 5 sont satisfaites, et il en résulte que, pour $\Re s\ge\sigma_0>1/2$ et $|z|\le z_0<\sqrt{3}$, on a

$$H_\xi(s,z)=O_{\sigma_0,z_0}(1). \tag{4.8}$$

Ainsi, la fonction $H_\xi(s,z)$ est, pour z fixé, holomorphe dans le domaine $\Re s>1/2$ et la condition (1.17) est remplie avec $\delta=0$.

On a parallèlement

$$F_\xi^+(s,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{\Omega(n)}}{(n2^{\omega(n)})^s}=\prod_p\left(1+\frac{|z|}{2^s(p^s-|z|)}\right)=H_\xi^+(s,z)\zeta(s)^{|z|2^{-s}}$$

avec

$$H_\xi^+(s,z)=\prod_p\left(1+\frac{|z|}{2^s(p^s-|z|)}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{|z|2^{-s}}.$$

On démontre, comme ci-dessus pour $H_\xi(s,z)$, que $H_\xi^+(s,z)$ est bornée et holomorphe dans $\mathcal{D}_c$.

Pour $j\in J=\{3,5,6\}$, on choisit $f_j(s)=z2^{-s}$; pour $\Re s\ge\sigma_0>1/2$ et $|z|\le z_0<\sqrt{3}$ on a

$$|f_j(s)|=|z2^{-s}|\le z_0 2^{-\sigma_0}<\sqrt{3}\,2^{-1/2}<5/4, \tag{4.9}$$

et comme $f^+(s)=|z|2^{-s}$, la condition (1.15) est remplie avec $\delta=0$ et $B=5/4$.

Par conséquent, les conditions du théorème 1 sont satisfaites pour $F_\xi(s,z)$, ce qui permet, grâce à (1.22), d'écrire pour $\xi \neq \xi_0$

$$A_{z,\xi}(x) = \sum_{n2^{\omega(n)} \le x} \delta_3(n)\xi(n) z^{\Omega(n)} = O\left(x \frac{\log\log x}{(\log x)^2}\right) \tag{4.10}$$

et

$$A_{z,\xi_0}(x) = \frac{x}{(\log x)^{1-f(1)}} \left(\frac{H_{\xi_0}(1,z) C_{\{3,5,6\},7}}{\Gamma(f(1))} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right) \tag{4.11}$$

avec $f(1) = \frac{3}{6} z 2^{-1} = z/4$; $C_{\{3,5,6\},7}$ est défini par (1.24). Remarquons que, dans les formules (4.10) et (4.11), le O ne dépend que de r.

Maintenant, la relation d'orthogonalité

$$\sum_{\xi \bmod 2^{r+1}} \overline{\xi}(l)\xi(n) = \begin{cases} 2^r & \text{si } n \equiv l \pmod{2^{r+1}}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.12}$$

(4.4) et la définition de $A_{z,\xi}(x)$ donnée par (4.10) permettent d'écrire

$$A_z(x) = \frac{1}{2^r} \sum_{\xi \bmod 2^{r+1}} \overline{\xi}(l) A_{z,\xi}(x).$$

En utilisant (4.10), il suit

$$\begin{aligned} A_z(x) &= \frac{1}{2^r}\Big(A_{z,\xi_0}(x) + \sum_{\xi \neq \xi_0} \overline{\xi}(l) A_{z,\xi}(x)\Big) \\ &= \frac{1}{2^r} A_{z,\xi_0}(x) + O\left(x \frac{\log\log x}{(\log x)^2}\right) \end{aligned} \tag{4.13}$$

et, à l'aide de (4.3), on obtient

$$\mathcal{W}_{i,r,l}(x) = \frac{1}{2^{r+1}} \left(A_{1,\xi_0}(x) + (-1)^i A_{-1,\xi_0}(x)\right) + O\left(x \frac{\log\log x}{(\log x)^2}\right). \tag{4.14}$$

Mais, par (4.11), on a

$$A_{-1,\xi_0}(x) = O\left(\frac{x}{(\log x)^{5/4}}\right) \tag{4.15}$$

et

$$A_{1,\xi_0}(x) = \frac{x}{(\log x)^{3/4}} \left(\frac{H_{\xi_0}(1,1) C_{\{3,5,6\},7}}{\Gamma(1/4)} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right), \tag{4.16}$$

où $H_{\xi_0}(1,1)$ est donné par (4.7) :

$$H_{\xi_0}(1,1) = \prod_{p \in \mathcal{P}_{\{3,5,6\}}} \left(1 + \frac{1}{2p-2}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{1/2} = 1.0291857376\ldots, \tag{4.17}$$

(la valeur numérique a été calculée par (2.18)), $C_{\{3,5,6\},7}$ est donné par (1.24) :

$$C_{\{3,5,6\},7} = \Big(\prod_{j\in\{3,5,6\}} P(7,j)\Big)^{-1/12} \tag{4.18}$$

et (4.14) et (4.16) prouvent (1.30) avec

$$\gamma = \frac{H_{\xi_0}(1,1)C_{\{3,5,6\},7}}{\Gamma(1/4)}. \tag{4.19}$$

Pour obtenir la valeur de γ donnée par (1.31), on observe d'abord que, par (1.10), on a

$$\begin{aligned}\prod_{j\in\{3,5,6\}} P(7,j) &= \prod_{p\in\mathcal{P}_{\{3,5,6\}}} \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{6} \prod_{p} \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-3} \\ &= \Big(\frac{6}{7}\Big)^{-3} \prod_{p\in\mathcal{P}_{\{3,5,6\}}} \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{3} \prod_{p\in\mathcal{P}_{\{1,2,4\}}} \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-3}.\end{aligned}$$

Désignons par $\chi_3(n) = \big(\frac{n}{7}\big)$ le caractère de Legendre modulo 7. On a

$$L(1,\chi_3) = \prod_{p} \bigg(1-\frac{\big(\frac{p}{7}\big)}{p}\bigg)^{-1} = \prod_{p\in\mathcal{P}_{\{1,2,4\}}} \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1} \prod_{p\in\mathcal{P}_{\{3,5,6\}}} \Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1},$$

et par suite

$$\begin{aligned}&\prod_{j\in\{3,5,6\}} P(7,j) \\ &\qquad = \Big(\frac{6}{7}\Big)^{-3} \prod_{p\in\mathcal{P}_{\{3,5,6\}}} \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{3} L(1,\chi_3)^3 \prod_{p\in\mathcal{P}_{\{3,5,6\}}} \Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{3}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Mais $L(1,\chi_3)$ est connu (cf. [4, p. 385]) car le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ vaut 1, et on a

$$L(1,\chi_3) = \frac{\pi}{\sqrt{7}} = 1.1874104117\ldots \tag{4.21}$$

La valeur de γ annoncée en (1.31) résulte alors de (4.17)–(4.21) et ceci termine la démonstration de la première partie du théorème 2 pour $\mathcal{W}_{i,r,l}(x)$.

Pour prouver l'estimation (1.29) de $\mathcal{W}(x)$, on choisit $r = 0$ et $\xi = \xi_0$ vaut 1 sur les nombres impairs et 0 sur les nombres pairs. On a alors $\mathcal{W}(x) = A_{1,\xi_0}(x)$. La valeur de $A_{1,\xi_0}(x)$ est donnée dans (4.16), ce qui démontre (1.29). ∎

5. Une application du théorème 1 avec $k = 31$. Nous conserverons dans tout ce paragraphe les notations suivantes : 3 est une racine primitive modulo 31, et nous l'utiliserons comme générateur de $(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^*$. Pour chaque entier n non multiple de 31, il existe une unique classe modulo 30 que nous noterons $\log_3(n)$ telle que

$$n \equiv 3^{\log_3(n)} \pmod{31}.$$

On définit la fonction

$$\ell : \mathbb{Z} \smallsetminus 31\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}), \qquad \ell(n) = \log_3(n) \bmod 6, \tag{5.1}$$

où $a \bmod b$ désigne le reste dans la division de a par b. Les valeurs de $\log_3(n)$ et $\ell(n)$ sont données dans la table ci-dessous.

Table 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\log_3(n)$	30	24	1	18	20	25	28	12	2	14	23	19	11	22	21
$\ell(n)$	0	0	1	0	2	1	4	0	2	2	5	1	5	4	3

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\log_3(n)$	6	7	26	4	8	29	17	27	13	10	5	3	16	9	15
$\ell(n)$	0	1	2	4	2	5	5	3	1	4	5	3	4	3	3

Remarquons que $\ell(n)$ est une fonction complètement additive modulo 6 : pour tous entiers n_1 et n_2 (non multiples de 31), on a

$$\ell(n_1 n_2) \equiv \ell(n_1) + \ell(n_2) \pmod{6}. \tag{5.2}$$

Nous noterons $\overline{n}$ le radical de n défini par

$$\overline{n} = \prod_{p \mid n} p, \qquad \overline{1} = 1.$$

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des entiers n impairs positifs non multiples de 31 qui n'ont aucun facteur premier p tel que $\ell(p) = 0$, qui ont un et un seul facteur premier p tel que $\ell(p) = 3$ (avec un exposant quelconque) et qui sont tels que $\ell(n) + \ell(\overline{n}) \not\equiv 2 \pmod{3}$. Dans les articles [13] et [14], on définit l'ensemble $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0(\{1, 2, 3, 4, 5\}, 5)$ contenant $1, 2, 3, 4, 5$ et tel que le nombre $p(\mathcal{A}, n)$ de partitions de n avec parts dans $\mathcal{A}$ soit pair pour $n \geq 6$, et il est prouvé que $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{G}$. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant (annoncé dans [13]).

Théorème 3. *Pour $x \geq 3$, on a*

$$\mathcal{G}(x) = \operatorname{Card}\{n \leq x : n \in \mathcal{G}\} = \frac{x}{(\log x)^{1/3}} \left(\kappa \log\log x + O(1)\right) \tag{5.3}$$

avec

$$\kappa = \frac{1}{9\Gamma(2/3)}\left(\frac{31}{30}|L(1,\chi_{10})|\right)^{-2/3} \prod_{\ell(p)=1,2,4,5}\left(1-\frac{1}{p^3}\right)^{-1/3} \tag{5.4}$$
$$= 0.07018702274\ldots$$

et χ_{10} *est l'un des caractères d'ordre* 3 *modulo* 31.

Démonstration. Nous allons appliquer le théorème 1 avec $b = 1$, $\xi = \xi_0$ (de telle sorte que $\xi_0(n) = 1$ pour tout n), $k = 31$, $g(n) = n$,

$$J = \{1 \le j \le 30 : \ell(j) \ne 0\} = \{1, 2, 3, \ldots, 30\} \setminus \{1, 2, 4, 8, 16\}. \tag{5.5}$$

Nous poserons

$$\begin{aligned} J' &= \{1 \le j \le 30 : \ell(j) \ne 0, 3\} \\ &= \{1, 2, 3, \ldots, 30\} \setminus \{1, 30, 2, 29, 4, 27, 8, 23, 16, 15\}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Introduisons la fonction complètement multiplicative $\varrho(n)$ définie par

$$\varrho(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell(p) = 0 \text{ ou } p = 31, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5.7}$$

et pour $0 \le i \le 5$, $\omega_i(n)$ comptera le nombre de facteurs premiers p de n tels que $\ell(p) = i$:

$$\omega_i(n) = \sum_{\substack{p|n \\ \ell(p)=i}} 1.$$

Pour x réel, $x \ge 1$, y complexe, z étant une racine 6-ième de l'unité, nous posons

$$S_{y,z}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n) y^{\omega_3(n)} z^{\ell(n)+\ell(\overline{n})}. \tag{5.8}$$

Grâce à la propriété (5.2) et au choix de z, la fonction $n \mapsto z^{\ell(n)+\ell(\overline{n})}$ est multiplicative. On pose

$$a(n) = \varrho(n) y^{\omega_3(n)} z^{\ell(n)+\ell(\overline{n})}, \qquad b(n) = |y|^{\omega(n)}.$$

Introduisons la notation, pour $j \in J$,

$$\beta_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell(j) = 1, 2, 4 \text{ ou } 5, \\ y & \text{si } \ell(j) = 3. \end{cases} \tag{5.9}$$

La série de Dirichlet

$$F(s; y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho(n) y^{\omega_3(n)} z^{\ell(n)+\ell(\overline{n})}}{n^s} \tag{5.10}$$

se développe en produit eulérien pour $\Re s > 1$:

$$F(s;y,z) = \prod_{j\in J}\prod_{p\equiv j\,(\mathrm{mod}\,31)}\left(1+\frac{\beta_j z^{2\ell(j)}}{p^s}+\ldots+\frac{\beta_j z^{(m+1)\ell(j)}}{p^{ms}}+\ldots\right) = \prod_{j\in J}\prod_{p\equiv j\,(\mathrm{mod}\,31)}\left(1+\frac{\beta_j z^{2\ell(j)}}{p^s-z^{\ell(j)}}\right). \tag{5.11}$$

Si l'on note

$$H(s;y,z) = \prod_{j\in J}\prod_{p\equiv j\,(\mathrm{mod}\,31)}\left(1+\frac{\beta_j z^{2\ell(j)}}{p^s-z^{\ell(j)}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\beta_j z^{2\ell(j)}}, \tag{5.12}$$

il vient à partir de (5.11)

$$F(s;y,z) = H(s;y,z)\prod_{j\in J}\prod_{p\equiv j\,(\mathrm{mod}\,31)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-\beta_j z^{2\ell(j)}}. \tag{5.13}$$

De façon similaire à la preuve de (4.8), en utilisant le lemme 5, on peut montrer que, pour

$$\Re s \geq \sigma_0 > 1/2, \qquad z^6 = 1, \qquad |y| \leq y_0, \tag{5.14}$$

le produit $H(s;y,z)$ donné par (5.12) vérifie

$$H(s;y,z) \ll_{\sigma_0,\, y_0} 1, \tag{5.15}$$

et est holomorphe. De plus, si l'on pose $f_j(s) = \beta_j z^{2\ell(j)}$, on voit par (5.9) que, sous les conditions (5.14), on a $|f_j(s)| \leq \max(1, y_0)$.

On vérifie similairement les hypothèses sur $F^+(s;y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)/n^s = \sum_{n=1}^{\infty} |y|^{\omega(n)}/n^s$, $f^+(s) = \max(1,|y|)$ et

$$H^+(s;y,z) = \prod_p \left(1+\frac{\max(1,|y|)}{p^s-1}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\max(1,|y|)};$$

et l'on peut appliquer le théorème 1 qui nous donne l'estimation de $S_{y,z}(x)$ défini par (5.8) :

$$S_{y,z}(x) = \frac{x}{(\log x)^{1-f(1)}}\left\{\frac{H(1;y,z)}{\Gamma(f(1))}\prod_{j\in J}(D_j)^{-\frac{\beta_j}{30}z^{2\ell(j)}} + O_{y_0}\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right\} \tag{5.16}$$

avec

$$f(1) = \frac{1}{30}\sum_{j\in J}\beta_j z^{2\ell(j)} \tag{5.17}$$

et, avec la notation (1.10),

$$D_j = P(31, j) = \prod_{p \equiv j \,(\mathrm{mod}\, 31)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{30} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}. \tag{5.18}$$

Maintenant, si

$$V(x, y) = \sum_{\substack{n \le x \\ \ell(n) + \ell(\overline{n}) \not\equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)}} \varrho(n) y^{\omega_3(n)} \tag{5.19}$$

et si $\mu = e^{2i\pi/3}$, on a

$$V(x, y) = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=0}^{1} \sum_{r=0}^{2} \sum_{n \le x} \varrho(n) y^{\omega_3(n)} \mu^{r(\ell(n) + \ell(\overline{n}) - \alpha)},$$

et, d'après (5.8), cette dernière égalité donne

$$V(x, y) = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=0}^{1} \sum_{r=0}^{2} \mu^{-r\alpha} S_{y,\mu^r}(x). \tag{5.20}$$

Mais, par (5.16) et (5.17), on obtient

$$S_{y,\mu^r}(x) \ll x (\log x)^{-1 + \Re(\frac{1}{30} \sum_{j \in J} \beta_j z^{2\ell(j)})}. \tag{5.21}$$

Par (5.9) et la table des valeurs de $\ell(j)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{30} \sum_{j \in J} \beta_j \mu^{2r\ell(j)} &= \frac{5}{30} \left(\mu^{2r} + \mu^{4r} + y\mu^{6r} + \mu^{8r} + \mu^{10r}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6}(y - 2) & \text{pour } r = 1 \text{ ou } 2, \\ \frac{1}{6}(y + 4) & \text{pour } r = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.22}$$

Donc (5.20) via (5.21) donne

$$V(x, y) = \frac{2}{3} S_{y,1}(x) + O_{y_0}(x (\log x)^{\Re((y-8)/6)}). \tag{5.23}$$

Si l'on note

$$\Delta(y) = \frac{H(1; y, 1)}{\Gamma((y + 4)/6)} \prod_{j \in J} D_j^{-\beta(j)/30}, \tag{5.24}$$

(5.23) via (5.16) et (5.22) donne

$$\begin{aligned} V(x, y) &\\ &= \frac{2}{3} x (\log x)^{(y-2)/6} \left\{ \Delta(y) + O_{y_0}\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right) \right\} \\ &\quad + O_{y_0}(x (\log x)^{\Re((y-8)/6)}) \\ &= \frac{2}{3} x (\log x)^{(y-2)/6} \Delta(y) + O_{y_0}(x (\log\log x)(\log x)^{\Re((y-8)/6)}). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Revenons à $\mathcal{G}(x)$ qui est défini par (5.3), et remarquons par (5.19) que $\mathcal{G}(x)$ n'est autre que le coefficient de y dans $V(x,y)$, qui est un polynôme en y. Par la formule de Cauchy on a donc

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|y|=1} \frac{V(x,y)}{y^2}\, dy \tag{5.26}$$
$$= \frac{1}{2i\pi} \frac{2x}{3(\log x)^{1/3}} \int_{|y|=1} \frac{(\log x)^{y/6} \Delta(y)}{y^2}\, dy + O\left(\frac{\log\log x}{(\log x)^{7/6}}\right).$$

Par (5.24), (5.12) et (5.9), $\Delta(y)$ est une fonction holomorphe de $y \in \mathbb{C}$. Soit $\Delta(y) = \Delta(0) + y\Delta'(0) + \ldots + (y^n/n!)\Delta^{(n)}(0) + \ldots$ son développement de Taylor à l'origine. On a

$$(\log x)^{y/6} = \exp\left(\frac{y}{6}\log\log x\right) = 1 + \frac{y}{6}\log\log x + \ldots + \frac{y^n}{6^n n!}(\log\log x)^n + \ldots$$

Le thèorème des résidus donne

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|y|=1} \frac{(\log x)^{y/6}\Delta(y)}{y^2}\, dy = \frac{\Delta(0)}{6}\log\log x + \Delta'(0)$$

et (5.26) implique (5.3) avec $\kappa = \Delta(0)/9$. Il reste à calculer $\Delta(0)$. Par (5.12) et (5.6), en remarquant que pour $\ell(j) = 3$ on a $\beta_j = 0$, il vient

$$H(1;0,1) = \prod_{j \in J'} \prod_{p \equiv j \pmod{31}} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1.$$

Par (5.24), il suit

$$\kappa = \frac{\Delta(0)}{9} = \frac{1}{9\Gamma(2/3)} \prod_{j \in J'} D_j^{-1/30}. \tag{5.27}$$

Pour obtenir la formule (5.4), nous allons utiliser le caractère χ_{10}. Le caractère χ_1 est défini par $\chi_1(3) = \exp(2i\pi/30)$, et pour $1 \le m \le 30$, le caractère χ_m est défini par $\chi_m(3) = \exp(2i\pi m/30)$. On a donc $\chi_{10}(3^n) = \exp(2i\pi n/3)$, et, pour j non multiple de 31, avec la définition (5.1) de ℓ,

$$\chi_{10}(j) = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\,\ell(j)\right). \tag{5.28}$$

On déduit de (5.28) que

$$|L(1,\chi_{10})|^2 = \prod_p \left|1 - \frac{\chi_{10}(p)}{p}\right|^{-2} \tag{5.29}$$
$$= \prod_{\ell(p)=0,3} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \prod_{\ell(p)=1,2,4,5} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-1}.$$

Par un calcul similaire à celui effectué en (4.18)–(4.21), via (5.18) et (5.29) on a

$$\begin{aligned}\prod_{j\in J'} D_j &= \prod_{\ell(p)=1,2,4,5}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{30}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-20}\\ &= \left(\frac{31}{30}\right)^{20}\prod_{\ell(p)=1,2,4,5}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{10}\prod_{\ell(p)=0,3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-20}\\ &= \left(\frac{31}{30}\right)^{20}|L(1,\chi_{10})|^{20}\prod_{\ell(p)=1,2,4,5}\left(1-\frac{1}{p^3}\right)^{10},\end{aligned}$$

ce qui, avec (5.27), fournit la valeur de κ annoncée en (5.4).

Pour calculer numériquement κ, on peut utiliser (5.27) en calculant $D_j = P(31, j)$ par (2.10) et la méthode de [5] exposée au paragraphe 2 ; on obtient $\prod_{j\in J'} D_j = 108.47392400\ldots$ On peut aussi calculer par (2.18) le produit $\prod_{\ell(p)=1,2,4,5}(1-1/p^3) = 0.9509194046\ldots$ et appliquer (5.4). La valeur de $L(1,\chi_{10}) = 1.2406711858\ldots + (0.18543000768\ldots)i$ est calculée par les formules théoriques de [4, p. 376]. Comme $\Gamma(2/3) = 1.3541179394\ldots$, on obtient la valeur approchée annoncée en (5.4).

6. Une autre application du théorème 1 avec $k = 31$. Nous allons donner, comme illustration du théorème 1, la démonstration du théorème 4 ci-dessous qui est énoncé sans preuve dans l'article [14].

Théorème 4. *Soient k et j deux entiers positifs premiers entre eux. Soit ϱ_j la fonction multiplicative définie par*

$$\varrho_j(p) = \begin{cases} 1 & si\ p \equiv j \pmod k,\\ 0 & sinon,\end{cases} \tag{6.1}$$

et $\varrho_j(p^\alpha) = 0$ pour tout nombre premier p et tout exposant $\alpha \ge 2$. Soit $\omega(n) = \sum_{p\mid n} 1$ et z un nombre complexe. On pose

$$U(x,z) = \sum_{n\le x}\varrho_j(n) z^{\omega(n)}. \tag{6.2}$$

Alors, il existe une constante réelle C positive telle que, lorsque $x\to\infty$, on a

$$\begin{aligned}U(x,z) \sim \frac{C^z}{\Gamma(z/\varphi(k))}&\left(\prod_{p\equiv j\ (\mathrm{mod}\, k)}\left(1+\frac{z}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{z}\right)\\ &\times\frac{x}{(\log x)^{1-z/\varphi(k)}}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Démonstration. On applique le théorème 1 avec $b = 1$, $\xi = \xi_0$, $J = \{j\}$, $g(n) = n$, $a(n) = \varrho_j(n) z^{\omega(n)}$, $b(n) = |z|^{\omega(n)}$ et l'on a, pour $\Re s > 1$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_j(n) z^{\omega(n)}}{n^s} = \prod_{p \equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)} \left(1 + \frac{z}{p^s} + \frac{z}{p^{2s}} + \dots\right)$$
$$= \prod_{p \equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)} \left(1 + \frac{z}{p^s - 1}\right) = H(s) \prod_{p \equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-z}$$

avec

$$H(s) = \prod_{p \equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)} \left(1 + \frac{z}{p^s - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{z}.$$

En utilisant le lemme 5, on démontre, de la même façon que l'on a démontré (4.8), que, pour z fixé, $H(s)$ et

$$H^+(s) = \prod_p \left(1 + \frac{|z|}{p^s - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{|z|}$$

sont bornés pour $\Re s \geq \sigma_0 > 1/2$ et donc sont holomorphes pour $\Re s > 1/2$; on a $f_j(s) = z$, $f^+(s) = |z|$. On peut donc appliquer le théorème 1 qui prouve (6.3) avec

$$C = P(k, j)^{-z/\varphi(k)},$$

où $P(k, j)$ est défini en (1.10).

Dans l'exemple donné dans [14], $k = 31$, $j = 5$, $z = 1$; en observant que $\left(1 + \frac{1}{p-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1$ et en calculant $P(31, 5) = 0.0070347769\dots$ par (2.10), on obtient

$$U(x, 1) \sim \frac{C}{\Gamma(1/30)} \frac{x}{(\log x)^{29/30}}, \qquad x \to \infty,$$

avec $C = P(31, 5)^{-1/30} = 1.1796639896\dots$ et $C/\Gamma(1/30) = 0.4005000206\dots$

RÉFÉRENCES

[1] R. Balasubramanian and K. Ramachandra, *On the number of integers such that $nd(n) \leq x$*, Acta Arith. 49 (1988), 313–322.

[2] M. Balazard, *Sur la répartition des valeurs de certaines fonctions arithmétiques additives*, thèse, Univ. de Limoges, 1987.

[3] F. Ben Saïd and J.-L. Nicolas, *Even partition functions*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 46, 2002, B46i (http://www.euler.univ-lyon1.fr/home/slc/).

[4] Z. I. Borevitch et I. R. Chafarevitch, *Théorie des Nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[5] H. Cohen, *High precision computation of Hardy–Littlewood constants*, prépublication, http://www.math.u-bordeaux.fr/~cohen/.

[6] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 2nd ed., Grad. Texts in Math. 74, Springer, 1980.

[7] H. Delange, *Sur des formules de Atle Selberg*, Acta Arith. 19 (1971), 105–146.
[8] W. J. Ellison et M. Mendès-France, *Les nombres premiers*, Publ. Inst. Math. Univ. de Nancago 9, Hermann, Paris, 1975.
[9] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig ; 3-ème édition, Chelsea, New York, 1974.
[10] Y. K. Lau and J. Wu, *Sums of some multiplicative functions over a special set of integers*, Acta Arith. 101 (2002), 365–394.
[11] M. Naimi et H. Smida, *Sur la fonction sommatoire des coefficients de certaines séries de Dirichlet*, Comptes-rendus du quatrième Colloque de la Société Mathématique de Tunisie (Tabarka, 1996).
[12] —, —, *Fonctions sommatoires sur des ensembles particuliers d'entiers*, en préparation.
[13] J.-L. Nicolas, *On the parity of generalised partition functions II*, Period. Math. Hungar. 43 (2001), 177–189.
[14] J.-L. Nicolas and A. Sárközy, *On the parity of generalized partition functions*, in: Number Theory for the Millennium, Vol. III, M. A. Bennett *et al.* (eds.), 2002, 55–72.
[15] A. Selberg, *Note on the paper by L. G. Sathe*, J. Indian Math. Soc. 18 (1954), 83–87.
[16] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Soc. Math. France, Paris, 1995 ; *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*, Cambridge Stud. Adv. Math. 46, Cambridge Univ. Press, 1995.
[17] G. Tenenbaum et J. Wu, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Soc. Math. France, Paris, 1996.
[18] E. Wirsing, *Über die Zahlen, deren Primteiler einer gegebenen Menge angehören*, Arch. Math. (Basel) 7 (1956), 263–272.

Faculté des Sciences de Monastir
Avenue de l'environnement
5000, Monastir, Tunisie
E-mail: Fethi.BenSaid@fsm.rnu.tn

Institut Girard Desargues, UMR 5028
Bât. Doyen Jean Braconnier
Université Claude Bernard (Lyon 1)
21 Avenue Claude Bernard
F-69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail: jlnicola@in2p3.fr

Received 10 April 2003;
revised 5 November 2003 (4333)