1. Présentation générale

1.1. Introduction et notations. Ce travail est consacré à l'étude des règles de somme approchée de sous-différentiels de fonctions semi-continues inférieurement (sci), et des propriétés de reconstitution des sous-différentiels de type Fréchet, ainsi qu'à leurs relations avec d'autres propriétés de base comme : les conditions nécessaires d'optimalité, les propriétés de contrôle par la pente forte, la sous-différentiabilité dense des fonctions sci, etc.

Les règles de somme approchée de sous-différentiels de fonctions sci sont au cœur de l'analyse non lisse et de l'analyse variationnelle. De nombreux résultats existent pour des sommes approchées fortes et faibles-$*$, concernant des sous-différentiels spécifiques, sur des espaces particuliers, avec des conditions de qualification variées (voir ci-dessous un rappel de quelques-un des ces résultats). Notre but ici est de traiter ce sujet de façon unifiée en utilisant : une topologie quelconque sur le dual pour contrôler l'approximation, un sous-différentiel abstrait, un espace adapté au sous-différentiel et une condition de qualification unique qui tient compte de l'approximation désirée.

Pour être plus précis, étant donnés X un espace de Banach muni de la topologie associée à la norme, X^* son dual muni d'une topologie τ^*, $\{f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \mid i = 1, \ldots, k\}$ une famille de fonctions sci — non nécessairement différentiables ou convexes — et ∂ un sous-différentiel, notre travail s'articule autour des problèmes suivants :

Problème 1. On cherche des conditions sur le triplet $(X, \partial, \{f_i\}_{i=1}^k)$ pour que l'inclusion ci-dessous, notée $(\sum)_\partial^{\tau^*}$, soit réalisée :

$$\partial\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) \subset \tau^*\text{-}\limsup_{x_i \to_f x} \sum_{i=1}^k \partial f_i(x_i),$$

où $\tau^*\text{-}\limsup_{x_i \to_{f_i} x} \sum_{i=1}^k \partial f_i(x_i)$ est l'ensemble des τ^*-limites de suites généralisées de la forme $(x_{1,\nu}^* + \ldots + x_{k,\nu}^*)_\nu$ pour lesquelles il existe des suites généralisées $(x_{i,\nu})_\nu \subset X$, $i = 1, \ldots, k$, telles que $x_{i,\nu}^* \in \partial f_i(x_{i,\nu})$, $x_{i,\nu} \to x$ et $f_i(x_{i,\nu}) \to f_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$.

Problème 2. On s'intéresse aux propriétés de reconstitution de trois sous-différentiels, celui de Fréchet ∂^F (cf. page 54), le sous-différentiel de Gateaux-convexe $\partial^{G_{\mathrm{cx}}}$ (cf. page 54) et le sous-différentiel approché analytique de Ioffe ∂_a^I (cf. page 58), et ce, à l'aide de ∂. Plus précisément, on voudrait savoir sur quels espaces l'une ou l'autre des inclusions (a), (b) ou (c) est réalisée et si ces inclusions caractérisent une classe d'espaces :

(a) $\partial^F f(x) \subset \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x' \to_f x} \partial f(x')$,

(b) $\partial^{G_{\rm cx}} f(x) \subset w^*\text{-}\limsup_{x' \to_f x} \partial f(x')$,

(c) $\partial_a^I f(x) \subset \; w^*\text{-}\limsup_{x' \to_f x} \partial f(x')$.

De manière à ce que les problèmes 1 et 2 puissent se déduire d'une même formulation globale, pour un sous-différentiel ∂ donné, nous nous attacherons principalement à travailler avec des règles de somme approchée mixtes, notées $(\sum)^{\tau^*}_{\partial^\diamond,\partial}$, faisant intervenir deux sous-différentiels différents $\partial^\diamond$ et ∂ :

$$\partial^\diamond\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i\Big)(x) \subset \tau^*\text{-}\limsup_{x_i \to_f x} \sum_{i=1}^{k} \partial f_i(x_i)$$

où $\partial^\diamond$ représente le sous-différentiel de Fréchet, de Gateaux-convexe ou celui de Ioffe.

On trouvera en annexe les définitions de tous les sous-différentiels cités.

Notations. Tout au long de cet article et sauf mention explicite du contraire :

X *désigne*	un espace vectoriel normé muni de la topologie associée à la norme $\|\cdot\|$;
X^*	son dual topologique ;
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	le produit de dualité sur $X^* \times X$;
$\mathbb{B}$	la boule unité fermée de X, $\mathbb{B} := \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$;
$\mathbb{B}^*$	la boule unité fermée de X^*, $\mathbb{B}^* := \{x^* \in X^* \mid \|x^*\| \le 1\}$;
$B_\lambda(x_0)$	la boule fermée de centre x_0, de rayon $\lambda > 0$;
$\mathrm{SCI}(X)$	l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sci sur X ;
$\mathrm{SCI}(x)$	l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sci au voisinage de $x \in X$;
$\mathrm{dom}\, f$	le domaine de la fonction f, $\mathrm{dom}\, f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$;
$\mathrm{epi}\, f$	l'épigraphe de la fonction f, $\mathrm{epi}\, f := \{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \le \alpha\}$;
$r_{B_\lambda(x_0)}(f)$	l'infimum uniforme sur la boule $B_\lambda(x_0)$ de la fonction f, $r_{B_\lambda(x_0)}(f) := \sup_{\varepsilon>0} \inf_{y \in B_{\lambda+\varepsilon}(x_0)} f(y)$;
$\partial f(x)$	le sous-différentiel de la fonction f au point x ;
p_A	la fonction d'appui de $A \subset X$, $p_A : x^* \in X^* \mapsto p_A(x^*) := \sup_{v\in A} \langle x^*, v\rangle$;
d_A	la fonction distance à $A \subset X$, $d_A : x \in X \mapsto d_A(x) := \inf_{a \in A} \|x - a\|$;
$\mathrm{dist}(A,x)$	la valeur $d_A(x)$;
δ_A	la fonction indicatrice de $A \subset X$, $\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ +\infty & \text{sinon} ; \end{cases}$
f_A	la fonction restriction de f à l'ensemble $A \subset X$, $f_A := f + \delta_A$;
E_A	l'espace vectoriel fermé engendré par l'ensemble $A \subset X$;
$t \searrow 0$	$t \to 0$, $t > 0$;
$x \to_f x_0$	la convergence graphique : $x \to x_0$ et $f(x) \to f(x_0)$;
ν	l'indice des suites généralisées (familles filtrées) ;
n	l'indice des suites.

On considère aussi les limites supérieures suivantes :

$$\tau^*\text{-}\limsup_{x_i \to_{f_i} x} \sum_{i=1}^{k} \partial f_i(x_i) := \left\{ \begin{array}{l} x^* \in X^* \mid \exists (x_{i,\nu}, x^*_{i,\nu})_\nu \subset \partial f_i,\ i = 1, \dots, k, \text{ avec} \\ \qquad \text{(i)} \qquad x_{i,\nu} \to x,\ f_i(x_{i,\nu}) \to f_i(x)\,; \\ \qquad \text{(ii)}_{\tau^*}\ x^*_{1,\nu} + \dots + x^*_{k,\nu} \xrightarrow{\tau^*} x^* \end{array} \right\}$$

$$\tau^*\text{-}\limsup_{x_i \overset{+}{\to} x} \sum_{i=1}^{k} \partial f_i(x_i) := \left\{ \begin{array}{l} x^* \in X^* \mid \exists (x_{i,\nu}, x^*_{i,\nu})_\nu \subset \partial f_i,\ i = 1, \dots, k, \text{ avec} \\ \qquad \text{(i)} \qquad x_{i,\nu} \to x,\ f_i(x_{i,\nu}) \to f_i(x)\,; \\ \qquad \text{(ii)}_{\tau^*}\ x^*_{1,\nu} + \dots + x^*_{k,\nu} \xrightarrow{\tau^*} x^*\,; \\ \qquad \text{(iii)} \quad \operatorname{diam}(x_{1,\nu}, \dots, x_{k,\nu})\, \|x^*_{i,\nu}\| \to 0\,; \\ \qquad \text{(iv)} \quad \langle x^*_{1,\nu} + \dots + x^*_{k,\nu}, x_{i,\nu} - x \rangle \to 0 \end{array} \right\}.$$

Pour $\tau^* := \|\cdot\|_*$, les fermetures topologiques ci-dessus sont les mêmes que les fermetures séquentielles, plus précisément, on peut remplacer les suites généralisées $(x_{i,\nu}, x^*_{i,\nu})_\nu$ par des suites $(x_{i,n}, x^*_{i,n})_n$ dans les définitions sans changer les ensembles. Il s'ensuit que dans ce cas l'ensemble déterminé par les assertions (i) à (iv) reste le même si l'on supprime l'assertion (iv).

1.2. Historique sur la somme de sous-différentiels de fonctions. Le problème 1 peut se traduire ainsi : étant donné un élément x^* dans le sous-différentiel $\partial(f_1 + \dots + f_k)(x)$ de la somme de k fonctions f_i, on cherche des conditions sur le triplet $(\partial, X, \{f_i\}_{i=1}^k)$ pour que x^* soit aussi proche que voulu d'une somme d'éléments $x_1^* + \dots + x_k^*$, où chaque x_i^* appartient au sous-différentiel $\partial f_i(x_i)$ de f_i en un point x_i proche de x.

L'un des premiers résultats concernant ce problème est celui de Ioffe [44], où $\partial := \partial^H$ est le sous-différentiel de Hadamard (cf. page 54) :

Théorème 1.1 (Ioffe [44, Theorem 2]). *Soient X un espace de dimension finie et $f_1, \dots, f_k$ des fonctions sci près de x. Alors*

$$\partial^H (f_1 + \dots + f_k)(x) \subset \bigcap_{\delta > 0} \bigcup_{x_i \in U(f_i, x, \delta)} (\partial^H f_1(x_1) + \dots + \partial^H f_k(x_k) + \delta \mathbb{B}^*),$$

où $U(f_i, x, \delta) = \{z \mid \|z - x\| \leq \delta,\ f_i(z) - f_i(x) \leq \delta\}$, $i = 1, \dots, k$.

En d'autres termes, pour tout $x^* \in \partial^H (f_1 + \dots + f_k)(x)$ et tout $\delta > 0$, il existe $x_1, \dots, x_k$ tels que $\|x_i - x\| \leq \delta$, $f_i(x_i) \leq f_i(x) + \delta$ et $x_i^* \in \partial^H f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, k$, tels que

$$\|x_1^* + \dots + x_k^* - x^*\| \leq \delta.$$

Dans [44], la notion de “proximité” des éléments du dual n'a guère d'importance puisque, l'espace X de départ étant de dimension finie, toutes les topologies d'espace vectoriel coïncident sur X et sur X^*. Lorsque l'espace X est de dimension infinie, il faut préciser la topologie à laquelle sera rattachée la notion de proximité. Sur X, on considérera toujours la topologie de la norme. Sur son dual topologique X^*, on s'intéressera essentiellement à la topologie de la norme et à la topologie faible-$*$. Nous appellerons *règle de somme approchée forte* toute règle de calcul faisant intervenir l'inclusion $(\sum)_\partial^{\tau^*}$ avec pour τ^* la topologie de la norme sur X^*, on la notera alors $(\sum)_\partial^{\|\cdot\|_*}$. Et nous appellerons *règle de somme approchée faible* toute règle de calcul faisant intervenir l'inclusion $(\sum)_\partial^{\tau^*}$ avec pour τ^* la topologie faible-$*$ sur X^*, on la notera alors $(\sum)_\partial^{w*}$. (Cette distinction "fort/faible" apparaît déjà dans l'article de Ioffe–Penot [53], où l'on retrouve les expressions "Calcul flou faible" et "Calcul flou fort".)

La preuve du théorème 1.1 de Ioffe est basée sur des arguments d'intégration conjugués à l'expression de la dérivée directionnelle de Hadamard. Un autre résultat utilise le même type d'approche mais cette fois pour le sous-différentiel proximal (cf. page 53) noté ∂^P. Il s'agit du théorème 2 de Ioffe–Rockafellar [54] pour lequel on a l'inclusion $(\sum)_{\partial^P}^{\|\cdot\|_*}$ sur un espace de Hilbert et pour des fonctions $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathrm{SCI}(x)$, $x \in X$, vérifiant la condition de qualification suivante :

(ULC) il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour toute famille de k suites $\{x_{in}\}$, $i = 1, \ldots, k$, $n = 1, 2, \ldots$, appartenant à la δ-boule autour de x et telle que $\|x_{in} - x_{jn}\| \to 0$ quand $n \to \infty$, il existe une suite $\{u_n\}$ d'éléments de cette boule vérifiant $\|u_n - x_{in}\| \to 0$ et

$$\liminf_{r\to\infty} \sum_i (f_i(x_{in}) - f_i(u_n)) \geq 0.$$

Bien que les démonstrations des théorèmes de Ioffe [44, Theorem 2] et Ioffe–Rockafellar [54, Theorem 2] soient basées sur le même genre de raisonnement, le second théorème ne constitue pas pour autant une généralisation du premier. Pour avoir une extension du théorème 1.1, on peut citer par exemple le théorème 1.2 ci-dessous où ∂_ε^F désigne le sous-différentiel canonique de Fréchet à ε-près avec $\varepsilon \geq 0$ (cf. page 59) :

THÉORÈME 1.2 (Fabian [34, Theorem 2]). *X est un espace d'Asplund* ([1]) *(si et) seulement s'il est fiable dans le sens suivant : pour tout $\varepsilon \geq 0$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$, pour toutes fonctions $f_1, \ldots, f_k : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $k \geq 2$, et pour tout $z \in X$ tels que f_1 est sci et $f_2, \ldots, f_k$ sont lipschitziennes dans un voisinage de z, l'inclusion suivante est vérifiée*

$$\partial_\varepsilon^F (f_1 + \ldots + f_k)(z) \subset \bigcup \{\, \partial^F f_1(z_1) + \ldots + \partial^F f_k(z_k) \mid z_i \in z + \delta\mathbb{B},\ |f_i(z_i) - f_i(z)| < \delta,\ i = 1, \ldots, k\} + (\varepsilon + \gamma)\mathbb{B}^*.$$

Cet énoncé fait suite à certains travaux de Ioffe sur les sous-différentiels à ε-près [42, 46]. Nonobstant le choix de ne pas s'intéresser dans cet article aux sous-différentiels à ε-près (sauf ponctuellement pour le sous-différentiel de Fréchet) il est important de faire une parenthèse sur l'étude entreprise par Ioffe dans les années 80. En fait, dans l'article [42], l'auteur prouve que :

— Si X est un espace de Banach possédant une fonction bosse ([2]) Fréchet différentiable, alors pour toutes fonctions f_1, $f_2 \in \mathrm{SCI}(X)$, tout $x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$ et tout $\varepsilon > 0$, l'inclusion faible $(\sum)_{\partial_\varepsilon^F}^{w^*}$ est vérifiée avec le sous-différentiel de Fréchet à ε-près.

— Si X est un espace de Banach possédant une fonction bosse localement lipschitzienne et Gateaux différentiable, alors pour toutes fonctions f_1, $f_2 \in \mathrm{SCI}(X)$, tout $x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$ et tout $\varepsilon > 0$, l'inclusion faible $(\sum)_{\partial_\varepsilon^H}^{w^*}$ est vérifiée avec le sous-différentiel de Hadamard à ε-près (cf. pages 54, 59).

([1]) Un espace de Banach X est dit *espace d'Asplund* si toute fonction convexe continue définie sur un sous-ensemble ouvert convexe non vide D de X est Fréchet différentiable sur un sous-ensemble dense de D.

([2]) Fonction à valeurs réelles positives et à support borné.

Il fallut attendre les travaux de Fabian [34], pour avoir des résultats de somme en dimension infinie valant aussi pour les sous-différentiels exacts (théorème 1.2 avec $\varepsilon = 0$, 1989). C'est à la lumière du principe variationnel de Borwein–Preiss [11] que ceci fut rendu possible. Notons que le théorème de Ioffe–Rockafellar [54, theorem 2] utilise également ce principe.

Après cette longue parenthèse, on précise que Ioffe, dans [49], montre que "le sous-différentiel de Fréchet possède une sorte de calcul flou similaire au calcul du sous-différentiel de Hadamard dans $\mathbb{R}^n$" [44]. Ainsi prouve-t-il que, sur un espace de Banach possédant une norme Fréchet différentiable, pour tout couple de fonctions sci près de x, dont une est lipschitzienne près de x, l'inclusion forte $(\sum)_{\partial^F}^{\|\cdot\|_*}$ est vérifiée.

Six ans plus tard Deville–El Haddad dans [27, Theorem 2.1] étendent ce résultat aux espaces de Banach possédant une fonction bosse lipschitzienne $\mathcal{C}^1$ et allègent les contraintes sur les fonctions en considérant un couple de fonctions $f_1, f_2 \in \mathrm{SCI}(X)$ dont l'une est uniformément continue. Sous ces hypothèses et grâce au principe variationnel de Deville–Godefroy–Zizler [28], ils montrent que la règle approchée forte $(\sum)_{D^F}^{\|\ \|_*}$ est vérifiée avec le sous-différentiel de viscosité de Fréchet. Notons que ce dernier résultat de somme ne peut être considéré comme une généralisation du théorème 1.2 puisque l'on ne sait pas à ce jour si un espace d'Asplund possède nécessairement une fonction bosse lipschitzienne.

Nous nous arrêtons ici pour les extensions du théorème 1.1, en termes de règle de somme approchée forte.

Avant d'évoquer d'autres extensions du théorème 1.1, cette fois en termes d'approximation faible, on tient à préciser que les règles de somme approchée *fortes* rencontrées dans la littérature concernent exclusivement de petits sous-différentiels (proximal, Fréchet viscosité, Fréchet canonique). L'inclusion

$$\partial^H(f_1 + \ldots + f_k)(x) \subset \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\varepsilon>0} \{\, \partial^H f_1(x_1) + \ldots + \partial^H f_k(x_k) + \delta\mathbb{B}_{X^*} \mid \|x_i - x\| < \varepsilon,\ |f_i(x_i) - f_i(x)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\}$$

du sous-différentiel de Hadamard de la somme de fonctions sci dans la somme approchée forte du sous-différentiel de chaque fonction est un problème ouvert (même sur un espace de Banach séparable et indépendamment de la condition de qualification considérée).

C'est pourquoi, pour fournir des résultats de somme approchée, en dimension infinie, pour des sous-différentiels tels que celui de Hadamard ou de Ioffe, certains auteurs ont muni l'espace dual X^* de la topologie faible-$*$.

Pour autant, comme dans le cas fort, selon le choix du sous-différentiel, il convient de se placer sur un espace approprié. Par exemple, pour le sous-différentiel de Hadamard $\partial := \partial^H$, la règle de somme approchée faible $(\sum)_{\partial}^{w^*}$ est (au mieux) démontrée sur un espace admettant une fonction bosse lipschitzienne et Gateaux différentiable. En revanche, cette règle $(\sum)_{\partial}^{w^*}$ est vérifiée sur un espace de Banach quelconque, pour le sous-différentiel approché géométrique de Ioffe $\partial := \partial_g^I$. Voir [34, 43, 44, 50, 53] pour les références.

Les règles approchée faibles ne présentent pas seulement l'avantage de recouvrir certains *gros* sous-différentiels. On constate en effet — et surtout — qu'aucune *contrainte de qualification* sur les fonctions (par exemple : toutes les fonctions sauf une sont localement lipschitziennes) n'est nécessaire à leur obtention.

C'est, peut-être, ce qui motiva Fabian [34], Borwein–Zhu [15] et Ioffe [50] à s'intéresser aux règles de somme approchée faibles également pour les "petits" sous-différentiels.

On peut, par ailleurs, signaler que même dans le cadre de l'analyse convexe, les règles de somme approchée sans condition de qualification ont récemment suscité de nombreux travaux, vu l'intérêt de leurs applications (voir par exemple [2, 40, 69, 70, 71, 64]).

Le résultat ci-dessous est mis en exergue puisqu'il apporte une variante aux énoncés classiques de sommes approchée faibles recensés jusqu'ici.

THÉORÈME 1.3 (Borwein–Zhu [15, Theorem 2.10]). *Soient β une bornologie* (3) *convexe et X un espace de Banach admettant une norme équivalente β-régulière. Soient $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions sci et $x \in \bigcap_{i=1}^k \operatorname{dom} f_i$. Alors, pour tout $x^* \in D^\beta(\sum_{i=1}^k f_i)(x)$, $\varepsilon > 0$, et tout voisinage faible-$*$ V de 0 dans X^*, il existe $x_i \in x + \varepsilon\mathbb{B}$, $x_i^* \in D^\beta f_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, k$, tels que $|f_i(x_i) - f_i(x)| < \varepsilon$, $\|x_i^*\| \operatorname{diam}(x_1, \ldots, x_k) < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, k$, et*

$$x^* \in \sum_{i=1}^k x_i^* + V.$$

(On précise que ∂^β et D^β désignent respectivement les sous-différentiels canonique et de viscosité associés à la bornologie β, cf. page 54.)

Notons que la règle sous-jacente à ce résultat n'est pas une véritable règle faible puisqu'un contrôle en norme apparaît sur chaque élément x_i^* de $D^\beta f_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

Par ailleurs, signalons que l'on trouve aussi dans [15] un théorème faisant intervenir une règle de somme mixte (il s'agit d'une règle de somme avec deux sous-différentiels différents). En fait, il est démontré que si l'on remplace dans le théorème 1.3 l'expression "$x^* \in D^\beta(\sum_{i=1}^k f_i)(x)$" par "$x^* \in \partial^\beta(\sum_{i=1}^k f_i)(x)$", on obtient la même conclusion. Ce nouvel énoncé constitue une généralisation du théorème 1.3, puisque $D^\beta \subset \partial^\beta$ et que cette inclusion est souvent stricte.

Avant de clore cette section, on cite un théorème de somme dans le cadre important des fonctions convexes. Il s'agit d'une formule, établie par Thibault [70], pour le sous-différentiel de la somme de deux fonctions convexes sci. Elle fut motivée par les travaux de Hiriart-Urruty–Phelps [40] et Attouch–Baillon–Théra [2]. On en retient la forme suivante :

THÉORÈME 1.4 (Thibault [70, Theorem 2.1]). *Soient X un espace de Banach réflexif et f_1, $f_2 : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des fonctions convexes sci et propres. Alors pour tout $\overline{x} \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$,*

$$\partial(f_1 + f_2)(\overline{x}) = \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{\substack{f_i - \langle\rangle \\ u_i \to \overline{x}}} [\partial f_1(u_1) + \partial f_2(u_2)],$$

où $\limsup_{f_i - \langle\rangle,\, u_i \to \overline{x}} [\partial f_1(u_1) + \partial f_2(u_2)]$ est l'ensemble des limites fortes de suites de la forme $(x_{1,n}^* + x_{2,n}^*)$ pour lesquelles il existe $(x_{i,n})_n$ telles que $x_{i,n}^* \in \partial f_i(x_{i,n})$, $x_{i,n} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, $f_i(x_{i,n}) - \langle x_{i,n}^*, x_{i,n} - \overline{x}\rangle \to f_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$.

Ce dernier théorème pourrait troubler la tendance constatée : les calculs forts requièrent une condition de qualification alors que les calculs faibles n'en nécessitent pas.

(3) Famille de bornés de X vérifiant certaines propriétés ; cf. page 53.

En effet, on y trouve une formulation de somme approchée *forte* sans condition de qualification apparente sur les fonctions.

Cette liste de résultats, bien que non exhaustive, témoigne de l'intérêt porté aux règles de calcul approché pour le sous-différentiel de la somme de fonctions sci. Dans la pratique, elles suffisent (par rapport aux règles de somme exactes) à la résolution de problèmes dans des domaines tels que l'optimisation, le contrôle optimal, l'analyse numérique, etc. Pour des détails sur ces applications, on pourra se référer à [2], [3, 4], [14, 15, 16], [21, 23], [27], [44, 45], [56], [68], [70].

Pour notre part, nous nous concentrerons sur la compréhension de ces règles approchée, que nous résumons dans les schémas suivants :

Fabian (1989)	*Ioffe–Rockafellar (1994)*	*Deville–El Haddad (1996)*	*Thibault (1997)*
$X =$ **Asplund**	$X =$ **Hilbert**	$X =$ **avec fct. bosse lip.** C^1	$X =$ **réflexif**
$\partial := \partial^F$	$\partial := \partial^P$	$\partial := D^F$	$\partial := \partial^{Fen}$
$\{ f_i \} : k-1$ **loc. lip.**	$\{ f_i \}$: **(ULC)**	$\{ f_i \} : k-1$ **loc. unif. ont.**	$\{ f_i \}$: **cxes**
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$

$$\left(\sum\right)_{\partial}^{\|\cdot\|_*}$$

Borwein–Zhu (1996)	*Thibault (1995, 2000)* *Penot (1996)*
$X =$ **avec renorme** β**-diff.**	$X =$ **arbitraire**
$\partial := \partial^\beta$	$\partial := \partial^{Fen}$
	$\{ f_i \}$: **cxes**
$\Downarrow$	$\Downarrow$

$$\left(\sum\right)_{\partial}^{w^{*+}}$$

On utilise la notation w^{*+} pour exprimer qu'ici, la convergence considérée sur X^* est plus forte que la convergence associée à la topologie faible-$*$, notée w^*. Nous ne rentrerons pas dans les détails, à ce stade de notre exposé.

1.3. Constats et objectifs sur la somme de sous-différentiels

• Il est clair que certains résultats de somme établis après le théorème 1.1 ont permis la généralisation de ce dernier. Dans le sens suivant : premièrement, ils traitent des cas non envisagés (autres sous-différentiels, autres types d'espaces) ; deuxièmement, ils fournissent une démonstration différente (autre point de vue).

Néanmoins, on se rend compte de la difficulté à hiérarchiser l'ensemble de ces énoncés, et ceci, pour au moins deux raisons :

— On ne peut déduire d'un énoncé portant sur un sous-différentiel donné ∂, un autre énoncé pour un sous-différentiel ∂' avec $\partial' \neq \partial$. Au mieux, on peut espérer adapter la démonstration à ce nouveau sous-différentiel ∂'.

— Même lorsque l'on travaille avec des sous-différentiels identiques ou de même nature, les théorèmes existants ne se recoupent pas forcément. C'est le cas par exemple du théorème 2.1 de Deville–El Haddad [27], qui, quoique proposé sept ans après le théorème 1.2, ne permet pas pour autant de le retrouver.

Enfin, on ne s'attardera pas sur l'absence de lien entre les règles fortes et les règles faibles, puisqu'en général, dans la littérature, elles sont traitées de façon indépendante.

Sur ce premier point, notre objectif sera de proposer une approche unificatrice visant à intégrer la quasi-totalité des résultats connus sur les règles de somme approchée.

• Concernant les conditions de qualification, les efforts de ces dernières années se sont orientés vers un affaiblissement des contraintes sur les fonctions. À titre d'exemple, on est passé de la lipschitziannité locale (Fabian), à l'uniforme continuité locale (Deville–El Haddad), puis à la condition séquentielle uniforme (Ioffe–Rockafellar, Borwein–Ioffe) encore équivalente à la condition métrique générale (Ioffe).

Mais quel rapport ces conditions entretiennent-elles avec l'opération de somme désirée ?

Pourquoi les fonctions sont-elles assujetties à des contraintes pour les règles fortes et pas pour les règles faibles ?

Qu'en est-il du cas convexe ? Comment expliquer le théorème 1.4 de Thibault ?

À ces questions, nous apporterons des éléments de réponse, notamment une seule condition de qualification qui conduit aux trois types de résultats : fort, faible, convexe.

• Constatons pour finir que divers types d'espaces sont utilisés pour obtenir les règles de somme et que, par ailleurs, il n'apparaît guère possible de caractériser ces espaces au moyen des règles de somme elles-mêmes ; exception faite du théorème 1.2 de Fabian et du théorème 4 dans Ioffe [50].

Ici, on cherchera systématiquement à *caractériser* les espaces sur lesquels les règles sont vraies. Ceci débouchera en particulier sur une nouvelle caractérisation des espaces d'Asplund.

1.4. Reconstitution (reconstruction) de sous-différentiels. Notons $\partial^\diamond$ l'un des sous-différentiels de Fréchet ∂^F, de Gateaux-convexe $\partial^{G_{\mathrm{cx}}}$ ou de Ioffe ∂^I_a. Le problème 2 peut se traduire ainsi : étant donné un élément x^* dans le sous-différentiel $\partial^\diamond f(x)$ d'une fonction f en un point x, on cherche des conditions sur le couple (X, ∂) pour que x^* soit aussi proche que voulu d'un élément $\overline{x}^*$ qui appartient au sous-différentiel $\partial f(\overline{x})$ où $\overline{x}$ est proche de x.

L'une des sources de motivation pour ce problème fut le théorème 1.5 ci-dessous, dû à Ioffe [48], qui exprime la reconstitution du sous-différentiel ∂^I_a comme fermeture topologique — sur $X \times X^*$ muni de la topologie $\|\cdot\| \times w^*$ — de n'importe quel sous-différentiel ∂ vérifiant certains axiomes :

Théorème 1.5 (Ioffe [48, Theorem 8.1]). *Supposons que ∂ soit un sous-différentiel sur la classe des fonctions sci tel que :*

(i) $0 \in \partial f(x)$ *si f atteint un minimum local en x ;*

(ii) $\partial f(x)$ *est le sous-différentiel au sens de l'analyse convexe si* f *est convexe continue* ;

(iii) $\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$ *si* f *est lipschitzienne près de* x *et* g *est convexe continue.*

Alors

$$\partial_a^I f(x) = \partial_G f(x) = \partial_g^I f(x) \subset w^*\text{-}\limsup_{u \to x} \partial f(u), \tag{1}$$

pour toute fonction f *qui est lipschitzienne continue en* x.

En particulier, si aussi

(iv) *la multi-application* $u \mapsto \partial f(u)$ *est semi-continue supérieurement sur la classe des fonctions localement lipschitziennes,*

alors

$$\partial_a^I f(x) \subset \partial f(x)$$

pour toute fonction lipschitzienne f.

De plus, si on ajoute à (i)–(iv),

(v) $(-\beta, x^*) \in \partial\, \mathrm{dist}(\mathrm{epi}\, f, (f(x), x))$ *et* $\beta > 0 \Rightarrow x^*/\beta \in \partial f(x)$,

alors

$$\partial_g^I f(x) \subset \partial f(x)$$

pour toute fonction sci f.

Et, finalement, si rajouté à (i)–(v), ∂ *est à valeurs* (*faible-*$*$) *fermées, alors*

$$\partial_G f(x) \subset \partial f(x) \tag{2}$$

pour toute fonction sci f, *dès que*

(vi) $\partial f(x) = \{x^* \mid (-1, x^*) \in N(\mathrm{epi}\, f, (f(x), x))\}$

où $N(S, x) = \partial \chi_S(x)$ (S *est fermé et* $x \in S$) *est le cône normal associé à* ∂.

Ce théorème exprime la minimalité du sous-différentiel ∂_a^I, pour les fonctions localement lipschitziennes, dans la classe des sous-différentiels vérifiant les axiomes (i)–(iv). Cette classe contient les sous-différentiels de Clarke ∂^C, de Michel–Penot ∂^{MP}, le G-sous-différentiel ∂^G et le sous-différentiel géométrique de Ioffe ∂_g^I, mais aussi les fermetures, pour la topologie $\|\,.\,\| \times w^*$, des petits sous-différentiels tels que le Fréchet ∂^F et le proximal ∂^P sur des espaces adaptés.

Notons que lorsque les fonctions ne sont pas lipschitziennes, les axiomes (v) et (vi), exprimant la relation entre sous-différentiel et cône normal, sont rajoutés pour avoir le résultat.

Concernant ce problème 2(c) de reconstitution, nous établirons un énoncé unique (voir corollaire 6.3) qui mettra en évidence l'espace X approprié au sous-différentiel ∂ sur lequel la reconstitution de ∂_a^I est vraie pour les fonctions sci, et ce, sans utiliser d'axiomes de cône. *Nous prouverons, par ailleurs, que la propriété de reconstitution* (problème 2(c)) *suffit pour assurer à* ∂ *des règles de somme* (théorème 6.5).

De nombreux autres résultats de reconstitution de sous-différentiels existent, voir par exemple [13, 10, 49, 35, 6]. Pour terminer, on note que ce type de propriété de "reconstruction" de sous-différentiel inspira de nouvelles caractérisations des espaces d'Asplund comme dans le résultat de Fabian–Mordukhovich [35, Theorem 3.1]. Nous proposerons également, dans cet article, de nouvelles caractérisations des espaces d'Asplund (voir théorème 6.8).

2. Méthodologie

2.1. Stratégie. On rappelle qu'un de nos objectifs est de déterminer des conditions minimales sur le triplet $(X, \partial, \{f_i \mid i = 1, \ldots, k\})$ afin que la règle de somme $(\sum)_\partial^{\tau^*}$ soit réalisée, avec X un espace de Banach, ∂ un sous-différentiel arbitraire et f_i, $i = 1, \ldots, k$, des fonctions sci.

• Afin de traiter simultanément les règles de somme approchée *fortes* et les règles de somme approchée *faibles*, on travaillera en se donnant une famille de bornés sur l'espace de départ X et en munissant l'espace dual X^* de la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de cette famille. En procédant ainsi, les calculs forts et faibles pourront alors être considérés comme des cas particuliers d'une même théorie générale.

• Il a été observé, dans le cadre général de la semi-continuité inférieure, qu'en fonction de la finesse de l'approximation désirée, des contraintes sur les fonctions étaient ou non requises. On peut alors imaginer qu'une condition de qualification générale doive prendre en considération l'approximation voulue. Dans la section 4, notre condition de qualification tiendra effectivement compte de cet aspect des choses.

2.2. Le sous-différentiel. En ce qui concerne le sous-différentiel, nous suivrons l'approche axiomatique initiée par Ioffe [41], puis développée par Correa–Joffré–Thibault [24], Aussel–Corvellec–Lassonde [7], Ioffe [50] et Lassonde [57].

Définition 2.1. Un *sous-différentiel* est un opérateur multivoque ∂ qui, à tout espace X, toute fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et tout point x de X, associe un ensemble $\partial f(x) \subset X^*$ vérifiant :

(A0) Si f atteint un minimum local fini en x_0, alors $0 \in \partial f(x_0)$.

(A1) Si f est convexe, alors $\partial f(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x\rangle + f(x) \leq f(y), \forall y \in X\}$.

(A2) Si $F : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est telle que $F(x, y) = f(x) + g(y)$, alors $\partial F(x, y) \subset \partial f(x) \times \partial g(y)$, et on a l'égalité dès que f ou g est une fonction constante.

(A3) Si $f + \varphi + \psi$ atteint un minimum local fini en x_0 et que $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ sont convexes continues et ∂-différentiables en x_0, alors $0 \in \partial f(x_0) + \partial\varphi(x_0) + \partial\psi(x_0)$.

Ici g est dite *∂-sous-différentiable* en x_0 si $\partial g(x_0) \neq \emptyset$, et *$\partial$-différentiable* en x_0 si les fonctions g et $-g$ sont ∂-sous-différentiables en x_0.

Remarques. L'axiome (A0) est le cas (très) particulier de (A3) où φ et ψ sont nulles. Dans nos démonstrations, nous n'utiliserons explicitement que les axiomes (A0), (A1) et (A2). Par contre, l'axiome (A3) sert pour démontrer que "tout espace qui possède une norme équivalente ∂-lisse est un espace ∂-régulier” (voir ci-dessous la définition 2.2 et le paragraphe qui suit).

La majorité des sous-différentiels connus satisfont à ces axiomes, notamment :

— les sous-différentiels s-Hölder $\partial^{H(s)}$, Lipschitz-smooth ∂^{LS}, et proximal ∂^{P},

— tous les sous-différentiels associés au concept de bornologie ($\beta =$ Fréchet, Gateaux, Hadamard, ...), qu’ils soient canoniques ∂^{β} ou de viscosité D^{β},

— les sous-différentiels élaborés : Clarke ∂^{C}, approché géométrique de Ioffe ∂_g^I, ... (les sous-différentiels de Ioffe ∂_a^I et de Michel–Penot ∂^{MP} vérifient ces axiomes sur la classe des fonctions continues).

La notion de sous-différentiel étant explicitée, on peut s’intéresser à l’espace. Commençons par quelques explications préliminaires.

2.3. L’espace. Pour être capable de travailler (résoudre des problèmes) avec un sous-différentiel donné ∂ sur un espace X, il faut que l’espace X possède un minimum de propriétés de calcul faisant intervenir ∂. La propriété minimale choisie par Ioffe [51, 52] est une condition nécessaire du premier ordre pour les problèmes de minimisation d’une somme de fonctions sci, exprimée à l’aide du sous-différentiel de chaque fonction. Cette propriété est couramment appelée *principe approché* (*flou*) *de base*. Plusieurs autres principes se sont révélés être des outils-clefs en analyse non lisse. C’est ainsi que, dans leurs travaux, Borwein, Treiman et Zhu [14] utilisent un principe flou non local, Clarke, Ledyaev, Stern et Wolenski [23] emploient une inégalité de la valeur moyenne multidirectionnelle, alors que Mordukhovich et Shao [59] choisissent un “principe extrémal”, tous, pour des sous-différentiels précis, adaptés à leur problème. Récemment, les travaux de Zhu [72] (pour les β-sous-différentiels de viscosité) et ceux de Ioffe [50] et Lassonde [57] (pour des sous-différentiels arbitraires) ont permis de mettre en évidence que la plupart de ces outils étaient en fait équivalents. Plus précisément, ils ont découvert que si une de ces propriétés était vérifiée sur l’espace produit X^N pour tout entier naturel N, les autres l’étaient également.

Cet effort de globalisation est fondamental puisqu’il ouvre la voie à une unification des classes d’espaces, nous permettant ainsi de travailler à la recherche d’outils communs.

Une des propriétés les plus simples à vérifier, parmi cette liste, est probablement la suivante :

(B)$_\partial$ *Principe approché de base* (*version convexe lipschitzienne*). Soient $f : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ une fonction sci et $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe lipschitzienne. On suppose que $f + \varphi$ atteint un minimum local fort fini en z. Alors, il existe des suites $(\overline{x}_n, \overline{x}_n^*)_n$ dans ∂f et $(\overline{y}_n, \overline{y}_n^*)$ dans $\partial\varphi$ telles que

(i) $\overline{x}_n \to z$, $\overline{y}_n \to z$, $f(\overline{x}_n) \to f(z)$;

(ii) $\overline{x}_n^* + \overline{y}_n^* \to 0$.

L’équivalence des outils précédemment exprimée fournit une classe d’espaces appropriés à un sous-différentiel ∂ donné. Il est commode de lui donner un nom.

DÉFINITION 2.2. On dit d'un espace de Banach X qu'il est *∂-régulier* si le principe approché de base $(\mathrm{B})_\partial$ est vérifié sur X^N pour tout entier naturel N.

La notion de ∂-régularité ainsi définie pour un *espace* X vient suppléer la notion de lissité de la *norme* introduite par Aussel, Corvellec et Lassonde en 1994. En effet, si "X possède une *norme* équivalente *∂-lisse* ([4])", alors "X est un *espace* ∂-régulier". Ce dernier résultat est dû à Lassonde [57, Theorem 4.4]. Il fournit ainsi une condition suffisante pour qu'un espace X soit ∂-régulier.

On résume dans le tableau ci-dessous des exemples de classes d'espaces appropriés à un sous-différentiel ∂ donné. Il est à noter que si X est un espace ∂-régulier et que $\partial \subset \partial'$ alors X est un espace ∂'-régulier.

Sdif. ∂	Espace de Banach X ∂-régulier
∂^P	Hilbert
∂^{LS}	Hilbert, L^p, $2 \le p < \infty$
D^F	réflexif, espace avec fonction bosse C^1
∂^F	Asplund (espace à dual séparable, réflexif, etc.)
D^H, D^G, ∂^H, ∂^G	séparable, espace avec fonction bosse G-régulière
∂^C, ∂^I_g, ∂^{MP}	Banach arbitraire

Ainsi, dans la colonne de droite a-t-on des exemples d'espaces qui possèdent de bonnes règles de calcul pour ∂ (principe extrémal, théorème de la valeur moyenne multidirectionnelle, principe flou non local, ...).

▶ Nous travaillerons ici à la recherche de propriétés de somme que l'on puisse ajouter à la liste des propriétés équivalentes connues.

Quelques précisions sur le tableau :

— Les sous-différentiels de Clarke, de Michel–Penot et de Ioffe sont toujours non vides sur la classe des fonctions localement lipschitziennes. Par ailleurs, la fonction θ intervenant dans la définition de norme ∂-lisse est localement lipschitzienne. De ce fait, toute norme est ∂-lisse pour $\partial := \partial^C,\ \partial^I_g$ et ∂^{MP}.

— Lorsque $\partial := \partial^\beta$, c'est-à-dire que ∂ est le sous-différentiel canonique associé à la bornologie β, une norme est ∂^β-lisse si et seulement si elle est β-différentiable en tout point distinct de l'origine. De plus, si g est une fonction lipschitzienne et β-différentiable en un point x alors son β-sous-différentiel de viscosité vérifie $D^\beta g(x) \neq \emptyset$ et $D^\beta(-g)(x) \neq \emptyset$. En particulier toute norme β-différentiable est D^β-lisse. Il est bien connu (voir par exemple R. Phelps [63]) que tout espace X de Banach séparable (resp. réflexif) possède une norme équivalente Gateaux (resp. Fréchet) différentiable, on déduit alors de ce qui précède que X admet une norme équivalente D^G-lisse (resp. D^F-lisse).

— Concernant les espaces avec fonction bosse, voir la remarque qui suit.

— S'agissant des espaces d'Asplund, il faut déjà rappeler que si X est un espace d'Asplund alors X^N l'est aussi, $\forall N \in \mathbb{N}$. Il résulte par ailleurs des travaux de Fabian [34]

([4]) Toute fonction de la forme $\theta : x \to \sum_n \mu_n \|x - v_n\|^2$, avec $\sum_n \mu_n \in \mathbb{R}$, $\mu_n \ge 0$ et $(v_n)_n$ convergente dans X, est ∂-différentiable.

(voir théorème 1.2, page 8) que tout espace d'Asplund possède le principe de base (B1) avec $\partial := \partial^F$. Par suite, tout espace d'Asplund est ∂^F-régulier.

— Pour terminer, on note que les normes naturelles des espaces de Hilbert et des espaces L^p, $2 \leq p < \infty$, sont Lipschitz-différentiables ce qui revient à dire que ces normes sont ∂^{LS}-lisses.

Remarque. Il existe des espaces ∂-réguliers dont aucune norme équivalente n'est ∂-lisse mais qui possèdent des fonctions bosses régulières. Plus précisément, Haydon [39] a construit un espace de Banach X qui n'admet pas de norme équivalente Gateaux-différentiable sur $X \setminus \{0\}$, mais qui possède une fonction bosse lipschitzienne et Fréchet-différentiable. Notons (H^β) l'hypothèse *il existe une fonction bosse lipschitzienne et Fréchet-différentiable.* Sous l'hypothèse (H^β), Deville, Godefroy et Zizler [28] démontrent un principe variationnel. Grâce à ce principe, Borwein et Zhu [15] prouvent qu'un espace qui possède la propriété (H^β) possède un principe flou local. (Par ailleurs, si (H^β) est vraie sur X, elle est vraie sur X^N pour tout entier naturel N.) L'équivalence des principes assure donc que X est ∂-régulier avec $\partial := D^F$, en particulier X est ∂^G-régulier.

2.4. Les conditions de qualification. Il est communément admis d'appeler *condition de qualification* (CQ) toute condition portant sur une famille de fonctions $\{f_1, \ldots, f_k\}$ et que l'on doit ajouter à l'hypothèse de semi-continuité inférieure des f_i pour résoudre un problème donné, lorsque cette seule hypothèse ne suffit pas. Les problèmes qui nous concernent dans cette sous-section sont la recherche de principes et de règles de somme : étant donnée une famille de fonctions $\{f_1, \ldots, f_k\}$ sur un espace de Banach X, un point x dans X et un sous-différentiel ∂, on s'intéresse, respectivement, aux problèmes suivants :

Principe de somme (condition nécessaire d'optimalité).

$$x \text{ minimum local de la fonction } \sum_{i=1}^{k} f_i \;\Rightarrow\; 0 \in \limsup_{x_i \to x} \sum_{i=1}^{k} \partial f_i(x_i). \tag{3}$$

Règle de somme.

$$x^* \in \partial\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i\Big)(x) \;\Rightarrow\; x^* \in \limsup_{x_i \to x} \sum_{i=1}^{k} \partial f_i(x_i) \tag{4}$$

où $\limsup_{x_i \to x}$ désigne une opération de limite topologique. Naturellement, (4) implique (3) mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Au fil des années, diverses hypothèses, sans lien apparent entre elles, ont été proposées pour résoudre ces deux problèmes. Ce n'est que récemment (Ioffe–Rockafellar [54], Borwein–Ioffe [10], Ioffe [51], Borwein–Zhu [15], Ioffe–Penot [53]) que l'on a dégagé, sous forme de conditions de qualification portant sur la famille $\{f_1, \ldots, f_k\}$ au point x considéré, les propriétés communes à toutes ces hypothèses qui suffisent pour l'obtention du résultat escompté.

On présente, maintenant, les différentes hypothèses et conditions de qualification proposées dans la littérature pour résoudre les problèmes (3) ou (4). Soient $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathrm{SCI}(x)$, $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{dom} f_i$.

(a) Ioffe (1983) : au moins une des fonctions est inf-compacte près de x.

(a′) Clarke et al. (1998) : $k = 2$, les fonctions sont faiblement sci sur un espace de Hilbert.

(b) Ioffe (1983), Fabian (1985) : toutes les fonctions sauf éventuellement une sont lipschitziennes près de x.

(c) Deville–El Haddad (1996) : $k = 2$, une des deux fonctions est uniformément continue près de x.

(d) Ioffe–Rockafellar (1996), Borwein–Ioffe (1996) : la famille $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est *séquentiellement uniformément sci* (SUSCI) en x, c'est-à-dire qu'il existe une boule $B_\eta(x)$ telle que pour toute famille de k suites $(x_{i,n})_n \subset B_\eta(x)$, $i = 1, \ldots, k$, vérifiant $f_i(x_{i,n}) < \infty$ et $\|x_{i,n} - x_{j,n}\| \to 0$ quand n tend vers l'infini, $i = 1, \ldots, k$, il existe une suite $(x_n)_n$ dans $B_\eta(x)$ qui vérifie

$$\|x_n - x_{i,n}\| \to 0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} (f_i(x_{i,n}) - f_i(x_n)) \geq 0.$$

(e) Ioffe (1996) : la famille $\{f_1, \ldots, f_k\}$ vérifie la *condition de qualification métrique générale* (CQMG) en x, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\omega(\cdot)$ continue, positive, croissante sur X et égale à 0 en 0 telle que

$$\varrho\Big((u,\alpha), \operatorname{epi}\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i\Big)\Big) \leq \omega\Big(\sum_{i=1}^{k} \varrho((u,\alpha_i), \operatorname{epi} f_i)\Big)$$

pour tout u proche de x et tous α, α_i tels que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \alpha$.

(f) Borwein–Zhu (1996) : la famille $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est *localement uniformément sci* (LUSCI) en x, c'est-à-dire $\forall \lambda > 0$ petit ([5])

$$\inf_{y\in B_\lambda(x)} \sum_{i=1}^{k} f_i(y) = \lim_{\eta\to 0} \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \;\Big|\; \|x_i - x_j\| \leq \eta, \; x_i, x_j \in B_\lambda(x),\ i,j = 1, \ldots, k \Big\}. \tag{5}$$

Remarque 2.3. La condition (f) contient toutes les autres : c'est la plus générale parmi celles utilisées pour obtenir le principe de somme (3). Pour ce qui concerne la règle de somme (4), les conditions (a), (a′) et (e) suffisent, mais il n'est pas clair que (e) contienne (a) et (a′) (voir [10, Remark 2]). Hormis ces deux cas, la condition (e) est plus générale que les autres conditions de qualification (b), (c), (d) utilisées pour obtenir (4).

Dans la recherche d'une condition de qualification générale, il semble naturel de s'intéresser à une propriété de *découplage de la famille* $\{f_1, \ldots, f_k\}$ *des fonctions* par rapport à l'opération de somme, du type de celles considérées en (d), (e) ou (f). C'est l'objet de la section suivante.

3. Infimum uniforme et condition de découplage

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle condition de qualification, appelée *condition de découplage* (CD), qui joue un rôle essentiel dans notre travail. Nous montrerons

([5]) Voir [17].

en effet dans les sections suivantes que (CD) est suffisante pour assurer les inclusions (3) et (4). Très grossièrement, cette condition demande que l'infimum de la somme des valeurs $f_i(z)$ pour z dans un petit voisinage $B_\lambda(x)$ de x puisse être reconstitué en prenant la limite, quand $\delta \to 0$, de l'infimum de la somme des valeurs $f_i(z_i)$ pour des z_i δ-proches entre eux et δ-proches de $B_\lambda(x)$. Ceci n'est pas sans rappeler la nature des inclusions (3) et (4) ci-dessus.

La définition formelle de la condition de découplage repose sur la notion d'infimum uniforme d'une famille de fonctions introduite en [57]. Dans la sous-section 3.1, nous rappelons la définition de cette notion et nous indiquons quelques-unes de ses propriétés. Dans la sous-section 3.2, nous montrons que notre condition (CD) est plus faible que la condition (LUSCI), et donc que (CQMG). La relation entre la condition de découplage d'une famille de fonctions et la semi-continuité inférieure de l'épi-somme des fonctions est analysée dans la sous-section 3.3. Enfin, la dernière sous-section 3.4 décrit les liens entre la méthode de pénalisation-découplage, couramment utilisée en analyse non linéaire, et la condition de découplage.

3.1. Propriétés de l'infimum uniforme d'une famille de fonctions. Étant donnés un sous-ensemble A de X et $f_1, \ldots, f_k : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des fonctions sci, on appelle *infimum uniforme de la famille* $\{f_1, \ldots, f_k\}$ *sur* A le nombre

$$r_A(f_1, \ldots, f_k) := \lim_{\delta \to 0} \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \,\Big|\, \operatorname{diam}(x_1, \ldots, x_k) \leq \delta,\, x_i \in B_\delta(A),\, i = 1, \ldots, k \Big\}.$$

Il a été introduit par Aussel–Corvellec–Lassonde [7] pour une fonction et généralisé au cas de plusieurs fonctions par Lassonde [57].

On s'intéresse dans cette section à la valeur de l'infimum uniforme sur une boule $B_\lambda(x_0)$ pour une famille de fonctions dont l'une d'elles possède des propriétés spécifiques telles que l'uniforme continuité ou l'inf-compacité.

Définition 3.1. On dit qu'une fonction φ définie sur X est *uniformément continue sur la boule* $B_\lambda(x_0)$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout x, y dans $B_\lambda(x_0)$, on a

$$\|x - y\| \leq \delta \;\Rightarrow\; |\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Proposition 3.2. *Soit* $\{f_1, \ldots, f_k, \varphi\}$ *une famille de fonctions sci sur* $B_{\overline{\lambda}}(x_0)$. *Si la fonction* φ *est uniformément continue sur* $B_{\overline{\lambda}}(x_0)$, *alors*

$$r_{B_\lambda(x_0)}(f_1, \ldots, f_k, \varphi) = r_{B_\lambda(x_0)}(f_1, \ldots, f_{k-1}, f_k + \varphi),$$

pour tout λ *dans* $]0, \overline{\lambda}[$.

Démonstration. On fixe λ dans $]0, \overline{\lambda}[$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, si

$$x, y \in B_{\lambda+\delta}(x_0) \quad \text{et} \quad \|x - y\| \leq \delta,$$

alors

$$\varphi(y) > \varphi(x) - \varepsilon.$$

D'où, si $(x_1, \dots, x_k, y)$ dans X^{k+1} vérifie

$$\operatorname{diam}(x_1, \dots, x_k, y) \le \delta, \quad x_1, \dots, x_k, y \in B_{\lambda+\delta}(x_0), \tag{6}$$

alors

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) + \varphi(y) \ge \sum_{i=1}^{k-1} f_i(x_i) + (f_k + \varphi)(x_k) - \varepsilon.$$

On en déduit que la quantité

$$\inf\{f_1(x_1) + \ldots + f_k(x_k) + \varphi(y) \mid (x_1, \dots, x_k, y) \text{ vérifie (6)}\}$$

est plus grande ou égale à la quantité

$$\inf\{f_1(x_1) + \ldots + (f_k + \varphi)(x_k) \mid \operatorname{diam}(x_1, \dots, x_k) \le \delta,\, x_i \in B_{\lambda+\delta}(x_0),\, i = 1, \dots, k\} - \varepsilon.$$

Le réel $\delta > 0$ pouvant être arbitrairement petit, en faisant $\delta \searrow 0$ on obtient

$$r_{B_\lambda(x_0)}(f_1, \dots, f_k, \varphi) \ge r_{B_\lambda(x_0)}(f_1, \dots, f_k + \varphi) - \varepsilon,$$

et comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, l'inégalité a lieu aussi avec $\varepsilon = 0$. L'inverse étant toujours vraie, on a l'égalité voulue et ceci, pour tout $\lambda > 0$ petit. ∎

Définition 3.3. Soit τ une topologie sur l'espace X. On dit qu'une fonction φ définie sur X est *τ-inf-compacte sur la boule $B_\lambda(x_0)$* si, pour tout réel s, l'ensemble $\{x \in X \mid \varphi(x) \le s\} \cap B_\lambda(x_0)$ est τ-compact, c'est-à-dire compact sur X muni de la topologie τ. Lorsque τ est la topologie associée à la norme de X, on dira simplement que la fonction φ est *inf-compacte sur la boule $B_\lambda(x_0)$*.

Proposition 3.4. *Soit τ une topologie d'espace vectoriel sur X, entre la topologie faible et la topologie de la norme. Si $\{f_1, \dots, f_k\}$ est une famille de fonctions τ-sci et bornées inférieurement sur $B_{\overline{\lambda}}(x_0)$ et si φ est une fonction τ-inf-compacte sur $B_{\overline{\lambda}}(x_0)$, alors*

$$r_{B_\lambda(x_0)}(f_1, \dots, f_k, \varphi) = \min_{B_\lambda(x_0)} (f_1 + \ldots + f_k + \varphi),$$

pour tout λ dans $]0, \overline{\lambda}[$.

Démonstration. On fixe λ dans $]0, \overline{\lambda}[$ et on suppose acquis le lemme suivant :

Lemma. *Si une suite $(x_{1,n}, \dots, x_{k,n}, y_n)_n$ de X^{k+1} vérifie*

$$\operatorname{diam}(x_{1,n}, \dots, x_{k,n}, y_n) \le 1/n, \quad x_{i,n}, y_n \in B_{\lambda+1/n}(x_0),\ i = 1, \dots, k, \tag{7}$$

et que

$$\gamma := \limsup_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{i,n}) + \varphi(y_n)\Big)$$

est fini, alors il existe y_0 dans $B_\lambda(x_0)$ qui vérifie

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(y_0) + \varphi(y_0) \le \gamma. \tag{8}$$

Évidemment, si $r_{B_\lambda(x_0)}(f_1, \dots, f_k, \varphi) = +\infty$, comme l'inégalité

$$r_{B_\lambda(x_0)}(f_1, \dots, f_k, \varphi) \le \inf_{B_\lambda(x_0)} (f_1 + \ldots + f_k + \varphi) \tag{9}$$

est toujours vraie, on a le résultat souhaité. Sinon, soit m dans $\mathbb{R}$ tel que

$$r_{B_\lambda(x_0)}(f_1,\ldots,f_k,\varphi) < m.$$

Par définition de l'infimum uniforme de la famille $\{f_1,\ldots,f_k,\varphi\}$, il existe une suite $(x_{1,n},\ldots,x_{k,n},y_n)_n$ qui vérifie (7) et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{i,n}) + \varphi(y_n) \leq m,$$

d'où

$$\gamma := \limsup_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{i,n}) + \varphi(y_n)\Big) \leq m.$$

Ainsi, il découle du lemme qu'il existe un point y_0 de $B_\lambda(x_0)$ vérifiant (8). Par suite, on a

$$\inf_{B_\lambda(x_0)} (f_1 + \ldots + f_k + \varphi) \leq \gamma \leq m,$$

prouvant que $\inf_{B_\lambda(x_0)}(f_1 + \ldots + f_k + \varphi) \leq r_{B_\lambda(x_0)}(f_1,\ldots,f_k,\varphi)$. L'égalité provient du fait que (9) est toujours vraie.

Montrons maintenant que l'infimum est atteint. Ceci est évident si $\inf_{B_\lambda(x_0)}(f_1+\ldots+f_k+\varphi) = +\infty$. Sinon, soit $(x_n)_n$ une suite minimisante, c'est-à-dire

$$(x_n)_n \subset B_\lambda(x_0), \qquad \lim_{n\to\infty} (f_1 + \ldots + f_k + \varphi)(x_n) = \inf_{B_\lambda(x_0)} (f_1 + \ldots + f_k + \varphi).$$

Il est clair que la suite $(x_{1,n},\ldots,x_{k,n},y_n)_n := (x_n,\ldots,x_n)_n$ de X^{k+1} vérifie (7) et que

$$\gamma := \limsup_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{i,n}) + \varphi(y_n)\Big) = \inf_{B_\lambda(x_0)} (f_1 + \ldots + f_k + \varphi).$$

En appliquant de nouveau le lemme on déduit que l'infimum est atteint. Pour terminer la démonstration de la proposition, il nous reste à démontrer le lemme.

Démonstration du lemme. Soit μ dans $\mathbb{R}$ tel que pour chaque $i = 1,\ldots,k$,

$$\frac{\mu}{k} < \inf_{B_{\bar\lambda}(x_0)} f_i.$$

Alors, pour tout λ dans $]0,\overline{\lambda}[$, on a $\mu/k < r_{B_\lambda(x_0)}(f_i)$, et comme

$$r_{B_\lambda(x_0)}(f_1,\ldots,f_k) \geq \sum_{i=1}^{k} r_{B_\lambda(x_0)}(f_i),$$

on en déduit que

$$r_{B_\lambda(x_0)}(f_1,\ldots,f_k) > \mu.$$

Il existe donc $\bar\delta$ dans $]0,\overline{\lambda}-\lambda[$ tel que, quel que soit $(x_1,\ldots,x_k)$ dans X^k vérifiant

$$\operatorname{diam}(x_1,\ldots,x_k) < \bar\delta, \qquad x_i \in B_{\lambda+\bar\delta}(x_0), \qquad i = 1,\ldots,k,$$

on a

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) > \mu. \tag{10}$$

Soit $\varepsilon > 0$; puisque γ est fini, pour n grand, on a

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{i,n}) + \varphi(y_n) \leq \gamma + \varepsilon. \tag{11}$$

On prend n assez grand de sorte que la suite $(x_{1,n}, \ldots, x_{k,n}, y_n)_n$ vérifie à la fois (10) et (11). On en déduit qu'à partir d'un certain rang, la suite $(y_n)_n$ est dans l'ensemble τ-compact

$$\{x \mid \varphi(x) \leq \gamma + \varepsilon - \mu\} \cap B_{\lambda+\bar{\delta}}(x_0).$$

Par conséquent, $(y_n)_n$ possède au moins une τ-valeur d'adhérence. Soient y_0 une d'entre elles et $(y_\nu)_\nu$ une sous-suite généralisée extraite de $(y_n)_n$ qui τ-converge vers y_0. La deuxième partie de (7) implique que, pour tout p dans $\mathbb{N}$, la suite $(y_n)_n$ est dans l'ensemble τ-fermé $B_{\lambda+1/p}(x_0)$ à partir d'un certain rang, donc y_0 (τ-valeur d'adhérence de $(y_n)_n$) s'y trouve aussi. Par suite, y_0 appartient à la boule $B_\lambda(x_0)$. De l'inégalité dans (7) on déduit que, pour tout $i = 1, \ldots, k$, la différence $(x_{i,\nu} - y_\nu)$ converge en norme vers 0 ; or

$$x_{i,\nu} - y_0 = (x_{i,\nu} - y_\nu) + (y_\nu - y_0),$$

donc les sous-suites généralisées $(x_{i,\nu})_\nu$, $i = 1, \ldots, k$, τ-convergent aussi vers y_0. Grâce à la τ-semi-continuité inférieure des fonctions f_i, on déduit de l'inégalité (11) que

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(y_0) + \varphi(y_0) \leq \gamma + \varepsilon.$$

Précisons que l'ensemble des τ-valeurs d'adhérence de la suite $(y_n)_n$ est indépendant du réel ε considéré. Aussi, l'inégalité ci-dessus reste vraie pour tout $\varepsilon > 0$, d'où (8). Ceci termine la preuve du lemme et, par voie de conséquence, de la proposition. ■

3.2. La condition de découplage et les conditions classiques. Soient $f_1, \ldots, f_k : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des fonctions sci près d'un élément x de $\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{dom} f_i$.

Définition 3.5. (1) On dit que la famille $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est *découplable en x* si la condition de découplage (CD) suivante :

$$r_{B_\lambda(x)}(f_1 + \ldots + f_k) = r_{B_\lambda(x)}(f_1, \ldots, f_k) \tag{CD}$$

est réalisée pour tout $\lambda > 0$ petit.

(2) On dit que $\{f_1, \ldots, f_k, X^*\}$ est *découplable* en x, si pour tout x^* dans X^*, la famille $\{f_1, \ldots, f_k, x^*\}$ est découplable en x.

Nous verrons dans les sections suivantes que (CD) suffit pour obtenir les règles de somme approchée connues.

Remarque 3.6. La condition de découplage (CD) est strictement plus faible que la condition

$$\inf_{B_\lambda(x)} (f_1 + \ldots + f_k) = r_{B_\lambda(x)}(f_1, \ldots, f_k), \quad \forall \lambda > 0 \text{ petit},$$

analogue à la condition (LUSCI). En effet, il existe des fonctions f sci telles que

$$\inf_{B_{\lambda_n}(x)} f \neq r_{B_{\lambda_n}(x)}(f)$$

pour une suite $\lambda_n \searrow 0$ (voir exemple 3.7 ci-dessous). Alors, en posant $f_1 = f + \varphi$, avec f comme ci-dessus et φ lipschitzienne, et $f_2 = -\varphi$, on a

$$\text{(CD)} \qquad r_{B_\lambda(x)}(f_1 + f_2) = r_{B_\lambda(x)}(f_1, f_2), \quad \forall \lambda > 0 \text{ petit},$$

car f_2 est lipschitzienne (voir proposition 3.2), mais comme $f_1 + f_2 = f$,

$$\inf_{B_{\lambda_n}(x)} (f_1 + f_2) \neq r_{B_{\lambda_n}(x)}(f_1, f_2)$$

pour une suite $\lambda_n \searrow 0$.

EXEMPLE 3.7. Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$ et soit (e_i) sa base canonique. Considérons $f : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} -1/n & \text{si } x = \frac{1}{n} e_i,\ n = 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, \\ -1/n - 1/n^2 & \text{si } x = \frac{1}{n}\big(e_i + \frac{1}{i} e_1\big),\ n = 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que, pour tout $\lambda > 1/n$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1}{n} < \left\| \frac{1}{n}\left(e_i + \frac{1}{i}\, e_1\right) \right\| = \frac{1}{n}\sqrt{1 + \frac{1}{i^2}} < \lambda,$$

autrement dit,

$$\frac{1}{n}\left(e_i + \frac{1}{i} e_i\right) \notin \frac{1}{n} B, \quad \text{mais} \quad \frac{1}{n}\left(e_i + \frac{1}{i}\, e_i\right) \in \lambda B.$$

D'autre part, si $m > n$, on a $(1 + 1/m)n < m$, donc $(1 + 1/m)/m < 1/n$, et par suite, pour tout $i = 1, 2, \ldots,$

$$f\left(\frac{1}{n}\, e_i\right) < f\left(\frac{1}{m}\left(e_i + \frac{1}{i}\, e_1\right)\right).$$

On en déduit que

$$\inf_{(1/n)B} f = f\left(\frac{1}{n}\, e_i\right) = -\frac{1}{n},$$

alors que

$$r_{(1/n)B}(f) = \sup_{\lambda > 1/n} \inf_{\lambda B} f = f\left(\frac{1}{n}\left(e_i + \frac{1}{i}\, e_i\right)\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}. \ \blacksquare$$

Le lemme ci-dessous propose une autre expression de la condition de découplage.

LEMME 3.8. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Pour tout* $\lambda > 0$ *petit*,

$$r_{B_\lambda(x)}(f_1 + \ldots + f_k) \leq r_{B_{\lambda'}(x)}(f_1, \ldots, f_k), \quad \forall 0 < \lambda' < \lambda.$$

(ii) *Pour tout* $\lambda > 0$ *petit*,

$$r_{B_\lambda(x)}(f_1 + \ldots + f_k) = r_{B_\lambda(x)}(f_1, \ldots, f_k).$$

Démonstration. Il est clair que (ii) implique (i). Pour montrer l'implication inverse, on note tout d'abord que l'assertion (i) peut se traduire par : il existe $\overline{\lambda} > 0$ tel que pour tout λ dans $]0, \overline{\lambda}[$ et tout $\delta > 0$ avec $\lambda + \delta < \overline{\lambda}$ on a

$$r_{B_{\lambda+\delta}(x)}(f_1 + \ldots + f_k) \leq r_{B_\lambda(x)}(f_1, \ldots, f_k),$$

ou encore, il existe $\overline{\lambda} > 0$ tel que pour tout λ dans $]0, \overline{\lambda}[$, on a

$$\sup_{\delta>0} r_{B_{\lambda+\delta}(x)}(f_1 + \ldots + f_k) \leq r_{B_\lambda(x)}(f_1, \ldots, f_k).$$

Pour conclure il suffit donc de remarquer que, pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{\delta>0} r_{B_{\lambda+\delta}(x)} f &= \sup_{\delta>0}(\sup_{\delta'>0} \inf_{B_{(\lambda+\delta)+\delta'}(x)} f) = \sup_{\delta',\delta>0} \inf_{B_{\lambda+\delta'+\delta}(x)} f \\ &= \sup_{\delta'>0} \inf_{B_{\lambda+\delta'}(x)} f = r_{B_\lambda(x)}(f). \ \blacksquare\end{aligned}$$

► Nous comparons maintenant notre condition de qualification (CD) aux conditions listées à la section 2.4 :

Proposition 3.9. *Pour tout point x de $\bigcap_{i=1}^k \operatorname{dom} f_i$, chacune des conditions* (a)–(f) *précédemment citées implique que la famille $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est découplable en x. De plus, chacune des conditions* (a)–(e) *implique que $\{f_1, \ldots, f_k, X^*\}$ est découplable en x.*

Démonstration. (a)⇒(CD) se déduit de la proposition 3.4, pour τ égale à la topologie de la norme.

(a′)⇒(CD). Voir la proposition 3.11 ci-dessous.

(b)⇒(c) est trivial.

(c)⇒(CD). Il suffit d'appliquer successivement le résultat de la proposition 3.2 avec $\varphi := f_1$, $\varphi := f_1 + f_2, \ldots, \varphi := f_1 + \ldots + f_{k-1}$.

(d)⇔(e) a été montré par Ioffe dans [51].

(d)⇒(f). Voir Borwein–Zhu [16].

(f)⇒(CD). Soit λ dans $]0, \overline{\lambda}[$; on a toujours l'inégalité

$$r_{B_\lambda(x)}(f_1 + \ldots + f_k) \leq \inf_{y \in B_\lambda(x)} \sum_{i=1}^k f_i(y).$$

Par ailleurs, pour tout λ' dans $]0, \lambda[$,

$$\lim_{\eta\to 0} \inf \Big\{ \sum_{i=1}^k f_i(x_i) \,\Big|\, \|x_i - x_j\| \leq \eta,\, x_i \in B_\lambda(x) \Big\} \leq r_{B_{\lambda'}(x)}(f_1, \ldots, f_k).$$

On déduit donc de l'hypothèse (f) que pour tout $\lambda > 0$ petit,

$$r_{B_\lambda(x)}(f_1 + \ldots + f_k) \leq r_{B_{\lambda'}(x)}(f_1, \ldots, f_k), \quad \forall 0 < \lambda' < \lambda,$$

ce qui est équivalent à (CD) d'après le lemme 3.8.

Pour terminer la preuve de la proposition, il suffit de remarquer que chacune des conditions de qualification (a)–(e) est stable par ajout d'une fonction localement lipschitzienne. Par suite, si $\{f_1, \ldots, f_k\}$ vérifie l'une des conditions (a)–(e) alors c'est aussi le cas de $\{f_1, \ldots, f_k, x^*\}$ pour tout x^* dans X^*, et de ce qui précède, on déduit que $\{f_1, \ldots, f_k, X^*\}$ est découplable en x. $\blacksquare$

Remarque 3.10. Il est démontré dans [16, Example 2.10] que (d) est strictement plus forte que (f).

Proposition 3.11. *Si X est un espace de Banach réflexif et que les fonctions f_i, $i = 1, \dots, k$, sont faiblement sci près de x (comme lorsqu'elles sont convexes sci), alors $\{f_1, \dots, f_k, X^*\}$ est découplable en x.*

Démonstration. Sur un espace de Banach réflexif les boules fermées sont faiblement compactes, donc toute fonction faiblement sci sur $B_{\overline{\lambda}}(x)$ est faiblement inf-compacte sur $B_{\overline{\lambda}}(x)$. On applique la proposition 3.4 aux fonctions f_i, $i = 1, \dots, k$, et x^*, en prenant pour τ la topologie faible de X. ∎

Proposition 3.12. *Les conditions* (CD) *et* (LUSCI) *sont équivalentes en tout point x minimum local de la fonction $\sum_i f_i$.*

Démonstration. Si x est minimum local de $\sum_i f_i$, on peut trouver $\overline{\lambda} > 0$ tel que pour tout λ dans $]0, \overline{\lambda}[$ on a

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{k} f_i(x) = r_{B_\lambda(x)}(f_1 + \ldots + f_k), \qquad r_{B_\lambda(x)}(f_1 + \ldots + f_k) = r_{B_\lambda(x)}(f_1, \dots, f_k).$$

Par ailleurs, on a toujours

$$(13) \qquad r_{B_\lambda(x)}(f_1, \dots, f_k) \le \lim_{\eta \to 0} \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \,\Big|\, \|x_i - x_j\| \le \eta,\ x_i \in B_\lambda(x) \Big\}.$$

En combinant (12) et (13) on conclut à la locale uniforme semi-continuité inférieure de $\{f_1, \dots, f_k\}$ en x. ∎

Remarque 3.13. Nous ne savons pas si la propriété (CD) est équivalente à la propriété (LUSCI) aux points qui ne sont pas des minima locaux.

3.3. Inf-convolution et condition de découplage. On fait tout d'abord remarquer que l'infimum uniforme de deux fonctions f et g est exactement égal à la régularisée semi-continue inférieure en 0 de l'inf-convolution $f \nabla g^-$, où $g^-(x) = g(-x)$ pour x dans X, autrement dit

$$(14) \qquad r_X(f, g) = \liminf_{u \to 0} (f \nabla g^-)(u).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \liminf_{u \to 0} (f \nabla g^-)(u) &= \sup_{\delta > 0} \inf_{\|u\| < \delta} \inf\{f(y) + g(y - u) \mid y \in X\} \\ &= \sup_{\delta > 0} \inf\{f(y) + g(z) \mid \|y - z\| < \delta,\ y, z \in X\} = r_X(f, g). \end{aligned}$$

Ceci nous permet de donner une caractérisation de la condition (LUSCI) en terme de semi-continuité inférieure de l'inf-convolution, et, par conséquent, de fournir une autre condition suffisante pour obtenir la propriété de découplage (CD). Étant donnés une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et un ensemble $A \subset X$, on note f_A la fonction $f + \delta_A$.

Proposition 3.14. *Pour que la famille $\{f, g\}$ soit* (LUSCI) *en x, il faut et il suffit que l'inf-convolution $u \mapsto (f_{B_\lambda(x)} \nabla g^-_{B_\lambda(x)})(u)$ soit sci en 0, pour tout $\lambda > 0$ petit.*

Démonstration. Dire que $\{f, g\}$ est (LUSCI) en x, c'est dire que, pour tout $\lambda > 0$ petit,

$$\inf_{B_\lambda(x)} (f + g) = \lim_{\delta \to 0} \inf\{f(y) + g(z) \mid \|y - z\| < \delta,\ y, z \in B_\lambda(x)\} = r_X(f_{B_\lambda(x)}, g_{B_\lambda(x)}),$$

et dire que $u \mapsto (f_{B_\lambda(x)} \nabla g^-_{B_\lambda(x)})(u)$ est sci en 0, c'est dire, d'après (14), que, pour tout $\lambda > 0$ petit,

$$\inf_{B_\lambda(x)} (f+g) = (f_{B_\lambda(x)} \nabla g^-_{B_\lambda(x)})(0) = r_X(f_{B_\lambda(x)}, g_{B_\lambda(x)}).$$

Les deux propriétés sont bien équivalentes. ■

Lorsque les fonctions sont convexes, on peut faire un lien entre la condition de qualification de Robinson–Rockafellar [66, 67], à savoir

$$0 \in \operatorname{cor}(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g),$$

et la condition de découplage :

Proposition 3.15. *Soient f et $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des fonctions convexes sci sur un espace de Banach X telles que* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $0 \in \operatorname{cor}(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g)$;
(ii) $f \nabla g^-$ *est continue en* 0 ;
(iii) $f_{B_\lambda(x)} \nabla g^-_{B_\lambda(x)}$ *est continue en* 0 *pour tout x dans* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ *et tout* $\lambda > 0$.

De plus, si l'une des hypothèses (i)–(iii) *est réalisée, alors la famille* $\{f, g, X^*\}$ *est découplable en tout point x de* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$.

On renvoie à Jules–Lassonde [55] pour la démonstration de ce résultat et l'étude des règles de somme dans cadre des fonctions convexes.

3.4. Méthode de pénalisation-découplage et condition de découplage. Nous mentionnons d'abord une propriété remarquable de l'infimum uniforme d'une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sur un sous-ensemble non vide A d'un espace normé X : $r_A(f)$ est la limite, quand $n \to \infty$, de la valeur de l'infimum sur X de la fonction pénalisée $f + nd_A^p$, où d_A dénote une fonction distance à A et p un réel positif. Cette propriété a déjà été observée par J.-P. Penot [65], sous une forme légèrement différente.

Proposition 3.16. *Soient A un sous-ensemble non vide d'un espace normé X et $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction telle que* $A \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$ *et* $\inf_X f > -\infty$. *Alors, pour tout $p > 0$ et toute distance d compatible avec la topologie sur X, on a*

$$r_A(f) = \lim_{n\to\infty} \inf_X (f + nd_A^p).$$

Démonstration. Rappelons que la valeur de $r_A(f) = \sup_{\delta>0} \inf_{B_\delta(A)} f$ ne dépend pas de la norme utilisée pour définir $B_\delta(A)$. Étant donnée d, on notera donc $B_\delta(A) = \{x \in X \mid d_A(x) \le \delta\}$.

Évidemment, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\delta > 0$, on a

$$\inf_X (f + nd_A^p) \le \inf_{B_\delta(A)} f + n\delta^p,$$

d'où, en faisant $\delta \searrow 0$, on voit que la suite croissante $(\inf_X (f + nd_A^p))_n$ est majorée par $r_A(f)$, donc $\lim_{n\to\infty} \inf_X (f + nd_A^p)$ existe et est majorée par $r_A(f)$. Pour démontrer l'inégalité inverse, on utilise les mêmes arguments que dans le début de la preuve de

(R1)⇒(R4) dans le théorème 3.1 de [57] où une inégalité similaire est démontrée. Soit $\gamma < r_A(f)$ et soit $\delta > 0$ tel que $\gamma < \inf_{B_\delta(A)} f$. Montrons que si n vérifie

$$n \geq (\inf_{B_\delta(A)} f - \inf_X f)/\delta^p,$$

alors pour tout $x \in X$ on a

$$\inf_{B_\delta(A)} f \leq f(x) + n d_A^p(x). \tag{15}$$

C'est clair si x appartient à $B_\delta(A)$. Sinon, $d_A^p(x) \geq \delta^p$, d'où,

$$\inf_{B_\delta(A)} f \leq \inf_X f + n\delta^p \leq f(x) + n d_A^p(x),$$

ce qui prouve l'inégalité (15). Il s'ensuit que

$$\gamma < \lim_{n\to\infty} \inf_X (f + n d_A^p),$$

ce qu'il fallait montrer. ∎

Venons-en à la méthode dite de "pénalisation-découplage" qui est fréquemment rencontrée dans la littérature, aussi bien en théorie des équations aux dérivées partielles (voir Crandall–Ishii–Lions [25, Lemma 3.1]) que pour démontrer des principes ou des règles de sommes approchées (voir par exemple Ioffe [44, Lemma 2], Borwein–Zhu [15, Lemma 2.8], Clarke *et al.* [23, Proposition 8.2], Zhu [72, Theorem 2.1]).

Très schématiquement, cette méthode repose sur la propriété de *pénalisation-découplage* suivante : pour tout $\lambda > 0$ petit,

$$\inf_{B_\lambda(x)} \sum_{i=1}^k f_i = \lim_{n\to\infty} \inf \Big\{ \sum_{i=1}^k f_i(x_i) + n \sum_{i,j=1}^k \|x_i - x_j\|^2 \,\Big|\, x_i \in B_\lambda(x) \Big\}. \tag{PD}$$

Il est donc essentiel, dans cette méthode, de pouvoir disposer de conditions suffisantes sur la famille $\{f_1, \dots, f_k\}$ pour que (PD) soit vérifiée. Nous allons montrer ci-après que la propriété (PD) est en fait *équivalente* à la propriété (LUSCI), et donc a priori plus forte que notre condition de découplage (CD).

Proposition 3.17. *Soient A un sous-ensemble non vide d'un espace normé X et $f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $i = 1, \dots, k$, des fonctions telles que* $\inf\{\sum_{i=1}^k f_i(x_i) \mid x_i \in A\} > -\infty$. *Alors*,

$$\lim_{\eta\to 0} \inf \Big\{ \sum_{i=1}^k f_i(x_i) \,\Big|\, \|x_i - x_j\| \leq \eta,\, x_i, x_j \in A \Big\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \inf \Big\{ \sum_{i=1}^k f_i(x_i) + n \sum_{i,j=1}^k \|x_i - x_j\|^2 \,\Big|\, x_i, x_j \in A \Big\}.$$

Démonstration. On désigne par α la première quantité et par β la seconde. On note $Y := \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid x_1 = \ldots = x_k\}$ la diagonale de X^k et $F : X^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la fonction somme découplée définie par $F(x_1, \dots, x_k) := \sum_{i=1}^k f_i(x_i)$. Avec ces notations, on peut ré-écrire

$$(16)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \lim_{\eta\to 0} \inf\{(F+\delta_{A^k})(x_1,\dots,x_k) \mid \operatorname{diam}(x_1,\dots,x_k)\le \eta\},\\ \beta &= \lim_{n\to\infty} \inf\Big\{(F+\delta_{A^k})(x_1,\dots,x_k) + n\sum_{i,j=1}^{k} \|x_i-x_j\|^2 \,\Big|\, x_i\in X\Big\}, \end{aligned}$$

et puisque $\operatorname{diam}(x_1,\dots,x_k)$ est petit si et seulement si $d_Y(x_1,\dots,x_k)$ l'est, on a aussi

$$(17)\qquad \alpha = \lim_{\eta\to 0} \inf\{(F+\delta_{A^k})(x_1,\dots,x_k) \mid d_Y(x_1,\dots,x_k)\le\eta\} = r_Y(F+\delta_{A^k}),$$

où d peut être n'importe quelle distance compatible avec la topologie produit sur X^k. Notons, pour un instant, σ la distance du max et ϱ la distance euclidienne. Clairement,

$$(18)\qquad \begin{aligned} \sigma_Y^2(x_1,\dots,x_k) &= \inf_{z\in X}\{\max(\|x_1-z\|^2,\dots,\|x_k-z\|^2)\}\\ &\le \sum_{i,j=1}^{k}\|x_i-x_j\|^2 \le K\inf_{z\in X}\Big\{\sum_{i=1}^{k}\|x_i-z\|^2\Big\} = K\varrho_Y^2(x_1,\dots,x_k), \end{aligned}$$

où K est une certaine constante >0. Or, d'après la proposition 3.16, puisque $\inf_{X^k}(F+\delta_{A^k})>-\infty$, on peut écrire

$$r_Y(F+\delta_{A^k}) = \lim_{n\to\infty}\inf_{X^k}(F+\delta_{A^k}+nd_Y^2),$$

avec d égale à σ ou ϱ. On déduit alors de (16)–(18) que $\alpha=\beta$. ■

Corollaire. *Une famille de fonctions* $\{f_1,\dots,f_k\}$ *est* (LUSCI) *en* x *si et seulement si elle vérifie la propriété* (PD) *en* x. *Par conséquent, cette propriété implique la condition de découplage* (CD).

Démonstration. La première affirmation découle immédiatement de la définition de famille (LUSCI) et de la proposition ci-dessus. La deuxième affirmation provient de la proposition 3.9. ■

4. Règles du premier ordre pour une semi-norme arbitraire de X^*

Cette section est consacrée à une analyse théorique des principes et règles de somme approchées (voir (3) et (4)). Rappelons que nous entendons par *principe de somme* toute condition nécessaire du premier ordre pour qu'un point soit minimum local d'une somme de fonctions, et par *règle de somme* toute relation d'inclusion entre le sous-différentiel de la somme de fonctions et une certaine limite topologique de la somme des sous-différentiels de chaque fonction. Nous commençons notre étude par le cas le plus simple : celui de deux fonctions, dont l'une est convexe lipschitzienne, et avec la notion d'approximation déterminée par la topologie forte sur X^*. Nous considérons diverses propriétés qui se révèlent être équivalentes de façon assez naturelle. Nous remarquons ensuite que les arguments utilisés pour établir ces équivalences valent aussi pour le cas d'une famille de k fonctions satisfaisant une condition de qualification stable par ajout d'une fonction convexe lipschitzienne — par exemple, la condition (CQMG).

Les difficultés commencent lorsque l'on aborde les questions suivantes :

1. Les énoncés de base avec deux fonctions, dont une régulière, sont-ils "équivalents" aux énoncés avec k fonctions ?

2. Les énoncés avec k fonctions restent-ils “équivalents” lorsque la condition de qualification n'est plus stable par ajout d'une fonction convexe lipschitzienne — comme c'est le cas des conditions (LUSCI) et (CD) ?

Nous pouvons répondre positivement à ces questions en toute généralité — c'est-à-dire avec un sous-différentiel quelconque — en remplaçant la notion d'“équivalence” par une notion plus faible, appelée “N-équivalence”.

Les difficultés soulevées dans les deux questions ci-dessus ne sont pas du tout liées au type de topologie utilisée sur X^* pour exprimer l'approximation. C'est pourquoi nous poursuivons notre analyse en munissant X^* d'une simple semi-norme déterminée par un sous-ensemble borné fermé symétrique fixe A dans X — nous obtenons alors des A-règles. Ceci nous permet de traiter dans une même démarche tous les types d'approximation possibles, en particulier les deux plus couramment considérés : l'approximation forte et l'approximation faible. Cette façon de procéder nous permet également de comprendre pourquoi dans les principes et règles approchés faibles il n'y a pas besoin de condition de qualification sur les fonctions.

4.1. Principes de base. Les propriétés suivantes concernant deux fonctions, dont l'une est convexe lipschitzienne, sont équivalentes (voir théorème 4.2 ci-dessous). Compte tenu de l'usage sur l'espace dual X^* de la topologie de la norme pour les principes ci-dessous, nous les appelons *principes approchés* (forts) *de base*.

(B1) *Condition nécessaire pour un minimum local fort* ([6]). Soient $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et φ convexe lipschitzienne. Si z est un minimum local fort fini de $f+\varphi$, alors

$$0 \in \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{\substack{x \to_f z \\ y \to z}} (\partial f(x) + \partial\varphi(y)).$$

(B2) *Règle approchée mixte.* Soient $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et φ convexe lipschitzienne. Alors pour tout $z \in X$,

$$\partial^F (f+\varphi)(z) \subset \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{\substack{x \to_f z \\ y \to z}} (\partial f(x) + \partial\varphi(y)).$$

(B2$_\varepsilon$) *Règle approchée mixte (ε-version).* Soient $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et φ convexe lipschitzienne. Alors pour tout $z \in X$ et tout $\varepsilon \geq 0$,

$$\partial^F_\varepsilon (f+\varphi)(z) \subset \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{\substack{x \to_f z \\ y \to z}} (\partial f(x) + \partial\varphi(y) + \varepsilon\mathbb{B}^*).$$

(B3) *Contrôle par la pente forte* ([7]). Soient $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et φ convexe lipschitzienne.

([6]) Un point z est un *minimum local fort* de g s'il existe un voisinage U de z tel que toute suite $(z_n)_n \subset U$ avec $g(z_n)$ convergeant vers $\inf_U g$ converge vers z.

([7]) On rappelle que *la pente forte* [26] d'une fonction g au point x est définie par

$$|\nabla g|(x) := \limsup_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{(g(x)-g(y))^+}{\|x-y\|},$$

où $m^+ = \max(0,m)$ pour $m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Alors pour tout $z \in X$,

$$\liminf_{\substack{x \to_f z \\ y \to z}} \operatorname{dist}(0, \partial f(x) + \partial\varphi(y)) \le |\nabla(f+\varphi)|(z).$$

(B4) *Principe ∂-variationnel.* Soient $f \in \mathrm{SCI}(X)$, φ convexe lipschitzienne, $\lambda > 0$ et $\sigma > 0$. Si z vérifie

$$(f+\varphi)(z) < \inf_{B_\lambda(z)} (f+\varphi) + \lambda\sigma,$$

alors il existe (x, x^*) dans ∂f et (y, y^*) dans $\partial\varphi$ tels que

(i) $\|x - z\| < \lambda,\ \|y - z\| < \lambda,\ |f(x) + \varphi(y) - (f(z) + \varphi(z))| < \lambda\sigma$;
(ii) $\|x^* + y^*\| < \sigma$.

La proposition suivante décrit le lien entre le sous-différentiel de Fréchet à ε-près et la pente forte :

Proposition 4.1. *Pour tout $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $(x, x^*) \in X \times X^*$ et $\sigma \ge 0$, on a*

$$|\nabla(f - x^*)|(x) \le \sigma \ \Leftrightarrow\ x^* \in \partial^F_\sigma f(x).$$

Démonstration. Posons $g := f - x^*$. On a directement :

$$\begin{aligned} |\nabla g|(x) \le \sigma \ &\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0 : \inf_{\lambda > 0} \sup_{\substack{y \in B_\lambda(x) \\ y \ne x}} \frac{(g(x) - g(y))^+}{\|x - y\|} < \sigma + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\lambda > 0 : g(y) - g(x) > -(\sigma+\varepsilon)\|y - x\|, \forall y \in B_\lambda(x), y \ne x \\ &\Leftrightarrow\ 0 \in \partial^F_\sigma g(x) \ \Leftrightarrow\ x^* \in \partial^F_\sigma f(x). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 4.2. *Les principes de base* (B1)–(B4) *sont équivalents.*

Démonstration. On va successivement montrer les implications (B1)⇒(B4)⇒(B3)⇒(B2$_\varepsilon$)⇒(B2)⇒(B1).

(B1)⇒(B4). Une implication un peu moins générale est démontrée dans [37, Theorem 3.2], mais la trame de la preuve est valable aussi dans le cas présent. Soient $\lambda > 0$ et $\sigma > 0$ vérifiant

$$(f+\varphi)(z) < \inf_{B_\lambda(z)} (f+\varphi) + \lambda\sigma.$$

On applique d'abord le principe variationnel fort d'Ekeland [30, 38] à $g := f + \varphi + \delta_{B_\lambda(z)}$ avec $0 < \sigma' < \sigma$ tel que $g(z) < \inf_X g + \lambda\sigma'$ et avec $\lambda' \in]0, \lambda[$. On trouve alors un point $\widetilde{z} \in B_{\lambda'}(z)$, vérifiant $|(f+\varphi)(\widetilde{z}) - (f+\varphi)(z)| \le \lambda\sigma'$, qui est un minimum local fort de la fonction $f + \varphi + \sigma'\|\cdot - \widetilde{z}\|$.

On applique ensuite (B1) à f et $\psi := \varphi + \sigma'\|\cdot - \widetilde{z}\|$ au point $\widetilde{z}$. Pour $\varepsilon = \min\{\lambda - \lambda', \lambda(\sigma - \sigma')/2, \sigma - \sigma'\}$, on trouve alors (x, x^*) dans ∂f et (y, y^*) dans $\partial\psi$ tels que

(i) $\|x - \widetilde{z}\| < \varepsilon,\ \|y - \widetilde{z}\| < \varepsilon,\ |f(x) - f(\widetilde{z})| < \varepsilon,\ |\varphi(y) - \varphi(\widetilde{z})| < \varepsilon$;
(ii) $\|x^* + y^*\| < \varepsilon$.

Vu notre choix de ε, on a $\|x - z\| < \lambda' + \varepsilon \le \lambda$, et

$$\begin{aligned} |f(x) + \varphi(y) - f(z) - \varphi(z)| &\le |f(x) - f(\widetilde{z})| + |\varphi(y) - \varphi(\widetilde{z})| + |(f+\varphi)(\widetilde{z}) - (f+\varphi)(z)| \\ &< 2\varepsilon + \lambda\sigma' \le \lambda\sigma. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $y^* \in \partial\psi(y)$, d'après l'axiome (A1) et les règles de calcul de l'analyse convexe, on a $y^* = \bar{y}^* + \sigma\xi^*$ avec $\bar{y}^* \in \partial\varphi(y)$ et $\|\xi^*\| \leq 1$. On tire alors de (ii) que

$$\|x^* + \bar{y}^*\| \leq \|x^* + y^*\| + \|\bar{y}^* - y^*\| < \varepsilon + \sigma' \leq \sigma.$$

Ainsi, $(x, x^*) \in \partial f$ et $(y, \bar{y}^*) \in \partial\varphi$ vérifient les assertions de (B4).

(B4)⇒(B3). Soit $|\nabla(f+\varphi)|(z) < \sigma' < \sigma$. Il s'agit de montrer que

$$\liminf_{\substack{x \to_f z \\ y \to z}} \operatorname{dist}(0, \partial f(x) + \partial\varphi(y)) < \sigma,$$

c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe (x, x^*) dans ∂f et (y, y^*) dans $\partial\varphi$ tels que

(i) $\|x - z\| < \varepsilon,\ \|y - z\| < \varepsilon,\ |f(x) - f(z)| < \varepsilon,\ |\varphi(y) - \varphi(z)| < \varepsilon$;
(ii) $\|x^* + y^*\| < \sigma$.

Posons un instant $g = f + \varphi$. De la définition de la pente forte, on déduit qu'il existe $\lambda' > 0$ tel que

$$g(x) - g(y) < \sigma'\|x - y\| \quad \text{pour tout } y \in B_{\lambda'}(x),$$

ce qui implique que, pour tout $\lambda \in]0, \lambda']$, on a

$$g(x) < g(y) + \sigma'\lambda \quad \text{pour tout } y \in B_\lambda(x),$$

ou encore, pour tout $\lambda \in]0, \lambda']$,

$$g(x) \leq \inf_{B_\lambda(x)} g + \sigma'\lambda < \inf_{B_\lambda(x)} g + \sigma\lambda.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et appliquons (B4) avec $\lambda = \min\{\lambda', \varepsilon, \varepsilon/\sigma\}$. On obtient (x, x^*) dans ∂f et (y, y^*) dans $\partial\varphi$ tels que

(i) $\|x - z\| < \lambda \leq \varepsilon,\ \|y - z\| < \lambda \leq \varepsilon$;
(i′) $|f(x) + \varphi(y) - (f(z) + \varphi(z))| < \lambda\sigma \leq \varepsilon$;
(ii) $\|x^* + y^*\| < \sigma$.

Il ne reste plus qu'à observer que, comme f et φ sont sci en z, on peut toujours s'arranger pour que l'assertion (i′) s'écrive : $|f(x) - f(z)| < \varepsilon,\ |\varphi(y) - \varphi(z)| < \varepsilon$.

(B3)⇒(B2$_\varepsilon$). Soit $x^* \in \partial^F_\varepsilon(f + \varphi)(z)$. D'après la proposition 4.1, cela signifie que $|\nabla(f + \varphi - x^*)|(z) \leq \varepsilon$, et donc, d'après (B3) appliqué à f et $\varphi - x^*$, on a

$$\liminf_{\substack{x \to_f z \\ y \to z}} \operatorname{dist}(0, \partial f(x) + \partial\varphi(y) - x^*) \leq \varepsilon,$$

ce qui est en fait équivalent à

$$x^* \in \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{\substack{x \to_f z \\ y \to z}} (\partial f(x) + \partial\varphi(y) + \varepsilon\mathbb{B}^*),$$

comme on peut le vérifier.

Les implications (B2$_\varepsilon$)⇒(B2) ⇒(B1) sont évidentes. ■

Remarque 4.3. (1) Le principe ∂-variationnel (B4) avec $\varphi = x^* \in X^*$ est appelé “propriété de Brøndsted–Rockafellar” dans Geoffroy–Lassonde [37], où il est démontré d'une part qu'il découle de (B1), d'autre part qu'il implique le théorème classique d'analyse convexe qui a motivé son appellation.

(2) La considération de la propriété (B3) de contrôle de la somme par la pente forte a été motivée par les résultats contenus dans les articles récents de Azé–Corvellec–Lucchetti [9] et de Ioffe [52].

▶ Comme conséquence du théorème 4.2, nous déduisons deux nouvelles caractérisations des espaces d'Asplund :

COROLLAIRE 4.4. *Soit X un espace de Banach. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est un espace d'Asplund;*
(ii) *la propriété de contrôle par la pente forte* (B3) *est vraie sur X pour $\partial = \partial^F$;*
(iii) *le principe ∂-variationnel* (B4) *est vrai sur X pour $\partial = \partial^F$.*

Démonstration. Il résulte des travaux de Fabian [33, 34] et de Ioffe [42] que le principe (B1) avec $\partial = \partial^F$ caractérise les espaces d'Asplund, donc aussi les autres principes, d'après le théorème ci-dessus. ∎

REMARQUE 4.5. Des caractérisations des espaces d'Asplund à l'aide de versions a priori plus faibles du principe ∂-variationnel (B4), avec $\partial = \partial^F$, ont été observées récemment et indépendamment par Geoffroy–Lassonde [37, Remark 3.3], où $\varphi = x^* \in X^*$, et par Mordukhovich–Wang [61, Theorem 3.1], où $\varphi = 0$. Dans [61], il est montré que le principe variationnel lisse de Deville–Godefroy–Zizler [28] et, partiellement, celui de Borwein–Preiss [11] peuvent se déduire du principe (B4) avec $\varphi = 0$ et $\partial = \partial^F$; par analogie, ce dernier est appelé “Subdifferential Variational Principle”. Nous avons repris cette terminologie ici.

4.2. Cas des familles fortement découplables. Le but de cette sous-section est de faire remarquer que le théorème 4.2 (concernant l'équivalence des principes de base avec deux fonctions dont l'une est régulière) s'étend sans difficulté au cas de familles de k fonctions satisfaisant une condition de qualification stable par ajout d'une fonction convexe lipschitzienne.

Il est clair en effet que l'on peut déjà remplacer sans dommage dans les énoncés des principes (B1)–(B4), la fonction régulière φ par une somme de $k-1$ fonctions convexes lipschitziennes $\varphi_1 + \ldots + \varphi_{k-1}$ et le sous-différentiel $\partial\varphi$ par les sous-différentiels $\partial\varphi_1, \ldots, \partial\varphi_{k-1}$: ces principes avec k fonctions, dont toutes sauf au plus une sont convexes lipschitziennes, restent équivalents entre eux.

Plus généralement, il est possible de remplacer dans ces énoncés les fonctions f et φ par k fonctions $f_1, \ldots, f_k$ qui satisfont à la condition de *forte découplabilité* suivante :

La famille $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est dite *fortement découplable près de x* si, pour toute fonction convexe lipschitzienne φ, la famille $\{f_1, \ldots, f_k, \varphi\}$ est découplable en tout point $\widetilde{x}$ proche de x.

REMARQUE 4.6. Notons que toute famille de fonctions vérifiant l'une des propriétés (a)–(e) listées dans la section 2.4, page 18, est fortement découplable près de x.

Pour plus de clarté, il est préférable d'écrire explicitement ces règles. Pour toute famille $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathrm{SCI}(X)$ de k fonctions, on considère :

(B1)$_k$ *Condition nécessaire pour un minimum local fort.* Si x est un minimum local fort fini de $\sum_{i=1}^k f_i$ et que $\{f_1,\ldots,f_k\}$ est fortement découplable près de x, alors

$$0 \in \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x_i \to_{f_i} x} \sum_{i=1}^k \partial f_i(x_i).$$

(B2)$_k$ *Règle approchée mixte.* Si $\{f_1,\ldots,f_k\}$ est fortement découplable près de x, alors

$$\partial^F\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) \subset \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x_i \to_{f_i} x} \sum_{i=1}^k \partial f_i(x_i).$$

(B2$_\varepsilon$)$_k$ *Règle approchée mixte* (ε*-version*). Si $\{f_1,\ldots,f_k\}$ est fortement découplable près de x, alors pour tout $\varepsilon \geq 0$,

$$\partial^F_\varepsilon\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) \subset \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x_i \to_{f_i} x} \Big(\sum_{i=1}^k \partial f_i(x_i) + \varepsilon \mathbb{B}^*\Big).$$

(B3)$_k$ *Contrôle par la pente forte.* Si $\{f_1,\ldots,f_k\}$ est fortement découplable près de x, alors

$$\liminf_{x_i \to_{f_i} x} \operatorname{dist}\Big(0, \sum_{i=i}^k \partial f_i(x_i)\Big) \leq \Big|\nabla\Big(\sum_{i=i}^k f_i\Big)\Big|(x).$$

(B4)$_k$ *Principe ∂-variationnel.* Soient $\lambda > 0$ et $\sigma > 0$. Si x vérifie

$$\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) < \inf_{B_\lambda(x)} \Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big) + \lambda\sigma,$$

et que $\{f_1,\ldots,f_k\}$ est fortement découplable près de x, alors il existe $(\overline{x}_i, \overline{x}_i^*)$ dans ∂f_i, $i = 1,\ldots,k$, tels que

(i) $\|\overline{x}_i - x\| < \lambda$, $|\sum_{i=1}^k (f_i(\overline{x}_i) - f_i(x))| < \lambda\sigma$, $i = 1,\ldots,k$;
(ii) $\|\overline{x}_1^* + \ldots + \overline{x}_k^*\| < \sigma$.

Théorème 4.7. *Les principes à k fonctions* (B1)$_k$–(B4)$_k$ *sont équivalents, c'est-à-dire, étant donné un sous-différentiel quelconque ∂, les espaces X sur lesquels ces propriétés sont vraies sont les mêmes.*

Démonstration. C'est exactement la même que celle du théorème 4.2. Il suffit en effet d'observer que les arguments suivants sont possibles :

— pour passer de (B1)$_k$ à (B4)$_k$, on applique (B1)$_k$ à $\{f_1,\ldots,f_k,\sigma'\|.-\widetilde{x}\|\}$ en un point $\widetilde{x}$ proche de x ;

— pour passer de (B3)$_k$ à (B2$_\varepsilon$)$_k$, on applique (B3)$_k$ à $\{f_1,\ldots,f_k,-x^*\}$ au point x. ∎

Remarque 4.8. Étant donné un sous-différentiel ∂, un espace X vérifiant (B1)$_k$ pour toute famille de fonctions $f_1,\ldots,f_k$ dont toutes sauf au plus une sont localement lipschitziennes est appelé ∂-fiable ("∂-trustworthy") par Ioffe [52], qui démontre (B1)$_k$⇒(B3)$_k$ dans ce cas [52, Proposition 2].

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, les différentes considérations ci-dessus ont suscité deux questions :

(1) Les principes de base (B1)–(B4), pour deux fonctions dont une convexe lipschitzienne, sont-ils équivalents aux règles $(\mathrm{B1})_k$–$(\mathrm{B3})_k$, pour k fonctions fortement découplables?

(2) Les règles $(\mathrm{B1})_k$–$(\mathrm{B3})_k$, pour k fonctions fortement découplables, restent-elles équivalentes entre elles si l'on remplace "fortement découplables" par "découplables"?

Nous n'avons pu répondre à ces questions en toute généralité (la réponse est oui pour le sous-différentiel canonique de Fréchet). Par contre, nous allons montrer que la réponse aux deux questions est effectivement positive, si l'on considère une notion d'"équivalence" plus faible (appelée "N-équivalence" dans la section suivante).

4.3. Présentation des A-règles. Ayant remarqué que le passage d'un principe basé sur deux fonctions, dont une convexe lipschitzienne, à une règle de somme générale pour k fonctions n'était pas lié au type de convergence utilisé sur X^*, nous avons voulu présenter une seule démonstration pour les convergences définies sur X^*.

Vu que les convergences fortes et faibles sur X^* sont des cas particuliers de convergences uniformes sur certaines parties bornées de X, pour englober ces deux notions nous allons munir X^* d'une topologie de convergence uniforme sur un ensemble borné fixe de X.

Soit $A \subset X$ un ensemble fermé borné et symétrique ; on note p_A la fonction d'appui de A (à savoir $p_A(x^*) = \sup_{v\in A}\langle x^*, v\rangle$ pour tout $x^* \in X^*$, c'est une semi-norme puisque A est symétrique) et E_A l'espace vectoriel fermé engendré par A.

Définition 4.9. Une famille de fonctions $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est dite *A-découplable* en x si la famille $\{f_1, \ldots, f_k, \delta_{x+E_A}\}$ est découplable en x, i.e. pour tout $\lambda > 0$ petit,

$$(\mathrm{CD}_A) \qquad r_{B_\lambda(x)}(f_1 + \ldots + f_k + \delta_{x+E_A}) = r_{B_\lambda(x)}(f_1, \ldots, f_k, \delta_{x+E_A}).$$

Remarque 4.10. (1) En prenant pour A la boule unité de X dans la définition ci-dessus, on retrouve la notion de famille découplable (définition 3.5) car $E_A = X$ donc $\delta_{x+E_A} \equiv 0$.

(2) Lorsque A est un ensemble fini de points de X, l'espace vectoriel E_A est de dimension finie, donc la fonction caractéristique δ_{x+E_A} est localement inf-compacte, et par conséquent la condition (CD_A) est toujours vérifiée, d'après la proposition 3.9.

(3) La condition de qualification (CD_A) tient compte de l'ensemble A permettant de définir la topologie sur l'espace dual X^*. Selon la topologie choisie, elle sera trivialement vérifiée ou non. Avec les démonstrations qui suivent, nous verrons que tous les résultats de somme utilisent donc bien une condition de qualification même si elle est implicite.

Nous nous limiterons ici à quatre règles : la première est le pendant du principe de base (B1), les trois autres correspondent, respectivement, aux règles $(\mathrm{B1})_k$, $(\mathrm{B2})_k$ et $(\mathrm{B2}_\varepsilon)_k$. Remarquons qu'apparaissent dans ces trois dernières règles des conclusions renforcées par une assertion (iii) qui stipule un contrôle sur le comportement des couples $(\overline{x}_i, \overline{x}_i^*)$. La première règle, quant à elle, reste aussi simple que possible.

$(A\text{-B})_\partial$ *A-principe approché de base.* Soient $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et φ convexe lipschitzienne. Si z est un minimum local fort fini de $f + \varphi$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(\overline{x}, \overline{x}^*)$ dans ∂f et $(\overline{y}, \overline{y}^*)$ dans $\partial\varphi$ tels que

(i) $\|\overline{x}-z\|<\varepsilon,\ \|\overline{y}-z\|<\varepsilon,\ |f(\overline{x})-f(z)|<\varepsilon$;
(ii) $p_A(\overline{x}^*+\overline{y}^*)<\varepsilon$.

$(A\text{-P})_\partial$ *A-principe approché.* Soient $\{f_1,\dots,f_k\}\subset \mathrm{SCI}(X)$. Si x est un minimum local de $\sum_{i=1}^k f_i$ sur $x+E_A$ et que $\{f_1,\dots,f_k\}$ est A-découplable en x, alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe $(\overline{x}_i,\overline{x}_i^*)\in\partial f_i$, $i=1,\dots,k$, tels que

(i) $\|\overline{x}_i-x\|<\varepsilon,\ |f_i(\overline{x}_i)-f_i(x)|<\varepsilon,\ i=1,\dots,k$;
(ii) $p_A(\overline{x}_1^*+\ldots+\overline{x}_k^*)<\varepsilon$;
(iii) $\operatorname{diam}(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_k)p_A(\overline{x}_i^*)<\varepsilon,\ i=1,\dots,k$.

$(A\text{-R}_\sigma)_\partial$ *A-règle approchée mixte (σ-version).* Soient $\{f_1,\dots,f_k\}\subset\mathrm{SCI}(X)$ et $\sigma\geq 0$. On pose $M:=\max\{1,\operatorname{diam}A\}$. Si

$$(x,x^*)\in\partial_\sigma^F\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)_{x+E_A}$$

et que $\{f_1,\dots,f_k,-x^*\}$ est A-découplable en x, alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe $(\overline{x}_i,\overline{x}_i^*)\in\partial f_i$, $i=1,\dots,k$, tels que

(i) $\|\overline{x}_i-x\|<\varepsilon,\ |f_i(\overline{x}_i)-f_i(x)|<\varepsilon,\ i=1,\dots,k$;
(ii) $p_A(\overline{x}_1^*+\ldots+\overline{x}_k^*-x^*)<\varepsilon+M\sigma$;
(iii) $\operatorname{diam}(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_k)p_A(\overline{x}_i^*)<\varepsilon,\ i=1,\dots,k$.

$(A\text{-R})_\partial$ *A-règle approchée mixte.* C'est la règle $(A\text{-R}_\sigma)_\partial$ avec $\sigma=0$.

4.4. Équivalence des A-règles. Cette dernière sous-section est consacrée à la démonstration du théorème central de cet article.

Théorème 4.11. *Pour tout sous-différentiel ∂, tout espace de Banach X et tout ensemble fermé borné et symétrique A, les quatre énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *le A^N-principe approché de base $(A^N\text{-B})_\partial$ est vérifié sur X^N, pour tout entier naturel N ;*

(ii) *le A^N-principe approché $(A^N\text{-P})_\partial$ est vérifié sur X^N, pour tout entier naturel N ;*

(iii) *la A^N-règle approchée mixte $(A^N\text{-R})_\partial$ est vérifiée sur X^N, pour tout entier naturel N ;*

(iv) *la A^N-règle approchée mixte (σ-version) $(A^N\text{-R}_\sigma)_\partial$ est vérifiée sur X^N, pour tout entier naturel N ;*

Démonstration. Les implications (iv)⇒(iii)⇒(ii) sont évidentes. L'implication (ii)⇒(i) est facile aussi. En effet, pour pouvoir utiliser (ii) sous les hypothèses de (i), il faut vérifier que si z est un minimum local de $f+\varphi$, alors z est un minimum local de $f+\varphi$ sur $z+E_A$, c'est évident, et $\{f,\varphi\}$ est A-découplable en z, ce qui découle des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
r_{B_\lambda(z)}(f+\varphi+\delta_{z+E_A}) &\leq (f+\varphi+\delta_{z+E_A})(z)=(f+\varphi)(z)\\
&= r_{B_\lambda(z)}(f+\varphi) \qquad \text{(car z est minimum local de $f+\varphi$)}\\
&= r_{B_\lambda(z)}(f,\varphi) \qquad \text{(d'après la proposition 3.2)}\\
&\leq r_{B_\lambda(z)}(f,\varphi,\delta_{z+E_A}).
\end{aligned}$$

Il reste donc à montrer (i)$\Rightarrow$(iv). Pour cela, nous reprenons le schéma de la démonstration de (R1)$\Rightarrow$(R4)$\Rightarrow$(R5) dans [57, Theorem 3.1]. Nous procéderons en trois étapes.

Étape 1. Soit $\varepsilon > 0$. On note $f_{k+1} := -x^*$ et $f_{k+2} := \delta_{x+E_A}$. Puisque les $k+2$ fonctions f_i sont sci en x, il existe $\lambda_0 > 0$ telle que, pour chaque i dans $\{1, \dots, k+2\}$, on a

$$f_i(x) < f_i(y) + \frac{\varepsilon}{12M(k+2)} \tag{19}$$

dès que y appartient à $B_{2\lambda_0}(x)$.

De l'hypothèse de départ dans $(A\text{-R}_\sigma)_\partial$, on déduit que

$$\liminf_{t\to 0+} \inf_{v\in\mathbb{B}} \left[\frac{(\sum_{i=1}^k f_i)_{x+E_A}(x+tv) - (\sum_{i=1}^k f_i)_{x+E_A}(x)}{t} - \langle x^*, v\rangle\right] \geq -\sigma.$$

Comme x appartient à $x+E_A$ et que $(\sum_{i=1}^k f_i)_{x+E_A}$ vaut $+\infty$ en dehors de $x+E_A$, on a

$$\liminf_{t\to 0+} \inf_{v\in\mathbb{B}\cap E_A} \left[\frac{(\sum_{i=1}^k f_i)(x+tv) - (\sum_{i=1}^k f_i)(x)}{t} - \langle x^*, v\rangle\right] \geq -\sigma.$$

Posons

$$\gamma := \min\left\{\frac{\varepsilon}{24M}, \lambda_0, \lambda_1\right\} \tag{20}$$

où λ_1 est le réel à partir duquel (CD_A) est vérifiée. D'après l'inégalité ci-dessus, il existe η dans $]0,\gamma]$ tel que, pour tout t dans $]0,\eta]$, on a

$$-\sigma-\gamma < \inf_{v\in\mathbb{B}\cap E_A} \left[\frac{(\sum_{i=1}^k f_i)(x+tv) - (\sum_{i=1}^k f_i)(x)}{t} - \langle x^*, v\rangle\right].$$

En faisant $t=\eta$ et $y = x+\eta v$ dans cette inégalité, on obtient

$$-(\sigma+\gamma)\eta < \inf_{y\in x+B_\eta\cap E_A} \left[\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(y) - \Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) - \langle x^*, y-x\rangle\right].$$

Soit $0 < \eta' < \eta$ tel que

$$-(\sigma+\gamma)\eta < -(\sigma+\gamma)\eta' < \inf_{y\in x+B_\eta\cap E_A} \left[\Big(\sum_{i=1}^k f_i)(y) - \Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) - \langle x^*, y-x\rangle\right],$$

c'est-à-dire

$$\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) - \langle x^*, x\rangle < \inf_{y\in B_\eta(x)} \left[\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(y) - \langle x^*, y\rangle + \delta_{x+E_A}(y)\right] + (\sigma+\gamma)\eta'.$$

On en déduit que

$$\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) - \langle x^*, x\rangle < r_{B_{\eta'}(x)}\Big(\sum_{i=1}^k f_i - x^* + \delta_{x+E_A}\Big) + (\sigma+\gamma)\eta'.$$

Il découle de cette dernière inégalité, de (CD_A) et du choix de η' inférieur à λ_1 que

$$\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) - \langle x^*, x\rangle < r_{B_{\eta'}(x)}(f_1, \dots, f_k, -x^*, \delta_{x+E_A}) + (\sigma+\gamma)\eta'. \tag{21}$$

Étape 2. On considère l'espace produit X^{k+2} muni de la norme du max donnée par

$$\|(x_1,\dots,x_{k+2})\| = \max_{1\le i\le k+2} \|x_i\|.$$

Notons $F : X^{k+2} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ la fonction somme découplée définie par

$$F(x_1,\dots,x_{k+2}) := \sum_{i=1}^{k+2} f_i(x_i),$$

$Y := \Delta(X^{k+2})$ la diagonale de X^{k+2} et $\hat{x}$ l'élément $(x,\dots,x)$ de Y.

On rappelle que

$$r_{B_{\eta'}(x)}(f_1,\dots,f_{k+2}) = \lim_{\delta\to 0} \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{k+2} f_i(x_i) \Bigm| \operatorname{diam}(x_1,\dots,x_{k+2}) \le \delta,\ x_i \in B_{\eta'+\delta}(x),\ i=1,\dots,k+2\Big\}.$$

Comme $[B_{\eta'+\delta}(x)]^{k+2} = B_{\eta'+\delta}(\hat{x})$, on a

$$\begin{aligned} &r_{B_{\eta'}(x)}(f_1,\dots,f_{k+2})\\ &\quad\le \lim_{\delta\to 0}\inf\{F(x_1,\dots,x_{k+2}) \mid \operatorname{diam}(x_1,\dots,x_{k+2}) \le \delta,\ (x_1,\dots,x_{k+2}) \in B_{\eta'}(\hat{x})\}\\ &\quad= \lim_{\delta\to 0}\inf\{(F+\delta_{B_{\eta'}(\hat{x})})(x_1,\dots,x_{k+2}) \mid \operatorname{diam}(x_1,\dots,x_{k+2}) \le \delta\}\\ &\quad= r_Y(F+\delta_{B_{\eta'}(\hat{x})}). \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (21) implique que

$$F(\hat{x}) < r_Y(F+\delta_{B_{\eta'}(\hat{x})}) + \eta'(\sigma+\gamma).$$

On précise ici que la fonction F est bornée inférieurement sur la boule $B_{\eta'}(\hat{x})$. En effet, le rayon η' étant inférieur à λ_0, il résulte de l'inégalité (19) que pour tout $y := (y_1,\dots,y_{k+2})$ dans la boule $B_{\eta'}(\hat{x})$ de X^{k+2} on a

$$f_i(x) < f_i(y_i) + \frac{\varepsilon}{2(k+2)}, \qquad i=1,\dots,k+2,$$

donc

$$F(\hat{x}) < F(y) + \varepsilon/2.$$

D'après la proposition 3.16, on a

$$r_Y(F+\delta_{B_{\eta'}(\hat{x})}) = \lim_{K\to\infty} \inf_{X^{k+2}} (F+\delta_{B_{\eta'}(\hat{x})} + Kd_Y).$$

Il existe donc $K \ge 1$ tel que

$$F(\hat{x}) < \inf_{X^{k+2}} (F+\delta_{B_{\eta'}(\hat{x})} + Kd_Y) + \eta'(\sigma+\gamma).$$

Par commodité, on choisit K de sorte que

$$\left(\frac{\varepsilon}{12M} + \frac{\gamma}{K} + \gamma\right)\left(\frac{\gamma}{K^2} + M + \frac{(\sigma+\gamma)M}{K}\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{22}$$

On applique maintenant le principe variationnel fort d'Ekeland [30, 38] à la fonction $F+\delta_{B_{\eta'}(\hat{x})} + Kd_Y$ sur X^{k+2}. On trouve alors un élément $\widetilde{x} := (\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_{k+2})$ dans X^{k+2}

qui vérifie

(23) $\|\widetilde{x} - \hat{x}\| < \eta' < \gamma,$

(24) $F(\widetilde{x}) + Kd_Y(\widetilde{x}) \leq F(\hat{x}),$

(25) $F + \delta_{B_{\eta'}(\hat{x})} + Kd_Y + (\sigma+\gamma)\|\cdot - \widetilde{x}\|$ atteint un minimum fort en $\widetilde{x}$.

Les assertions (23) et (25) prouvent que $F + Kd_Y + (\sigma+\gamma)\|\cdot - \widetilde{x}\|$ atteint un minimum local fort en $\widetilde{x}$.

Étape 3. On peut dès lors appliquer (A^{k+2}-B) sur X^{k+2} avec $f := F$, $\varphi := Kd_Y + (\sigma+\gamma)\|\cdot - \widetilde{x}\|$ et $\varepsilon := \gamma/K$. On obtient des éléments $(\overline{x}, \overline{x}^*) := (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{k+2}, \overline{x}_1^*, \ldots, \overline{x}_{k+2}^*)$ dans ∂F et $(\overline{y}, \overline{y}^*) := (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{k+2}, \overline{y}_1^*, \ldots, \overline{y}_{k+2}^*)$ dans $\partial\varphi$ tels que

(26) $$\|\overline{x} - \widetilde{x}\| < \gamma/K,$$

(27) $$|F(\overline{x}) - F(\widetilde{x})| < \gamma/K,$$

(28) $$p_{\hat{A}}(\overline{x}^* + \overline{y}^*) < \gamma/K,$$

où l'on a posé $\hat{A} := A^{k+2}$. On déduit de l'axiome (A2) que chaque élément $\overline{x}_i^*$ appartient à $\partial f_i(\overline{x}_i)$, pour $i = 1, \ldots, k+2$.

Dans ce qui suit, on va prouver que les couples $(\overline{x}_i, \overline{x}_i^*)$, $i = 1, \ldots, k$, satisfont les assertions (i)–(iii). Les inégalités (23) et (26) entraînent que $\|\overline{x} - \hat{x}\| < 2\gamma$, on a donc $\|\overline{x}_i - x\| < 2\gamma \leq \varepsilon$, pour $i = 1, \ldots, k$. D'autre part, d'après (24) et (27), on a

(29) $$Kd_Y(\widetilde{x}) \leq F(\hat{x}) - F(\overline{x}) + \gamma/K.$$

Comme $\overline{x}_i \in B_{2\gamma}(x) \subset B_{2\lambda_0}(x)$, l'inégalité (19) implique déjà que

$$f_i(x) < f_i(\overline{x}_i) + \frac{\varepsilon}{2(k+2)}$$

pour $i = 1, \ldots, k+2$. Par ailleurs, en sommant ces inégalités, on obtient pour tout j dans $\{1, \ldots, k\}$,

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k+2} f_i(x) < \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k+2} f_i(\overline{x}_i) + \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui combiné avec (29) donne

$$\sum_{i=1}^{k+2} f_i(\overline{x}_i) \leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k+2} f_i(\overline{x}_i) + f_j(x) + \gamma + \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où $f_j(\overline{x}_j) \leq f_j(x) + \varepsilon$. Ceci prouve l'assertion (i).

L'axiome (A1) et les règles de calcul de l'analyse convexe, nous permettent d'établir que

(30) $$\overline{x}_{k+1}^* \in \partial(-x^*)(\overline{x}_{k+1}) = \{-x^*\},$$

(31) $$\overline{x}_{k+2}^* \in \partial(\delta_{x+E_A})(\overline{x}_{k+2}) = E_A^\perp,$$

(32) $$\overline{y}^* \in \partial(Kd_Y + (\sigma+\gamma)\|.-\widetilde{x}\|)(\overline{y}) \subset KY^\perp + (\sigma+\gamma)\mathbb{B}^*.$$

En effet, (30) est immédiat et (31) dérive de l'appartenance de $\overline{x}_{k+2}$ à $x + E_A$ (voir (27)). Concernant (32), on précise d'abord que $\overline{y}^* = K\overline{z}^* + (\sigma+\gamma)\xi^*$ où $\|\xi^*\| \leq 1$ et

$\overline{z}^* \in \partial d_Y(\overline{y})$. Comme

$$\langle \overline{z}^*, \overline{z}\rangle \le d_Y(\overline{z}+\overline{y}) - d_Y(\overline{y})$$

pour tout $\overline{z}$ dans X^{k+2} et vu que $d_Y(\overline{z}+\overline{y}) = d_Y(\overline{y})$ dès que $\overline{z}$ est dans Y, on en déduit que $\overline{z}^* \in Y^\perp$, ce qui établit (32).

Il provient de (32) que

$$p_{\hat{A}\cap Y}(\overline{y}^*) \le (\sigma+\gamma)M.$$

Donc, l'inégalité (28) assure que

$$p_{\hat{A}\cap Y}(\overline{x}^*) < \gamma/K + p_{\hat{A}\cap Y}(\overline{y}^*),$$

d'où

(33) $$p_{\hat{A}\cap Y}(\overline{x}^*) \le 2\gamma M + \sigma M.$$

Pour clôturer la preuve de (ii), on constate d'abord que

$$\begin{aligned} p_{\hat{A}\cap Y}(\overline{x}^*) &= \sup_{(v_1,\ldots,v_{k+2})\in A^{k+2}\cap Y} \langle (\overline{x}_1^*,\ldots,\overline{x}_{k+2}^*),(v_1,\ldots,v_{k+2})\rangle \\ &= \sup_{v\in A} \langle (\overline{x}_1^*,\ldots,\overline{x}_{k+2}^*),(v,\ldots,v)\rangle \\ &= \sup_{v\in A} \sum_{i=1}^{k+1} \langle \overline{x}_i^*, v\rangle = p_A\Big(\sum_{i=1}^{k+1}\overline{x}_i^*\Big), \end{aligned}$$

grâce à (31). Par suite, (30), (33) et (20) permettent de conclure que

$$p_A(\overline{x}_1^* + \ldots + \overline{x}_k^* - x^*) \le 2M\gamma + \sigma M \le \varepsilon + \sigma M.$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer l'assertion (iii). On voit facilement à partir de (26) que $Kd_Y(\overline{x}) \le Kd_Y(\widetilde{x}) + \gamma$ et à partir de (19) que $F(\hat{x}) - F(\overline{x}) < \varepsilon/(12M)$, tout ceci combiné avec (29) donne

$$Kd_Y(\overline{x}) \le \frac{\varepsilon}{12M} + \frac{\gamma}{K} + \gamma.$$

Par ailleurs, $p_{\hat{A}}(\overline{y}^*) \le Kp_{\hat{A}}(\overline{z}^*) + (\sigma+\gamma)p_{\hat{A}}(\xi^*)$ avec $\|\xi^*\| \le 1$ et $\overline{z}^* \in \partial d_Y(\overline{y})$, donc combiné à (28), on a $p_{\hat{A}}(\overline{x}^*) < \gamma/K + KM + (\sigma+\gamma)M$. Ainsi, on en déduit grâce au choix de γ en (20) et de K en (22) que

$$d_Y(\overline{x})p_{\hat{A}}(\overline{x}^*) < \varepsilon/2.$$

Pour finir, on notera que

$$\operatorname{diam}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k) \le 2d_{\Delta(X^k)}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k) \le 2d_Y(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_{k+2}) \quad \text{et} \quad p_{\hat{A}}(\overline{x}^*) = \sum_{i=1}^{k+1} p_A(\overline{x}_i^*)$$

puisque $p_A(\overline{x}_{k+2}^*) = 0$. Finalement, on déduit des trois dernières inégalités que

$$\operatorname{diam}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)\sum_{i=1}^{k} p_A(\overline{x}_i^*) \le \varepsilon,$$

ce qui achève cette démonstration. ■

Remarque 4.12. La démonstration ci-dessus montre qu'au lieu de la condition de découplage

(CD) $$r_{B_{\eta'}(x)}(f_1+\ldots+f_{k+2}) = r_{B_{\eta'}(x)}(f_1,\ldots,f_{k+2}),$$

il suffit de supposer la condition a priori plus faible

$$r_{B_{\eta'}(x)}(f_1 + \ldots + f_{k+2}) \leq r_X((f_1)_{B_{\eta'}(x)}, \ldots, (f_{k+2})_{B_{\eta'}(x)}).$$

5. Règles du premier ordre : cas fort

Cette section est dédiée aux conséquences du théorème d'équivalence des A-règles (théorème 4.11) dans le cas particulier où A est la boule unité fermée de X. Dans la sous-section 5.1, on explicite la liste des règles approchée fortes ainsi obtenues, complétée par la propriété de contrôle de la somme par la pente forte. Toutes constituent de nouvelles caractérisations des espaces ∂-réguliers, elles viennent donc s'ajouter aux listes établies dans [72, 50, 57]. Les règles approchée fortes ont suscité de nombreux travaux. Dans la sous-section 5.2, nous montrons comment la plupart d'entre eux s'obtiennent comme conséquences de nos résultats. Dans la sous-section 5.3, nous présentons un résultat de somme approchée faible renforcée, dans la ligne de celui de Borwein–Zhu [15, théorème 2.11] (théorème 1.3 de la section 1.1), avec une précision supplémentaire qui s'avérera cruciale dans les applications à l'analyse convexe (voir Jules–Lassonde [55]). Enfin, la dernière sous-section est consacrée aux problèmes de reconstitution des sous-différentiels élémentaires.

5.1. Règles fortes et espaces ∂-réguliers. On traduit l'expression des A-règles introduites à la section précédente dans le cas particulier où $A = \mathbb{B}$, la boule unité fermée de X : la condition de A-découplage (CD$_A$) coïncide alors avec la condition de découplage (CD). Les règles $(A\text{-B})_\partial$, $(A\text{-P})_\partial$, $(A\text{-R})_\partial$ et $(A\text{-R}_\sigma)_\partial$ deviennent, respectivement, $(\text{B})_\partial$, $(\text{P})_\partial$, $(\text{R})_\partial$ et $(\text{R}_\varepsilon)_\partial$. On complète cette liste par la propriété $(\text{Pente})_\partial$ de contrôle de la somme par la pente forte. En clair, on considère les règles approchée fortes suivantes :

$(\text{B})_\partial$ *Principe approché fort de base.* Soient $f \in \text{SCI}(X)$ et φ convexe lipschitzienne. Si z est un minimum local fort fini de $f + \varphi$, alors

$$0 \in \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{\substack{x \to_f z \\ y \to z}} (\partial f(x) + \partial\varphi(y)).$$

$(\text{P})_\partial$ *Principe approché fort.* Soit $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \text{SCI}(X)$. Si x est un minimum local de $\sum_{i=1}^k f_i$, alors

$$0 \in \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x_i \xrightarrow{+} x} \sum_{i=1}^{k} \partial f_i(x_i),$$

dès que $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est découplable en x.

$(\text{R})_\partial$ *Règle approchée forte mixte.* Soit $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \text{SCI}(X)$. Pour tout $x \in X$,

$$x^* \in \partial^F\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i\Big)(x) \;\Rightarrow\; x^* \in \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x_i \xrightarrow{+} x} \sum_{i=1}^{k} \partial f_i(x_i),$$

dès que $\{f_1, \ldots, f_k, -x^*\}$ est découplable en x.

$(\mathrm{R}_\varepsilon)_\partial$ *Règle approchée forte mixte* (ε*-version*). Soit $\{f_1,\dots,f_k\}\subset \mathrm{SCI}(X)$. Pour tout $x\in X$ et tout $\varepsilon\geq 0$,

$$x^*\in\partial^F_\varepsilon\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x)\ \Rightarrow\ x^*\in\|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x_i\xrightarrow{+}_{f_i}x}\Big(\sum_{i=1}^k\partial f_i(x_i)+\varepsilon\mathbb{B}^*\Big),$$

dès que $\{f_1,\dots,f_k,-x^*\}$ est découplable en x.

$(\mathrm{Pente})_\partial$ *Contrôle par la pente forte.* Soit $\{f_1,\dots,f_k\}\subset \mathrm{SCI}(X)$. Pour tout $x\in X$,

$$\liminf_{x_i\xrightarrow{+}_{f_i}x}\operatorname{dist}\Big(0,\sum_{i=i}^k\partial f_i(x_i)\Big)\leq\Big|\nabla\Big(\sum_{i=i}^k f_i\Big)\Big|(x),$$

dès que $\{f_1,\dots,f_k\}$ est découplable en x.

On dira que deux propriétés (a) et (b) sur X sont *N-équivalentes*, noté (a) $\overset{N}{\Leftrightarrow}$ (b), pour signifier que si l'une est vraie sur X^N pour tout entier naturel N, alors l'autre aussi. On renvoie à la page 16 pour le rappel de la définition d'espace ∂-régulier.

Théorème 5.1. *Un espace de Banach X est ∂-régulier si et seulement si une des règles* $(\mathrm{P})_\partial$, $(\mathrm{R})_\partial$, $(\mathrm{R}_\varepsilon)_\partial$ ou $(\mathrm{Pente})_\partial$ *est vraie sur X^N pour tout entier naturel N. Autrement dit, les règles* $(\mathrm{B})_\partial$, $(\mathrm{P})_\partial$, $(\mathrm{R})_\partial$, $(\mathrm{R}_\varepsilon)_\partial$ *et* $(\mathrm{Pente})_\partial$ *sont N-équivalentes.*

Démonstration. Il découle immédiatement du théorème 4.11, avec $A=\mathbb{B}$, que les règles $(\mathrm{B})_\partial$, $(\mathrm{P})_\partial$, $(\mathrm{R})_\partial$ et $(\mathrm{R}_\varepsilon)_\partial$ sont N-équivalentes. Par ailleurs, il est facile de voir, grâce à la proposition 4.1, que $(\mathrm{R}_\varepsilon)_\partial$ est équivalent à $(\mathrm{Pente})_\partial$. ∎

5.2. Règles de somme fortes. Du théorème 5.1, on déduit aussitôt un résultat général de sommes approchées fortes valable pour tout sous-différentiel inclus dans le sous-différentiel de Fréchet :

Corollaire 5.2. *Soient X un espace de Banach ∂-régulier avec $\partial\subset\partial^F$, $\{f_1,\dots,f_k\}\subset$ $\mathrm{SCI}(X)$, $x\in X$ et $\varepsilon\geq 0$. Si $\{f_1,\dots,f_k,X^*\}$ est découplable en x, alors*

$$\partial_\varepsilon\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x)\subset\|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x_i\xrightarrow{+}_{f_i}x}\Big(\sum_{i=1}^k\partial f_i(x_i)+\varepsilon\mathbb{B}^*\Big).$$

Ce résultat s'inscrit dans la ligne des travaux réalisés à ce jour sur les règles de somme approchée pour les sous-différentiels. Son apport réside, en partie, dans le fait qu'il propose une démonstration unique et un énoncé unifié pour l'ensemble de ces résultats. Exemples d'application du corollaire 5.2 :

— Si X est de dimension finie, alors X est ∂^F-régulier et $\{f_1,\dots,f_k,X^*\}$ est toujours découplable en x (proposition 3.11). On retrouve le théorème 1.1 de Ioffe (1984), en prenant $\partial=\partial^F=\partial^H$ et $\varepsilon=0$.

— Si X est un espace d'Asplund et que $k-1$ fonctions sont lipschitziennes près de x, alors X est ∂^F-régulier et $\{f_1,\dots,f_k,X^*\}$ est découplable en x (proposition 3.9). On retrouve le théorème 1.2 de Fabian (1989), en prenant $\partial=\partial^F$.

— Si X est un espace admettant une renorme Fréchet-différentiable, et que $k-1$ fonctions sont lipschitziennes près de x, alors X est ∂^F-régulier et $\{f_1,\dots,f_k,X^*\}$ est découplable en x (proposition 3.9). On retrouve le lemme 1 dans [49], en prenant $\partial = \partial^F$ et $\varepsilon = 0$.

— Si X est un espace de Hilbert, et que les fonctions sont séquentiellement uniformément sci en x, alors X est ∂^P-régulier et $\{f_1, \dots, f_k, X^*\}$ est découplable en x (proposition 3.9). On retrouve le théorème 2 [54] de Ioffe–Rockaffellar (1996) (voir aussi page 8) en prenant $\partial = \partial^P$ et $\varepsilon = 0$.

— Si X est un espace possédant une fonction bosse lipschitzienne $\mathcal{C}^1$, et que $k-1$ fonctions sont uniformément continues près de x, alors X est D^F-régulier et $\{f_1, \dots, f_k, X^*\}$ est découplable en x (proposition 3.9). On retrouve le théorème [27, Theorem 2.1] de Deville–El Haddad (1996) (voir aussi page 9) en prenant $\partial = D^F$ et $\varepsilon = 0$.

— Si X est un espace d'Asplund, et que les fonctions vérifient la condition métrique générale en x, alors X est ∂^F-régulier et $\{f_1, \dots, f_k, X^*\}$ est découplable en x (proposition 3.9). On retrouve le théorème B dans [53] et la deuxième partie de la proposition 2.4 dans [51] en prenant $\partial = \partial^F$ et $\varepsilon = 0$.

— Si X est un espace de Hilbert, et que les fonctions sont faiblement sci près de x ou que toutes les fonctions sauf une sont lipschitziennes près de x ($k = 2$), alors X est ∂^P-régulier et $\{f_1, \dots, f_k, X^*\}$ est découplable en x (proposition 3.11). On retrouve le théorème 8.3 de [23] en prenant $\partial = \partial^P$ et $\varepsilon = 0$.

▶ Outre son aspect unificateur, le corollaire ci-dessus apporte plusieurs améliorations aux résultats précités : une condition de qualification moins contraignante, une conclusion plus précise avec une limite supérieure renforcée par l'assertion (iii) et des hypothèses plus faibles sur la classe d'espaces.

▶ Par ailleurs, des combinaisons non envisagées sur le triplet $(X, \partial, \{f_i\}_{i=1}^k)$ peuvent donner lieu à des règles de somme approchée fortes non démontrées à ce jour, par exemple :

THÉORÈME 5.3. *Soient X un espace de Banach réflexif*, $f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $i = 1, \dots, k$, *des fonctions faiblement sci et x un élément de X. Alors*

$$\begin{aligned}\partial^F(f_1 + \ldots + f_k)(x) \subset \{x^* = \|\cdot\|_*\text{-}\lim_{n\to\infty}(x^*_{1,n} + \ldots + x^*_{k,n}) \mid x^*_{i,n} \in \partial^F f_i(x_{i,n}),\\ x_{i,n} \to_{f_i} x,\ \operatorname{diam}(x_{1,n}, \ldots, x_{k,n})\|x^*_{i,n}\| \to 0,\ i = 1, \ldots, k\}.\end{aligned}$$

Démonstration. Sur un espace réflexif, si les fonctions sont faiblement sci alors la famille $\{f_1, \dots, f_k, X^*\}$ est découplable en x (voir proposition 3.11). Par ailleurs, tout espace réflexif étant ∂^F-régulier, on peut appliquer le théorème 5.1, ou le corollaire 5.2, avec $\partial = \partial^F$. ■

Le théorème 5.3 est une généralisation (pour la somme) au cas non convexe du théorème 1.4 de Thibault [70]. En outre, il permet de voir que sur un espace réflexif, la condition de qualification se situe dans la semi-continuité inférieure faible (ce qui est le cas des fonctions convexes sci). Tout ceci permet de mieux comprendre les réponses apportées à certaines interrogations de la page 12, fournissant ainsi une autre approche du cas convexe (on renvoie à Jules–Lassonde [55] pour une étude plus complète).

5.3. Règles de somme faibles renforcées. On présente maintenant un résultat analogue au théorème 5.1, mais avec une topologie faible renforcée (sans conditions de qualification) et c'est le sous-différentiel de Gateaux-convexe $\partial^{G_{\mathrm{cx}}}$ qui joue le rôle du sous-différentiel de Fréchet.

En fait, on montre que $\partial^{G_{\mathrm{cx}}}$ peut être vu comme un sous-différentiel bâti à partir du Fréchet (voir proposition A.4 dans l'appendice pour la preuve) :

$$\partial^{G_{\mathrm{cx}}} f(x) = \bigcap_{L \in \mathcal{F}} \partial^F f_{x+L}(x),$$

c'est cette expression qui sera utile pour la suite.

Le théorème qui suit présente le même avantage que le théorème précédemment énoncé. En effet, son application simple nous permet de retrouver des résultats de somme concernant des sous-différentiels particuliers sur des espaces particuliers (adaptés).

THÉORÈME 5.4. *Soient ∂ un sous-différentiel et X un espace de Banach ∂-régulier. Alors, pour tout $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathrm{SCI}(X)$ et $x \in X$, on a*

$$\partial^{G_{\mathrm{cx}}}\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) \subset w^*\text{-}\limsup_{x_i \xrightarrow{+} x} \sum_{i=1}^k \partial f_i(x_i).$$

Démonstration. On utilise des arguments déjà présents dans [10, Proposition 2], [15, Theorem 2.11] et [71, Theorem 1]. Soient x^* dans $\partial^{G_{\mathrm{cx}}}(\sum_{i=1}^k f_i)(x)$, V un voisinage faible-$*$ de 0 dans X^* et $\varepsilon > 0$. On pose

$$\lambda := \varepsilon/(2 + \|x^*\|), \tag{34}$$

et on considère L un sous-espace vectoriel de dimension finie de X tel que $L^\perp + \lambda\mathbb{B}^* \subset V$. D'après la proposition A.4, on a

$$x^* \in \partial^F\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)_{x+L}(x) = \partial^F\Big(\sum_{i=1}^k f_i + \delta_{x+L}\Big)(x).$$

Puisque l'espace est ∂-régulier et que la famille $\{f_1, \ldots, f_k, \delta_{x+L}, -x^*\}$ est découplable en x (proposition 3.9), d'après le théorème 5.1(b), il existe (x_i, x_i^*) dans ∂f_i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, k+1$, avec $f_{k+1} := \delta_{x+L}$, tels que

- (i) $\|x_i - x\| < \lambda \le \varepsilon, \quad |f_i(x_i) - f_i(x)| < \lambda \le \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, k+1\,;$
- (ii)′ $\|x_1^* + \ldots + x_{k+1}^* - x^*\| < \lambda\,;$
- (iii) $\mathrm{diam}(x_1, \ldots, x_{k+1})\|x_i^*\| < \lambda \le \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, k+1.$

Notons que $x_{k+1} \in x + L$, grâce à l'assertion (i), donc l'axiome (A1) implique que $\partial f_{k+1}(x_{k+1}) = \partial\delta_{x+L}(x_{k+1}) = L^\perp$. Par ailleurs, l'assertion (ii)' se traduit par l'existence d'un élément ξ^* dans $\mathbb{B}^*$ tel que $\sum_{i=1}^k x_i^* + x_{k+1}^* = x^* + \lambda\xi^*$, d'où l'on déduit que :

- (ii) $x^* \in x_1^* + \ldots + x_k^* + V,$
- (iv) $|\langle \sum_{i=1}^k x_i^*, x_i - x\rangle| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, k.$

En effet, (ii) résulte du choix de L, et (iv) découle de (i), (iii) et (34) via l'inégalité suivante :

$$\Big|\Big\langle \sum_{i=1}^{k} x_i^*, x_i - x\Big\rangle\Big| = |\langle x^* + \lambda\xi^* - x_{k+1}^*, x_i - x\rangle|$$
$$= |\langle x^* + \lambda\xi^*, x_i - x\rangle + \langle x_{k+1}^*, x - x_{k+1}\rangle + \langle x_{k+1}^*, x_{k+1} - x_i\rangle|$$
$$\leq (\|x^*\| + \lambda)\|x_i - x\| + \|x_{k+1}^*\| \operatorname{diam}(x_1, \ldots, x_{k+1}) < \varepsilon. \ \blacksquare$$

Remarque 5.5. Le sous-différentiel $\partial^{G_{\mathrm{cx}}}$ contient les sous-différentiels s-Hölder $\partial^{H(s)}$, $s \in \,]0,1]$, proximal ∂^P, Fréchet viscosité D^F, Fréchet canonique ∂^F, et, d'une manière générale, tous les sous-différentiels associés à une bornologie convexe, qu'ils soient canoniques ou de viscosité. Par conséquent, on retrouve le résultat [15, Theorem 2.11] en remplaçant, dans le théorème 5.4, l'opérateur $\partial^{G_{\mathrm{cx}}}$ par ∂^β et ∂ par D^β et en se plaçant sur un espace de Banach X qui possède une norme équivalente β-différentiable, avec β une bornologie convexe quelconque.

Le corollaire ci-dessous fournit une règle de somme faible avec une limite supérieure renforcée par les assertions (iii) et (iv) :

Corollaire 5.6. *Soit X un espace de Banach ∂-régulier avec $\partial \subset \partial^{G_{\mathrm{cx}}}$. Alors, pour tout $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathrm{SCI}(X)$ et $z \in X$, on a*

$$\partial\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i\Big)(z) \subset w^*\text{-}\limsup_{z_i \xrightarrow{+} z} \sum_{i=1}^{k} \partial f_i(z_i).$$

Avec le corollaire 5.6, on peut retrouver les mêmes extensions que celles du théorème 2.11 dans [15] exprimées à travers les remarques 2.13 et 2.14 (dans [15]). En effet, un espace avec un "power modulus of smoothness t^p" est un espace ∂-régulier avec $\partial := \partial^{H(s)} \subset \partial^{G_{\mathrm{cx}}}$. Par ailleurs, si "$X$ admet une renorme β-régulière", ou bien si "X possède une fonction bosse lipschitzienne et β-régulière", alors X est un espace ∂-régulier avec $\partial := \partial^\beta \subset \partial^{G_{\mathrm{cx}}}$ ou bien $\partial := D^\beta \subset \partial^{G_{\mathrm{cx}}}$.

5.4. Reconstitution de sous-différentiels. On donne, pour finir, des conséquences en termes de reconstitution de sous-différentiels.

Reconstitution du sous-différentiel de Fréchet. Le corollaire qui suit souligne, une fois de plus, le caractère privilégié du sous-différentiel de Fréchet.

Corollaire 5.7. *Soient ∂ un sous-différentiel et X un espace ∂-régulier, alors pour tout $f \in \mathrm{SCI}(X)$, tout x dans X et tout $\varepsilon \geq 0$, on a*

$$\partial_\varepsilon^F f(x) \subset \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x' \to_f x} (\partial f(x') + \varepsilon\mathbb{B}^*).$$

Démonstration. Quel que soit x^* dans X^*, la famille $\{f, x^*\}$ est toujours découplable en tout point de X. En appliquant le théorème 5.1 pour une seule fonction, on obtient le résultat. $\blacksquare$

En prenant $\partial = \partial^P$, $\varepsilon = 0$ et X un espace de dimension finie, on retrouve le corollaire 8.47 de [68].

Pour $\varepsilon = 0$, le corollaire 5.7 traduit une certaine minimalité du sous-différentiel de Fréchet sur la classe des sous-différentiels ∂ vérifiant les axiomes (A0)–(A2), dans les espaces appropriés à ∂.

Corollaire 5.8. *Si ∂ et $\partial^\diamond$ sont deux sous-différentiels (non nécessairement comparables) inclus dans le sous-différentiel de Fréchet et que X est un espace à la fois ∂- et $\partial^\diamond$-régulier, alors*

$$\|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x'\to_f x} \partial^F f(x') = \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x'\to_f x} \partial f(x') = \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x'\to_f x} \partial^\diamond f(x')$$

pour tout $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et tout $x \in X$.

Reconstitution des autres sous-différentiels élémentaires. Pour les sous-différentiels élémentaires plus gros que le sous-différentiel de Fréchet, on peut aussi proposer un résultat de reconstitution grâce au théorème 5.4 appliqué à une seule fonction.

Corollaire 5.9. *Soient ∂ un sous-différentiel et X un espace ∂-régulier. Alors pour tout $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et tout x dans X, on a*

$$\partial^{G_{\mathrm{cx}}} f(x) \subset w^*\text{-}\limsup_{x' \xrightarrow{+} x} \partial f(x').$$

Corollaire 5.10. *Si ∂ et $\partial^\diamond$ sont deux sous-différentiels (non nécessairement comparables) inclus dans $\partial^{G_{\mathrm{cx}}}$ et que X est un espace à la fois ∂- et $\partial^\diamond$-régulier, alors*

$$w^*\text{-}\limsup_{x' \xrightarrow{+} x} \partial^{G_{\mathrm{cx}}} f(x') = w^*\text{-}\limsup_{x' \xrightarrow{+} x} \partial f(x') = w^*\text{-}\limsup_{x' \xrightarrow{+} x} \partial^\diamond f(x')$$

pour tout $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et tout $x \in X$.

6. Règles du premier ordre : cas faible

Cette section est dédiée d'une part aux conséquences du théorème d'équivalence des A-règles (théorème 4.11) dans le cas particulier où A décrit l'ensemble des parties finies de X, d'autre part à une analyse fine de diverses propriétés spécifiques au cadre approché faible (i.e. avec sur X^* la topologie faible-$*$).

Après avoir expliciter les deux règles principales obtenues à partir du théorème 4.11, qui sont vraies sur tout espace ∂-régulier, nous nous intéressons dans la sous-section 6.2 à la propriété de reconstitution du sous-différentiel approché analytique ∂_a^I à l'aide de la limsup faible d'un sous-différentiel ∂. Nous montrons que les espaces qui possèdent cette propriété pour ∂ possèdent en fait de bonnes règles de calcul (approché faible) pour ∂.

Dans la dernière sous-section enfin, nous spécialisons notre analyse : nous montrons que pour le sous-différentiel (canonique) de Fréchet, *toutes* les règles vues dans cette section et la précédente sont équivalentes sur X (et sont donc autant de caractérisations des espaces d'Asplund). C'est, à notre connaissance, le seul sous-différentiel qui possède cette qualité.

6.1. Règles faibles et espaces ∂-réguliers. On considère maintenant que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties finies symétriques de X. Ceci permet de décrire la topologie faible-$*$

sur X^* dont un système fondamental de voisinages de 0 est donné par

$$V_{\varepsilon,A} := \{x^* \in X^* \mid p_A(x^*) < \varepsilon\}, \qquad A \in \mathcal{A},\, \varepsilon > 0.$$

Le produit $(0,\infty) \times \mathcal{A}$ est préordonné par la relation : $(\varepsilon, A) \leq (\varepsilon', A')$ si et seulement si $\varepsilon' \leq \varepsilon$ et $A \subset A'$, de sorte que les indices des suites généralisées (intervenant dans les notations des lim sup) peuvent être définis par $\nu := (\varepsilon, A)$. Pour exprimer les règles faibles à partir des A-règles, il faut que A parcourt l'ensemble $\mathcal{A}$. L'espace vectoriel fermé E_A engendré par A étant (dans ce cas) de dimension finie, toute famille $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathrm{SCI}(X)$ est A-découplable pour tout $A \in \mathcal{A}$, voir la remarque 4.10, p. 34.

Dans cette sous-section, on considère les deux propriétés suivantes :

$(\mathrm{B})^*_\partial$ *Principe approché faible de base.* Soient $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et φ convexe lipschitzienne. Si z est un minimum local fort fini de $f + \varphi$, alors

$$0 \in w^*\text{-}\limsup_{\substack{x \to_f z \\ y \to z}} (\partial f(x) + \partial\varphi(y)).$$

$(\mathrm{R})^*_\partial$ *Règle approchée faible mixte.* Soient $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathrm{SCI}(X)$. Alors pour tout $z \in X$,

$$\partial^I_a\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(z) \subset w^*\text{-}\limsup_{z_i \to_{f_i} z} \sum_{i=1}^k \partial f_i(z_i).$$

Théorème 6.1. *Les énoncés suivants sont équivalents* :

(i) *le principe approché faible de base* $(\mathrm{B})^*_\partial$ *est vérifié sur* X^N, *pour tout entier naturel* N ;

(ii) *la règle approchée faible mixte* $(\mathrm{R})^*_\partial$ *est vérifiée sur* X^N, *pour tout entier naturel* N.

Démonstration. Il est évident que $(\mathrm{R})^*_\partial \Rightarrow (\mathrm{B})^*_\partial$, donc $(\mathrm{R})^*_\partial \Rightarrow^N (\mathrm{B})^*_\partial$. Pour montrer la réciproque, notons d'abord que si $(\mathrm{B})^*_\partial$ est vérifiée sur X^N pour tout N, alors clairement $(A^N\text{-B})_\partial$ est vérifiée sur X^N pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout N, et donc $(A^N\text{-R})_\partial$ est aussi vérifiée sur X^N pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout N, d'après le théorème 4.11. Il suffit par conséquent de démontrer que si $(\text{A-R})_\partial$ est vraie sur X pour tout $A \in \mathcal{A}$, alors $(\mathrm{R})^*_\partial$ est vraie sur X.

Soient z^* dans $\partial^I_a(\sum_{i=1}^k f_i)(z)$, $\bar\varepsilon > 0$ et $V_{\bar\varepsilon,A}$ un voisinage faible-$*$ de 0 dans X^* avec A dans $\mathcal{A}$. On considère ε dans $]0, \bar\varepsilon[$ tel que pour chaque i dans $\{1, \ldots, k\}$,

$$f_i(z) < f_i(y) + \frac{\varepsilon}{3(k-1)} \tag{35}$$

dès que y appartient à $B_\varepsilon(z)$. Puisque $z^* \in \partial^I_a(\sum_{i=1}^k f_i)(z)$, d'après la proposition A.5, il existe un couple (x, x^*) dans $X \times X^*$ vérifiant

$$\|x - z\| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \Big|\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) - \Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(z)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{36}$$

$$(x, x^*) \in \partial^F\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)_{x+E_A}, \tag{37}$$

$$z^* \in x^* + \tfrac{1}{3} V_{\varepsilon,A}. \tag{38}$$

Puisque la fonction δ_{x+E_A} est inf-compacte, la famille $\{f_1,\dots,f_k,-x^*\}$ est A-découplable en x. On donc peut appliquer la règle $(A\text{-R})_\partial$ aux fonctions $f_1,\dots,f_k$. Ainsi, il existe (z_i,z_i^*) dans ∂f_i, $i=1,\dots,k$, tels que

$$\|z_i-x\|<\varepsilon/3,\quad |f_i(z_i)-f_i(x)|<\varepsilon/3,\quad i=1,\dots,k, \tag{39}$$

$$p_A(z_1^*+\ldots+z_k^*-x^*)<\varepsilon/3. \tag{40}$$

Les premières parties de (36) et (39) impliquent que $\|z_i-z\|<\varepsilon<\bar\varepsilon$ pour $i=1,\dots,k$. Par ailleurs, en combinant les inégalités (40) et (38) on obtient

$$z^*\in z_1^*+\ldots+z_k^*+V_{\varepsilon,A}.$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que $|f_i(z_i)-f_i(z)|<\varepsilon$, $i=1,\dots,k$. Puisque $z_i\in B_\varepsilon(z)$ pour chaque i dans $\{1,\dots,k\}$, grâce à (35) on a déjà

$$f_i(z)<f_i(z_i)+\frac{\varepsilon}{3(k-1)}$$

pour $i=1,\dots,k$. En sommant ces inégalités, pour tout j dans $\{1,\dots,k\}$ on obtient

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^k f_i(z)<\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^k f_i(z_i)+\frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui combiné aux secondes parties de (39) et (36) donne

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k f_i(z_i)&<\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x)+\frac{\varepsilon}{3}<\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(z)+\frac{2\varepsilon}{3}\\ &=f_j(z)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^k f_i(z)+\frac{2\varepsilon}{3}<f_j(z)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^k f_i(z_i)+\varepsilon,\end{aligned}$$

d'où $f_j(z_j)<f_j(z)+\varepsilon$. Ceci termine la preuve. ■

Remarque 6.2. Il est clair que $(\mathrm{B})_\partial$ implique $(\mathrm{B})_\partial^*$, donc tout espace ∂-régulier vérifie les propriétés équivalentes (i) et (ii) du théorème 6.1. Nous ne savons pas si la réciproque est vraie pour n'importe quel sous-différentiel. Autrement dit, nous ne savons pas si ces propriétés peuvent être ajoutées à la liste des propriétés caractérisant les espaces ∂-réguliers, pour ∂ quelconque. Par contre, la réponse est oui si $\partial:=\partial^F$ le sous-différentiel de Fréchet (voir théorème 6.8 qui suit).

Précisons maintenant quelques conséquences du théorème 6.1 en termes de règles de somme faibles. D'après la remarque qui précède, on est assuré que, sur la classe des espaces ∂-réguliers, tout sous-différentiel ∂ plus petit que le sous-différentiel approché analytique ∂_a^I vérifie la règle de somme faible $(\sum)_\partial^*$ sans condition de qualification sur les fonctions. En clair :

Corollaire. *Soit X un espace de Banach ∂-régulier avec $\partial\subset\partial_a^I$. Alors, pour $\{f_1,\dots$ $\dots,f_k\}$ dans* $\mathrm{SCI}(X)$ *et z dans X, on a*

$$(\textstyle\sum)_\partial^*:\qquad \partial\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(z)\subset w^*\text{-}\limsup_{z_i\to_{f_i}z}\sum_{i=1}^k\partial f_i(z_i).$$

En appliquant ce résultat à des sous-différentiels particuliers et sur un espace adapté, on retrouve les règles de somme approchée faibles données dans [34, 43, 44, 50, 53] :

• Sur un espace de Hilbert, on a l'inclusion $(\sum)^*_\partial$ avec le sous-différentiel proximal $\partial := \partial^P$. Mais aussi avec $\partial := \widetilde{\partial}^P$ sa régularisation forte ; $\partial := \overline{\partial}^P$ sa régularisation faible et avec $\partial := \hat{\partial}^P$ sa régularisation séquentielle faible.

• Sur un espace d'Asplund, on a l'inclusion $(\sum)^*_\partial$ avec le sous-différentiel canonique de Fréchet $\partial := \partial^F$. Mais aussi avec $\partial := \widetilde{\partial}^F$ sa régularisation forte ; $\partial := \overline{\partial}^F$ sa régularisation faible et avec $\partial := \hat{\partial}^F$ sa régularisation séquentielle faible.

• Sur un espace de Banach possédant une fonction bosse lipschitzienne Fréchet-différentiable, on a l'inclusion $(\sum)^*_\partial$ avec le sous-différentiel de viscosité Fréchet D^F. Mais aussi avec $\partial := \widetilde{D}^F$ sa régularisation forte ; $\partial := \overline{D}^F$ sa régularisation faible et avec $\partial := \hat{D}^F$ sa régularisation séquentielle faible.

• Sur un espace de Banach séparable (ou plus généralement, un espace admettant une renorme Gateaux-différentiable, ou possédant une fonction bosse Gateaux-différentiable), on a l'inclusion $(\sum)^*_\partial$ avec le sous-différentiel de Hadamard canonique ∂^H ou de viscosité D^H. Mais aussi avec $\partial := \widetilde{\partial}^H$, $\widetilde{D}^H$, leur régularisation forte ; $\partial := \overline{\partial}^H$, $\overline{D}^H$, leur régularisation faible et avec $\partial := \hat{\partial}^H$, $\hat{D}^H$, leur régularisation séquentielle faible.

• Enfin, sur tout espace de Banach, on a l'inclusion $(\sum)^*_\partial$ avec le sous-différentiel approché géométrique ∂^I_g ; mais aussi avec $\partial := \partial^I_a$.

Hormis le dernier exemple, tous les autres sans leurs régularisations peuvent déjà être considérés comme des conséquences du théorème 5.4, qui lui, permet une limite supérieure renforcée.

6.2. Reconstitution du sous-différentiel approché. On donne maintenant une propriété de reconstitution du sous-différentiel approché analytique ∂^I_a à l'aide de la limsup faible du sous-différentiel ∂, en appliquant le théorème 6.1 à une seule fonction.

Corollaire 6.3. *Soient ∂ un sous-différentiel et X un espace ∂-régulier, alors pour tout $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et tout z dans X, on a*

$$\partial^I_a f(z) \subset w^*\text{-}\limsup_{x \to_f z} \partial f(x).$$

Corollaire 6.4. *Si ∂ et $\partial^\diamond$ sont deux sous-différentiels (non nécessairement comparables) inclus dans ∂^I_a et que X est un espace à la fois ∂- et $\partial^\diamond$-régulier, alors*

$$w^*\text{-}\limsup_{x \to_f z} \partial^I_a f(x) = w^*\text{-}\limsup_{x \to_f z} \partial f(x) = w^*\text{-}\limsup_{x \to_f z} \partial^\diamond f(x),$$

pour tout $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et tout $z \in X$.

Le corollaire 6.3 nous permet :

— de compléter le théorème 1.5 de Ioffe (1989) ;

— d'étendre le résultat de Borwein–Strojwas [13, Corollary 7.3] à une classe plus vaste d'espaces, dans les cas Fréchet et Hadamard — via l'expression du sous-différentiel de Clarke $\partial^C f(x) = \overline{\mathrm{co}}\, \partial^I_a f(x)$ sur la classe des fonctions f lipschitziennes près de x ;

— de retrouver la proposition 2 de [10], dans laquelle X est un espace admettant une renorme β-différentiable, f est une fonction lipschitzienne et $\partial = \partial^\beta$ un β-sous-différentiel canonique.

Le corollaire 6.4 exprime une certaine minimalité du sous-différentiel analytique ∂_a^I.

Mais il y a mieux : nous allons montrer en effet que, contrairement au cas fort, la propriété de reconstitution ci-dessus s'avère suffisante pour obtenir la règle approchée faible mixte $(\mathrm{R})_\partial^*$ et donc caractérise une classe d'espaces "utile" pour les calculs.

On considère les trois propriétés suivantes :

$(\mathrm{P})_\partial^*$ *Principe approché faible.* Soit $\{f_1,\dots,f_k\} \subset \mathrm{SCI}(X)$. Si z est un minimum local de $\sum_{i=1}^k f_i$ sur toutes les directions de dimension finie $z+L$, alors

$$0 \in w^*\text{-}\limsup_{z_i \to_{f_i} z} \sum_{i=1}^k \partial f_i(z_i).$$

$(\mathrm{Const})_\partial^*$ *Reconstitution de* ∂_a^I. Soit $f \in \mathrm{SCI}(X)$. Alors, pour tout $z \in X$,

$$\partial_a^I f(z) \subset w^*\text{-}\limsup_{x \to_f z} \partial f(x).$$

$(\mathrm{B}_c)_\partial^*$ *Principe approché faible de base* (*version convexe inf-compacte*). Soient $z \in X$, $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et φ convexe inf-compacte près de z. Si z est un minimum local fort fini de $f+\varphi$, alors

$$0 \in w^*\text{-}\limsup_{\substack{x \to_f z \\ y \to_\varphi z}} (\partial f(x) + \partial\varphi(y)).$$

On démontre maintenant que ces propriétés sont équivalentes à la règle approchée faible mixte $(\mathrm{R})_\partial^*$ *sur* X (nul besoin de considérer les espaces produits X^N) :

Théorème 6.5. *Pour tout sous-différentiel* ∂ *et tout espace de Banach* X, *les quatre propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *la règle approchée faible mixte* $(\mathrm{R})_\partial^*$ *est vérifiée sur* X ;

(ii) *le principe approché faible* $(\mathrm{P})_\partial^*$ *est vérifié sur* X ;

(iii) *la propriété de reconstitution de* ∂_a^I $(\mathrm{Const})_\partial^*$ *est vérifiée sur* X ;

(iv) *le principe approché faible de base* (*version convexe inf-compacte*) $(\mathrm{B}_c)_\partial^*$ *est vérifié sur* X.

Démonstration. On va montrer la suite d'implications suivante : $(\mathrm{B}_c)_\partial^* \Rightarrow (\mathrm{Const})_\partial^* \Rightarrow (\mathrm{R})_\partial^* \Rightarrow (\mathrm{P})_\partial^* \Rightarrow (\mathrm{B}_c)_\partial^*$.

$(\mathrm{B}_c)_\partial^* \Rightarrow (\mathrm{Const})_\partial^*$. Soient z^* un élément de $\partial_a^I f(z)$, $\varepsilon > 0$ et V un voisinage faible-$*$ de 0 dans X^*. On considère un sous-espace vectoriel de dimension finie L et un réel λ de $]0,\varepsilon/2[$ tels que f soit bornée inférieurement sur $z+\lambda\mathbb{B}$ et que $L^\perp + \lambda\mathbb{B} \subset \frac{1}{3}V$. Par définition du sous-différentiel ∂_a^I, il existe un couple (x,x^*) dans $X \times X^*$ vérifiant

(41) $$\|x-z\| < \varepsilon/2, \quad |f(x)-f(z)| < \varepsilon/2,$$

(42) $$x^* \in \partial^F f_{x+L}(x),$$

(43) $$z^* \in x^* + \tfrac{1}{3}V.$$

La relation (42) assure qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que

$$f(y) - f(x) - \langle x^*, y - x\rangle + \lambda\|y - x\| > 0$$

pour tout y dans $(x+\eta_0\mathbb{B})\cap(x+L)$ et différent de x. Ce qui fait du point x un minimum local strict de $f + \varphi$, où φ est la fonction convexe et inf-compacte près de x définie par

$$\varphi := -x^* + \lambda\|\cdot - x\| + \delta_{x+L}.$$

La fonction f étant bornée inférieurement sur $z + \lambda\mathbb{B}$, la fonction $f + \varphi$ est inf-compacte près de x, par suite x est un minimum local fort de $f + \varphi$. D'après $(\mathrm{B}_c)^*_\partial$ il existe $\overline{x}$ et $\overline{y}$ dans X tels que

$$\|\overline{x} - x\| < \varepsilon/2, \quad \|\overline{y} - x\| < \varepsilon/2, \quad |f(\overline{x}) - f(x)| < \varepsilon/2 \tag{44}$$

$$0 \in \partial f(\overline{x}) + \partial\varphi(\overline{y}) + \tfrac{1}{3}V. \tag{45}$$

Or $\partial(\delta_{x+L})(\overline{y}) = L^\perp$ car $\overline{y} \in x + L$, donc $\partial\varphi(\overline{y}) \subset -x^* + \lambda\mathbb{B} + L^\perp$. En tenant compte des inclusions (45), (43) et du choix de L et λ, on obtient

$$z^* \in \partial f(\overline{x}) + V.$$

Pour terminer, on note que $\|\overline{x} - z\| < \varepsilon$ et que $|f(\overline{x}) - f(z)| < \varepsilon$ grâce à (41) et (44).

$(\mathrm{Const})^*_\partial \Rightarrow (\mathrm{R})^*_\partial$. On sait que tout espace de Banach X est ∂-régulier pour $\partial = \partial^I_g$, le sous-différentiel approché géométrique, voir p. 16. Donc ∂^I_g vérifie les propriétés équivalentes (i) et (ii) du théorème 6.1 ; en particulier, la règle $(\mathrm{R})^*_{\partial^I_g}$ est vraie sur X. Ainsi, pour tout z dans X, si z^* appartient à $\partial^I_a(\sum_{i=1}^k f_i)(z)$, alors

$$z^* \in w^*\text{-}\limsup_{z_i \to_{f_i} z} \sum_{i=1}^k \partial^I_g f_i(z_i).$$

Par ailleurs, d'après $(\mathrm{Const})^*_\partial$, on a $\partial^I_a f_i(z_i) \subset w^*\text{-}\limsup_{x_i \to_{f_i} z_i} \partial f_i(x_i)$ pour chaque i dans $\{1, \ldots, k\}$. Comme $\partial^I_g \subset \partial^I_a$, on obtient

$$z^* \in w^*\text{-}\limsup_{z_i \to_{f_i} z} \sum_{i=1}^k (w^*\text{-}\limsup_{x_i \to_{f_i} z_i} \partial f_i(x_i)) = w^*\text{-}\limsup_{x_i \to_{f_i} z} \sum_{i=1}^k \partial f_i(x_i),$$

ce qui prouve $(\mathrm{R})^*_\partial$.

$(\mathrm{R})^*_\partial \Rightarrow (\mathrm{P})^*_\partial$. Puisque z est un minimum local de $\sum_{i=1}^k f_i + \delta_{z+L}$ pour tout sous-espace vectoriel L de dimension finie, on a

$$0 \in \bigcap_{L \in \mathcal{F}} \partial^I_a\Big(\sum_{i=1}^k f_i + \delta_{z+L}\Big)(z).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et W un voisinage faible-$*$ de 0 dans X^*. Soit par ailleurs L_0 dans $\mathcal{F}$ tel que $L_0^\perp \subset \frac{1}{2}W$. D'après $(\mathrm{R})^*_\partial$ il existe $(z_i, z_i^*) \in \partial f_i$, $i = 1, \ldots, k+1$, avec $f_{k+1} := \delta_{z+L_0}$, vérifiant

(i) $\|z_i - z\| < \varepsilon$, $|f_i(z_i) - f_i(z)| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, k+1$;

(ii) $z_1^* + \ldots + z_k^* + z_{k+1}^* \in \frac{1}{2}W$.

L'assertion (ii) implique que $z_1^* + \ldots + z_k^* \in -z_{k+1}^* + \frac{1}{2}W \subset L_0^\perp + \frac{1}{2}W \subset W$.

$(\mathrm{P})_\partial^* \Rightarrow (\mathrm{B}_c)_\partial^*$ est trivial. ■

Remarque 6.6. On ne sait pas si le principe approché faible de base (version convexe *lipschitzienne*) $(\mathrm{B})_\partial^*$ peut être ajouté à la liste des propriétés équivalentes *sur* X donnée par le théorème 6.5, pour un sous-différentiel arbitraire ∂.

Pour finir, on considère la propriété :

$(\mathrm{Sdiff})_\partial$ *Sous-différentiabilité dense.* Pour toute fonction $f \in \mathrm{SCI}(X)$, il existe $D \subset X$ un sous-ensemble *graphiquement dense* ([8]) du domaine de f tel que f soit ∂-sous-différentiable sur D, c'est-à-dire $\partial f(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in D$.

Proposition 6.7. *Pour tout sous-différentiel ∂ et tout espace de Banach X, l'implication suivante est toujours vraie* : $(\mathrm{B})_\partial^* \Rightarrow (\mathrm{Sdiff})_\partial$.

Démonstration. Soient x dans le domaine de f et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ tel que $\|\overline{x} - x\| < \varepsilon$, $|f(\overline{x}) - f(x)| < \varepsilon$ et $\partial f(\overline{x}) \neq \emptyset$. Puisque f est sci en x, il existe $\overline{\lambda}$ dans $]0, \varepsilon[$ tel que

$$f(x) < \inf_{y \in B_{\overline{\lambda}}(x)} f + \varepsilon. \tag{46}$$

En appliquant le principe variationnel d'Ekeland [30, 38] à la fonction f sur la boule $B_{\overline{\lambda}}(x)$ avec λ dans $]0, \overline{\lambda}/2[$ et ε, on trouve $\widetilde{x}$ dans X vérifiant

$$\|\widetilde{x} - x\| < \lambda, \tag{47}$$

$$f(\widetilde{x}) \leq f(x), \tag{48}$$

$$f + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|\cdot - \widetilde{x}\| \text{ atteint un minimum local fort en } \widetilde{x}.$$

Si maintenant on applique le principe $(\mathrm{B})_\partial^*$ aux fonctions f et $\varphi := (\varepsilon/\lambda)\|\cdot - \widetilde{x}\|$ avec ε et W un voisinage faible-$*$ de zéro dans X^*, on obtient $(\overline{x}, \overline{x}^*)$ dans ∂f et $(\overline{y}, \overline{y}^*)$ dans $\partial\varphi$ tels que

$$\|\overline{x} - \widetilde{x}\| < \lambda, \tag{49}$$

$$|f(\overline{x}) - f(\widetilde{x})| < \lambda, \tag{50}$$

$$\overline{x}^* + \overline{y}^* \in W.$$

On a $\partial f(\overline{x}) \neq \emptyset$ et $\|\overline{x} - x\| < \overline{\lambda} < \varepsilon$ d'après (47) et (49). Par ailleurs, $f(x) < f(\overline{x}) + \varepsilon$ grâce à (46), et

$$f(\overline{x}) = f(\widetilde{x}) + (f(\overline{x}) - f(\widetilde{x})) \leq f(x) + \lambda < f(x) + \varepsilon$$

grâce à (50) et (48). ■

6.3. Sous-différentiel de Fréchet et espaces d'Asplund. On termine cette section par une application de nos différents résultats au cas du sous-différentiel de Fréchet. Ceci débouche, en particulier, sur d'autres caractérisations des espaces d'Asplund, similaires à celles données dans [35, Theorem 3.1] (voir aussi le corollaire 4.4).

([8]) Pour tout $x \in \operatorname{dom} f$, il existe $(x_n)_n \subset D$ telle que $x_n \to_f x$.

Théorème 6.8. *Soit X un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *X est un espace d'Asplund.*

(b) *Pour toute fonction concave lipschitzienne f et tout $z \in X$, on a*

$$\partial_a^I f(z) \subset w^*\text{-}\limsup_{x \to_f z} \partial^F f(x).$$

(c) *Pour tout $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathrm{SCI}(X)$ et tout $x \in X$, on a*

$$x^* \in \partial^F\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(x) \;\Rightarrow\; x^* \in \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x_i \xrightarrow{+} x} \sum_{i=1}^k \partial^F f_i(x_i),$$

dès que la famille $\{f_1, \ldots, f_k, -x^*\}$ est découplable en x.

(d) *Pour tout $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathrm{SCI}(X)$ et tout $x \in X$, on a*

$$\liminf_{x_i \to_{f_i} x} \operatorname{dist}\Big(0, \sum_{i=i}^k \partial f_i(x_i)\Big) \le \Big|\nabla\Big(\sum_{i=i}^k f_i\Big)\Big|(x),$$

dès que $\{f_1, \ldots, f_k\}$ est découplable en x.

(e) *Pour tout $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathrm{SCI}(X)$ et tout $z \in X$, on a*

$$\partial_a^I\Big(\sum_{i=1}^k f_i\Big)(z) \subset w^*\text{-}\limsup_{z_i \to_{f_i} z} \sum_{i=1}^k \partial^F f_i(z_i).$$

Démonstration. On procède en deux étapes :

$$\text{(a)}\Rightarrow\text{(e)}\Rightarrow\text{(b)}\Rightarrow\text{(a)}, \qquad \text{(a)}\Rightarrow\text{(c)}\Leftrightarrow\text{(d)}\Rightarrow\text{(a)}.$$

Étape 1. On suppose que (a) est vraie, alors X^N est un espace d'Asplund pour tout $N \in \mathbb{N}$, et donc d'après Fabian [34], $(\mathrm{B})_{\partial^F}$ est vraie sur X^N pour tout $N \in \mathbb{N}$. On en déduit (voir remarque 6.2) que $(\mathrm{B})^*_{\partial^F}$ est vraie sur X^N pour tout $N \in \mathbb{N}$ ainsi que (e), et (b) (qui en est un cas particulier).

Reste donc à voir que (b) implique (a). Soit φ une fonction convexe continue sur un ouvert U de X. On sait déjà que $\partial^F\varphi(x)$ est non vide pour tout x dans U. Par ailleurs, $\partial_a^I(-\varphi)(z)$ est non vide pour tout z dans U, donc, d'après (b) appliqué à $f = -\varphi$, $w^*\text{-}\limsup_{x \to_f z} \partial^F f(x)$ est non vide aussi pour tout z dans U, ce qui implique que $\partial^F(-\varphi)$ a des valeurs non vides sur un sous-ensemble graphiquement dense D de U. On vient donc de prouver que φ est Fréchet-différentiable sur D : X est bien un espace d'Asplund.

Étape 2. On suppose à nouveau que (a) est vraie. Des arguments de l'étape précédente on tire directement que :

— X est ∂-régulier, donc (c) et (d) sont vraies (voir théorème 5.1).

— $(\mathrm{B})^*_{\partial^F}$ est vérifiée sur X et donc la propriété de sous-différentiabilité $(\mathrm{Sdiff})_{\partial^F}$ l'est aussi d'après la proposition 6.7 (appliquée avec $\partial := \partial^F$). Par suite, (a) est vraie. ∎

Remarque 6.9. J. Borwein nous a fait remarquer qu'il suffit en fait dans (b) de ne considérer que les fonctions de la forme $f = -\|\cdot\|$, où $\|\cdot\|$ est une norme équivalente à la norme initiale. En effet, cette propriété (b) affaiblie implique alors que toutes les renormes de X possèdent au moins un point de différentiabilité (même démonstration que ci-dessus) et donc, par un théorème bien connu, X est un espace d'Asplund.

Signalons enfin que sur un espace d'Asplund, on peut obtenir des règles de calcul plus fines pour le sous-différentiel de Fréchet, voir par exemple le récent travail de Ngai–Théra [62].

A. Appendice : Principaux sous-différentiels et propriétés utiles

A.1. Sous-différentiels élémentaires. Sauf mention explicite du contraire, les notions de fermeture et de compacité sur X concernent la topologie de la norme de X et toutes les fonctions f sont supposées sci.

Le sous-différentiel *s-Hölder*, noté $\partial^{H(s)}$ (avec $s \in]0,1]$), est défini par

$$\partial^{H(s)} f(x) := \{x^* \in X^* \mid \exists C_x,\, \eta > 0,\\ f(y) - f(x) - \langle x^*, y - x\rangle \geq -C_x \|y - x\|^{1+s},\ \forall y \in B_\eta(x)\}.$$

Le sous-différentiel *Lipschitz-smooth*, noté ∂^{LS}, correspond au cas particulier où $s = 1$. Sur un espace de Hilbert le sous-différentiel *proximal*, que l'on note ∂^P, coïncide lui aussi avec $\partial^{H(1)}$.

Une façon unifiée de traiter la différentiabilité est de considérer les bornologies.

Bornologies. On appelle *bornologie* sur X, notée β, toute famille de sous-ensembles bornés de X dont la réunion est X et qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) la multiplication d'un élément de β par un scalaire est un élément de β ;
(ii) la réunion de deux éléments quelconques de β est incluse dans un élément de β.

Par commodité, on choisira les éléments de β fermés et symétriques. Quelques exemples de bornologies importantes : on appelle bornologie de

— *Fréchet*, la famille des parties bornées de X, on la note F ou β^F.
— *Hadamard faible*, la famille des parties compactes faibles de X, on la note WH ou β^{WH}.
— *Hadamard*, la famille des parties compactes (fort) de X, on la note H ou β^H.
— *Gateaux*, la famille des parties finies de X, on la note G ou β^G.

Bornologies convexes. Étant donnée une bornologie β, on note β^{cx} la bornologie contenant, en plus des éléments B de β, leurs enveloppes convexes fermées $\overline{\mathrm{co}}\, B$. On dit qu'une bornologie β est *convexe* si $\beta = \beta^{\mathrm{cx}}$.

β-dérivées : définitions classiques. Soit x un élément de X. On dit qu'une fonction f est *β-différentiable* en x, et que $\triangledown^\beta f(x) \in X^*$ est sa β-dérivée en x, si $f(x)$ est fini et que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \langle \triangledown^\beta f(x), v\rangle$$

uniformément en $v \in B$ pour tout $B \in \beta$. Ce qui équivaut à dire que pour tout B dans β,

$$\lim_{t\to 0} \sup_{v\in B} \left| \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle \triangledown^\beta f(x), v\rangle \right| = 0.$$

On retrouve la définition classique de la dérivée de Fréchet lorsque dans la définition ci-dessus on prend comme bornologie celle de Fréchet. Il en est de même pour les dérivées de Hadamard et de Gateaux.

Naturellement, si une fonction f est β-différentiable en x, alors sa β-dérivée $\bigtriangledown^{\beta} f(x)$ est toujours égale à la dérivée de Gateaux $\bigtriangledown^{G} f(x)$ que l'on note encore $f'(x)$.

On note X_{β}^{*} l'espace dual X^{*} muni de la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de la bornologie β. Une fonction f sera dite *β-régulière* en x si $\bigtriangledown^{\beta} f : X \to X_{\beta}^{*}$ est continue sur un voisinage de x. Lorsque f est convexe, elle est *β-régulière* en x si et seulement si elle est *β-différentiable* sur un voisinage convexe de x. Diverses notions de sous-différentiabilité peuvent être associées à la notion de β-différentiabilité :

β-sous-différentiels de viscosité (*suivant* [15]). On dit qu'un élément x^{*} de X^{*} appartient au *β-sous-différentiel de viscosité* d'une fonction f au point $x \in X$ (on note $D^{\beta} f(x)$) s'il existe une fonction localement lipschitzienne φ telle que φ est β-régulière en x, $x^{*} = \bigtriangledown^{\beta} f(x)$ et $f - \varphi$ atteint un minimum local en x. Il est possible de considérer des variantes de cette notion, voir par exemple [16, 51] .

β-sous-différentiels canoniques. On appelle *β-sous-différentiel canonique* de f en x, noté $\partial^{\beta} f(x)$, l'ensemble des x^{*} de X^{*} tels que

$$\liminf_{t \to 0} \inf_{v \in B} \left(\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle x^{*}, v \rangle \right) \geq 0$$

pour tout $B \in \beta$. On dit que f est *β-sous-différentiable* en x si son β-sous-différentiel $\partial^{\beta} f(x)$ est non vide.

On peut donner une autre expression des principaux sous-différentiels canoniques :

$$\partial^{F} f(x) = \left\{ x^{*} \in X^{*} \,\middle|\, \liminf_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - \langle x^{*}, y - x \rangle}{\|y - x\|} \geq 0, \, \forall v \in X \right\},$$

$$\partial^{H} f(x) = \left\{ x^{*} \in X^{*} \,\middle|\, \liminf_{\substack{t \to 0^{+} \\ v' \to v}} \frac{f(x+tv') - f(x)}{t} \geq \langle x^{*}, v \rangle, \, \forall v \in X \right\},$$

$$\partial^{G} f(x) = \left\{ x^{*} \in X^{*} \,\middle|\, \liminf_{t \to 0^{+}} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \geq \langle x^{*}, v \rangle, \, \forall v \in X \right\}.$$

Comparaison entre β-sous-différentiels de viscosité et canoniques. Au vu des définitions, on a l'inclusion suivante :

$$D^{\beta} f(x) \subset \partial^{\beta} f(x),$$

pour tout β, $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et $x \in X$. En général, pour une bornologie quelconque l'inclusion est stricte (voir par exemple [15, Example 2.5]). Lorsque β est la bornologie de Fréchet ($\beta := F$) il est prouvé [28] que $D^{F} f(x) = \partial^{F} f(x)$ dès que l'espace X possède une fonction bosse lipschitzienne et C^{1}.

On note aussi que contrairement au β-sous-différentiels canoniques, les β-sous-différentiels de viscosité sont étroitement liés à l'existence d'une fonction bosse lipschitzienne et β-différentiable sur l'espace X sur lequel ils sont considérés.

Relation entre sous-différentiels canoniques. On dit qu'une bornologie β est plus fine que β', noté $\beta \sqsubset \beta'$, si quel que soit B dans β, il existe B' dans β' tel que $B \subset B'$. Si $\beta \sqsubset \beta'$ et que $\beta' \sqsubset \beta$, on dit que β est équivalent à β' et on note $\beta \approx \beta'$.

PROPOSITION A.1. *Étant données deux bornologies β et β', on a toujours*

$$\beta \sqsubset \beta' \;\Rightarrow\; \partial^{\beta'} \subset \partial^{\beta}.$$

Démonstration. On suppose que $\beta \sqsubset \beta'$. Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction, x dans X et x^* un élément de $\partial^{\beta'} f(x)$. Il faut montrer que x^* appartient à $\partial^{\beta} f(x)$.

Soit B dans β ; par hypothèse il existe B' dans β' tel que $B \subset B'$. D'où

$$\liminf_{t \to 0} \inf_{v \in B} \left(\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle x^*, v \rangle \right) \geq \liminf_{t \to 0} \inf_{v \in B'} \left(\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle x^*, v \rangle \right) \geq 0,$$

car x^* appartient à $\partial^{\beta'} f(x)$. L'élément B étant arbitraire dans β, on en déduit que x^* appartient à $\partial^{\beta} f(x)$. ∎

PROPOSITION A.2. *Étant donnée β une bornologie, on a toujours $\partial^{\beta_{\mathrm{cx}}} \subset \partial^{\beta}$. Par ailleurs les inclusions suivantes sont toujours vraies* :

$$\partial^F \subset \partial^{WH} \subset \partial^H \subset \partial^G, \partial^{F_{\mathrm{cx}}} \subset \partial^{WH_{\mathrm{cx}}} \subset \partial^{H_{\mathrm{cx}}} \subset \partial^{G_{\mathrm{cx}}}.$$

Démonstration. Vu la proposition A.1, les inclusions ci-dessus sont immédiates. ∎

On propose maintenant quelques cas d'égalités de sous-différentiels :

PROPOSITION A.3. *Soient $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et $x \in X$.*

(a) *Lorsque X est un espace de Banach, alors*

$$\partial^H f(x) = \partial^{H_{\mathrm{cx}}} f(x), \qquad \partial^{WH} f(x) = \partial^{WH_{\mathrm{cx}}} f(x).$$

En particulier,

$$\partial^{F_{\mathrm{cx}}} = \partial^F \subset \partial^{WH_{\mathrm{cx}}} = \partial^{WH} \subset \partial^{H_{\mathrm{cx}}} = \partial^H \subset \partial^{G_{\mathrm{cx}}} \subset \partial^G.$$

(b) *Si X est un espace de Banach réflexif, alors*

$$\partial^F f(x) = \partial^{WH} f(x).$$

(c) *Si X est un espace de dimension finie, alors*

$$\partial^F f(x) = \partial^H f(x).$$

(d) *Si f est lipschitzienne près de x, alors*

$$\partial^H f(x) = \partial^G f(x).$$

Démonstration. Pour (a), il suffit de rappeler que dans un espace de Banach l'enveloppe convexe fermée d'un compact est compacte et que l'enveloppe convexe fermée d'un faiblement compact est faiblement compacte — théorème de Krein — d'où $\beta^{H_{\mathrm{cx}}} \approx \beta^H$ et $\beta^{WH_{\mathrm{cx}}} \approx \beta^{WH}$. Pour montrer (b), il suffit de prouver que $\beta^{F_{\mathrm{cx}}} \sqsubset \beta^{WH}$, ce qui est vrai car, dans un espace de Banach réflexif X, tout sous-ensemble convexe fermé et borné est compact pour la topologie faible de X. Concernant le point (c), si X est de dimension finie, tout fermé borné est compact donc $\beta^F \sqsubset \beta^H$. Pour le point (d), on se réfère à [13]. ∎

Fonctions restrictions et sous-différentiels. Avant de terminer cette section, on présente quelques résultats concernant le sous-différentiel d'une fonction restriction. On appelle *fonction restriction* de $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ au sous-ensemble E de X la fonction égale à f sur E et ∞ ailleurs ; on la note f_E.

Proposition A.4. *Soient $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction et x un élément de X. Les assertions suivantes sont toujours vraies :*

(1) *Étant donnés une bornologie β et des sous-espaces vectoriels E, E' de X,*

$$E \subset E' \;\Rightarrow\; \partial^\beta f_{x+E'}(x) \subset \partial^\beta f_{x+E}(x).$$

(2) *Pour tout L sous-espace vectoriel de dimension finie de X,*

$$\partial^{G_{\mathrm{cx}}} f_{x+L}(x) = \partial^H f_{x+L}(x) = \partial^F f_{x+L}(x).$$

(3) *Le sous-différentiel de Gateaux-convexe s'exprime à partir du sous-différentiel de Fréchet :*

$$\partial^{G_{\mathrm{cx}}} f(x) = \bigcap_{L \in \mathcal{F}} \partial^F f_{x+L}(x),$$

où $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Démonstration. On remarque tout d'abord que pour tout sous-espace vectoriel E de X,

$$\partial^\beta f_{x+E}(x) = \left\{ x^* \in X^* \;\middle|\; \liminf_{t\to 0} \inf_{v \in B'} \left(\frac{f_{x+E}(x+tv) - f_{x+E}(x)}{t} - \langle x^*, v\rangle \right) \geq 0,\ \forall B' \in \beta \right\},$$

et comme x appartient à $x + E$ et que f_{x+E} vaut $+\infty$ en dehors de $x + E$, on a

$$\partial^\beta f_{x+E}(x) = \left\{ x^* \in X^* \;\middle|\; \liminf_{t\to 0} \inf_{v \in B' \cap E} \left(\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle x^*, v\rangle \right) \geq 0,\ \forall B' \in \beta \right\}. \tag{51}$$

(1) est immédiat à partir de la formule (51).

(2) Il suffit de vérifier que $\partial^{G_{\mathrm{cx}}} f_{x+L}(x) \subset \partial^F f_{x+L}(x)$. Soient x^* dans $\partial^{G_{\mathrm{cx}}} f_{x+L}(x)$ et B un ensemble fermé borné de β^F. Comme L est de dimension finie, il existe un polyèdre convexe $B^{\mathrm{cx}} \subset L$ tel que $B \cap L \subset B^{\mathrm{cx}}$. Aussi

$$\liminf_{t\to 0} \inf_{v \in B \cap L} \left(\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle x^*, v\rangle \right) \geq \liminf_{t\to 0} \inf_{v \in B^{\mathrm{cx}} \cap L} \left(\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle x^*, v\rangle \right) \geq 0$$

car $x^* \in \partial^{G_{\mathrm{cx}}} f_{x+L}(x)$. L'élément B étant arbitraire dans β^F, on en déduit que x^* appartient à $\partial^F f_{x+L}(x)$.

(3) En combinant les points (1) et (2), il est clair que pour tout L dans $\mathcal{F}$,

$$\partial^{G_{\mathrm{cx}}} f(x) \subset \partial^{G_{\mathrm{cx}}} f_{x+L}(x) = \partial^F f_{x+L}(x), \quad \text{d'où} \quad \partial^{G_{\mathrm{cx}}} f(x) \subset \bigcap_{L \in \mathcal{F}} \partial^F f_{x+L}(x).$$

Pour l'inclusion inverse, il suffit de rappeler que tout polyèdre convexe B^{cx} étant borné et de dimension finie, il existe $B \in \beta^F$ et $L \in \mathcal{F}$ tels que $B^{\mathrm{cx}} \in B \cap L$. Ainsi, pour tout $x^* \in \bigcap_{L\in\mathcal{F}} \partial^F f_{x+L}(x)$, on a

$$\liminf_{t\to 0} \inf_{v\in B^{\mathrm{cx}}} \left(\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} - \langle x^*, v\rangle\right)$$
$$\geq \liminf_{t\to 0} \inf_{v\in B\cap L} \left(\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} - \langle x^*, v\rangle\right) \geq 0,$$

d'où $x^* \subset \partial^{G_{\mathrm{cx}}} f(x)$. ■

A.2. Sous-différentiels élaborés

Régularisations. Étant donnée une application f sur X, on appelle régularisation (ou régularisé) de l'opérateur ∂f toute fermeture forte ou faible, séquentielle ou topologique du graphe de ∂f sur $X \times X^*$.

— Régularisé fort de ∂:

$$\widetilde{\partial} f(x) := \{x^* \in X \mid x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|_*} x^*,\ x_n^* \in \partial f(x_n),\ x_n \to_f x\} = \|\cdot\|_*\text{-}\limsup_{x'\to_f x} \partial f(x').$$

— Régularisé faible de ∂:

$$\overline{\partial} f(x) := \{x^* \in X \mid x_\nu^* \xrightarrow{w^*} x^*,\ x_\nu^* \in \partial f(x_\nu),\ x_\nu \to_f x\} = w^*\text{-}\limsup_{x'\to_f x} \partial f(x').$$

— Régularisé séquentiel faible de ∂:

$$\hat{\partial} f(x) := \{x^* \in X \mid x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*,\ x_n^* \in \partial f(x_n),\ x_n \to_f x\} = w^*\text{-}\limsup_{x_n\to_f x} \partial f(x_n).$$

On rappelle que la lettre grecque ν est utilisée pour noter les indices des suites généralisées et la lettre latine n pour les indices des suites.

Sous-différentiel de Clarke. Si $f\ : X \to \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne sur X, la dérivée directionnelle généralisée de f au point x dans la direction h, notée $f^\circ(x\,;h)$, est définie comme suit:

$$f^\circ(x\,;h) := \limsup_{\substack{y\to x\\ \lambda\searrow 0}} \frac{f(y+\lambda h)-f(y)}{\lambda}\ ;$$

à partir de celle-ci on définit le sous-différentiel de *Clarke* de f comme étant l'ensemble non vide de X^*:

$$\partial^C f(x) := \{x^* \in X^* \mid f^\circ(x\,;h) \geq \langle x^*, h\rangle,\ \forall h \in X\}.$$

Lorsque $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est sci, le sous-différentiel de Clarke se définit comme suit :

$$\partial^C f(x) := \left\{x^* \in X^* \ \middle|\ (x^*, -1) \in \mathrm{cl}^* \bigcup_{\lambda>0} \lambda \cdot \partial^C \operatorname{dist}(\operatorname{epi} f, (x, f(x)))\right\}.$$

L'expression de la dérivée directionnelle généralisée d'une fonction $f \in \mathrm{SCI}(X)$:

$$f^\uparrow(x,h) = \sup_{V\in\mathcal{V}(h)} \limsup_{\substack{y\to_f x\\ t\searrow 0}} \inf_{h'\in V} \frac{f(y+th')-f(y)}{t}$$

permettant de ré-écrire $\partial^C f(x)$ comme $\partial^{CR} f(x)$, où

$$\partial^{CR} f(x) := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, h\rangle \leq f^\uparrow(x,h),\ \forall h \in X\},$$

est due à Rockafellar.

Sous-différentiel de Michel–Penot. Pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et tout élément $x \in \operatorname{dom} f$, le sous-différentiel de *Michel–Penot*, noté ∂^{MP}, se définit comme suit :

$$\partial^{MP} f(x) := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, h\rangle \le f^\diamond(x\,;h),\ \forall h \in X\},$$

où

$$f^\diamond(x\,;h) := \sup_y \limsup_{t\downarrow 0} \frac{f(x+ty+th) - f(x+ty)}{t}.$$

Sous-différentiels approchés de Ioffe. Pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et tout élément $x \in \operatorname{dom} f$, le sous-différentiel (*approché*) *analytique de Ioffe* de f en x, noté $\partial_a^I f(x)$, est défini par

$$\partial_a^I f(x) := \bigcap_{L\in\mathcal{F}} w^*\text{-}\limsup_{u\to_f x} \partial^H f_{u+L}(u),$$

avec $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension finie de X. Si $S \subset X$, le *G-cône normal* à S en un point $x \in \bar{S}$ est donné par

$$N_G(S,x) := \operatorname{cl}^* \Big(\bigcup_{\lambda>0} \lambda \cdot \partial_a^I \operatorname{dist}(S,x)\Big),$$

et l'ensemble

$$N_I(S,x) := \bigcup_{\lambda>0} \lambda \cdot \partial_a^I \operatorname{dist}(S,x)$$

est appelé le “nucleon” de $N_G(S,x)$. Le *G-sous-différentiel* de f en x est l'ensemble

$$\partial_G f(x) := \{x^* \mid (x^*,-1) \in N_G((f(x),x), \operatorname{epi} f)\}.$$

Par analogie, le “nucleon” de $\partial_G f(x)$ est défini par

$$\partial_g^I f(x) := \{x^* \mid (x^*,-1) \in N_I((f(x),x), \operatorname{epi} f)\},$$

il est plutôt appelé sous-différentiel *approché géométrique de Ioffe.*

Proposition A.5. *Soient $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction et x un élément de X. Les assertions suivantes sont toujours vraies* :

(1) *Le sous-différentiel approché analytique de Ioffe s'exprime aussi avec le sous-différentiel de Fréchet* :

$$\partial_a^I f(x) = \bigcap_{L\in\mathcal{F}} w^*\text{-}\limsup_{x'\to_f x} \partial^F f_{x'+L}(x),$$

où $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension finie.

(2) *Le sous-différentiel ∂_a^I contient aussi la régularisation du sous-différentiel $\partial^{G_{\rm cx}}$* (*pour la topologie faible*) :

$$w^*\text{-}\limsup_{x'\to_f x} \partial^{G_{\rm cx}} f(x') \subset \partial_a^I f(x).$$

Démonstration. La preuve de la proposition se déduit directement de la proposition A.4 (2) et de la définition de ∂_a^I. ∎

Il résulte de [48, proposition 3.3] que les inclusions

$$\partial_g^I f(x) \subset \partial_G f(x) \subset \partial_a^I f(x)$$

sont vraies pour tout $x \in X$ et tout $f \in \mathrm{SCI}(X)$ et que l'on a égalité entre ces trois opérateurs dès que f est lipschitzienne près de x.

A.3. Sous-différentiels à ε-près. Étant donné un sous-différentiel ∂, on définit (selon Ioffe [50]) la version à ε-près de ∂ (pour $\varepsilon \geq 0$) en posant

$$\partial_\varepsilon f(x) := \partial f_{x\varepsilon}(x),$$

où $f_{x\varepsilon}(u) = f(u) + \varepsilon\|u - x\|$. Bien sûr, $\partial f(x) = \partial_0 f(x)$.

Essentiellement dans nos travaux, le seul sous-différentiel à ε-près qui intervient est celui de Fréchet, dont l'expression se réduit à

$$\partial_\varepsilon^F f(x) = \left\{ x^* \in X^* \;\middle|\; \liminf_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{f(y) - f(x) - \langle x^*, y - x\rangle}{\|y - x\|} \geq -\varepsilon \right\}.$$

Références

[1] E. Asplund, *Fréchet differentiability of convex functions*, Acta Math. 121 (1968), 31–47.

[2] H. Attouch, J.-B. Baillon and M. Théra, *Variational sum of maximal monotone operator*, J. Convex. Anal. 1 (1994), 1–29.

[3] J.-P. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley-Interscience, 1984.

[4] J.-P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, 1990.

[5] D. Aussel, *Théorème de la valeur moyenne et convexité généralisée en analyse non régulière*, thèse, Université Blaise Pascal, décembre 1994.

[6] D. Aussel, J.-N. Corvellec and M. Lassonde, *Mean value theorem and subdifferential criteria for lower semicontinuous functions*, preprint, Université Blaise Pascal, 1994.

[7] —, —, —, *Mean value property and subdifferential criteria for lower semicontinuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995), 4147–4161.

[8] —, —, —, *Nonsmooth constrained optimization and multidirectional mean value inequalities*, SIAM J. Optim. 9 (1999), 690–706.

[9] D. Azé, J.-N. Corvellec and R. E. Lucchetti, *Variational pairs and applications to stability in non-smooth analysis*, preprint, 1999.

[10] J. M. Borwein and A. D. Ioffe, *Proximal analysis in smooth spaces*, Set-Valued Anal. 4 (1996), 1–24.

[11] J. M. Borwein and D. Preiss, *A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), 517–527.

[12] J. M. Borwein and H. M. Strojwas, *Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space, Part I: Theory*, Canad. J. Math. 38 (1986), 431–452.

[13] —, —, *Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space, Part II: Application*, ibid. 39 (1987), 428–472.

[14] J. M. Borwein, J. Treiman and Q. J. Zhu, *Partially smooth variational principles and applications*, Nonlinear Anal. 35B (1999), 1031–1059.

[15] J. M. Borwein and Q. J. Zhu, *Viscosity solutions and viscosity subderivatives in smooth Banach spaces with applications to metric regularity*, SIAM J. Control Optim. 34 (1996), 1568–1591.

[16] —, —, *A survey of subdifferential calculus with applications*, Nonlinear Anal. 38A (1999), 687–773.

[17] J. M. Borwein and Q. J. Zhu, *Addendum: A survey of subdifferential calculus with applications*, ibid. 49 (2002), 295–296.

[18] H. Brézis, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 18 (1968), 115–175.

[19] H. Brézis, L. Nirenberg and G. Stampacchia, *A remark on Ky Fan's minimax principle*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) 6 (1972), 293–300.

[20] F. E. Browder, *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces*, Proc. Sympos. Pure Math. 18, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, 1976.

[21] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, 1983. Reprinted as Vol. 5 of Classics in Appl. Math., SIAM, Philadelphia, 1990.

[22] F. H. Clarke and Yu. S. Ledyaev, *Mean value inequalities in Hilbert spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 344 (1994), 307–324.

[23] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern and P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Grad. Texts in Math. 178, Springer, New York, 1998.

[24] R. Correa, A. Jofré, and L. Thibault, *Subdifferential monotonocity as characterization of convex functions*, Numer. Funct. Anal. Optim. 15 (1994), 531–535.

[25] M. G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 (1992), 1–67.

[26] E. De Giorgi, A. Marino and M. Tosques, *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 68 (1980), 180–187.

[27] R. Deville and E. El Haddad, *The viscosity subdifferential of the sum of two functions in Banach spaces I: First order case*, J. Convex Anal. 3 (1996), 295–308.

[28] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *A smooth variational principle with applications to Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions*, J. Funct. Anal. 111 (1983), 197–212.

[29] —, —, —, *Smoothness and Renormings in Banach Spaces*, Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. 64, Wiley, New York, 1983.

[30] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324–353.

[31] I. Ekeland and G. Lebourg, *Generic Fréchet differentiability and pertubed optimization problems*, Trans. Amer. Math. Soc. 47 (1974), 324–353.

[32] M. Fabian, *Subdifferentials, local ε-supports and Asplund spaces*, J. London Math. Soc. 34 (1986), 568–576.

[33] —, *On classes of subdifferentiability spaces of Ioffe*, Nonlinear Anal. 12 (1988), 63–74.

[34] —, *Subdifferentiability and trustworthiness in the light of a new variational principle of Borwein and Preiss*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 30 (1989), no. 2, 51–56.

[35] M. Fabian and B. S. Mordukhovich, *Nonsmooth characterizations of Asplund spaces and smooth variational principles*, Set-Valued Anal. 6 (1998), 381–406.

[36] M. Fabian and N. V. Zhivkov, *A characterization of Asplund spaces with the help of local ε-supports of Ekeland and Lebourg*, C. R. Acad. Bulg. Sci. 38 (1985), 671–674.

[37] M. Geoffroy and M. Lassonde, *On a convergence of lower semicontinuous functions linked with the graph convergence of their subdifferentials*, in: Constructive, Experimental, and Nonlinear Analysis (Limoges, 1999), CMS Conf. Proc. 27, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 93–109.

[38] P. G. Georgiev, *The strong Ekeland variational principle, the strong drop theorem and applications*, J. Math. Anal. Appl. 131 (1988), 1–21.

[39] R. Haydon, *A counterexample in several questions about scattered compact spaces*, Bull. London Math. Soc. 22 (1990), 261–268.

[40] J.-B. Hiriart-Urruty and R. R. Phelps, *Subdifferential calculus using ε-subdifferentials*, J. Funct. Anal. 118 (1993), 154–166.

[41] A. D. Ioffe, *Approximate subdifferentials of nonconvex functions*, Cahier 8120 du CEREMADE, 1981, Université Paris IX "Dauphine".

[42] A. D. Ioffe, *On subdifferentiability spaces*, in: Fifth Internat. Conf. on Collective Phenomena, Ann. New York Acad. Sci. 410, New York Acad. Sci., New York, 1983, 107–119.

[43] —, *Approximate subdifferentials and applications, Part I*, Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984), 389–419.

[44] —, *Calculus of Dini subdifferentials of functions and contingent coderivatives of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 8 (1984), 517–539.

[45] —, *Necessary conditions for nonsmooth optimization*, Math. Oper. Res. 9 (1984), 159–189.

[46] —, *Subdifferentiability spaces and nonsmooth analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 10 (1984), 87–90.

[47] —, *Approximate subdifferentials and applications, Part II*, Mathematika 33 (1986), 111–128.

[48] —, *Approximate subdifferentials and applications, Part III*, ibid. 36 (1989), 1–38.

[49] —, *Proximal analysis and approximate subdifferentials*, J. London Math. Soc. 41 (1990), 175–192.

[50] —, *Fuzzy principles and characterization of trustworthiness*, Set-Valued Anal. **6** (1998), 265–276.

[51] —, *Codirectional compactness, metric regularity and subdifferential calculus*, in: Constructive, Experimental, and Nonlinear Analysis, (Limoges, 1999), CMS Conf. Proc. 27, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 123–163.

[52] —, *Towards metric theory of metric regularity*, in: Approximation, Optimization and Mathematical Economics (Pointe-à-Pitre, 1999), Physica, 2001, 165–176.

[53] A. D. Ioffe and J.-P. Penot, *Subdifferentials of performance functions and calculus of coderivatives of set-valued mappings*, Serdica Math. J. 22 (1996), 359–384.

[54] A. D. Ioffe and R. T. Rockafellar, *The Euler and Weierstrass conditions for nonsmooth variational problems*, Calc. Var. Partial Differential Equations 4 (1996), 59–87.

[55] F. Jules and M. Lassonde, *Formulas for subdifferentials of sums of convex functions*, J. Convex Anal. 9 (2002), 519–533.

[56] A. Ya. Kruger and B. Sh. Mordukhovich, *Extremal points and the Euler equation in nonsmooth optimization problem*, Dokl. Akad. Nauk BSSR 24 (1980), 684–687 (in Russian).

[57] M. Lassonde, *First order rules in nonsmooth contrained optimization*, Nonlinear Anal. 44A (2001), 1031–1056.

[58] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod–Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[59] B. S. Mordukhovich and Y. Shao, *Extremal characterizations of Asplund spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 197–205.

[60] —, —, *Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 384 (1996), 1235–1280.

[61] B. Mordukhovich and B. Wang, *Necessary suboptimality conditions via variational principles*, preprint, 2000.

[62] H. V. Ngai and M. Théra, *On necessary conditions for nonlipschitz optimization problems*, preprint, 1999.

[63] R. R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes in Math. 1364, Springer, Berlin, 2nd edition, 1993.

[64] J.-P. Penot, *Subdifferential calculus without qualification assumptions*, J. Convex Anal. 3 (1996), 207–219.

[65] —, *Some links between approximation, nonsmooth analysis, penalization and regularization*, preprint, 2000.

[66] S. M. Robinson, *Regularity and stability for convex multivalued functions*, Math. Oper. Res. 1 (1976), 130–143.

[67] R. T. Rockafellar, *Conjugate Duality and Optimization*, CBMS Regional Conf. Ser. in Appl. Math. 16, SIAM, Philadelphia, 1974.

[68] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational Analysis*, Grundlehren Math. Wiss. 317, Springer, 1998.

[69] L. Thibault, *A generalized sequential formula for subdifferentials of sums of convex functions defined on Banach spaces*, in: Recent Developments in Optimization (Dijon, 1994), R. Durier and C. Michelot (eds.), Lecture Notes in Econom. and Math. Systems 429, Springer, Berlin, 1995, 340–345.

[70] —, *Sequential convex subdifferential calculus and sequential Lagrange multipliers*, SIAM J. Control Optim. 35 (1997), 1434–1444.

[71] —, *On limiting convex subdifferential calculus*, in: Constructive, Experimental, and Nonlinear Analysis, (Limoges, 1999), CMS Conf. Proc. 27, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 279–289.

[72] Q. J. Zhu, *The equivalence of several basic theorems on subdifferentials*, Set-Valued Anal. 6 (1998), 171–185.