Introduction

Soient $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire et croissante, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire et bornée, $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(\widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ deux mouvements browniens indépendants tels que $B_0 = \widetilde{B}_0 = 0$ et une constante $1/2 \leq a < 1$. Nous nous intéressons alors au système d'équations suivant :

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} X_t = X_0 + B_t + a\displaystyle\int_0^t \phi * v_s(X_s)\,ds - (1-a)\int_0^t \beta * u_s(X_s)\,ds, \\ Y_t = Y_0 + \widetilde{B}_t + (1-a)\displaystyle\int_0^t \phi * u_s(Y_s)\,ds - a\int_0^t \beta * v_s(Y_s)\,ds, \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X_t \in dx) = u_t(dx) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_t \in dx) = v_t(dx),$$

où le produit de convolution est défini de la manière suivante :

$$\beta * u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \beta(x-y)\,u_t(dy).$$

Dans le système (E), nous avons en fait quatre inconnues : les processus stochastiques X_t et Y_t et leurs densités $u_t(x)$ et $v_t(x)$. Ce système peut également s'écrire sous la forme du système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\text{(E}'\text{)} \qquad \begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \displaystyle\int_0^t r_1(s, X_s)\,ds, \\ Y_t = Y_0 + \widetilde{B}_t - \displaystyle\int_0^t r_2(s, Y_s)\,ds, \end{cases}$$

où

$$r_1(s,x) = \mathbb{E}[(1-a)\beta(x - X_s) - a\phi(x - Y_s)],$$
$$r_2(s,x) = \mathbb{E}[a\beta(x - Y_s) - (1-a)\phi(x - X_s)].$$

Les deux processus aléatoires qui forment la solution de ce système sont bien sûr indépendants, puisque la position de X_t (respectivement de Y_t) ne dépend que de la loi de Y (resp. X).

De telles E.D.S. ont déjà été étudiées en détail, entre autres par Benachour–Roynette–Vallois, mais la présence d'un système d'équations dans ce cas le rend particulier. Ce système d'équations nous provient de la propagation du chaos dans un système de particules

$$(X_t^{1,N_n}, X_t^{2,N_n}, \ldots, X_t^{N_n,N_n}, Y_t^{1,M_n}, Y_t^{2,M_n}, \ldots, Y_t^{M_n,M_n})$$

(N_n et M_n sont, ici, deux suites d'entiers tendant vers l'infini quand $n \to \infty$) dont les particules sont de deux natures différentes X et Y. L'interaction entre les particules est la suivante : deux particules de même nature s'attirent et deux particules de nature différente se repoussent.

Nous nous intéresserons donc au système de particules (F) suivant et à sa convergence quand le nombre de particules tend vers l'infini.

$$\text{(F)} \qquad \begin{cases} X_t^{i,N_n} = X_0^i + B_t^i - \dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\int_0^t \sum_{j=1}^{N_n} \beta(X_s^{i,N_n} - X_s^{j,N_n})\,ds \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\int_0^t \sum_{k=1}^{M_n} \phi(X_s^{i,N_n} - Y_s^{k,M_n})\,ds, \qquad 1 \le i \le N_n, \\ Y_t^{i,M_n} = Y_0^i + \widetilde{B}_t^i - \dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\int_0^t \sum_{j=1}^{M_n} \beta(Y_s^{i,M_n} - Y_s^{j,M_n})\,ds \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\int_0^t \sum_{k=1}^{N_n} \phi(Y_s^{i,M_n} - X_s^{k,N_n})\,ds, \qquad 1 \le i \le M_n. \end{cases}$$

$(B_t^1, \ldots, B_t^{N_n})$, $(\widetilde{B}_t^1, \ldots, \widetilde{B}_t^{M_n})$ sont deux mouvements browniens indépendants.

Cette étude décrivant le système de processus auto-stabilisants non linéaires est découpée en deux parties, la première est consacrée à l'étude du système (E), la seconde à celle du système (F). Le plan est alors construit comme suit :

Dans une première section, nous exposerons toutes les conditions imposées sur les fonctions β et ϕ qui seront, sans doute, loin d'être optimales. Nous supposerons, entre autres, que β est une fonction continue croissante à croissance polynômiale et impaire, et que ϕ est impaire lipschitzienne et bornée. Nous commencerons alors, dans une seconde section, par étudier le système (E), c'est-à-dire l'existence et l'unicité d'une solution. La preuve de ce résultat n'exigera que la bornitude de certains moments de X_0 et de Y_0. Puis nous étudierons l'existence et l'unicité d'une distribution stationnaire, c'est-à-dire une solution $(u(x)dx, v(x)dx)$ au système

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\phi * v)u] + (1-a)\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\beta * u)u] = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (1-a)\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\phi * u)v] + a\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\beta * v)v] = 0. \end{cases}$$

Pour démontrer l'existence il nous suffit de supposer que β est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$; par contre, pour l'unicité nous sommes amenés à considérer que β se décompose de la manière suivante :

$$\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x$$

où $\beta_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une fonction impaire croissante convexe telle que $\alpha > 0$ est assez grand, $\beta'(0) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \beta_0'(x)/x < \infty$. De plus, si β_0 croît plus vite que $|x|^\varrho$ pour $\varrho > 1$ et si ϕ est concave, alors nous montrerons dans la section suivante que la solution (X_t, Y_t) converge en loi lorsque le temps tend vers l'infini vers $(u(x)\,dx, v(x)\,dx)$. Pour clore l'étude du système (E), nous verrons que, pour $a \neq 1/2$, les densités u et v des lois stationnaires sont clairement distinctes et nous donnerons également une vitesse de séparation des lois de X_t et de Y_t au voisinage de l'origine, lorsque X_0 et Y_0 ont la même loi.

Enfin, dans une seconde partie, nous verrons qu'il y a propagation du chaos dans le système à infinité de particules (F) : c'est-à-dire que la suite de mesures empiriques

$$\left(\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}\delta_{X_t^{i,N_n}}, \frac{1}{M_n}\sum_{i=1}^{M_n}\delta_{X_t^{i,M_n}}\right),$$

définie sur $\mathcal{C}([0,T])$, T fixé, converge en loi, quand n tend vers l'infini, vers une mesure déterministe $\mu\otimes\nu$, où $\mu_t(dx) = u_t(x)\,dx$ et $\nu_t(dx) = v_t(x)\,dx$ (u et v étant les densités du couple solution du système (E)). Ceci permettra donc d'approcher la loi de la solution du système (E) en simulant des particules, solutions du système (F). Nous donnerons, pour finir, une inégalité de concentration pour la loi des particules. Cette inégalité provient de la théorie développée autour de l'inégalité de Sobolev logarithmique (voir, par exemple, [A-co] et [M]). Nous montrerons en particulier qu'il existe une constante $K_T > 0$ telle que, pour toute fonction lipschitzienne vérifiant

$$\inf\{M > 0\,;\,\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|\} \leq 1,$$

nous avons

$$\sup_{t\leq T}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n} f(X_t^{i,N_n}) - \int_{\mathbb{R}} f(y)u_t(y)\,dy\right| \geq r + \sqrt{\frac{K_T}{N_n}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{N_n r^2}{4C_T}\right)$$

pour tout $r \geq 0$, où $C_T = (e^{4\|\phi'\|_\infty T} - 1)/\|\phi'\|_\infty$ et $u_t(x)\,dx$ est la loi de $\overline{X}_t$ solution de l'équation (E). De même,

$$\sup_{t\leq T}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{M_n}\sum_{i=1}^{M_n} f(Y_t^{i,M_n}) - \int_{\mathbb{R}} f(y)v_t(y)\,dy\right| \geq r + \sqrt{\frac{K_T}{M_n}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{M_n r^2}{4C_T}\right),$$

où $v_t(x)\,dx$ est la loi de $\overline{Y}_t$ solution de (E).

1. Étude du système (E)

1.1. Préliminaires. Voici tout d'abord quelques notations et quelques hypothèses dont on se servira tout au long de cette étude.

Les hypothèses concernant β. $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante, à croissance polynômiale et impaire. De plus, il existe $\beta_1 > 0$, $\beta_0 \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $C > 0$ et $r \in \mathbb{N}^*$ tels que :

(1) $$\beta(x) - \beta(y) \geq \beta_1(x - y) + \beta_0 \quad \text{pour tout } x \geq y,$$

(2) $$|\beta(x) - \beta(y)| \leq |x - y|(c + |x|^r + |y|^r) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R},$$

(3) $$|\beta(x)| \leq C(1 + |x|^{2q}), \qquad 2q \geq r + 1.$$

Les hypothèses concernant la fonction ϕ. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne de paramètre $K > 0$, bornée par $M_\phi > 0$ et impaire, telle que $\mathrm{sgn}(x)\phi(x) \geq 0$.

1.2. Existence et unicité des solutions du système (E). Cette section a pour but de montrer l'existence et l'unicité d'une solution du système (E), qui n'est pas évidente a priori, puisque la différentielle de X_t dépend de la position de X_t mais aussi de la loi de Y_t et réciproquement. On utilisera donc une méthode de point fixe pour déterminer une solution. Le résultat principal de cette partie est contenu dans le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *Soient X_0 et Y_0 deux variables aléatoires de lois symétriques, telles que $\mathbb{E}[X_0^{2(r+1)^2}] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y_0^{2(r+1)^2}] < \infty$. On suppose de plus que $\beta_1 > \frac{1-a}{a}K$ où $1/2 \le a < 1$. Le système* (E) *admet alors une unique solution forte*

$$\text{(4)}\quad \begin{cases} X_t = X_0 + B_t + a\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \phi(X_s - x)v_s(x)\,dx\,ds - (1-a)\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \beta(X_s - x)u_s(x)\,dx\,ds, \\ Y_t = Y_0 + \widetilde{B}_t + (1-a)\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \phi(Y_s - x)u_s(x)\,dx\,ds - a\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \beta(Y_s - x)v_s(x)\,dx\,ds, \end{cases}$$

où B_t et $\widetilde{B}_t$ sont deux mouvements browniens indépendants et où $u_t(x)\,dx$ (respectivement $v_t(x)\,dx$) est la loi de X_t (resp. Y_t).

Pour pouvoir démontrer ce résultat, on a besoin d'introduire certains espaces fonctionnels.

1) On note Λ_T l'ensemble des fonctions $b : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $x \mapsto b(t,x)$ est croissante, $b(t,\cdot)$ est localement lipschitzienne, uniformément par rapport à $t \in [0,T]$,

$$\text{(5)}\quad \begin{aligned} &|b(t,x) - b(t,y)| \le c_n|x-y| \quad \text{pour } |x| \le n,\ |y| \le n,\ t \in [0,T], \\ &b(t,x) - b(t,y) \ge (1-a)\beta_1(x-y) + (1-a)\beta_0 \quad \text{pour } x \ge y \text{ et } t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Ces fonctions vérifient de plus

$$\|b\|_T = \sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|b(t,x)|}{1+|x|^{2q}} < \infty.$$

Λ_T est muni de la norme $\|\cdot\|_T$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions $b : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ globalement lipschitziennes et bornées par aM. Cet espace est muni de la norme

$$\|b\|_\infty = \sup_{t\in[0,T],\, x\in\mathbb{R}} |b(t,x)|.$$

3) On notera enfin $F_T = \Lambda_T \times \Lambda_T \times E \times E$ muni de la norme

$$\|\underline{b}\|_T^F = \sum_{i=1}^2 \|b_i\|_T + \sum_{i=3}^4 \|b_i\|_\infty, \qquad \text{où } \underline{b} = (b_1,b_2,b_3,b_4).$$

En plus de tous ces espaces fonctionnels on va utiliser la transformation $\Gamma : F_T \to F_T$ définie par ses coordonnées

$$\begin{aligned} &p_1 \circ \Gamma(\underline{b})(x) = \mathbb{E}[(1-a)\beta(x - X_t^b)], \qquad &&p_3 \circ \Gamma(\underline{b})(x) = \mathbb{E}[a\phi(x - Y_t^b)], \\ &p_2 \circ \Gamma(\underline{b})(x) = \mathbb{E}[a\beta(x - Y_t^b)], &&p_4 \circ \Gamma(\underline{b})(x) = \mathbb{E}[(1-a)\phi(x - X_t^b)], \end{aligned}$$

où p_i est la $i$ème projection dans l'espace F_T et X_t^b (resp. Y_t^b) est solution de l'E.D.S.

$$dX_t^b = dB_t - b_1(t, X_t^b)dt + b_3(t, X_t^b)dt, \tag{6}$$

respectivement

$$dY_t^b = d\widetilde{B}_t - b_2(t, Y_t^b)dt + b_4(t, Y_t^b)dt. \tag{7}$$

Pour montrer qu'il existe des solutions aux équations qui viennent d'être citées, on utilise le résultat suivant (cf. Stroock et Varadhan [S-V, Théorème 10.2.2, p. 255]) :

PROPOSITION 1. *Soit* $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

$$\sup_{t\ge 0} |b(t,0)| < \infty, \qquad |b(t,x) - b(t,y)| \le c_n|x-y| \quad \textit{pour } n \in \mathbb{N},\ |x| \le n,\ |y| \le n,$$

et $\operatorname{sgn}(x)b(t,x) \ge 0$ *pour* $|x|$ *assez grand. Alors l'E.D.S. suivante a une unique solution forte :*

$$X_t^b = X_0 + B_t - \int_0^t b(s, X_s^b)\, ds.$$

Pour montrer que le système (4) a une unique solution, on cherche un point fixe à la transformation Γ. Pour ce faire, on vérifie, dans un premier temps, que, pour $\underline{b} \in F_T$, les équations (6) et (7) admettent une unique solution forte. Or, comme b_3 et b_4 sont bornées et $\underline{b} \in F_T$, il existe $x_0 > 0$ tel que, pour tout x vérifiant $|x| \ge x_0$,

$$\operatorname{sgn}(x)(b_1(t,x) - b_3(t,x)) \ge 0, \qquad \operatorname{sgn}(x)(b_2(t,x) - b_4(t,x)) \ge 0 \quad \text{pour } t \in [0,T].$$

Par ailleurs, les b_i sont localement lipschitziennes pour $i = 1,\ 2,\ 3$ et 4. On peut alors appliquer la Proposition 1. On en déduit que les équations (6) et (7) admettent une unique solution forte.

Pour la suite, on utilise les notations suivantes :

$$\overline{X}_t^{m,b} = \mathbb{E}[|X_t^b|^m], \qquad \overline{Y}_t^{m,b} = \mathbb{E}[|Y_t^b|^m], \qquad \widehat{X}_t^{m,b} = \sup_{s\le t} \overline{X}_s^{m,b}, \qquad \widehat{Y}_t^{m,b} = \sup_{s\le t} \overline{Y}_s^{m,b}.$$

Pour démontrer le Théorème 1, on a besoin de plusieurs lemmes.

LEMME 1. *Soient* $\underline{b} \in F_T$, $n \ge 1$, $\varrho = (\varrho_0, \varrho_0, 0, 0)$ *où* $\varrho_0(t,x) = \beta_0 x$. *Alors* $\widehat{X}_T^{2n,\varrho} < \infty$ *et* $\widehat{Y}_T^{2n,\varrho} < \infty$ *pour* $n \ge 0$ *tel que* $\mathbb{E}[|X_0|^{2n}] < \infty$ *et* $\mathbb{E}[|Y_0|^{2n}] < \infty$. *De plus,*

$$\begin{aligned} \widehat{X}_T^{2n,b} &\le k_1(n)\Big\{\widehat{X}_T^{2n,\varrho} + T^{2n}\sum_{i=1}^{2n} c_i\|b_1 - \varrho_0\|_T^i(1 + \widehat{X}_T^{2qi,\varrho})\Big\}, \\ \widehat{Y}_T^{2n,b} &\le k_2(n)\Big\{\widehat{Y}_T^{2n,\varrho} + T^{2n}\sum_{i=1}^{2n} d_i\|b_1 - \varrho_0\|_T^i(1 + \widehat{Y}_T^{2qi,\varrho})\Big\}, \end{aligned} \tag{8}$$

où les c_i, d_i *sont des constantes ne dépendant ni de* $\underline{b}$ *ni de* ϱ *ni de* T.

Preuve. (a) En considérant $\varrho = (\varrho_0, \varrho_0, 0, 0)$, on a alors l'équation

$$X_t^\varrho = X_0 + B_t - \int_0^t \beta_0 X_s^\varrho\, ds.$$

Or $X_t^\varrho = X_0 e^{-\beta_0 t} + Z_t$ où $Z_t = e^{-\beta_0 t}\int_0^t e^{\beta_0 s} dB_s$ est une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance $(1-e^{-2\beta_0 t})/(2\beta_0)$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[(X_t^\varrho - e^{-\beta_0 t}X_0)^{2n}] \leq \left(\frac{1-e^{-2\beta_0 t}}{2\beta_0}\right)^n \mathbb{E}[(B_1)^{2n}].$$

On en déduit donc

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t^\varrho|^{2n}] \leq c_n(1+\mathbb{E}[|X_0|^{2n}]),$$

où les c_n sont des constantes (le même raisonnement est valable pour Y). Donc, si $\mathbb{E}[|X_0|^{2n}]$ et $\mathbb{E}[|Y_0|^{2n}]$ sont finis, il s'ensuit que $\widehat{X}_T^{2n,\varrho} < \infty$ et $\widehat{Y}_T^{2n,\varrho} < \infty$.

(b) Par ailleurs,

$$X_t^b - X_t^\varrho = -\int_0^t (b_1(s,X_s^b) - p_1\circ\varrho(s,X_s^\varrho))\,ds + \int_0^t (b_3(s,X_s^b) - p_3\circ\varrho(s,X_s^\varrho))\,ds,$$

d'où, pour $\alpha > 1$, on obtient que $|X_t^b - X_t^\varrho|^\alpha$ est égal à

$$\begin{aligned} &-\alpha\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\varrho)|X_s^b - X_s^\varrho|^{\alpha-1}\mathbb{1}_{\{X_s^b\neq X_s^\varrho\}}(b_1(s,X_s^b) - p_1\circ\varrho(s,X_s^\varrho))\,ds \\ &\qquad + \alpha\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\varrho)|X_s^b - X_s^\varrho|^{\alpha-1}\mathbb{1}_{\{X_s^b\neq X_s^\varrho\}}(b_3(s,X_s^b) - p_3\circ\varrho(s,X_s^\varrho))\,ds. \end{aligned}$$

En prenant la limite quand $\alpha \to 1^+$, on a alors

$$\begin{aligned} |X_t^b - X_t^\varrho| = &-\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\varrho)(b_1(s,X_s^b) - p_1\circ\varrho(s,X_s^\varrho))\,ds \\ &+\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\varrho)(b_3(s,X_s^b) - p_3\circ\varrho(s,X_s^\varrho))\,ds. \end{aligned}$$

Comme b_1 est une fonction croissante, $\operatorname{sgn}(x-y)(b_1(s,x)-b_1(s,y)) \geq 0$. On obtient donc

$$\begin{aligned} |X_t^b - X_t^\varrho| \leq &-\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\varrho)(b_1(s,X_s^\varrho) - p_1\circ\varrho(s,X_s^\varrho))\,ds \\ &+\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s^b - X_s^\varrho)(b_3(s,X_s^b) - p_3\circ\varrho(s,X_s^\varrho))\,ds. \end{aligned}$$

Or, $p_3\circ\varrho$ est identiquement nul et b_3 est borné par $(1-a)M$, ce qui implique

$$\begin{aligned} |X_t^b - X_t^\varrho| &\leq (1-a)Mt + \int_0^t \|b_1 - p_1\circ\varrho\|_T(1+|X_s^\varrho|^{2q})\,ds \\ &\leq (1-a)Mt + \|b_1 - p_1\circ\varrho\|_T\int_0^t (1+|X_s^\varrho|^{2q})\,ds. \end{aligned}$$

Par un argument de convexité, $\mathbb{E}[|X_t^b|^{2n}]$ est plus petit ou égal à

$$k_1(n)\Big\{\mathbb{E}[|X_t^\varrho|^{2n}] + \mathbb{E}\Big[\Big\{(1-a)MT + \|b_1 - p_1\circ\varrho\|_T\int_0^t (1+|X_s^\varrho|^{2q})\,ds\Big\}^{2n}\Big]\Big\}.$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t (1+|X_s^\varrho|^{2q})\,ds\Big)^m\Big] \le k(m)T^m(1+\widehat{X}_T^{\varrho,m}),$$

où $k(m)$ est une constante. On en déduit la première formule de (8) où les c_i sont des constantes qui ne dépendent que de a, M et n. On peut alors effectuer les mêmes calculs pour obtenir la deuxième formule. ∎

Pour continuer les calculs, on a besoin d'introduire un lemme plutôt technique qui s'apparente à un lemme de Gronwall.

Lemme 2. *Soit ϕ une fonction positive telle que $\phi(0)=0$. On suppose qu'il existe deux constantes $b>0$ et $c\ge 0$ telles que*

$$\phi(t) \le b\int_0^t \phi(s)\,ds + c\int_0^t \sqrt{\phi(s)}\,ds.$$

Alors

$$\phi(t) \le \Big\{\frac{c}{b}\,(e^{bt/2}-1)\Big\}^2.$$

Preuve. On note ψ la solution non nulle de l'équation

$$\psi(t) = b\int_0^t \psi(s)\,ds + c\int_0^t \sqrt{\psi(s)}\,ds.$$

Par dérivation, on a

$$\frac{d\psi(t)}{b\psi(t)+c\sqrt{\psi(t)}} = dt,$$

puis, en prenant la primitive dans cette égalité, et en utilisant la condition initiale $\psi(0)=0$, on trouve $\psi(t)=\{c(e^{bt/2}-1)/b\}^2$. Pour terminer la preuve de ce lemme, on fait appel à [B, Théorème 4.1, p. 16] qui assure $\phi(t)\le\psi(t)$. ∎

Lemme 3. (i) *Γ est une application de F_T dans F_T et*

$$\|\Gamma b\|_T^F \le M + k_3(1+\widehat{X}_T^{b,2q}+\widehat{Y}_T^{b,2q}). \tag{9}$$

(ii) *Γ est continue et vérifie*

$$\begin{aligned}
\|p_1\circ\Gamma(\underline{b}) - p_1\circ\Gamma(\underline{c})\|_T &\le k_4(e^{(1-a)KT}-1)(\|b_1-c_1\|_T+\|b_3-c_3\|_\infty),\\
\|p_2\circ\Gamma(\underline{b}) - p_2\circ\Gamma(\underline{c})\|_T &\le k_5(e^{(1-a)KT}-1)(\|b_2-c_2\|_T+\|b_4-c_4\|_\infty),\\
\|p_3\circ\Gamma(\underline{b}) - p_3\circ\Gamma(\underline{c})\|_\infty &\le k_6Te^{(1-a)KT}(\|b_2-c_2\|_T+\|b_4-c_4\|_\infty),\\
\|p_4\circ\Gamma(\underline{b}) - p_4\circ\Gamma(\underline{c})\|_\infty &\le k_7Te^{(1-a)KT}(\|b_1-c_1\|_T+\|b_3-c_3\|_\infty),
\end{aligned} \tag{10}$$

où k_i sont des constantes.

Preuve. (a) Comme β est une fonction continue et croissante, $\mathbb{E}[(1-a)\beta(x-X_t^b)]$ est croissante en x. Par ailleurs elle est localement lipschitzienne et vérifie, par (1), pour $x\ge y$,

$$\mathbb{E}[(1-a)\beta(x-X_t^b)-(1-a)\beta(y-X_t^b)] \ge (1-a)(\beta_1(x-y)+\beta_0).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(1-a)\beta(x-X_t^b)] &\le \mathbb{E}[C(1-a)(1+|x|^{2q}+|X_t^b|^{2q})]\\ &\le C(1-a)(1+|x|^{2q})\mathbb{E}[1+|X_t^b|^{2q}]\\ &= C(1-a)(1+|x|^{2q})(1+\widehat{X}_T^{b,2q}).\end{aligned}$$

D'où

$$\|p_1\circ\Gamma(\underline{b})\|_T \le C(1-a)(1+\widehat{X}_T^{b,2q}).$$

De la même manière,

$$\|p_2\circ\Gamma(\underline{b})\|_T \le aC(1+\widehat{Y}_T^{b,2q}), \qquad \|p_3\circ\Gamma(\underline{b})\|_\infty \le aM, \qquad \|p_4\circ\Gamma(\underline{b})\|_\infty \le (1-a)M.$$

On en déduit alors (9). Comme $p_3\circ\Gamma$ et $p_4\circ\Gamma$ tendent vers 0 à l'infini, ces expressions sont globalement lipschitziennes et bornées, ce qui justifie entièrement (i).

(b) On prouve maintenant la deuxième partie du lemme, et plus particulièrement, les deux dernières inégalités énoncées. Par la propriété de Lipschitz de ϕ (cf. les préliminaires) on a

$$|p_3\circ\Gamma(\underline{b})(x)-p_3\circ\Gamma(\underline{c})(x)| \le a\mathbb{E}[|\phi(x-Y_t^b)-\phi(x-Y_t^c)|] \le aK\mathbb{E}[|Y_t^b-Y_t^c|]$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$. Or, d'après la démonstration du Lemme 1,

$$\begin{aligned}|Y_t^b-Y_t^c| &\le (1-a)K\int_0^t |Y_s^b-Y_s^c|\,ds + \int_0^t |b_4(s,Y_s^c)-c_4(s,Y_s^c)|\,ds\\ &\quad + \|b_2-c_2\|_T\int_0^t (1+|Y_s^c|^{2q})\,ds\\ &\le (1-a)K\int_0^t |Y_s^b-Y_s^c|ds + T\|b_4-c_4\|_\infty + \|b_2-c_2\|_T\int_0^t (1+|Y_s^c|^{2q})\,ds.\end{aligned}$$

En prenant l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[|Y_t^b-Y_t^c|] \le (1-a)K\int_0^t \mathbb{E}[|Y_s^b-Y_s^c|]\,ds + T\|b_4-c_4\|_\infty + \|b_2-c_2\|_T(1+\widehat{Y}_T^{c,2q}).$$

Par le lemme de Gronwall, on trouve

$$\mathbb{E}[|Y_t^b-Y_t^c|] \le T(1+\widehat{Y}_T^{c,2q})\{\|b_2-c_2\|_T+\|b_4-c_4\|_\infty\}e^{(1-a)KT},$$

et ainsi

$$\|p_3\circ\Gamma(\underline{b})-p_3\circ\Gamma(\underline{c})\|_\infty \le k_6Te^{(1-a)KT}\{\|b_2-c_2\|_T+\|b_4-c_4\|_\infty\},$$

où $k_6=aK(1+\widehat{Y}_T^{c,2q})$. On obtient de la même manière la dernière inégalité de (10) avec k_7 dépendant de a, K et $1+\widehat{X}_T^{c,2q}$.

(c) On montre enfin les deux premières inégalités de (10). En utilisant l'hypothèse (2) sur β, on a

$$|p_1\circ\Gamma(\underline{b})(x)-p_1\circ\Gamma(\underline{c})(x)| = |\mathbb{E}[(1-a)(\beta(x-X_t^b)-\beta(x-X_t^c))]|$$

$$\leq (1-a)\mathbb{E}[|X_t^b - X_t^c|(c + |x|^r + |X_t^b|^r + |X_t^c|^r)]$$
$$\leq (1-a)k_8(1+|x|^r)\mathbb{E}[|X_t^b - X_t^c|(1 + |X_t^b|^r + |X_t^c|^r)]$$
$$\leq k_9(1+|x|^r)\mathbb{E}[|X_t^b - X_t^c|^2]^{1/2}[(1 + \mathbb{E}[|X_t^b|^{2r}] + \mathbb{E}[|X_t^c|^{2r}])]^{1/2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il faut alors calculer $|X_t^b - X_t^c|^2$:

$$\begin{aligned}
|X_t^b - X_t^c|^2 &= -2\int_0^t (X_s^b - X_s^c)(b_1(s, X_s^b) - c_1(s, X_s^c))\,ds \\
&\quad + 2\int_0^t (X_s^b - X_s^c)(b_3(s, X_s^b) - c_3(s, X_s^c))\,ds \\
&\leq -2\int_0^t (X_s^b - X_s^c)(b_1(s, X_s^c) - c_1(s, X_s^c))\,ds \\
&\quad + 2(1-a)K\int_0^t |X_s^b - X_s^c|^2\,ds + 2\|b_3 - c_3\|_\infty \int_0^t |X_s^b - X_s^c|\,ds \\
&\leq 2\|b_1 - c_1\|_T \int_0^t |X_s^b - X_s^c|(1 + |X_s^c|^{2q})\,ds + 2(1-a)K\int_0^t |X_s^b - X_s^c|^2\,ds \\
&\quad + 2\|b_3 - c_3\|_\infty \int_0^t |X_s^b - X_s^c|\,ds.
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_t^b - X_t^c|^2] &\leq 2\|b_1 - c_1\|_T \int_0^t (1 + \mathbb{E}[|X_s^c|^{4q}])^{1/2}\mathbb{E}[|X_s^b - X_s^c|^2]^{1/2}\,ds \\
&\quad + 2(1-a)K\int_0^t \mathbb{E}[|X_s^b - X_s^c|^2]\,ds + 2\|b_3 - c_3\|_\infty \int_0^t \mathbb{E}[|X_s^b - X_s^c|^2]^{1/2}\,ds \\
&\leq k_{10}(\|b_1 - c_1\|_T + \|b_3 - c_3\|_\infty)\int_0^t \mathbb{E}[|X_s^b - X_s^c|^2]^{1/2}\,ds \\
&\quad + 2(1-a)K\int_0^t \mathbb{E}[|X_s^b - X_s^c|^2]\,ds.
\end{aligned}$$

Puis, par application du Lemme 2, on trouve

$$\mathbb{E}[|X_t^b - X_t^c|^2] \leq k_{11}(e^{(1-a)KT} - 1)(\|b_1 - c_1\|_T + \|b_3 - c_3\|_\infty),$$

d'où la première équation de (10), avec k_4 qui dépend de $\widehat{X}_T^{c,4q}$, $\widehat{X}_T^{b,2r}$ et $\widehat{X}_T^{c,2r}$. La même démonstration est bien-entendu valable pour p_2. ∎

Voici un résultat d'existence et d'unicité des solutions du système (E) :

Lemme 4. *Soit* $L \geq 2aC(1 + \max(k_1(q)\widehat{X}_\infty^{2q,\varrho}, k_2(q)\widehat{Y}_\infty^{2q,\varrho}))$ *et* $\Lambda_T^L = \Lambda_T \cap \{b\,;\, \|b\|_T \leq L\}$. *On définit* $F_T^L = \Lambda_T^L \times \Lambda_T^L \times E \times E$. *Il existe* k_{12} *tel que, si* $T = k_{12}(L\,;\, \mathbb{E}(|X_0|^i)\,;\, \mathbb{E}(|Y_0|^i)\,;\, 1 \leq i \leq 8q^2)$, *alors*

(i) $\Gamma(F_T^L) \subset F_T^L$, *la norme lipschitzienne de* Γ, *restreinte à* F_T^L, *est inférieure à* $1/2$,
(ii) *il existe une unique solution forte au système* (E) *telle que*

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}(|X_t|^{2q}) < \infty \quad et \quad \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}(|Y_t|^{2q}) < \infty.$$

Preuve. (a) On choisit $L \ge 2aC(1+\max(k_1(q)\widehat{X}_\infty^{2q,\varrho}, k_2(q)\widehat{Y}_\infty^{2q,\varrho}))$. D'après (19), on a

$$\|p_1 \circ \Gamma(\underline{b})\|_T \le (1-a)C(1+\widehat{X}_T^{2q,b}).$$

Ainsi, d'après le Lemme 1, $\|p_1 \circ \Gamma(\underline{b})\|_T$ est inférieur ou égal à

$$(1-a)C\Big(1 + k_1(q)\widehat{X}_T^{2q,\varrho} + k_1(q)T^{2q}\sum_{i=1}^{2q} c_i(\|b_1\|_T + \|\varrho_0\|_\infty)^i(1+\widehat{X}_T^{2qi,\varrho})\Big),$$

où $\|\varrho_0\|_\infty = \sup_{x>0} |\beta_0 x|/(1+|x|^{2q})$. On peut alors choisir T_1 assez petit tel que

$$(1-a)Ck_1(q)T_1^{2q}\sum_{i=1}^{2q} c_i(L+\|\varrho_0\|_\infty)^i(1+\widehat{X}_{T_1}^{2qi,\varrho}) \le L/2.$$

Ainsi $\Gamma b \in F_{T_1}^L$ car, pour $p_2 \circ \Gamma$, le calcul est identique.

(b) Il s'agit maintenant d'examiner la constante de Lipschitz. En faisant la somme des inégalités (10), on obtient

$$\|\Gamma(\underline{b}) - \Gamma(\underline{c})\|_T^F \le \alpha(T)\|\underline{b} - \underline{c}\|_T^F,$$

où $\alpha(T) = (k_4 + k_5)(e^{(1-a)KT} - 1) + (k_6 + k_7)Te^{(1-a)KT}$.

On choisit T_2 assez petit pour que $\alpha(T_2) \le 1/2$. En prenant $T = \min(T_1, T_2)$, la norme lipschitzienne est alors inférieure à $1/2$. T dépend évidemment de L et de $\mathbb{E}[|X_0|^i]$, pour $1 \le i \le 8q^2$.

(c) On suppose que $T = k_{12}(L\,;\, \mathbb{E}(|X_0|^i)\,;\, 1 \le i \le 8q^2)$. Soit $b_0 \in F_T^L$. On construit alors la suite $\underline{b}_{n+1} = \Gamma\underline{b}_n$; d'après le début du lemme, on a $\underline{b}_n \in F_T^L$ pour tout n et Γ est une contraction de norme inférieure à $1/2$. D'après le théorème du point fixe, $\underline{b}_n$ converge vers $\underline{b}$ avec la norme $\|\cdot\|_T^F$. La plupart des propriétés sont évidemment directement vérifiées par $\underline{b}$: il ne reste plus qu'à montrer que b_1 et b_2 sont localement lipschitziennes. On le vérifie pour b_1. Comme $\underline{b}_{n+1} = \Gamma\underline{b}_n$, alors, pour $|x| \le N$ et $|y| \le N$, on a

$$\begin{aligned}|b_{n+1,1}(t,x) - b_{n+1,1}(t,y)| &\le (1-a)\mathbb{E}[|\beta(x - X_t^{b_n}) - \beta(y - X_t^{b_n})|] \\ &\le (1-a)|x-y|\mathbb{E}[c + |x|^r + |y|^r + |X_t^{b_n}|^r] \\ &\le k_{13}(N)(1+\widehat{X}_T^{b_n,r})|x-y|.\end{aligned}$$

Comme $\|p_1 \circ \underline{b}_n\|_T \le K$ et $\|p_2 \circ \underline{b}_n\|_T \le K$, on en déduit, d'après le Lemme 1,

$$|b_{n+1,1}(t,x) - b_{n+1,1}(t,y)| \le k_{14}(N,K,T,\varrho)|x-y|.$$

En prenant la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$|b_1(t,x) - b_1(t,y)| \le k_{14}(N,K,T,\varrho)|x-y|.$$

b_1 est donc localement lipschitzienne. On peut effectuer le même raisonnement pour b_2, ce qui implique que $\underline{b} \in F_T^L$; il s'agit donc d'un point fixe $\Gamma\underline{b} = \underline{b}$. Ainsi (X^b, Y^b) est une solution forte du système (E). ∎

On aimerait construire une solution forte sur $[0,\infty[$. Pour cela, on a besoin de savoir que $\sup_{t>0}\mathbb{E}(|X_t^b|^{2n})<\infty$ et $\sup_{t>0}\mathbb{E}(|Y_t^b|^{2n})<\infty$, pour un certain $n\geq 1$. Pour cela, on a besoin de majorations du type de celles développées dans le Lemme 1 mais qui ne dépendraient plus du temps T. Tout d'abord, on rappelle un lemme énoncé dans [B-R-T-V, p. 182].

Lemme 5. *Soit f une fonction continue et dérivable définie sur $[0,\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $l>0$ tel que $\{t\,;\, f(t)>l\}\subset\{t\,;\, f'(t)<0\}$. Alors* $\sup_{x\geq 0} f(x)\leq \max(f(0),l)$.

Lemme 6. *Soit $\underline{b}\in F_T$. On suppose que $\varGamma\underline{b}=\underline{b}$; X_0 et Y_0 ont des lois symétriques et $\beta_1>\frac{1-a}{a}K$. Alors*

$$\widehat{X}_T^{b,2n}\leq k_{19}(m_i\,;\,2\leq i\leq 2n),\qquad \widehat{Y}_T^{b,2n}\leq k_{20}(n_i\,;\,2\leq i\leq 2n),$$

où m_i (resp. n_i) sont les moments d'ordre i de $|X_0|$ (resp. $|Y_0|$).

Preuve. (a) On montre d'abord que $\mathbb{E}[X_t]=\mathbb{E}[Y_t]=0$. Pour ce faire, on considère (X_t,Y_t), la solution de

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \int_0^t b_1(s,X_s)\,ds + \int_0^t b_3(s,X_s)\,ds,\\[2mm] Y_t = Y_0 + \widetilde{B}_t - \int_0^t b_2(s,X_s)\,ds + \int_0^t b_4(s,X_s)\,ds,\end{cases}$$

avec

$$b_1(t,x)=\mathbb{E}[(1-a)\beta(x-X_t)],\qquad b_3(t,x)=\mathbb{E}[a\phi(x-Y_t)],$$
$$b_2(t,x)=\mathbb{E}[a\beta(x-Y_t)],\qquad b_4(t,x)=\mathbb{E}[(1-a)\phi(x-X_t)].$$

On remarque que si $(X_t,B_t),(Y_t,\widetilde{B}_t)$ est solution faible de ces équations, alors, comme ϕ et β sont impaires, $(-X_t,-B_t),(-Y_t,-\widetilde{B}_t)$ sont également solutions faibles des équations. Grâce à l'unicité en loi, $-X_t$ a même loi que X_t et $-Y_t$ a même loi que Y_t puisque $-X_0$ a même loi que X_0 et $-Y_0$ a même loi que Y_0. On en déduit alors

$$\mathbb{E}[-X_t]=\mathbb{E}[X_t]=0,\quad \mathbb{E}[-Y_t]=\mathbb{E}[Y_t]=0,\qquad \forall t\geq 0.$$

(b) On considère X_t et X'_t les deux solutions suivantes :

$$X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2}\int_0^t b_1(s,X_s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t b_3(s,X_s)\,ds,$$

$$X'_t = X'_0 + B'_t - \frac{1}{2}\int_0^t b_1(s,X'_s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t b_3(s,X'_s)\,ds.$$

On pose $Z_t=X_t-X'_t$ et $\mu_n(t)=\mathbb{E}(|Z_t|^n)$ pour $n\geq 2$. Z est une semi-martingale :

$$Z_t = Z_0 + B_t - B'_t - \int_0^t (b_1(s,X_s)-b_1(s,X'_s))\,ds + \int_0^t b_3(s,X_s)-b_3(s,X'_s)\,ds.$$

En appliquant la formule d'Itô, puis en dérivant par rapport au temps, on a

$$\frac{\mu'_{2n}(t)}{n} = (2n-1)\mu_{2n-2}(t) + 2\mathbb{E}[Z_t^{2n-1}(b_3(t,X_t) - b_3(t,X'_t))] \\ - 2\mathbb{E}[Z_t^{2n-1}(b_1(t,X_t) - b_1(t,X'_t))].$$

On suppose que $x \geq y$. Comme b_1 satisfait à (5) et b_3 est lipschitzienne de coefficient $K > 0$, on obtient

$$(x-y)(b_1(t,x) - b_1(t,y)) \geq \beta_1 (x-y)^2 - |\beta_0|\,|x-y|, \quad |b_3(t,x) - b_3(t,y)| \leq K(x-y).$$

On en déduit

$$\frac{\mu'_{2n}(t)}{n} \leq (2n-1)(\mu_{2n}(t))^{1-1/n} + 2a|\beta_0|(\mu_{2n}(t))^{1-1/2n} + 2((1-a)K - a\beta_1)\mu_{2n}(t).$$

Comme dans l'hypothèse du lemme $\beta_1 > \frac{1-a}{a}K$, il existe $k_{21}(n) > 0$ tel que, pour $x \geq k_{21}(n)$, on a

$$(2n-1)x^{1-1/n} + 2a|\beta_0|x^{1-1/2n} + 2((1-a)K - a\beta_1)x < 0.$$

Ainsi $\{t\,;\,\mu_{2n}(t) > k_{21}(n)\} \subset \{t\,;\,\mu'_{2n}(t) < 0\}$. En appliquant le Lemme 5, on obtient

$$\mathbb{E}[(X_t - X'_t)^{2n}] \leq \max(k_{21}(n), \mathbb{E}[(X_0 - X'_0)^{2n}]), \quad n \geq 1.$$

Pour terminer la démonstration, on utilise le résultat suivant : soient ξ et ξ' deux variables indépendantes, ξ' étant une copie de ξ, telles que $\mathbb{E}[\xi] = \mathbb{E}[\xi'] = 0$. Alors

$$\mathbb{E}[\xi^{2n}] \leq k_{18}(\mathbb{E}((\xi-\xi')^2), \ldots, \mathbb{E}((\xi-\xi')^{2n})).$$

La démonstration de ce résultat se fait par récurrence. Ceci termine la preuve du Lemme 6, puisque $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[Y_t] = 0$. ∎

Preuve du Théorème 1. On suppose X_0, Y_0 de lois symétriques. On note

$$U = \max\{T > 0\,;\,\text{le système (E) admet une unique solution sur } [0,T], \\ \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[X_t^{2q}] < \infty \text{ et } \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[Y_t^{2q}] < \infty\}$$

(convention : $\max \emptyset = 0$).

(a) On montre d'abord que $U > 0$. On choisit

$$K = \max\{2aC(1 + \max(k_1(q)\widehat{X}_\infty^{2q,\varrho}, k_2(q)\widehat{Y}_\infty^{2q,\varrho}))\,; \\ k_3(1 + k_{19}(m_i\,;\,2\leq i\leq 2q) + k_{20}(n_i\,;\,2\leq i\leq 2q))\}.$$

Grâce au Lemme 4, il existe $T = k_{12}(m_i\,;\,1 \leq i \leq 8q^2)$ et un unique $\underline{b} \in \Lambda_T^K$ tel que $\Gamma\underline{b} = \underline{b}$; alors (X^b, Y^b) est l'unique solution forte du système (E$'$) sur $[0,T]$. On suppose qu'il existe $(\widetilde{X}^b, \widetilde{Y}^b)$ solution de (E$'$) sur $[0,T]$ telle que $\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}[\widetilde{Y}_t^{2q}] < \infty$ et $\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}[\widetilde{X}_t^{2q}] < \infty$. On note

$$c_1(t,x) = \mathbb{E}[(1-a)\beta(x - \widetilde{X}_t^b)], \qquad c_3(t,x) = \mathbb{E}[a\phi(x - \widetilde{Y}_t^b)],$$
$$c_2(t,x) = \mathbb{E}[a\beta(x - \widetilde{Y}_t^b)], \qquad c_4(t,x) = \mathbb{E}[(1-a)\phi(x - \widetilde{X}_t^b)].$$

Ainsi $\|c_1(t,x)\|_T \leq k_3(1 + \widetilde{X}_t^{c,2q})$. Comme $\underline{c} = \Gamma\underline{c}$, d'après le Lemme 6, on a

$$\|c_1(t,x)\|_T \leq k_3(1 + k_{19}(m_i\,;\,2\leq i\leq 2q)) \leq K.$$

De la même manière, on obtient $\|c_2(t,x)\|_T \leq K$, d'où $\underline{c} \in \Lambda_T^K$ et alors, par unicité, $\widetilde{X} = X$, $\widetilde{Y} = Y$ et $\underline{b} = \underline{c}$.

(b) On remarque tout d'abord que $\widehat{X}_\infty^{2q,\varrho} = k_{22}(m_i\,;\, 2 \le i \le 2q)$. De la même façon, on remarque que $\widehat{Y}_\infty^{2q,\varrho} = k_{23}(m_i\,;\, 2 \le i \le 2q)$. On pose $m'_i = k_{19}(m_j\,;\, 2 \le j \le i)$ et $n'_i = k_{20}(n_j\,;\, 2 \le j \le i)$. Soit K' la constante définie par (a) en remplaçant les m_i et n_i par les m'_i et n'_i. À ce K' correspond un $T' = k_{12}(m'_i\,;\, 2 \le i \le 8q^2) > 0$. On raisonne alors par l'absurde : on suppose que $U < \infty$ et on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < T'/2$. Or on sait que, pour $\varepsilon > 0$, il existe T tel que $U - \varepsilon < T < U$ et qu'il existe une solution (X, Y) sur $[0, T]$ vérifiant $\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[Y_t^{2q}] < \infty$ et $\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[X_t^{2q}] < \infty$. On considère alors le système (E$'$) sur $[T, \infty[$ en prenant comme données initiales X_T et Y_T qui sont symétriques (on a déjà démontré dans le Lemme 6 que X_t a même loi que $-X_t$ et idem pour Y). Or, d'après le Lemme 6,

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[X_t^{2q}] \le k_{19}(m_i\,;\, 2 \le i \le 2q) \le m'_{2q}, \qquad \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[Y_t^{2q}] \le k_{20}(n_i\,;\, 2 \le i \le 2q) \le n'_{2q}.$$

On peut donc définir une solution sur $[T, T+T']$. Comme $T+T' > U$ il y a contradiction, ce qui entraîne que $U = \infty$. ∎

En utilisant la démonstration de ce théorème, on peut énoncer directement le résultat suivant :

Proposition 2. *Soit* (X, Y) *une solution du système* (E). *On suppose que* $\mathbb{E}(X_0^{2n}) < \infty$ *et* $\mathbb{E}(Y_0^{2n}) < \infty$. *Alors*

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[X_t^{2n}] < \infty \quad \textit{et} \quad \sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}[Y_t^{2n}] < \infty \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Remarque 1. Pour $a = 1/2$, grâce à l'unicité de la solution du système, le système (E) n'est plus un système à proprement parler mais une juxtaposition de deux équations identiques : on rejoint alors l'étude développée dans [B-R-T-V].

1.3. Existence d'une distribution stationnaire. Dans tout ce paragraphe, on notera $u(t, x)$ la densité de X_t et $v(t, x)$ celle de Y_t. On rappelle que (X_t, Y_t) est l'unique solution forte du système (E) et on peut alors directement en déduire que $(u(t, x), v(t, x))$ est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\phi * v)u] + (1-a)\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\beta * u)u], \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (1-a)\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\phi * u)v] + a\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\beta * v)v]. \end{cases}$$

Si $u(x)\,dx$ et $v(x)\,dx$ sont des distributions stationnaires, elles vérifient alors

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\phi * v)u] + (1-a)\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\beta * u)u] = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (1-a)\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\phi * u)v] + a\,\dfrac{\partial}{\partial x}[(\beta * v)v] = 0. \end{cases}$$

En intégrant ces équations, on obtient

$$\text{(12)} \qquad u(x) = \frac{1}{\lambda(u, v)} \exp\Big\{a\int_0^x \phi * v(y)\,dy - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)\,dy\Big\},$$

où $\lambda(u,v)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}} u(x)\,dx = 1$, et

$$v(x) = \frac{1}{\mu(u,v)} \exp\Big\{(1-a)\int_0^x \phi * u(y)\,dy - a\int_0^x \beta * v(y)\,dy\Big\}, \tag{13}$$

où $\mu(u,v)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}} v(x)\,dx = 1$. Le résultat principal de ce paragraphe est le théorème suivant, qui donne l'existence d'une distribution stationnaire; on énoncera par la suite un résultat d'unicité.

THÉORÈME 2. *Soit β convexe sur $\mathbb{R}_+$. Alors :*

(i) *Il existe un couple de densités (u,v) tel que u et v sont des fonctions paires, de plus, (u,v) satisfait aux équations* (11)–(13).

(ii) *Si u et v sont les densités de X_0 et Y_0, alors la solution (X_t, Y_t) du système* (E) *a pour densité jointe $u(x)v(y)$ quel que soit $t \geq 0$.*

Pour prouver ce résultat, on a besoin du théorème du point fixe de Schauder (voir, par exemple, Corollaire 11.2, p. 280 dans [G-T]). On note $\overline{F}$ l'adhérence d'un ensemble F.

PROPOSITION 3. *On suppose que $\mathcal{E}$ est un espace de Banach, $\mathcal{C}$ un sous-ensemble convexe fermé, $\mathcal{A}$ une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ telle que*

(i) *$\mathcal{A}$ est continue,*
(ii) *$\overline{\mathcal{A}(\mathcal{C})}$ est compact.*

Alors $\mathcal{A}$ admet un point fixe dans $\mathcal{C}$.

On détermine tout d'abord les ensembles concernés et, pour cela, on introduit quelques notations.

NOTATIONS. 1) $\mathcal{E}_0$ est l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\sup_x (1 + |x|^p)|f(x)| < \infty \quad \text{où } p > 4q.$$

On munit $\mathcal{E}_0$ de la norme $|\cdot|_\infty$ où $|f|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1 + |x|^p)|f(x)|$.

2) On définit $\mathcal{C}_M$ le sous-ensemble fermé convexe de $\mathcal{E}_0$ suivant :

$$\mathcal{C}_M = \Big\{f \in \mathcal{E}_0\,;\ f \geq 0, \text{ paire}, \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1, \sup_{x\in\mathbb{R}}(1 + |x|^p)f(x) \leq M\Big\}.$$

3) Pour tout $u \in \mathcal{C}_M$, on définit $\gamma_k(u) = \int_{\mathbb{R}} |x|^k u(x)\,dx$ et pour $(u,v) \in \mathcal{C}_M \times \mathcal{C}_M$, les opérateurs suivants :

$$\mathcal{A}(u,v)(x) = \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\Big\{a\int_0^x \phi * v(y)\,dy - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)\,dy\Big\},$$

$$\mathcal{B}(u,v)(x) = \frac{1}{\mu(u,v)} \exp\Big\{(1-a)\int_0^x \phi * u(y)\,dy - a\int_0^x \beta * v(y)\,dy\Big\}.$$

Pour pouvoir appliquer la Proposition 3, il est nécessaire de démontrer quelques lemmes préliminaires.

Lemme 7. *Soit* $u \in \mathcal{C}_M$.

(i) *Si*

$$C_1 = 1 + \max_{0 \le k \le p-2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^k}{1+|x|^p}\, dx,$$

alors

$$\gamma_k(u) \le MC_1, \qquad 0 \le k \le p-2.$$

(ii) $\beta * u$ *est une fonction impaire et*

$$\int_0^x \beta(y)\, dy \le \int_0^x (\beta * u)(y)\, dy \le C_2 M x^2 (1 + x^{2q}), \qquad \forall x \ge 0. \tag{14}$$

C_2 *est une constante dépendant de* β *et* M *et satisfaisant* $M \ge \max(1, C_1^{2q})$.

Preuve (cf. [B-R-T-V]). On montre tout d'abord la première partie du lemme : il est facile de voir que

$$\gamma_k(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^k}{1+|x|^p} (1+|x|^p) u(x)\, dx \le MC_1, \qquad 0 \le k \le p-2.$$

Il est également évident que $\beta * u$ est une fonction impaire. De plus, pour $x \ge 0$, on a

$$\begin{aligned} \beta * u(x) &= \beta(x) + \int_{\mathbb{R}} (\beta(x-y) - \beta(x)) u(y)\, dy \\ &= \beta(x) + \int_0^\infty (\beta(x-y) + \beta(x+y) - 2\beta(x)) u(y)\, dy. \end{aligned}$$

β étant une fonction impaire, on obtient

$$\beta * u(x) = \beta(x) + \int_0^\infty (\beta(x+y) - \beta(y-x) - 2\beta(x)) u(y)\, dy.$$

En utilisant la convexité de β sur $\mathbb{R}_+$ et le fait que toute fonction impaire f convexe sur $\mathbb{R}_+$ vérifie

$$f(x) \le \frac{1}{2} (f(x-y) + f(x+y)), \qquad \forall x \ge 0,\ \forall y \in \mathbb{R},$$

on a $\beta * u(x) \ge \beta(x)$ pour tout $x \ge 0$. On en déduit donc la minoration dans l'équation (14). Pour la majoration, on décompose $\beta * u$ de la façon suivante :

$$\beta * u(x) = \int_0^\infty (\beta(x+y) - \beta(y)) u(y)\, dy + \int_0^\infty (\beta(y) - \beta(y-x)) u(y)\, dy.$$

En utilisant l'inégalité (2), on obtient

$$|\beta * u(x)| \le cx(1+x^r)\Big(1 + \int_0^\infty y^r u(y)\, dy\Big), \qquad x \ge 0.$$

Comme $r + 1 \le 2q$ et $2q \le p-2$, on a, par l'inégalité de Hölder,

$$\gamma_r(u) = \int_{\mathbb{R}} |y|^r u(y)\,dy \le (\gamma_{2q}(u))^{r/2q} \le (MC_1)^{r/2q}$$
$$\le (MC_1)^{(2q-1)/2q} \le M^{1-1/4q^2} \le M.$$

Par intégration, on obtient la majoration de (14). ∎

Grâce à ce lemme, on peut montrer le résultat suivant :

Lemme 8. *Il existe M tel que*

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}_M, \mathcal{C}_M) \subset \mathcal{C}_M \quad \textit{et} \quad \mathcal{B}(\mathcal{C}_M, \mathcal{C}_M) \subset \mathcal{C}_M.$$

Preuve. Il suffit de vérifier ce lemme pour $\mathcal{A}$, l'autre inclusion se montre de manière identique à quelques constantes près.

On pose $R(x) = (1+|x|^p)\mathcal{A}(u,v)(x)$, u et v appartenant à $\mathcal{C}_M$. Évidemment $\mathcal{A}(u,v) \ge 0$. Par ailleurs, puisque ϕ est bornée par M_ϕ (voir les préliminaires),

$$\mathcal{A}(u,v)(x) \le \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\Big\{-(1-a)\int_0^x \beta * u(y)\,dy + aM_\phi x\Big\}.$$

En utilisant le lemme précédent, on a

$$\mathcal{A}(u,v)(x) \le \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\Big\{aM_\phi x - (1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy\Big\}.$$

On en déduit, grâce à (1),

$$0 \le R(x) \le \frac{1}{\lambda(u,v)} \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big[(1+|x|^p)\exp\Big\{aM_\phi x - (1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy\Big\}\Big] \le \frac{C_3}{\lambda(u,v)},$$

où C_3 est une constante ne dépendant que de ϕ, β et a. On cherche maintenant à minorer $\lambda(u,v)$:

$$\lambda(u,v) = 2\int_0^\infty \exp\Big\{-(1-a)\int_0^x \beta * u(y)\,dy + a\int_0^x \phi * v(y)\,dy\Big\}\,dx$$
$$\ge 2\int_0^\infty \exp\Big\{-(1-a)\int_0^x \beta * u(y)\,dy - aM_\phi x\Big\}\,dx.$$

En appliquant (14), on obtient

$$\lambda(u,v) \ge 2\int_0^\infty \exp\{-(1-a)C_2 M x^2(1+x^{2q}) - aM_\phi x\}\,dx \ge \frac{C_4}{\sqrt{M}},$$

où $C_4 = \int_0^\infty \exp(-(1-a)C_2 y^2(1+y^{2q}) - aM_\phi y)\,dy$; C_4 ne dépend donc que de a, q, β et ϕ. Cette dernière inégalité est obtenue par le changement de variable $y = x\sqrt{M}$ en supposant que $M \ge 1$. Finalement, on obtient

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} R(x) \le \frac{C_3}{C_4}\sqrt{M}.$$

On peut alors choisir M tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^p)\mathcal{A}(u,v)(x) \le M \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^p)\mathcal{B}(u,v)(x) \le M. \ ∎$$

LEMME 9. *$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des opérateurs continus.*

Preuve. On étudie la quantité suivante :

$$\begin{aligned}\theta(x) = \exp\Big\{a\int_0^x \phi * v_1(y)\,dy - (1-a)\int_0^x \beta * u_1(y)\,dy\Big\}\\ - \exp\Big\{a\int_0^x \phi * v_2(y)\,dy - (1-a)\int_0^x \beta * u_2(y)\,dy\Big\}\\ = \exp\Big(-(1-a)\int_0^x \beta * u_1(y)\,dy\Big)\Big[\exp\Big(a\int_0^x \phi * v_1(y)\,dy\Big) - \exp\Big(a\int_0^x \phi * v_2(y)\,dy\Big)\Big]\\ + \exp\Big(a\int_0^x \phi * v_2(y)\,dy\Big)\\ \times\Big[\exp\Big(-(1-a)\int_0^x \beta * u_1(y)\,dy\Big) - \exp\Big(-(1-a)\int_0^x \beta * u_2(y)\,dy\Big)\Big]\\ = \theta_1(x) + \theta_2(x).\end{aligned}$$

On a

$$|\theta_1(x)| \le \exp\Big(-(1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy\Big)\Big|\exp\Big(a\int_0^x \phi * v_1(y)\,dy\Big) - \exp\Big(a\int_0^x \phi * v_2(y)\,dy\Big)\Big|.$$

Or $\int_0^x \phi * v_1(y)\,dy \le M_\phi x$. Ainsi

$$\begin{aligned}|\theta_1(x)| &\le a\exp\Big\{-(1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy + aM_\phi x\Big\}\Big|\int_0^x \phi * v_1(y)\,dy - \int_0^x \phi * v_2(y)\,dy\Big|\\ &\le a\exp\Big\{-(1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy + aM_\phi x\Big\}\Big|\int_0^x\int_{\mathbb{R}} \phi(y-t)(v_1-v_2)(t)\,dt\,dy\Big|.\end{aligned}$$

Comme

$$\Big|\int_0^x\int_{\mathbb{R}} \phi(y-t)(v_1-v_2)(t)\,dt\,dy\Big| \le M_\phi x|v_1-v_2|_\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+|t|^p},$$

et, de plus, comme $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x\exp\{-(1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy + aM_\phi x\}| < \infty$ car $\beta(x) \ge \beta_1 x + \beta_0$ pour $x \ge 0$ avec $\beta_1 > 0$, on a $|\theta_1(x)| \le C_6|v_1-v_2|_\infty$. On majore maintenant

$$\begin{aligned}|\theta_2(x)| \le\ &\exp(aM_\phi x)\Big|\exp\Big(-(1-a)\int_0^x \beta * u_1(y)\,dy\Big) - \exp\Big(-(1-a)\int_0^x \beta * u_2(y)\,dy\Big)\Big|\\ \le\ &\exp\Big\{-(1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy + aM_\phi x\Big\}|\exp(-(1-a)\phi_1(x)) - \exp(-(1-a)\phi_2(x))|,\end{aligned}$$

où $\phi_i(x) = \int_0^x \widetilde{\beta}_i(y)\,dy$ avec $\widetilde{\beta}_i(y) = \int_0^\infty (\beta(y+t) - \beta(t-y) - 2\beta(y))u_i(t)\,dt$.

Comme $|e^{-a} - e^{-b}| \le |a-b|$ pour $a, b > 0$ et comme β vérifie $\beta(x) \le \beta(x-y) + \beta(x+y)$, on obtient

$$|\theta_2(x)| \le (1-a)\exp\Big\{-(1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy + aM_\phi x\Big\}\int_0^x H(y)\,dy,$$

où

$$H(y) = \Big|\int_0^\infty (\beta(y+t)-\beta(t-y)-2\beta(y))(u_1(t)-u_2(t))\,dt\Big|.$$

Ainsi

$$H(y) \le \int_0^\infty Cy(1+y^r)(1+t^r)|u_1(t)-u_2(t)|\,dt.$$

De plus, comme $p > 4q$, $H(y) \le Cy(1+y^r)|u_1-u_2|_\infty^{1/2}$. En intégrant, on obtient

$$|\theta_2(x)| \le Cx^2(1+x^r)|u_1-u_2|_\infty^{1/2}\exp\Big\{aM_\phi x-(1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy\Big\}.$$

On en déduit

$$|\theta_2(x)|_\infty \le C_7|u_1-u_2|_\infty^{1/2}.$$

Il ne reste plus qu'à estimer $\mathcal{A}(u_1,v_1)(x)-\mathcal{A}(u_2,v_2)(x)$. En décomposant cette différence, on obtient

$$\mathcal{A}(u_1,v_1)(x)-\mathcal{A}(u_2,v_2)(x) = \frac{1}{\lambda(u_1,v_1)}\,\theta(x) + (\lambda(u_1,v_1)-\lambda(u_2,v_2))W(x),$$

où

$$W(x) = \frac{1}{\lambda(u_1,v_1)\lambda(u_2,v_2)}\exp\Big\{a\int_0^x \phi * v_2(y)\,dy-(1-a)\int_0^x \beta * u_2(y)\,dy\Big\}. \tag{15}$$

Or, d'après la démonstration du Lemme 8, $|W(x)| \le M \times c^{te}$ où c^{te} est une constante et $W(x) \ge 0$. De plus, comme $\lambda(u_1,v_1)-\lambda(u_2,v_2) = \int_0^\infty \theta(x)\,dx$, on obtient

$$|\mathcal{A}(u_1,v_1)-\mathcal{A}(u_2,v_2)|_\infty \le C_8(|u_1-u_2|_\infty+|v_1-v_2|_\infty)+C_9(|u_1-u_2|_\infty^{1/2}+|v_1-v_2|_\infty^{1/2}).$$

On en déduit donc que $\mathcal{A}$ est un opérateur continu. Le même raisonnement est valable pour $\mathcal{B}$. ■

Preuve du Théorème 2. (i) Pour pouvoir utiliser la Proposition 3 (avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_0$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M \times \mathcal{C}_M$), grâce aux lemmes précédents, il ne reste plus qu'à vérifier que $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{C}_M,\mathcal{C}_M)\times\mathcal{B}(\mathcal{C}_M,\mathcal{C}_M)}$ est bien compact.

On observe tout d'abord que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(u,v)(x) &= \frac{1}{\lambda(u,v)}\,(a\phi * v(x)-(1-a)\beta * u(x))\\ &\qquad\times\exp\Big\{a\int_0^x \phi * v(y)\,dy-(1-a)\int_0^x \beta * u(y)\,dy\Big\}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$|\mathcal{A}'(u,v)(x)| \le \frac{\sqrt{M}}{C_4}\,(|(1-a)\beta * u(x)|+aM_\phi)\exp\Big\{aM_\phi x-(1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy\Big\}$$

$$\leq \frac{\sqrt{M}}{C_4}\Big(C(1-a)x(1+x^r)\Big(1+\int_0^\infty y^r u(y)\,dy\Big)+aM_\phi\Big)$$
$$\times \exp\Big\{aM_\phi x-(1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy\Big\}$$
$$\leq C_{10}(1+|x|^{2q+1})\exp\Big\{aM_\phi x-(1-a)\int_0^x \beta(y)\,dy\Big\}.$$

Comme $\beta(y)\geq \beta_1 y+\beta_0$, on obtient que $|\mathcal{A}'(u,v)(x)|$ est uniformément borné par rapport à u, v et x. Idem pour $\mathcal{B}$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli : soit (u_n,v_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}_M\times\mathcal{C}_M$. Il existe alors une sous-suite qui converge vers (u,v). Or par la dernière inégalité démontrée et par son homologue pour $\mathcal{B}$, on en déduit que $(u,v)\in\mathcal{E}$. Ainsi $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{C}_M,\mathcal{C}_M)\times\mathcal{B}(\mathcal{C}_M,\mathcal{C}_M)}$ est compact.

(ii) D'après (i), il existe $u\in\mathcal{C}_M$ et $v\in\mathcal{C}_M$ tels que $u=\mathcal{A}(u,v)$ et $v=\mathcal{B}(u,v)$. Alors, de manière évidente, u et v sont dans $\mathcal{C}^1$. Si on suppose que $\mathbb{P}(X_0\in dx)=u(x)\,dx$ et $\mathbb{P}(Y_0\in dx)=v(x)\,dx$, on a alors $\mathbb{P}(X_t\in dx)=u(x)\,dx$ et $\mathbb{P}(Y_t\in dx)=v(x)\,dx$. ■

On cherche maintenant à étudier à quelles conditions suffisantes on obtient un résultat d'unicité du couple (u,v).

Pour cela, on suppose que $\beta\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, que $\beta:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et que $\lim_{x\to 0^+}(\beta'(x)-\beta'(0))/x$ existe et est fini. Comme $\beta(0)=0$, $x\mapsto\beta(x)/x$ est une fonction croissante et positive. On définit $\alpha=\lim_{x\to 0^+}\beta(x)/x$. On pose alors

$$\beta(x)=\beta_0(x)+\alpha x,\qquad \text{où } \beta_0 \text{ est convexe, avec } \lim_{x\to 0^+}\frac{\beta_0(x)}{x}=0. \tag{16}$$

Théorème 3. *On suppose que β admette la décomposition* (16). *Il existe alors $\alpha_{\beta_0}>0$ tel que, pour tout $\alpha\geq\alpha_{\beta_0}$, le système* (11) *admet au plus un couple de solutions.*

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin de quelques lemmes et de la définition suivante :

$$\mathcal{D}=\Big\{\nu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ \text{paire}\,;\int_{\mathbb{R}}\nu(x)\,dx=1 \text{ et } \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^{2n})\nu(x)<\infty\Big\}.$$

Lemme 10. *On suppose que* (16) *est vérifié et que $u\in\mathcal{D}$. Alors*

$$\beta_0*u(x)=\int_0^\infty(\beta_0(x+y)-\beta_0(y-x))u(y)\,dy\geq 0,\qquad \forall x\geq 0,$$
$$\beta*u(x)=\beta_0*u(x)+\alpha x\geq\alpha x,\qquad \forall x\geq 0.$$

La démonstration de ce lemme est évidente.

Soit (u,v) le couple solution de (11). Alors

$$u(x)=\mathcal{A}(u,v)\leq\frac{1}{\lambda(u,v)}\exp\Big\{aM_\phi x-(1-a)\int_0^x\beta*u(y)\,dy\Big\}.$$

Ainsi

$$u(x)\leq\frac{1}{\lambda(u,v)}\exp\Big\{aM_\phi x-\frac{1-a}{2}\,\alpha x^2\Big\}. \tag{17}$$

Par des arguments identiques,

$$v(x) \le \frac{1}{\mu(u,v)} \exp\left\{(1-a)M_\phi x - \frac{a}{2}\,\alpha x^2\right\}. \tag{18}$$

On définit alors l'espace $\mathcal{D}_\alpha$: l'ensemble des couples (u,v) de fonctions paires à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} v(x)\,dx = 1, \text{ et tels que } u \text{ vérifie (17), } v \text{ vérifie (18).} \tag{19}$$

On définit également la norme

$$N_p(u) = \int_0^\infty x(1+x^p)|u(x)|\,dx, \qquad p > 4q.$$

Montrons alors que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des contractions de $\mathcal{D}_\alpha$ dans $\mathcal{D}$ pour la norme N_p.

Lemme 11. *Il existe une constante c ne dépendant que de β_0, ϕ et a telle que si $(u,v) \in \mathcal{D}_\alpha$ alors*

$$\frac{1}{\lambda(u,v)} \le c\sqrt{\alpha}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\lambda(u,v) &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{a\int_0^x \phi * v(y)\,dy - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)\,dy\right\} dx \\
&\ge 2\int_0^\infty \exp\left\{-aM_\phi x - (1-a)\int_0^x \beta_0 * u(y)\,dy - (1-a)\alpha\,\frac{x^2}{2}\right\} dx.
\end{aligned}$$

Or, grâce à (2),

$$\beta_0 * u(y) \le cy(1+y^r)\left(1 + \int_0^\infty t^r u(t)\,dt\right).$$

Par le calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^r u(t)\,dt &\le \int_0^\infty \frac{t^r}{\lambda(u,v)} \exp\left\{-(1-a)\,\frac{\alpha t^2}{2} + aM_\phi t\right\} dt \\
&\le \frac{1}{\alpha^{r/2}} \int_0^\infty \frac{(\alpha t^2)^{r/2}}{\lambda(u,v)} \exp\left\{-(1-a)\,\frac{\alpha t^2}{2} + aM_\phi t\right\} dt.
\end{aligned}$$

En posant $x = \sqrt{\alpha}\,t$, et puisque $\alpha \ge 1$, on a

$$\int_0^\infty t^r u(t)\,dt \le \frac{1}{\alpha^{(r+1)/2}} \int_0^\infty \frac{x^r}{\lambda(u,v)} \exp\left\{-(1-a)\,\frac{x^2}{2} + aM_\phi x\right\} dx.$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^\infty t^r u(t)\,dt \le \frac{C_{11}}{\lambda(u,v)}.$$

On pose $\Omega = [\sqrt{\lambda(u,v)}, \infty[$. Alors

$$\lambda(u,v)/2 \geq \int_\Omega \exp\left\{-aM_\phi x - (1-a)\alpha\,\frac{x^2}{2} - C_{12}(1-a)x^2(1+x^r)\left(1+\frac{1}{\lambda(u,v)}\right)\right\} dx.$$

En posant $\mu = \sqrt{\lambda(u,v)}$ et $x = \mu y$, on obtient $\mu \geq h(\mu)$, où

$$h(t) = 2\int_0^\infty \exp\left\{-aM_\phi ty - (1-a)\alpha\,\frac{(yt)^2}{2} - C_{12}(1-a)y^2(1+(yt)^r)(1+t^2)\right\} dy.$$

Il se trouve que h est décroissante, on calcule alors sa dérivée en supposant que $t \in [0,1]$:

$$-h'(t) \leq C_{13} + 2\alpha(1-a)t\int_0^\infty y^2 \exp\left\{-y^2\left(C_{14}+\frac{\alpha t^2}{2}\right)\right\} dy.$$

En posant $x = y\sqrt{C_{14}+\alpha t^2/2}$, on a, par un changement de variable,

$$-h'(t) \leq C_{13} + \frac{2\alpha(1-a)t}{(C_{14}+\alpha t^2/2)^{3/2}}\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx \leq C_{13} + C_{15}\alpha\varrho_\alpha(t),$$

en définissant $\varrho_\alpha(t) = t/(C_{14}+\alpha t^2/2)$. Comme $\sqrt{\alpha}\,\varrho_\alpha(t) \leq \sqrt{\alpha}\,\varrho_\alpha(C_{14}\sqrt{2/\alpha})$ et comme $\sqrt{\alpha}\,\varrho_\alpha(C_{14}\sqrt{2/\alpha})$ est une constante qui ne dépend pas de α, on a

$$h(0) - h(t) \leq t(C_{13} + C_{16}\sqrt{\alpha}).$$

Comme $h(0)$ est une constante, il existe C_{17} tel que $h(t) \geq C_{17}(1 - t(1+\sqrt{\alpha}))$. Si $t < \inf(1, C_{17}(C_{17}(1+\sqrt{\alpha})+1)^{-1})$ alors $h(t) > t$ et donc, si α est assez grand, $\mu = \sqrt{\lambda(u,v)} \geq C_{17}(C_{17}(1+\sqrt{\alpha})+1)^{-1}$. Ainsi $1/\alpha\lambda(u,v)$ est majoré par une constante. ∎

Lemme 12. *Soit $\theta(x)$ la fonction paire définie par*

$$\theta(x) = \exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta * u_1(y)\,dy + a\int_0^x \phi * v_1(y)\,dy\right\}$$
$$- \exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta * u_2(y)\,dy + a\int_0^x \phi * v_2(y)\,dy\right\},$$

où (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont des éléments de $\mathcal{D}_\alpha$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|\theta(x)| \leq cx^2(1+x^r)\exp\left(aM_\phi x - (1-a)\,\frac{\alpha x^2}{2}\right)(N_p(u_1-u_2) + N_p(v_1-v_2)).$$

Preuve. On a

$$\theta(x) = \exp\left(-(1-a)\,\frac{\alpha x^2}{2}\right)\theta_0(x).$$

On définit θ_0 comme θ en remplaçant β par β_0. On obtient la décomposition $\theta_0(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x)$ avec les inégalités suivantes, pour $x \geq 0$:

$$|\theta_1(x)| \leq \exp\left\{-(1-a)\int_0^x \beta_0(y)\,dy\right\}\left|\exp a\int_0^x \phi * v_1(y)\,dy - \exp a\int_0^x \phi * v_2(y)\,dy\right|$$

$$\leq a \exp(aM_\phi x)\Big|\int_0^x \phi * v_1(y)\,dy - \int_0^x \phi * v_2(y)\,dy\Big|$$
$$\leq a \exp(aM_\phi x)\Big|\int_0^x\int_{\mathbb{R}} \phi(y-t)(v_1-v_2)(t)\,dt\,dy\Big|$$
$$\leq a \exp(aM_\phi x)\Big|\int_0^x\int_{\mathbb{R}} (\phi(y-t)-\phi(y))(v_1-v_2)(t)\,dt\,dy\Big|$$
$$\leq a \exp(aM_\phi x)\Big|\int_0^x\int_{\mathbb{R}} (\phi(y+t)-\phi(t-y))(v_1-v_2)(t)\,dt\,dy\Big|.$$

La dernière inégalité est obtenue grâce à la parité de ϕ. De plus, comme ϕ est lipschitzienne, il existe $C_{18} > 0$ tel que

$$|\theta_1(x)| \leq C_{18}x^2 \exp(aM_\phi x)N_p(v_1 - v_2).$$

On observe maintenant θ_2 :

$$|\theta_2(x)\exp(-aM_\phi x)| \leq \Big|\exp\Big(-(1-a)\int_0^x \beta_0 * u_1(y)\,dy\Big) - \exp\Big(-(1-a)\int_0^x \beta_0 * u_2(y)\,dy\Big)\Big|$$
$$\leq \Big|\exp\Big(-(1-a)\int_0^x\int_0^\infty (\beta_0(t+y)-\beta_0(t-y)-2\beta_0(y))u_1(t)\,dt\,dy\Big)$$
$$- \exp\Big(-(1-a)\int_0^x\int_0^\infty (\beta_0(t+y)-\beta_0(t-y)-2\beta_0(y))u_2(t)\,dt\,dy\Big)\Big|$$
$$\leq (1-a)\Big|\int_0^x\int_0^\infty (\beta_0(t+y)-\beta_0(t-y)-2\beta_0(y))(u_1-u_2)(t)\,dt\,dy\Big|.$$

Comme $\beta_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $\lim_{x\to 0_+} \beta_0'(x)/x$ existe et est finie et comme β_0 vérifie la condition (2),

$$|\theta_2(x)\exp(-aM_\phi x)| \leq (1-a)\int_0^x cy(1+y^r)\,dy \int_0^\infty t(1+t^r)|u_1-u_2|(t)\,dt.$$

Or, comme $(1+t^r)/(1+t^p)$ est borné, car $p > 4q \geq 2r+2$, il s'ensuit que

$$|\theta_2(x)| \leq C_{17}x^2(1+x^r)\exp(aM_\phi x)N_p(u_1-u_2).$$

On obtient donc le résultat recherché en combinant $|\theta_1|$ et $|\theta_2|$. ∎

Lemme 13. *Il existe deux constantes* $\alpha_{\beta_0} > 0$ *et* $0 < k_{\beta_0} < 1$ *telles que, pour tout* $\alpha \geq \alpha_{\beta_0}$, *on ait*

$$N_p(\mathcal{A}(u_1,v_1) - \mathcal{A}(u_2,v_2)) \leq k_{\beta_0}(N_p(u_1-u_2) + N_p(v_1-v_2))$$

pour tout (u_1,v_1) *et* (u_2,v_2) *dans* $\mathcal{D}_\alpha$ *et* $N_p(w) = \int_{\mathbb{R}} |x|(1+|x|^p)|w(x)|\,dx$.

Preuve. Pour la preuve de ce résultat, on notera toujours c la constante même si elle peut changer de valeur d'une ligne à la suivante. Tout d'abord on rappelle la décomposition utilisée dans le Lemme 9 :

$$\mathcal{A}(u_1, v_1)(x) - \mathcal{A}(u_2, v_2)(x) = \frac{1}{\lambda(u_1, v_1)}\, \theta(x) + (\lambda(u_1, v_1) - \lambda(u_2, v_2))W(x),$$

où W est défini par (15). Alors, d'après les lemmes précédents, on a

$$\frac{1}{\lambda(u_1, v_1)}\, N_p(\theta) \leq c\alpha I_1(N_p(u_1 - u_2) + N_p(v_1 - v_2)),$$

où

$$I_1 = \int_0^\infty x^3 \exp\left(aM_\phi x - (1-a)\,\frac{\alpha x^2}{2}\right)(1 + x^p)(1 + x^r)\, dx.$$

En posant $y = \sqrt{\alpha}\, x$, on obtient

$$I_1 \leq \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty y^3(1 + y^p)(1 + y^r) \exp\left(aM_\phi y - (1-a)\,\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

D'où

$$\frac{1}{\lambda(u_1, v_1)}\, N_p(\theta) \leq \frac{c}{a}\, \alpha(N_p(u_1 - u_2) + N_p(v_1 - v_2)).$$

Par ailleurs,

$$|\lambda(u_1, v_1) - \lambda(u_2, v_2)| = \left| \int_0^\infty \theta(x)\, dx \right| \leq \int_0^\infty |\theta(x)|\, dx \leq \frac{c}{\alpha^{3/2}}\, (N_p(u_1 - u_2) + N_p(v_1 - v_2)),$$

et comme $N_p(W(x)) \leq c\alpha$, où W est défini ci-dessus, on obtient le résultat énoncé dans le lemme. Les mêmes calculs se font bien entendu pour $\mathcal{B}$. ∎

Pour démontrer le Théorème 3, il suffit de remarquer que le lemme précédent peut être interprêté comme suit : pour α assez grand, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est une contraction de $\mathcal{D}_\alpha$ dans $\mathcal{D}$, ce qui entraîne l'unicité du point fixe.

1.4. Convergence vers la distribution stationnaire. On a vu jusqu'à présent qu'il existait une unique solution forte au système (E) (section 1.2) et qu'il existait une solution au système (11), c'est-à-dire qu'il existe une distribution stationnaire (section 1.3). De plus, si on suppose que (16) est vérifié, il y a unicité de la distribution stationnaire. On se placera dans ce cas pour toute cette section afin de montrer que, sous certaines conditions, la loi de (X_t, Y_t), solution du système (E), converge vers la distribution stationnaire.

On commence par énoncer quelques résultats qui seront primordiaux pour montrer la convergence vers la distribution stationnaire. On ne rappelle pas leurs preuves qui se trouvent dans [B-R-V].

1.4.1. *Résultats préliminaires.* On commence par rappeler un lemme de comparaison concernant des E.D.S. Soit $\mathcal{L}_{\text{lip}}^{\text{loc}}$ l'ensemble des fonctions $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : pour tout $N > 0$, $T > 0$, il existe une constante $K_{T,N}$ telle que

$$|b(s, x) - b(s, y)| \leq K_{T,N}|x - y|, \quad \forall |x| \leq N, \forall |y| \leq N, \forall s \leq T.$$

Si $b \in \mathcal{L}_{\mathrm{lip}}^{\mathrm{loc}}$, on peut alors définir une unique solution X^b, jusqu'au temps d'explosion e_b, de l'E.D.S. suivante :

$$X_t^b = X_0 + B_t - \int_0^t b(s, X_s^b)\, ds, \qquad t < e_b,$$

où B est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien unidimensionnel partant de l'origine, et X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable. Pour la suite, on suppose que b vérifie

$$\operatorname{sgn}(x) b(s,x) \geq 0, \qquad \forall s \geq 0,\, \forall x \neq 0. \tag{20}$$

D'après la Proposition 3.3 dans [B-R-T-V], on sait alors que l'E.D.S. ci-dessus admet une unique solution forte définie sur $\mathbb{R}_+$ (i.e. $e_b = \infty$).

Proposition 4. *Soient b, c deux fonctions impaires de $\mathcal{L}_{\mathrm{lip}}^{\mathrm{loc}}$ vérifiant* (20) *et*

$$\operatorname{sgn}(x)(b(s,x) - c(s,x)) \geq 0, \qquad \forall s \geq 0,\, \forall x \ (\textit{resp.} \leq).$$

Alors, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\mathbb{E}[f(X_t^b)] \leq \mathbb{E}[f(X_t^c)], \qquad \forall t \geq 0 \ (\textit{resp.} \geq),$$

sachant $X_0^b = X_0^c = X_0$.

L'étude du comportement asymptotique de processus de Markov dont le semi-groupe vérifie une propriété d'ultracontractivité est un second résultat primordial pour démontrer la convergence de la solution de l'E.D.S. vers la mesure stationnaire.

Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire vérifiant les deux conditions suivantes :

$$b'(x) \geq k > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

$$\exists \varrho > 1, \qquad \liminf_{x \to \infty} \frac{b(x)}{x^\varrho} > 0. \tag{22}$$

À cette fonction b, on associe une densité de probabilité

$$\nu_b(x) = \frac{\exp(-\int_0^x b(y)\, dy)}{\int_{\mathbb{R}} \exp(-\int_0^x b(y)\, dy)\, dx}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

On note L^b l'opérateur défini par

$$L^b f(x) = \frac{1}{2}\,(f''(x) - b(x) f'(x)), \qquad x \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}).$$

On peut alors voir que

$$\langle L^b f, g\rangle_{\nu_b} = \langle f, L^b g\rangle_{\nu_b}, \qquad \langle L^b f, f\rangle_{\nu_b} = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f'^2(x)\nu_b(x)\, dx,$$

f et g étant deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact et

$$\langle f, g\rangle_{\nu_b} = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) \nu_b(x)\, dx.$$

De plus, L^b est le générateur infinitésimal du semi-groupe markovien $(T_t^b\,;\, t \geq 0)$ sur $L^p(\nu_b)$ symétrique par rapport à $\nu_b(x)\, dx$. Voici quelques propriétés de ce semi-groupe :

LEMME 14. *Soit* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *impaire vérifiant* (21) *et* (22). *Alors :*

(i) $(T_t^b\,;\, t \geq 0)$ *est un opérateur ultracontractif :*

$$\|T_t^b f\|_\infty \leq k(t)\|f\|_{L^1(\nu_b)}, \tag{24}$$

où $k(t)$ *est une constante positive.*

(ii) *Pour tout* $t \geq 0$, $T_t^b : L^2(\nu_b) \to L^2(\nu_b)$ *est un opérateur à trace.*

(iii) *Soit* $(-\lambda_n\,;\, n \geq 1)$ *la suite décroissante de valeurs propres négatives de* L^b (*i.e.* $0 > -\lambda_1 > -\lambda_2 > \ldots > -\lambda_n > \ldots$) *et* f_n *la fonction propre normalisée dans* $L^2(\nu_b)$ *associée à la valeur propre* $-\lambda_n$. *Alors* $\lambda_1 \geq k/2$ (*propriété de trou spectral*), k *étant défini par* (24), *et*

$$\|f_n\|_\infty \leq k(t)e^{\lambda_n t}, \qquad \forall t > 0.$$

Ce lemme a une application en probabilité puisqu'il permet d'estimer la différence entre la loi de X_t^b et la distribution stationnaire $\nu_b(x)\,dx$ lorsque le temps t tend vers l'infini.

COROLLAIRE 1. *Soit* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction impaire localement lipschitzienne vérifiant : il existe* $\varrho > 1$ *tel que* $\liminf_{x\to+\infty} b(x)/x^\varrho > 0$, *et*

$$b(x) - b(y) \geq k(x-y), \quad \forall x \geq y, \qquad \text{où } k > 0.$$

Soit X_0 *une variable aléatoire admettant une densité par rapport à* ν_b. *Il existe alors* $\lambda > 0$ *et* $\gamma(t_0) > 0$ *tels que*

$$\left|\mathbb{E}[g(X_t^b)] - \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu_b(x)\,dx\right| \leq \gamma(t_0)e^{-\lambda t}\|g\|_{L^2(\nu_b)} \tag{25}$$

pour tout $t \geq t_0$, $g \in L^2(\nu_b)$.

1.4.2. *Convergence vers la distribution stationnaire.* Voici quelques préliminaires qui sont, pour la plupart, des conséquences de (16) :

$$\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x, \qquad \alpha > 0,$$

où $\beta_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une fonction impaire, strictement croissante, convexe sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant (2) et (3) et telle que $\lim_{x\to 0_+} \beta_0'(x)/x$ existe et soit fini. On supposera de plus que $K < \frac{1-a}{a}\alpha$. Dans la section 1.3 on a vu qu'il existe $\alpha_{\beta_0} > 0$ tel que, pour tout $\alpha \geq \alpha_{\beta_0}$, il existe une unique distribution symétrique stationnaire $(u(x)\,dx, v(x)\,dx)$ telle que

$$u(x) = \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\left\{a\int_0^x \phi * v(y)\,dy - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)\,dy\right\},$$

où $\lambda(u,v)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}} u(x)\,dx = 1$, et

$$v(x) = \frac{1}{\mu(u,v)} \exp\left\{(1-a)\int_0^x \phi * u(y)\,dy - a\int_0^x \beta * v(y)\,dy\right\},$$

où $\mu(u,v)$ est tel que $\int_{\mathbb{R}} v(x)\,dx = 1$. La démonstration de ce résultat repose sur le fait que, pour tout α supérieur ou égal à un certain α_{β_0}, il existe $0 < k_{\beta_0} < 1$ tel que

$$N_p(\mathcal{A}(u_1,v_1) - \mathcal{A}(u_2,v_2)) \leq k_{\beta_0}(N_p(u_1-u_2) + N_p(v_1-v_2)).$$

$\mathcal{A}$ est défini ici par

$$\mathcal{A}(u,v)(x) = \frac{1}{\lambda(u,v)} \exp\Big\{a\int_0^x \phi * v(y)\,dy - (1-a)\int_0^x \beta * u(y)\,dy\Big\},$$

et

$$N_p(w) = \int_{\mathbb{R}} |x|(1+|x|^p)|w(x)|\,dx, \qquad p > 4q.$$

L'inégalité ci-dessus est vérifiée pour tout (u_1, v_1) et (u_2, v_2) appartenant à $\mathcal{D}_\alpha$ défini par (19). Le résultat est également vérifié pour $\mathcal{B}$ défini comme suit :

$$\mathcal{B}(u,v)(x) = \frac{1}{\mu(u,v)} \exp\Big\{(1-a)\int_0^x \phi * u(y)\,dy - a\int_0^x \beta * v(y)\,dy\Big\}.$$

Remarque 2. On peut rendre k_{β_0} suffisamment petit en augmentant α_{β_0}.

Voici le résultat principal de ce paragraphe :

Proposition 5. *On suppose que X_0 et Y_0 sont deux variables aléatoires de lois symétriques, $\beta_0(x) \geq kx^\varrho$ pour $x \geq 1$ et pour un certain $\varrho > 1$, et ϕ est concave sur $\mathbb{R}_+$. Alors il existe l tel que, pour tout $\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x$ avec $\alpha \geq l$, la densité du couple (X_t, Y_t), solution de* (E), *converge vers $u(x)v(y)$ quand t tend vers l'infini.*

Avant de commencer la démonstration de cette proposition, voici quelques remarques sur les fonctions qu'on sera amené à considérer. On pose

$$r_1(t,x) = \mathbb{E}[(1-a)\beta(x-X_t) - a\phi(x-Y_t)], \qquad r_2(t,x) = \mathbb{E}[a\beta(x-Y_t) - (1-a)\phi(x-X_t)].$$

On note au passage que le système (E) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \int_0^t r_1(s, X_s)\,ds, \\ Y_t = Y_0 + \widetilde{B}_t - \int_0^t r_2(s, Y_s)\,ds. \end{cases}$$

Comme X_t et Y_t sont de lois symétriques (voir la démonstration du Lemme 6), on obtient

$$\mathbb{E}[\beta(x-X_t)] = \mathbb{E}[\beta(x+X_t)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\beta(x-X_t) + \beta(x+X_t)] = \mathbb{E}[\widetilde{\beta}_x(X_t)],$$

où $\widetilde{\beta}_x(y) = \frac{1}{2}(\beta(x-y) + \beta(x+y))$. β étant convexe et impaire, on en déduit que $\widetilde{\beta}_x(y) \geq \beta(x)$ pour tout $x \geq 0$. Ainsi

$$\mathbb{E}[\beta(x-X_t)] \geq \beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x \geq \alpha x. \tag{26}$$

De plus, par (2),

$$\mathbb{E}[\beta(x-X_t) - \beta(y-X_t)] \leq c|x-y|(1+|x|^r+|y|^r).$$

$\mathbb{E}[\beta(x-X_t)]$ est donc borné pour x fixé. En ce qui concerne le deuxième terme de r_1, on raisonne de manière identique et on trouve alors

$$\mathbb{E}[\phi(x-Y_t)] = \mathbb{E}[\widetilde{\phi}_x(Y_t)], \quad \text{où} \quad \widetilde{\phi}_x(y) = \frac{1}{2}(\phi(x-y) + \phi(x+y)).$$

Comme ϕ est une fonction lipschitzienne impaire,

$$\mathbb{E}[\phi(x - Y_t)] = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[\phi(x + Y_t) - \phi(-x + Y_t)].$$

Ainsi $\mathbb{E}[\phi(x - Y_t)]$ est borné à x fixé :

$$-Kx \le \mathbb{E}[\phi(x - Y_t)] \le Kx, \tag{27}$$

et

$$\mathbb{E}[|\phi(x - Y_t) - \phi(y - Y_t)|] \le K|x - y|.$$

En reliant les propriétés de ϕ et de β, i.e. (26) et (27), on déduit les inégalités suivantes concernant r_1 (on peut obtenir sensiblement les mêmes pour r_2) :

$$r_1(t, x) \ge (1 - a)\alpha x - Kax \ge \gamma x, \qquad \text{où } \gamma > 0, \tag{28}$$

car on a supposé que $K < \frac{1-a}{a}\alpha$. Par ailleurs

$$|r_1(t, x) - r_1(y, t)| \le c|x - y|(1 + |x|^r + |y|^r).$$

On peut alors déterminer la limite supérieure et inférieure des coefficients r_i puisque ceux-ci sont bornés. On notera, pour $i = 1, 2$,

$$\overline{r}^i_{t_0}(x) = \sup_{t \ge t_0} r_i(t, x), \quad \underline{r}^i_{t_0}(x) = \inf_{t \ge t_0} r_i(t, x), \qquad x \ge 0.$$

Alors $\overline{r}^i_{t_0}(x) = -\overline{r}^i_{t_0}(-x)$ et $\underline{r}^i_{t_0}(x) = -\underline{r}^i_{t_0}(-x)$. On pose également

$$\overline{r}^i(x) = \inf_{t_0} \overline{r}^i_{t_0}(x) = \limsup_{t} r_i(t, x), \qquad \underline{r}^i(x) = \sup_{t_0} \underline{r}^i_{t_0}(x) = \liminf_{t} r_i(t, x).$$

Alors $\overline{r}^i(x) = -\overline{r}^i(-x)$ et $\underline{r}^i(x) = -\underline{r}^i(-x)$. De plus, si $x \ge y$,

$$\begin{aligned} \overline{r}^i_{t_0}(x) - \overline{r}^i_{t_0}(y) &\ge \gamma(x - y), \qquad \text{idem pour } \underline{r}^i_{t_0}, \\ \overline{r}^i(x) - \overline{r}^i(y) &\ge \gamma(x - y), \qquad \text{idem pour } \underline{r}^i. \end{aligned} \tag{29}$$

On introduit enfin

$$\underline{u}(x) = \frac{\exp(-\int_0^{|x|} \underline{r}^1(y)\,dy)}{\int_{\mathbb{R}} \exp(-\int_0^{|x|} \underline{r}^1(y)\,dy)\,dx}.$$

$\overline{u}$ est défini de la même manière en remplaçant $\underline{r}$ par $\overline{r}$; et $\underline{v}$ est défini en remplaçant r_1 par r_2.

LEMME 15. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante paire à croissance polynômiale sur $\mathbb{R}_+$. Alors il existe $\lambda > 0$, $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que*

$$-C_1 e^{-\lambda t_0} + \int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{\overline{r}^1_{t_0}}(y)\,dy \le \mathbb{E}[f(X_t)] \le \int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{\underline{r}^1_{t_0}}(y)\,dy + C_2 e^{-\lambda t_0}$$

pour $t \ge 2t_0$. On définit ν_c par la formule (23). *La même relation est vraie pour Y_t, il suffit d'échanger r_1 et r_2.*

Preuve. La preuve de ce résultat est similaire à celle de Benachour–Roynette–Vallois [B-R-V, Lemme 3.2, p. 214].

On associe à X deux diffusions $\widetilde{X}$ et $\widehat{X}$ telles que

$$\widetilde{X}_t = X_{t_0} + B_t - B_{t_0} - \int_{t_0}^{t} \underline{r}^1_{t_0}(\widetilde{X}_s)\,ds, \qquad \widehat{X}_t = X_{t_0} + B_t - B_{t_0} - \int_{t_0}^{t} \overline{r}^1_{t_0}(\widehat{X}_s)\,ds, \qquad t \geq t_0.$$

Comme les fonctions $\overline{r}^1$ et $\underline{r}^1$ sont paires localement lipschitziennes, on peut appliquer le principe de comparaison (Proposition 4) ; on obtient ainsi

$$\mathbb{E}[f(\widehat{X}_t)] \leq \mathbb{E}[f(X_t)] \leq \mathbb{E}[f(\widetilde{X}_t)] \quad \text{pour } t \geq t_0,$$

pour f une fonction paire et croissante. Comme, d'après l'hypothèse de la Proposition 5, $\beta(x) \geq kx^{\varrho}$ pour $x \geq 1$, et grâce à (25), on peut appliquer le Corollaire 1 qui utilise l'ultracontractivité du semi-groupe associé à la diffusion X^b ; on en conclut qu'il existe des constantes c, c' et λ telles que, pour $t \geq 2t_0$,

$$c\overline{k}^1_f e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{\overline{r}^i_{t_0}}(y)\,dy \leq \mathbb{E}[f(X_t)] \leq \int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{\underline{r}^i_{t_0}}(y)\,dy + c'\underline{k}^1_f e^{-\lambda(t-t_0)},$$

où $\overline{\underline{k}}^1_f = \int_{\mathbb{R}} f^2(y)\nu_{\overline{\underline{r}}^1_{t_0}}(y)\,dy$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\overline{\underline{k}}^1_f$ est fini. Pour cela, on prend c_1 et c_2 deux fonctions vérifiant : c_i est paire Lipschitz, $\liminf_{x\to\infty} c_i(x)/x^{\varrho} > 0$ pour un certain $\varrho > 1$, $c_i(x) - c_i(y) \geq k(x-y)$ avec $k > 0$ et $x \geq y$, et de plus $\operatorname{sgn}(x)(c_1(x) - c_2(x)) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. On se donne $U_1(t)$ et $U_2(t)$ deux diffusions associées aux termes de drift c_1 et c_2 ; alors

$$\mathbb{E}[f(U_1(t))] \leq \mathbb{E}[f(U_2(t))].$$

En prenant la limite quand t tend vers l'infini, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{c_1}(y)\,dy \leq \int_{\mathbb{R}} f(y)\nu_{c_2}(y)\,dy.$$

Grâce à (29), on déduit pour f à croissance polynômiale,

$$\overline{k}^1_f = \int_{\mathbb{R}} f^2(y)\nu_{\overline{r}^1_{t_0}}(y)\,dy \leq \underline{k}^1_f = \int_{\mathbb{R}} f^2(y)\nu_{\underline{r}^1_{t_0}}(y)\,dy \leq \int_{\mathbb{R}} f^2(y)\nu_{\gamma\cdot}(y)\,dy < \infty$$

(γ est défini dans l'équation (28) et $\gamma \cdot (x) = \gamma x$). ■

Preuve de la Proposition 5. On vérifie d'abord que $\underline{r}^1 = \overline{r}^1$ et que $\underline{r}^2 = \overline{r}^2$, en d'autres termes que $r_1(t,x)$ et $r_2(t,x)$ convergent quand $t \to \infty$. On utilise le résultat du lemme précédent avec $f = \widetilde{\beta}_x$. Comme $\mathbb{E}[\beta(x - X_t)] = \mathbb{E}[\widetilde{\beta}_x(X_t)]$, en prenant la limite supérieure et inférieure, on obtient

$$\begin{aligned}\liminf_{t_0} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_x(y)\nu_{\overline{r}^1_{t_0}}(y)\,dy &\leq \liminf_t \mathbb{E}[\beta(x - X_t)] \leq \limsup_t \mathbb{E}[\beta(x - X_t)] \\ &\leq \limsup_{t_0} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_x(y)\nu_{\underline{r}^1_{t_0}}(y)\,dy.\end{aligned}$$

Comme $\overline{r}^1(x) = \inf_{t_0} \overline{r}^1_{t_0}(x) \geq 0$, on a $\lim_{t_0\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_x(y)\nu_{\overline{r}^1_{t_0}}(y)\,dy = \beta * \overline{u}(x)$, ainsi

$$\beta * \overline{u}(x) \leq \liminf_t \mathbb{E}[\beta(x - X_t)] \leq \limsup_t \mathbb{E}[\beta(x - X_t)] \leq \beta * \underline{u}(x).$$

On remarque que la même égalité est vraie pour Y_t en remplaçant u par v.

ϕ étant concave sur $\mathbb{R}_+$, $-\widetilde{\phi}_x$ est une fonction croissante et donc par un raisonnement identique à celui que l'on vient d'effectuer,

$$-\phi * \overline{v} \leq \liminf_t \mathbb{E}[-\phi(x - Y_t)] \leq \limsup_t \mathbb{E}[-\phi(x - Y_t)] \leq -\phi * \underline{v}.$$

En combinant les deux résultats, on trouve

$$\overline{r}^1(x) \leq (1-a)\beta * \underline{u}(x) - a\phi * \underline{v}(x), \qquad \underline{r}^1(x) \geq (1-a)\beta * \overline{u}(x) - a\phi * \overline{v}(x). \tag{30}$$

En utilisant le Lemme 12 et le principe de comparaison décrit dans la preuve précédente, on sait qu'il existe $k_0 \in \,]0, 1/2[$ tel que

$$N_p(\overline{u} - \underline{u}) \leq N_p(\mathcal{A}(\underline{u}, \underline{v}) - \mathcal{A}(\overline{u}, \overline{v})) \leq k_0(N_p(\overline{u} - \underline{u}) + N_p(\overline{v} - \underline{v})).$$

Par ailleurs, par un calcul similaire, il existe $k_1 \in \,]0, 1/2[$ tel que

$$N_p(\overline{v} - \underline{v}) \leq N_p(\mathcal{B}(\underline{u}, \underline{v}) - \mathcal{B}(\overline{u}, \overline{v})) \leq k_1(N_p(\overline{u} - \underline{u}) + N_p(\overline{v} - \underline{v})).$$

On en déduit alors que $\underline{r}^i = \overline{r}^i = r_i^*$ et que $\underline{u} = \overline{u} = u^*$, $\underline{v} = \overline{v} = v^*$, en faisant la somme des deux inégalités précédentes. Puis par la formule (30), on trouve

$$r_1^*(x) = (1-a)\beta * u^*(x) - a\phi * v^*(x), \qquad r_2^*(x) = a\beta * v^*(x) - (1-a)\phi * u^*(x).$$

Et donc (u^*, v^*) est l'unique solution du système (11) notée (u, v). Ceci implique, par convergence dominée, que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[f(X_t)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)\,dx, \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[f(Y_t)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)\,dx,$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et à croissance exponentielle. Enfin, comme X_t et Y_t sont indépendants, la loi de (X_t, Y_t) converge vers $(u(x)\,dx, v(x)\,dx)$. En particulier,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|X_t| \geq a) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|y|\geq a\}} u(y)\,dy.$$

Comme la distribution de X_t est symétrique, on a

$$\mathbb{P}(|X_t| \geq a) = 2\mathbb{P}(X_t \geq a) = 2(1 - \mathbb{P}(X_t < a)).$$

On en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t < a) = \int_{-\infty}^a u(y)\,dy$.

X_t converge donc bien en loi vers $u(x)\,dx$. Le même raisonnement est valable pour Y. ∎

1.5. Différence entre les lois $u_t(x)\,dx$ et $v_t(x)\,dx$. En considérant le système (E), on remarque que, quand $a = 1/2$, les deux équations apparaissant dans le système sont identiques. Ainsi, X_t et Y_t ont la même loi pour tout $t > 0$ (si X_0 et Y_0 ont la même loi). Par contre, lorsque $a \neq 1/2$, les lois de X_t et de Y_t sont vraiment différentes pour $t > 0$. Dans un premier temps, on montrera que les densités des lois stationnaires (u et v) sont différentes en étudiant l'équivalent de $\ln(u/v)$ au voisinage de l'infini. Dans un second temps, on cherchera à quelle vitesse les lois de X_t et Y_t se séparent au voisinage de l'origine, lorsque X_0 et Y_0 ont la même loi.

On rappelle que $u(x)\,dx$ et $v(x)\,dx$ désignent les lois stationnaires du système (E), et donc que $(u(x), v(x))$ vérifie l'équation (11), où β et ϕ vérifient les hypothèses de la section préliminaire et (16) avec $\beta_0(x) \geq kx^\varrho$ pour $x \geq 1$, où $k > 0$ et $\varrho > 1$.

Proposition 6. *Au voisinage de ∞ et $-\infty$, on a*

$$\ln \frac{u(x)}{v(x)} \sim (2a-1) \int_0^{|x|} \beta(y)\, dy.$$

Pour démontrer cette proposition, on a besoin du résultat suivant :

Lemme 16. *Soit β une fonction croissante paire, à croissance polynômiale. Au voisinage de $\pm\infty$, on a alors*

$$\int_{\mathbb{R}} \beta(x-y)u(y)\, dy \sim \beta(x). \tag{31}$$

Idem pour $v(x)$.

Preuve. Pour montrer (31), on décompose le produit de convolution en trois intégrales.

(a) La première est

$$I_1(R) = \int_{-R}^{R} \beta(x-y)u(y)\, dy, \qquad \text{où } R > 0.$$

Comme β est une fonction croissante, on a, pour $x \geq R$,

$$\beta(x-R) \int_{-R}^{R} u(y)\, dy \leq I_1(R) \leq \beta(x+R) \int_{-R}^{R} u(y)\, dy.$$

Puisque u est une densité de probabilité à décroissance exponentielle au voisinage de l'infini, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut choisir R_0 assez grand tel que, pour tout $R \geq R_0$, $\int_R^\infty \beta(y)u(y)\, dy \leq \varepsilon$. On en déduit alors que

$$\int_{-R}^{R} u(y)\, dy \geq 1 - 2\varepsilon \qquad \text{pour } R \geq R_0.$$

Par ailleurs, on sait que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\beta(x \pm R)}{\beta(x)} = 1.$$

Ainsi on peut choisir x_0 assez grand tel que, pour tout $x \geq x_0$, on ait

$$(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon) \leq \frac{I_1(R)}{\beta(x)} \leq (1+\varepsilon)(1-2\varepsilon).$$

(b) La seconde intégrale est

$$I_2(R) = \int_R^\infty \beta(x-y)u(y)\, dy.$$

Or, pour $R \geq R_0$, on a

$$\begin{aligned} |I_2(R)| &\leq \int_R^\infty |\beta(x-y)|u(y)\, dy \leq \int_R^\infty \max(\beta(x), \beta(y))u(y)\, dy \\ &\leq \beta(x) \int_R^\infty u(y)\, dy + \int_R^\infty \beta(y)u(y)\, dy \leq (\beta(x)+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

(c) La troisième intégrale est

$$I_3(R) = \int_{-\infty}^{R} \beta(x-y)u(y)\,dy.$$

Or, pour $R \geq R_0$, on a

$$|I_3(R)| \leq \int_{-\infty}^{R} |\beta(x-y)|u(y)\,dy \leq \int_{R+x}^{\infty} |\beta(y)|u(x+y)\,dy.$$

Comme u est décroissante au voisinage de l'infini, pour x assez grand, on a

$$|I_3(R)| \leq \int_{R+x}^{\infty} |\beta(y)|u(y)\,dy \leq \varepsilon.$$

En combinant les trois intégrales ont obtient (31) au voisinage de ∞ et, par parité de β, (31) au voisinage de $-\infty$. ∎

Preuve de la Proposition 6. La preuve est évidente. On utilise le lemme précédent pour obtenir des équivalents dans les formules (12) et (13). On utilise alors le fait que $\beta_0(x) \geq kx^{\varrho}$ pour $x \geq 1$, avec $\varrho > 0$, et que ϕ est une fonction bornée. ∎

On s'intéresse maintenant à la séparation des lois de X_t et Y_t pour t au voisinage de l'origine. Pour cela, on introduit la distance de Wasserstein :

$$W(\mu,\nu) = \inf \iint |x-y|\,d\pi(x,y),$$

où l'infimum est pris sur toutes les probabilités π sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ayant pour marginales μ et ν (de premier moment fini).

Proposition 7. *Soit $w(x)\,dx$ la loi de X_0 et celle de Y_0, avec w une fonction paire positive telle que $\int_{\mathbb{R}} x^{2(r+1)^2} w(x)\,dx < \infty$ (r étant défini dans la section préliminaire), et soient $u_t(x)\,dx$ la loi de X_t, $v_t(x)\,dx$ la loi de Y_t. Alors*

$$\liminf_{t\to 0} \frac{W(u_t(x)\,dx, v_t(x)\,dx)}{t} \geq (2a-1)\int_{\mathbb{R}} |(\phi+\beta) * w|(x)w(x)\,dx.$$

Preuve. On définit tout d'abord la semi-norme suivante :

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \inf\{\eta \geq 0\,;\, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)| \leq \eta|x-y|\}.$$

D'après le théorème de Rubinstein–Kantorovitch (voir, par exemple, [Du, p. 20]), on sait que $W(\mu,\nu) = \sup[\int g\,d\mu - \int g\,d\nu]$, où le suprémum est pris sur toutes les fonctions g telles que $\|g\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$. Ainsi

$$W(u_t(x)\,dx, v_t(x)\,dx) = \sup_{g\,:\,\|g\|_{\mathrm{Lip}}\leq 1} \mathbb{E}[g(X_t) - g(Y_t)], \tag{32}$$

où (X_t, Y_t) est la solution du système (E) (cette solution existe puisque $\mathbb{E}[X_0^{2(r+1)^2}] = \mathbb{E}[Y_0^{2(r+1)^2}] < \infty$: voir Théorème 1). Or, d'après (4) et la formule d'Itô, pour g à dérivées première et seconde continues et bornées, on a

$$\mathbb{E}[g(X_t)] = \mathbb{E}[g(X_0)] + a\int_0^t \mathbb{E}[g'(X_s)(\phi * v_s)(X_s)]\,ds$$
$$- (1-a)\int_0^t \mathbb{E}[g'(X_s)(\beta * u_s)(X_s)]\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}[g''(X_s)]\,ds.$$

De même,

$$\mathbb{E}[g(Y_t)] = \mathbb{E}[g(Y_0)] + a\int_0^t \mathbb{E}[g'(Y_s)(\phi * u_s)(Y_s)]\,ds$$
$$- (1-a)\int_0^t \mathbb{E}[g'(Y_s)(\beta * v_s)(Y_s)]\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}[g''(Y_s)]\,ds.$$

On en déduit donc, par continuité en t,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[g(X_t) - g(Y_t)](0) = (2a-1)\int_{\mathbb{R}} g'(x)((\phi+\beta) * w)(x)w(x)\,dx.$$

On applique alors cette formule à une suite $(g_n\,;\, n \geq 1)$ de fonctions régulières paires à dérivées première et seconde bornées, croissantes sur $\mathbb{R}_+$, telles que $g_n'(x) = 1$ pour $x \geq 1/n$ et $\|g_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$. Comme $a \geq 1/2$ et grâce à la parité de g_n, ϕ et β, on obtient

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[g_n(X_t) - g_n(Y_t)](0) \geq (2a-1)\int_{|x|\geq 1/n} |(\phi+\beta) * w|(x)w(x)\,dx.$$

En utilisant (32), on obtient

$$\liminf_{t\to 0} \frac{W(u_t(x)\,dx, v_t(x)\,dx)}{t} \geq (2a-1)\int_{|x|\geq 1/n} |(\phi+\beta) * w|(x)w(x)\,dx.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient le résultat énoncé. ∎

2. Étude du système (F) et propagation du chaos

Dans cette partie, nous étudions le système (F) à $N_n + M_n$ particules, chacune vérifiant une équation différentielle stochastique dans laquelle intervient la position des autres particules du système. L'ensemble des particules peut être divisé en deux sous-ensembles : les particules de même nature ont tendance à s'attirer et les particules de nature différente à se repousser. Dans un premier temps nous allons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution au système (F), puis nous montrerons qu'il y a propagation du chaos : c'est-à-dire que si nous considérons un nombre fini de particules du système (F) et que le nombre de particules du système tend vers l'infini, les particules considérées seront asymptotiquement indépendantes et vérifieront une E.D.S. non linéaire. Enfin dans un dernier temps, nous étudierons une inégalité de concentration de la loi des particules autour de leur moyenne.

2.1. Existence et unicité des solutions pour (F). Soient $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes tendant vers l'infini. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{N_n+M_n}=1-a,\qquad 1/2\leq a<1.$$

On définit le système de N_n+M_n équations suivant :

$$\left\{\begin{aligned} X_t^{i,N_n} &= X_0^i+B_t^i-\frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t\sum_{j=1}^{N_n}\beta(X_s^{i,N_n}-X_s^{j,N_n})\,ds\\ &\quad+\frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t\sum_{k=1}^{M_n}\phi(X_s^{i,N_n}-Y_s^{k,M_n})\,ds,\quad 1\leq i\leq N_n,\\ Y_t^{i,M_n} &= Y_0^i+\widetilde{B}_t^i-\frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t\sum_{j=1}^{M_n}\beta(Y_s^{i,M_n}-Y_s^{j,M_n})\,ds\\ &\quad+\frac{1}{N_n+M_n}\int_0^t\sum_{k=1}^{N_n}\phi(Y_s^{i,M_n}-X_s^{k,N_n})\,ds,\quad 1\leq i\leq M_n,\end{aligned}\right. \tag{33}$$

où B et $\widetilde{B}$ sont deux mouvements browniens indépendants de dimensions respectives N_n et M_n. Les hypothèses sur ϕ et β sont celles exprimées dans la section préliminaire de la première partie. On suppose de plus que $\beta_1>\frac{1-a}{a}K$. *Dans toutes les démonstrations qui suivent, N_n n'apparaîtra pas en exposant à côté de X ni M_n à côté de Y dans le but d'alléger les notations.*

Proposition 8. *Le système* (33) *admet une unique solution forte.*

Preuve. Soit β_p la fonction définie par

$$\beta_p(x)=\begin{cases}\beta(p) & \text{si } x\geq p,\\ \beta(-p) & \text{si } x\leq -p,\\ \beta(x) & \text{si } -p\leq x\leq p.\end{cases}$$

On considère un nouveau système en remplaçant β par β_p. Le terme de dérive est alors borné et lipschitzien, ainsi le système a une unique solution forte. Soit

$$T_p=\inf\{t\geq 0\,;\,\exists n\in\mathbb{N}^*,\ |X_t^n|>p \text{ ou } |Y_t^n|>p\}.$$

On veut montrer alors que $\sup T_p=\infty$. En utilisant la formule d'Itô, on obtient que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N_n}(X_t^i)^2+\sum_{j=1}^{M_n}(Y_t^j)^2 &= \sum_{i=1}^{N_n}(X_0^i)^2+\sum_{j=1}^{M_n}(Y_0^j)^2+2\int_0^t\sum_{i=1}^{N_n}X_s^i\,dB_s+2\int_0^t\sum_{j=1}^{M_n}Y_s^j\,d\widetilde{B}_s\\ &\quad+\frac{2}{N_n+M_n}\sum_{i=1}^{N_n}\int_0^t X_s^i\Big(-\sum_{j=1}^{N_n}\beta(X_s^i-X_s^j)+\sum_{j=1}^{M_n}\phi(X_s^i-Y_s^j)\Big)\,ds\\ &\quad+\frac{2}{N_n+M_n}\sum_{i=1}^{M_n}\int_0^t Y_s^i\Big(-\sum_{j=1}^{M_n}\beta(Y_s^i-Y_s^j)+\sum_{j=1}^{N_n}\phi(Y_s^i-X_s^j)\Big)\,ds\\ &\quad+(N_n+M_n)t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N_n}(X_0^i)^2 + \sum_{j=1}^{M_n}(Y_0^j)^2 + 2\int_0^t \sum_{i=1}^{N_n} X_s^i\, dB_s + 2\int_0^t \sum_{j=1}^{M_n} Y_s^j\, d\widetilde{B}_s \\
&\quad + \frac{2}{N_n+M_n} \sum_{1\le i<j\le N_n} \int_0^t -(X_s^i - X_s^j)\beta(X_s^i - X_s^j)\, ds \\
&\quad + \frac{2}{N_n+M_n} \sum_{1\le i<j\le M_n} \int_0^t -(Y_s^i - Y_s^j)\beta(Y_s^i - Y_s^j)\, ds \\
&\quad + \frac{2}{N_n+M_n} \sum_{1\le i\le N_n,\, 1\le j\le M_n} \int_0^t (X_s^i - Y_s^j)\phi(X_s^i - Y_s^j)\, ds \\
&\quad + (N_n+M_n)t.
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance et en utilisant la bornitude de ϕ, puis l'inégalité $\operatorname{sgn}(x)\beta(x) \ge 0$ impliquant

$$\sum_{1\le i<j\le N_n} (x^i - x^j)\beta(x^i - x^j) \ge 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_n}(X_{T_p}^i)^2 \mathbb{1}_{\{T_p\le t\}}\Big] + \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{M_n}(Y_{T_p}^j)^2 \mathbb{1}_{\{T_p\le t\}}\Big] &\le \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_n}(X_{T_p\wedge t}^i)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{M_n}(Y_{T_p\wedge t}^j)^2\Big] \\
&\le \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_n}(X_0^i)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{M_n}(Y_0^j)^2\Big] \\
&\quad + \frac{2M_\phi}{N_n+M_n}\mathbb{E}\int_0^{T_p\wedge t} \Big(\sum_{i=1}^{N_n}|X_s^i| + \sum_{i=1}^{M_n}|Y_s^i|\Big)\, ds + (N_n+M_n)\mathbb{E}[T_p\wedge t] \\
&\le \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_n}(X_0^i)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{M_n}(Y_0^j)^2\Big] + (2M_\Phi p + N_n + M_n)t.
\end{aligned}$$

Or, comme

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_n}(X_{T_p}^i)^2 \mathbb{1}_{\{T_p\le t\}}\Big] + \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{M_n}(Y_{T_p}^j)^2 \mathbb{1}_{\{T_p\le t\}}\Big] \ge p^2\mathbb{P}(T_p\le t),$$

on obtient

$$\mathbb{P}(T_p\le t) \le \frac{1}{p^2}\Big\{\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_n}(X_0^i)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{M_n}(Y_0^j)^2\Big] + N_n + M_n\Big\} + \frac{2M_\Phi t}{p^2}.$$

On en déduit donc que $\lim_{p\to\infty}\mathbb{P}(T_p\le t) = 0$. ∎

2.2. Propagation du chaos pour un système infini de particules

2.2.1. *Convergence en loi.* Le principal résultat concernant ce système d'équations est la propagation du chaos, c'est-à-dire que, pour tout $(k,r)\in\mathbb{N}^2$, $(X_t^{1,N_n},\dots,X_t^{k,N_n},$

$Y_t^{1,M_n}, \ldots, Y_t^{r,M_n}$) converge en loi, quand n tend vers l'infini, vers $\bigotimes_{i=1}^k \mu \bigotimes_{i=1}^r \nu$ où μ est la loi de X_t et ν la loi de Y_t, (X_t, Y_t) étant la solution du système (E). Ce résultat est la conséquence du théorème suivant (voir [S]) :

THÉORÈME 4. *On suppose que X_0 et Y_0 ont des lois symétriques et que $\mathbb{E}[X_0^{2(r+1)^2}] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y_0^{2(r+1)^2}] < \infty$. Alors, pour tout $T < \infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{i,N_n} - \overline{X}_t^i|^2] = 0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{i,M_n} - \overline{Y}_t^i|^2] = 0,$$

où $(\overline{X}_t^i, \overline{Y}_t^i)$ est la solution du système (4) dirigé par les mouvements browniens B_t^i et $\widetilde{B}_t^i$.

La démonstration de ce théorème nécessite plusieurs résultats préliminaires.

PROPOSITION 9. *On suppose que $\mathbb{E}[X_0^{2p}] < \infty$ avec $p \in \mathbb{N}$. Il existe alors une constante c, dépendant de p et T, telle que*

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{N_n} (X_t^{i,N_n})^2\Big)^p\Big] \le c(p,T).$$

Le même résultat est valable pour Y.

Preuve. Par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N_n} (X_t^i)^{2p+2} = \sum_{i=1}^{N_n} (X_0^i)^{2p+2} + M_t \\ &+ 2(p+1)\int_0^t \Big(\sum_{i=1}^{N_n} (X_s^i)^{2p+1}\Big(\sum_{j=1}^{N_n} \frac{-\beta(X_s^i - X_s^j)}{N_n+M_n} + \sum_{k=1}^{M_n} \frac{\phi(X_s^i - Y_s^k)}{N_n+M_n}\Big)\Big)\, ds \\ &+ (p+1)(2p+1)\int_0^t \sum_{i=1}^{N_n} (X_s^i)^{2p}\, ds,\end{aligned}$$

où M_t est une martingale locale continue. Or

$$\sum_{1\le i,j\le N_n} (x^i)^{2p+1}\beta(x^i - x^j) = \sum_{1\le i<j\le N_n} ((x^i)^{2p+1} - (x^j)^{2p+1})\beta(x^i - x^j) \ge 0.$$

Par ailleurs, grâce à l'inégalité de Hölder et à la bornitude de ϕ, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{i=1}^{N_n} (X_t^i)^{2p+1}\phi(X_t^i - Y_t^k)\Big|\Big] \le M\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_n} (X_t^i)^{2p+2}\Big]^{(2p+1)/(2p+2)}.$$

On pose $\psi_p(t) = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_n} (X_t^i)^{2p}]$. Alors, d'après les dernières inégalités, on obtient que ψ vérifie

$$\psi_{p+1}(t) \le \psi_{p+1}(0) + M\psi_{p+1}^{(2p+1)/(2p+2)}(t) + (p+1)(2p+1)\int_0^t \psi_p(s)\, ds.$$

Comme $\psi_0(t) = N_n$, on obtient facilement, par récurrence,

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{N_n} (X_t^i)^2\Big)^p\Big] \le c(p,T), \quad \text{lorsque } \mathbb{E}[|X_0|^{2p}] < \infty. \ \blacksquare$$

PROPOSITION 10. *Soit* $(\overline{X}_t^i, \overline{Y}_t^i)$ *la solution du système* (33). *Alors, pour* $T < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[(X_t^{i,N_n} - \overline{X}_t^i)^2] = 0.$$

Preuve. D'après la formule d'Itô,

$$\mathbb{E}[(X_t^i - \overline{X}_t^i)^2] = 2\mathbb{E}\int_0^t \Big(\frac{1}{N_n+M_n}\sum_{k=1}^{M_n}\phi(X_s^i - Y_s^k) - ab_3(s,\overline{X}_s^i)\Big)(X_s^i - \overline{X}_s^i)\,ds \tag{34}$$
$$- 2\mathbb{E}\int_0^t \Big(\frac{1}{N_n+M_n}\sum_{j=1}^{N_n}\beta(X_s^i - X_s^j) - ab_1(s,\overline{X}_s^i)\Big)(X_s^i - \overline{X}_s^i)\,ds$$

On définit

$$b_1(t,x) = \mathbb{E}[\beta(x - \overline{X}_t^1)], \qquad b_3(t,x) = \mathbb{E}[\phi(x - \overline{Y}_t^1)],$$
$$b_2(t,x) = \mathbb{E}[\beta(x - \overline{Y}_t^1)], \qquad b_4(t,x) = \mathbb{E}[\phi(x - \overline{X}_t^1)].$$

(a) On calcule d'abord le deuxième terme de l'égalité ci-dessus, lequel est égal à $(1)_i + (2)_i$ où

$$(1)_i = -\frac{2}{N_n+M_n}\,\mathbb{E}\int_0^t\sum_{j=1}^{N_n}(\beta(X_s^i - X_s^j) - b_1(s,\overline{X}_s^i))(X_s^i - \overline{X}_s^i)\,ds,$$
$$(2)_i = -2\mathbb{E}\int_0^t\Big(\frac{1}{N_n+M_n} - (1-a)\Big)b_1(s,\overline{X}_s^i))(X_s^i - \overline{X}_s^i)\,ds.$$

On cherche d'abord à estimer $(1)_i$:

$$(1)_i = -\frac{2}{N_n+M_n}\,\mathbb{E}\int_0^t\sum_{j=1}^{N_n}(\beta(X_s^i - X_s^j) - \beta(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j))(X_s^i - \overline{X}_s^i)\,ds$$
$$- \frac{2}{N_n+M_n}\,\mathbb{E}\int_0^t\sum_{j=1}^{N_n}(\beta(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j) - b_1(s,\overline{X}_s^i))(X_s^i - \overline{X}_s^i)\,ds$$
$$= -\frac{2}{N_n+M_n}\,\mathbb{E}\int_0^t\sum_{j=1}^{N_n}\varrho_{i,j}^{(1)}(s)\,ds - \frac{2}{N_n+M_n}\mathbb{E}\int_0^t\sum_{j=1}^{N_n}\varrho_{i,j}^{(2)}(s)\,ds.$$

La définition de $\varrho_{i,j}^{(1)}(t)$ et celle de $\varrho_{i,j}^{(2)}(t)$ sont implicites dans le calcul précédent. Or, on a la propriété suivante :

$$\sum_{1\le i,j\le N_n}\varrho_{i,j}^{(1)}(t) = \sum_{1\le i<j\le N_n}\varrho_{i,j}^{(3)}(t),$$

où $\varrho_{i,j}^{(3)}(t) = \varrho_{i,j}^{(1)}(t) + \varrho_{j,i}^{(1)}(t)$. Comme β est impaire,

$$\varrho_{i,j}^{(3)}(s) = (\beta(X_s^i - X_s^j) - \beta(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j))(X_s^i - \overline{X}_s^i - (X_s^j - \overline{X}_s^j)).$$

Si $x-y \ge x'-y'$ (respectivement $x-y \le x'-y'$), alors $x-x' \ge y-y'$ (resp. $x-x' \le y-y'$) et donc $[(x-y)-(x'-y')][\beta(x-x')-\beta(y-y')] \ge 0$. Par conséquent, $\varrho_{i,j}^{(3)}(s) \ge 0$ et $\sum_{1\le i,j\le N_n}\varrho_{i,j}^{(1)}(s) \ge 0$.

D'autre part, par l'inégalité de Schwarz

$$-\mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{N_n}\varrho_{i,j}^{(2)}(s)\Big] \le \{\mathbb{E}[(X_s^i-\overline{X}_s^i)^2]\theta_i(s)\}^{1/2},$$

avec

$$\theta_i(s)=\mathbb{E}\Big[\Big\{\sum_{j=1}^{N_n}(\beta(\overline{X}_s^i-\overline{X}_s^j)-b_1(s,\overline{X}_s^i))\Big\}^2\Big].$$

En développant la somme dans θ, on obtient

$$\theta_i(s)=\sum_{j=1}^{N_n}\xi_{j,j}(s)+2\sum_{1\le j<k\le N_n}\xi_{j,k}(s)$$

où $\xi_{j,k}(s)=\mathbb{E}\{(\beta(\overline{X}_s^i-\overline{X}_s^j)-b_1(s,\overline{X}_s^i))(\beta(\overline{X}_s^i-\overline{X}_s^k)-b_1(s,\overline{X}_s^i))\}$.

• Si $j\neq k$, alors $\overline{X}_s^i$, $\overline{X}_s^j$ et $\overline{X}_s^k$ sont trois copies indépendantes de $\overline{X}_s^1$ et comme β est impaire, on obtient $\xi_{j,k}(s)=0$ pour $j\neq k$.

• Si $j=k$ alors $\xi_{jj}=\mathbb{E}[(\beta(\overline{X}_s^i-\overline{X}_s^j)-b_1(s,\overline{X}_s^i))^2]$. Comme $|\beta(x)|\le C(1+|x|^{2q})$ pour $2q\ge r+1$, en utilisant la Proposition 2, on obtient une borne uniforme sur $[0,T]$: il existe une constante $C_1>0$ telle que

$$\theta_i(s)\le C_1^2N_n.$$

Par ailleurs, en utilisant la symétrie $\mathbb{E}[(X_s^i-\overline{X}_s^i)^2]=\mathbb{E}[(X_s^1-\overline{X}_s^1)^2]$, on trouve alors une inégalité pour $(1)_i$:

$$\sum_{i=1}^{N_n}(1)_i\le\frac{C_1N_n^{3/2}}{N_n+M_n}\int_0^t\mathbb{E}[(X_s^1-\overline{X}_s^1)^2]^{1/2}\,ds. \tag{35}$$

Que se passe-t-il pour $(2)_i$?

$$(2)_i\le 2\int_0^t ds\,\Big|\frac{N_n}{N_n+M_n}-(1-a)\Big|\|\,b_1\|_T\mathbb{E}[(1+|\overline{X}_s^i|^{2q})|X_s^i-\overline{X}_s^i|].$$

Il existe donc une constante C_2 telle que

$$(2)_i\le C_2\Big|\frac{N_n}{N_n+M_n}-(1-a)\Big|\int_0^t\mathbb{E}[|X_s^i-\overline{X}_s^i|^2]^{1/2}\,ds. \tag{36}$$

(b) On revient maintenant au premier terme de la formule (34) :

$$2\mathbb{E}\int_0^t\Big(\frac{1}{N_n+M_n}\sum_{k=1}^{M_n}\phi(X_s^i-Y_s^k)-ab_3(s,\overline{X}_s^i)\Big)(X_s^i-\overline{X}_s^i)\,ds=a_i+b_i+c_i,$$

où

$$a_i=\frac{2}{N_n+M_n}\mathbb{E}\int_0^t\sum_{k=1}^{M_n}(\phi(X_s^i-Y_s^k)-\phi(\overline{X}_s^i-Y_s^k))(X_s^i-\overline{X}_s^i)\,ds,$$

$$b_i = \frac{2}{N_n + M_n} \mathbb{E} \int_0^t \sum_{k=1}^{M_n} (\phi(\overline{X}_s^i - Y_s^k) - \phi(\overline{X}_s^i - \overline{Y}_s^k))(X_s^i - \overline{X}_s^i)\, ds,$$

$$c_i = \left(\frac{2M_n}{N_n + M_n} - 2a \right) \mathbb{E} \int_0^t b_3(s, \overline{X}_s^i)(X_s^i - \overline{X}_s^i)\, ds.$$

On majore successivement toutes ces quantités :

$$a_i \leq \frac{2M_n}{M_n + N_n} K \mathbb{E} \int_0^t (X_s^i - \overline{X}_s^i)^2\, ds,$$

car ϕ est lipschitzienne de paramètre $K > 0$. Ensuite,

$$b_i \leq \frac{2K}{N_n + M_n} \sum_{k=1}^{M_n} \int_0^t \{\mathbb{E}[(Y_s^k - \overline{Y}_s^k)^2] \mathbb{E}[(X_s^i - \overline{X}_s^i)^2]\}^{1/2}\, ds.$$

Enfin, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$c_i \leq C_3 \left| \frac{M_n}{N_n + M_n} - a \right| \int_0^t \mathbb{E}[(X_s^i - \overline{X}_s^i)^2]^{1/2}\, ds,$$

où la constante C_3 vaut $2M_\phi$.

On regroupe toutes les inégalités obtenues concernant (35), (36), a_i, b_i et c_i. Pour cela, on pose $w(t) = \mathbb{E}[(X_t^1 - \overline{X}_t^1)^2]$ et $\overline{w}(t) = \mathbb{E}[(Y_t^1 - \overline{Y}_t^1)^2]$; alors

$$w(t) \leq a(N_n, M_n) \int_0^t \sqrt{w(s)}\, ds + 2K \frac{M_n}{N_n + M_n} \int_0^t w(s)\, ds + 2K \frac{M_n}{N_n + M_n} \int_0^t \sqrt{w(s)\overline{w}(s)}\, ds,$$

où

$$a(N_n, M_n) = \frac{C_1 \sqrt{N_n}}{N_n + M_n} + C_2 \left| \frac{N_n}{N_n + M_n} - (1 - a) \right| + C_3 \left| \frac{N_n}{N_n + M_n} - a \right|$$

tend vers 0 quand $n \to \infty$. On obtient la même équation pour $\overline{w}$ en échangeant N_n et M_n, a et $1 - a$. Comme $xy \leq (x^2 + y^2)/2$ pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, on a

$$w(t) \leq a(N_n, M_n) \int_0^t \sqrt{w(s) + \overline{w}(s)}\, ds + 3K \frac{M_n}{N_n + M_n} \int_0^t (w(s) + \overline{w}(s))\, ds,$$

$$\overline{w}(t) \leq a'(N_n, M_n) \int_0^t \sqrt{w(s) + \overline{w}(s)}\, ds + 3K \frac{N_n}{N_n + M_n} \int_0^t (w(s) + \overline{w}(s))\, ds.$$

En faisant la somme de ces deux expressions et en appliquant le Lemme 2, on trouve

$$(w + \overline{w})(t) \leq \left\{ \frac{a(N_n, M_n) + a'(N_n + M_n)}{3K} (e^{3Kt} - 1) \right\}^2.$$

Ainsi, on en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} w(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \overline{w}(t) = 0. \ \blacksquare$$

Remarque 3. Si, à partir d'un certain rang, N_n/M_n est constant, alors les calculs se simplifient dans la démonstration précédente et, de plus, il existe des constantes $C_4 > 0$

et $C_5 > 0$ telles que

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[(X_t^{i,N_n} - \overline{X}_t^i)^2] \le \frac{C_4}{N_n} \quad \text{et} \quad \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[(Y_t^{i,M_n} - \overline{Y}_t^i)^2] \le \frac{C_5}{M_n}.$$

Voici un deuxième résultat de convergence :

Proposition 11. *Pour $T < \infty$, $i \in \mathbb{N}^*$,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[(X_t^{i,N_n} - \overline{X}_t^i)^4] = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[(Y_t^{i,M_n} - \overline{Y}_t^i)^4] = 0.$$

Preuve. Par la formule d'Itô, égal à

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^i - \overline{X}_t^i)^4] &= 4\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{N_n + M_n}\sum_{k=1}^{M_n} \phi(X_s^i - Y_s^k) - ab_3(s, \overline{X}_s^i)\right)(X_s^i - \overline{X}_s^i)^3\, ds \\
&\quad - 4\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{N_n + M_n}\sum_{j=1}^{M_n} \beta(X_s^i - X_s^j) - (1-a)b_1(s, \overline{X}_s^i)\right)(X_s^i - \overline{X}_s^i)^3\, ds \\
&= a_i + b_i + c_i,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
a_i &= 4\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{N_n + M_n}\sum_{k=1}^{M_n} \phi(X_s^i - Y_s^k) - ab_3(s, \overline{X}_s^i)\right)(X_s^i - \overline{X}_s^i)^3\, ds, \\
b_i &= -\frac{4}{N_n + M_n}\mathbb{E}\int_0^t \sum_{j=1}^{M_n} (\beta(X_s^i - X_s^j) - \beta(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j))(X_s^i - \overline{X}_s^i)^3\, ds, \\
c_i &= -4\left(\frac{N_n}{N_n + M_n} - (1-a)\right)\int_0^t \mathbb{E}[b_1(s, \overline{X}_s^i)(X_s^i - \overline{X}_s^i)^3]\, ds.
\end{aligned}$$

Comme ϕ est bornée par M_ϕ, on trouve

$$\begin{aligned}
a_i &\le 4M_\phi\left(\frac{M_n}{N_n + M_n} + a\right)\int_0^t \mathbb{E}|X_s^i - \overline{X}_s^i|^3\, ds \\
&\le 4M_\phi\left(\frac{M_n}{N_n + M_n} + a\right)\int_0^t \{\mathbb{E}|X_s^i - \overline{X}_s^i|^2 \mathbb{E}|X_s^i - \overline{X}_s^i|^4\}^{1/2}\, ds \\
&\le 4(1+a)M_\phi\{\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}|X_s^i - \overline{X}_s^i|^2\}^{1/2}\int_0^t \{\mathbb{E}|X_s^i - \overline{X}_s^i|^4\}^{1/2}\, ds.
\end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire à celui utilisé dans la preuve précédente pour majorer $(1)_i$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N_n} b_i \le 0.$$

Enfin, comme $\mathbb{E}[X_0^{8q}] < \infty$, on a, par la Proposition 2 et (3), $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[b_1(t, \overline{X}_t^1)^4] < \infty$, et ainsi

$$c \leq 4\left|\frac{N_n}{N_n+M_n}-(1-a)\right|\int_0^t \mathbb{E}[b_1(s,\overline{X}_s^1)^4]^{1/4}\mathbb{E}[(X_s^i-\overline{X}_s^i)^4]^{3/4}\,ds$$
$$\leq C_6\left|\frac{N_n}{N_n+M_n}-(1-a)\right|\int_0^t \mathbb{E}[(X_s^i-\overline{X}_s^i)^4]^{3/4}\,ds$$
$$\leq C_6T\left|\frac{N_n}{N_n+M_n}-(1-a)\right|\{\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}|X_s^i-\overline{X}_s^i|^4\}^{3/4}.$$

Si on pose $\xi=\{\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}|X_s^i-\overline{X}_s^i|^4\}^{1/4}$, ξ satisfait à l'inégalité

$$\xi^2 \leq C_8T\left|\frac{N_n}{N_n+M_n}-(1-a)\right|\xi + C_7\{\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}|X_s^i-\overline{X}_s^i|^2\}^{1/2}.$$

Comme d'après la proposition précédente $\{\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}|X_s^i-\overline{X}_s^i|^2\}^{1/2}\to 0$, alors $\xi\to 0$. ∎

Remarque 4. Si, à partir d'un certain rang, N_n/M_n est constant, alors la démonstration se simplifie et il existe une constante $C_8>0$ telle que

$$\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_s^{i,N_n}-\overline{X}_s^i|^4] \leq \frac{C_8}{N_n}.$$

Le même résultat est valable pour Y.

Preuve du Théorème 4. Par la formule d'Itô,

$$(X_t^i-\overline{X}_t^i)^2 = 2\int_0^t\left(\frac{1}{N_n+M_n}\sum_{k=1}^{M_n}\phi(X_s^i-Y_s^k)-ab_3(s,\overline{X}_s^i)\right)(X_s^i-\overline{X}_s^i)\,ds \tag{37}$$

$$-2\int_0^t\left(\frac{1}{N_n+M_n}\sum_{j=1}^{N_n}\beta(X_s^i-X_s^j)-(1-a)b_1(s,\overline{X}_s^i)\right)(X_s^i-\overline{X}_s^i)\,ds, \tag{38}$$

En prenant les valeurs absolues, le supremum sur $[0,T]$ et l'espérance, on obtient les mêmes majorations pour (37) que celles effectuées dans la Proposition 10, ainsi

$$2\int_0^T\left(\frac{1}{N_n+M_n}\sum_{k=1}^{M_n}\phi(X_s^i-Y_s^k)-ab_3(s,\overline{X}_s^i)\right)(X_s^i-\overline{X}_s^i)\,ds$$
$$\leq \frac{2M_n}{N_n+M_n}K\mathbb{E}\int_0^T(X_s^i-\overline{X}_s^i)^2\,ds$$
$$+\frac{2K}{N_n+M_n}\sum_{k=1}^{M_n}\int_0^T\{\mathbb{E}[(Y_s^k-\overline{Y}_s^k)^2]\mathbb{E}[(X_s^i-\overline{X}_s^i)^2]\}^{1/2}\,ds$$
$$+\frac{C_9\sqrt{M_n}}{N_n+M_n}\int_0^T\mathbb{E}[(X_s^i-\overline{X}_s^i)^2]^{1/2}\,ds + C_{10}\left|\frac{M_n}{N_n+M_n}-a\right|\int_0^T\mathbb{E}[(X_s^i-\overline{X}_s^i)^2]^{1/2}\,ds$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{2M_n}{N_n+M_n} K \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \overline{X}_s^i|^2] \\
&\quad + \frac{2K}{N_n+M_n} \{ \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|Y_s^i - \overline{Y}_s^i|^2] \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \overline{X}_s^i|^2]\}^{1/2} \\
&\quad + C_{11} \left(\frac{\sqrt{M_n}}{N_n+M_n} + \left| \frac{M_n}{N_n+M_n} - a \right| \right) \{ \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \overline{X}_s^i|^2]\}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

D'après la Proposition 10, cette somme tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Plus précisément, si N_n/M_n est constant à partir d'un certain rang, alors il existe une constante $C_{12} > 0$ telle que

$$
2\int_0^T \left(\frac{1}{N_n+M_n} \sum_{k=1}^{M_n} \phi(X_s^i - Y_s^k) - ab_3(s, \overline{X}_s^i) \right) (X_s^i - \overline{X}_s^i)\, ds \leq \frac{C_{12}}{N_n}.
$$

En ce qui concerne le deuxième terme, c'est-à-dire (38), on trouve une majoration par $a_i + b_i$, où

$$
a_i = \frac{2}{N_n+M_n} \sum_{j=1}^{N_n} \int_0^T (|\varrho_{i,j}^{(1)}(s)| + |\varrho_{i,j}^{(2)}(s)|)\, ds,
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\varrho_{i,j}^{(1)}(s) &= [\beta(X_s^i - X_s^j) - \beta(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j)](X_s^i - \overline{X}_s^i), \\
\varrho_{i,j}^{(2)}(s) &= [\beta(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j) - b_1(s, \overline{X}_s^i)](X_s^i - \overline{X}_s^i),
\end{aligned}
$$

et

$$
b_i = C_{13} \left| \frac{N_n}{N_n+M_n} - (1-a) \right| \{ \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \overline{X}_s^i|^2]\}^{1/2}.
$$

Il est évident que, d'après la Proposition 10, b_i tend vers 0 quand $n \to \infty$, et qui plus est, ce terme est nul si N_n/M_n est constant à partir d'un certain rang. On cherche maintenant à majorer a_i.

Comme on a déjà vu précédemment,

$$
\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{N_n} |\varrho_{i,j}^{(2)}(s)| \right) \leq \{\mathbb{E}[(X_s^i - \overline{X}_s^i)^2]\theta_i(s)\}^{1/2} \leq C_{14}\sqrt{N_n} \{ \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \overline{X}_s^i|^2]\}^{1/2}.
$$

D'où

$$
\frac{2}{N_n+M_n} \int_0^T \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{N_n} |\varrho_{i,j}^{(2)}(s)| \right) ds \leq \frac{2TC_{14}\sqrt{N_n}}{N_n+M_n} \{ \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \overline{X}_s^i|^2]\}^{1/2}.
$$

Le second membre converge vers 0 quand $n \to \infty$ et si N_n/M_n est constant à partir d'un certain rang, alors il est majoré par une constante multipliée par $1/N_n$. Par ailleurs

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\varrho_{i,j}^{(1)}(s)|] &\leq \{\mathbb{E}[(X_s^i - \overline{X}_s^i)^2]\mathbb{E}[(\beta(X_s^i - Y_s^j) - \beta(\overline{X}_s^i - \overline{Y}_s^j)^2]\}^{1/2} \\
&\leq \{\mathbb{E}[(X_s^i - \overline{X}_s^i)^2]\}^{1/2} \{\mathbb{E}[(X_s^i - \overline{X}_s^i + \overline{X}_s^i - X_s^j)^2 \\
&\qquad \times (c + |X_s^i - X_s^j|^r + |\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j|^r)^2]\}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\varrho_{i,j}^{(1)}(s)|] &\leq \{\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \overline{X}_s^i|^2]\}^{1/2} \\ &\quad\times \mathbb{E}[(X_s^i - \overline{X}_s^i + \overline{X}_s^i - X_s^j)^4]^{1/4}\mathbb{E}[(c + |X_s^i - X_s^j|^r + |\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^j|^r)^4]^{1/4} \\ &\leq C_{15}\{\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \overline{X}_s^i|^2]\}^{1/2}\{\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_s^i - \overline{X}_s^i|^4]\}^{1/4}.\end{aligned}$$

Ce dernier terme tend également vers 0 quand $n \to \infty$, d'après les Propositions 10 et 11, et si N_n/M_n est constant à partir d'un certain rang, alors

$$\frac{2N_n}{N_n + M_n} \int_0^T \mathbb{E}[|\varrho_{i,j}^{(1)}(s)|]\, ds \leq \frac{C_{16}}{N_n^{3/4}}.$$

On en déduit donc le résultat du théorème. ■

Remarque 5. Si N_n/M_n est constant à partir d'un certain rang, alors il existe une constante $L > 0$, dépendant de T, telle que

$$\mathbb{E}[\sup_{s\in[0,T]} |X_s^{i,N_n} - \overline{X}_s^i|^2] \leq \frac{L}{N_n^{3/4}}.$$

Le même résultat est bien entendu valable pour Y.

2.2.2. *Inégalité de concentration.* Dans cette section, on cherche à décrire la répartition des particules, solutions du système (F) autour de leur moyenne mais aussi autour de la moyenne de (X_t, Y_t). Toute cette étude se fait à temps fixé $t > 0$. On utilisera essentiellement des propriétés liées aux inégalités de Sobolev logarithmiques détaillées dans [M] et dans le livre [A-co].

On supposera pour la suite que β et ϕ sont des fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}^1$ et on notera $(X_t^{N_n}, Y_t^{M_n})$ la solution du système à $N_n + M_n$ équations (F). Pour une fonction définie dans $\mathbb{R}^d$, on définit la norme

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \inf\{M > 0\,;\, \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ |f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|\}.$$

On a alors l'inégalité de concentration suivante :

Proposition 12. *Pour tout $T > 0$ et $t \in [0, T]$, et pour $F_n : \mathbb{R}^{N_n+M_n} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne vérifiant $\|F_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(|F_n(X_t^{N_n}, Y_t^{M_n}) - \mathbb{E}[F_n(X_t^{N_n}, Y_t^{M_n})]| \geq r) \leq 2\exp\left(-\frac{r^2}{4C_T}\right), \tag{39}$$

où $C_T = (e^{4\|\phi'\|_\infty T} - 1)/\|\phi'\|_\infty$.

En particulier, si on prend la fonction

$$F_n(x) = \frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n} f(x_i),$$

où f est une fonction lipschitzienne telle que $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, alors $\|F_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1/\sqrt{N_n}$ et donc, en appliquant la proposition, on obtient, pour $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n} f(X_t^i) - \mathbb{E}[f(X_t^1)]\right| \geq r\right) \leq 2\exp\left(-\frac{N_n r^2}{4C_T}\right), \qquad \forall r \geq 0. \tag{40}$$

On obtient exactement la même inégalité pour Y en remplaçant N_n par M_n.

Preuve de la Proposition 12. Soit $(X_t^{N_n}, Y_t^{M_n})$ la solution du système à N_n+M_n équations (F). Ce processus de Markov continu a alors pour générateur infinitésimal

$$L^n = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_n+M_n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{N_n+M_n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad x \in \mathbb{R}^{N_n+M_n},$$

avec

$$b_i(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_n}\beta(x_i-x_k) + \dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\sum_{k=N_n+1}^{N_n+M_n}\phi(x_i-x_k) \text{ pour } 1 \leq i \leq N_n, \\ -\dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\sum_{k=N_n+1}^{N_n+M_n}\beta(x_i-x_k) + \dfrac{1}{N_n+M_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_n}\phi(x_i-x_k) \\ \hfill \text{pour } N_n+1 \leq i \leq N_n+M_n. \end{cases}$$

D'après le théorème de Herbst (voir par exemple [A-co, p. 74]), l'inégalité de concentration de constante $C_T = 2(1-e^{-2\varrho T})/\varrho$ est une conséquence de l'inégalité de Sobolev logarithmique satisfaite par le semi-groupe associé au générateur L^n. Il suffit donc de vérifier le critère de Bakry–Emery (voir [Ba-E]), c'est-à-dire, pour tout $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty(\mathbb{R}^{N_n+M_n})$, $\Gamma_2(f) \geq \varrho\Gamma(f)$, où Γ est l'opérateur "carré du champ", $\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}[L^n(fg) - gL^n f - fL^n g]$, et $\Gamma_2(f) = \frac{1}{2}[L^n\Gamma(f) - 2\Gamma(f, L^n g)]$. Or pour démontrer ce critère, il suffit de montrer que le spectre du tenseur de courbure de Ricci associé au générateur L^n est minoré par ϱ (voir, par exemple [A-co, p. 60]). Ici, le tenseur de Ricci $(R_{i,j})_{1\leq i,j\leq N_n+M_n}$ est défini par

$$R_{i,j} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial b_i}{\partial x_j} + \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right], \quad i \neq j, \quad \text{et} \quad R_{i,i} = -\frac{\partial b_i}{\partial x_i}.$$

En faisant les calculs, on obtient :

- si $1 \leq i,j \leq N_n$ et $i \neq j$ ou $N_n+1 \leq i,j \leq N_n+M_n$ et $i \neq j$, alors

$$R_{i,j}(x) = -\frac{1}{N_n+M_n}\,\beta'(x_i-x_j),$$

- si $1 \leq i \leq N_n$ et $N_n+1 \leq j \leq N_n+M_n$ ou $1 \leq j \leq N_n$ et $N_n+1 \leq i \leq N_n+M_n$, alors

$$R_{i,j}(x) = \frac{1}{N_n+M_n}\,\phi'(x_i-x_j),$$

- si $1 \leq i \leq N_n$, alors

$$R_{i,i}(x) = \frac{1}{N_n+M_n}\sum_{k=1}^{N_n}\beta'(x_i-x_k) - \frac{1}{N_n+M_n}\sum_{k=N_n+1}^{N_n+M_n}\phi'(x_i-x_k),$$

- enfin si $N_n+1 \leq i \leq N_n+M_n$, alors

$$R_{i,i}(x) = \frac{1}{N_n+M_n}\sum_{k=N_n+1}^{N_n+M_n}\beta'(x_i-x_k) - \frac{1}{N_n+M_n}\sum_{k=1}^{N_n}\phi'(x_i-x_k).$$

En appliquant le théorème de Gershgorin–Hadamard (voir, par exemple, [M-M, p. 146]), on sait que le spectre de R est inclus dans la réunion des boules euclidiennes,

$$\mathrm{spectre}(R) \subset \bigcup_{i=1}^{N_n+M_n} B\Big(R_{i,i}, \sum_{j\neq i} |R_{i,j}|\Big).$$

Ainsi, toute valeur propre est minorée par

$$\frac{\beta'(0)}{N_n+M_n} - 2\|\phi'\|_\infty \geq -2\|\phi'\|_\infty.$$

Ceci termine la preuve en prenant $\varrho = -2\|\phi'\|_\infty$ et donc $C_T = (e^{4\|\phi'\|_\infty T} - 1)/\|\phi'\|_\infty$. ■

En particulier, si $N_n/(N_n+M_n)$ est constant à partir d'un certain rang (pour $n \geq n_0$), alors on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2. *Il existe une constante $K_T > 0$ telle que, pour toute fonction lipschitzienne vérifiant $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, on ait*

$$\sup_{t\leq T} \mathbb{P}\bigg(\bigg|\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n} f(X_t^{i,N_n}) - \int_{\mathbb{R}} f(y)u_t(y)\,dy\bigg| \geq r + \sqrt{\frac{K_T}{N_n}}\bigg) \leq 2\exp\Big(-\frac{N_n r^2}{4C_T}\Big),$$

pour tout $r \geq 0$, où C_T est donnée par (39) et K_T est la constante apparaissant dans la Remarque 3, $u_t(x)\,dx$ est la loi de $\overline{X}_t^1$ défini dans le Théorème 4. De même,

$$\sup_{t\leq T} \mathbb{P}\bigg(\bigg|\frac{1}{M_n}\sum_{i=1}^{M_n} f(Y_t^{i,M_n}) - \int_{\mathbb{R}} f(y)v_t(y)\,dy\bigg| \geq r + \sqrt{\frac{K_T}{M_n}}\bigg) \leq 2\exp\Big(-\frac{M_n r^2}{4C_T}\Big),$$

où $v_t(x)\,dx$ est la loi de $\overline{Y}_t^1$.

Preuve. La preuve de ce résultat est simple : il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire pour obtenir la majoration

$$\bigg|\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n} f(X_t^{i,N_n}) - \mathbb{E}[f(X_t^{i,N_n})]\bigg| + \bigg|\mathbb{E}[f(X_t^{i,N_n})] - \int_{\mathbb{R}} f(y)u_t(y)\,dy\bigg|.$$

Or, comme f est lipschitzienne de norme inférieure à 1, grâce à la Remarque 3 et à l'inégalité de Cauchy–Schwarz, le second membre de l'expression ci-dessus est majoré par

$$(\mathbb{E}[(X_t^{i,N_n} - \overline{X}_t^i)^2])^{1/2} \leq \sqrt{\frac{K_T}{N_n}}.$$

Pour terminer la preuve, il suffit alors d'appliquer (40). La preuve pour Y est identique à celle pour X. ■

Références

[A-co] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto et G. Scheffer, *Autour de l'inégalité de Sobolev logarithmique*, Panor. Synthèses 10, Soc. Math. France, Paris, 2000.

[B] P. R. Beesack, *Gronwall Inequalities*, Carleton Math. Lecture Notes 11, Carleton Univ., Ottawa, 1975.

[Ba] D. Bakry, *L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes*, dans : Lectures on Probability Theory (Saint-Flour, 1992), Lecture Notes in Math. 1581, Springer, Berlin, 1992, 1–112.

[Ba-E] D. Bakry et M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, dans : Séminaire de Probabilités XIX (1983/84), Lecture Notes in Math. 1123, Springer, Berlin, 1985, 177–206.

[B-R-T-V] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay and P. Vallois, *Nonlinear self-stabilizing processes I. Existence, invariant probability, propagation of chaos*, Stochastic Process. Appl. 75 (1998), 173–201.

[B-R-V] S. Benachour, B. Roynette and P. Vallois, *Nonlinear self-stabilizing processes II. Convergence to invariant probability*, ibid., 203–224.

[Du] R. M. Dudley, *Probabilities and Metrics. Convergence of Laws on Metric Spaces with a View to Statistical Testing*, Lecture Notes Ser. 45, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus, 1976.

[D-S] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, *Part II. Spectral Theory*, Interscience, New York, 1963.

[G-T] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Grundlehren Math. Wiss. 224, Spinger, Berlin, 1977.

[K-S] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Grad. Texts in Math. 113, Springer, New York, 2nd ed., 1991.

[K-K-R] O. Kavian, G. Kerkyacharian et B. Roynette, *Quelques remarques sur l'ultracontractivité*, J. Funct. Anal. 111 (1993), 155–196.

[M] F. Malrieu, *Logarithmic Sobolev inequalities for some nonlinear PDE's*, Stochastic Process. Appl. 95 (2001), 109–132.

[M-M] M. Marcus and H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Allyn and Bacon, Boston, 1964.

[S] A.-S. Sznitman, *Topics in propagation of chaos*, dans : École de Probabilités de Saint-Flour XIX–1989, Lecture Notes in Math. 1464, Springer, 165–251.

[S-V] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Grundlehren Math. Wiss. 233, Springer, 1979.