Introduction

Dans cet article nous abordons l'étude de quelques propriétés géométriques d'une nouvelle structure, la structure des sous-espaces de treillis.

On munit un espace de Banach E d'une structure de sous-espace de treillis lorsqu'on se donne un plongement isométrique de E dans un treillis X. Cette notion a été introduite par G. Pisier qui a montré que la donnée d'un tel plongement équivaut à l'existence d'une norme α sur le produit tensoriel algébrique $E \otimes c_0$ vérifiant l'axiome suivant :

(P) Pour tout opérateur linéaire borné T de c_0 dans c_0 et pour tout $x \in E \otimes c_0$, on a

$$\alpha(\mathrm{id}_E \otimes T(x)) \leq \|T\| \alpha(x).$$

Dans toute la suite les opérateurs linéaires bornés seront désignés simplement par opérateurs.

Ce résultat fondamental permet d'étudier les différentes structures de sous-espaces de treillis sur E sans avoir à se donner des plongements isométriques concrets de E dans des treillis.

Dans sa construction cette structure ressemble beaucoup à celle des espaces d'opérateurs, un domaine de l'analyse fonctionnelle qui est l'objet de nombreux articles ces dernières années. Rappelons qu'on munit un espace de Banach E d'une structure d'espace d'opérateurs par la donnée d'un plongement isométrique de E dans un $B(H)$, où $B(H)$ est l'espace des opérateurs définis sur l'espace de Hilbert H. Les morphismes correspondant à cette structure sont les opérateurs complètement bornés, c.b. en abrégé. En 1988 Z. Ruan (cf. [Ru]) a démontré une caractérisation abstraite de cette structure. Son théorème de représentation des espaces d'opérateurs peut être reformulé en disant qu'une structure d'espace d'opérateurs sur E est entièrement déterminée par la donnée d'une norme β sur $E \otimes K(l_2)$ vérifiant les axiomes suivants :

Axiome (R_1). Pour toute application c.b. $T : K \to K$ on a

$$\|\mathrm{id}_E \otimes T\|_{E \otimes_\beta K \to E \otimes_\beta K} \leq \|T\|_{\mathrm{cb}}.$$

Axiome (R_2). Pour toute décomposition orthogonale $\mathrm{id}_{l_2} = P_1 + P_2$ de l'identité on définit $T_i : K \to K$ par $T_i(x) = P_i x P_i$. Soit $\widetilde{T}_i = \mathrm{id}_E \otimes T_i : E \otimes K \to E \otimes K$. Alors

$$\forall u_1, u_2 \in E \otimes K, \quad \beta(\widetilde{T}_1(u_1) + \widetilde{T}_2(u_2)) \leq \max\{\beta(u_1), \beta(u_2)\},$$

où $K = K(l_2)$ est l'espace des opérateurs compacts sur l_2 et, par définition, $\|T\|_{\mathrm{cb}} = \sup_n \|T \otimes \mathrm{id}_{M_n}\|$, M_n désignant l'espace des matrices carrées d'ordre n.

K est l'analogue non-commutatif de c_0. En remplaçant K par c_0 on peut observer que l'axiome (P) est la version commutative des axiomes (R_1) et (R_2). Ainsi la théorie des sous-espaces de treillis est en quelque sorte la “contrepartie commutative” de celle des espaces d’opérateurs.

D’ailleurs la plupart des questions que nous étudions ici sont d’une certaine manière parallèles à quelques-uns des problèmes traités par G. Pisier dans ses travaux sur les espaces d’opérateurs.

La section 1 est consacrée à des considérations préliminaires sur les treillis de Banach ; nous rappelons les notions d’opérateurs réguliers et l_1-réguliers entre treillis et nous montrons qu’elles sont équivalentes, i.e. un opérateur T est régulier si et seulement si il est l_1-régulier et on a $\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T\|_{\mathrm{r},1}$, où $\|T\|_{\mathrm{r}}$ (resp. $\|T\|_{\mathrm{r},1}$) désigne la norme régulière (resp. l_1-régulière) de T. On en déduit immédiatement par dualité que T est régulier si et seulement si son adjoint T^* est régulier et $\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T^*\|_{\mathrm{r}}$.

Dans la section 2 nous exposons l’énoncé et la démonstration du Théorème de Pisier de représentation des sous-espaces de treillis.

Dans la section 3 nous introduisons la structure des sous-espaces de treillis et nous étudions des exemples importants de sous-espaces de treillis, notamment les sous-espaces $G^p(I) \subset L^p(\Sigma, \nu)$, $1 \le p < \infty$, engendrés par une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes standard sur un espace mesuré (Σ, ν). Il est classique que pour tout $1 \le p < \infty$, $G^p(I)$ est isométrique à l’espace de Hilbert $G^2(I)$ et on vérifie aisément, par les inégalités de Khintchine–Kahane, qu’ils sont régulièrement isomorphes à $G^2(I)$.

Nous montrons que la norme injective (resp. projective) sur $E \otimes c_0$ induit une structure de sous-espace de treillis sur E que nous noterons $\min(E)$ (resp. $\max(E)$) ; nous obtenons des réalisations concrètes de $\min(E)$ et de $\max(E)$ relativement simples à décrire. La norme injective (resp. projective) est la plus petite (resp. grande) norme sur $E \otimes c_0$ induisant une structure de sous-espace de treillis sur E. Remarquons que dans le cas des espaces d’opérateurs la norme projective ne vérifie pas cette propriété extrémale.

Dans cette section nous introduisons également la notion d’opérateurs réguliers entre sous-espaces de treillis, ces opérateurs étant les morphismes correspondant à cette structure : or $T : E \to F$ est un opérateur régulier si et seulement si $T \otimes \mathrm{id}_{c_0}$ est un opérateur borné de $E \otimes_\alpha c_0$ dans $F \otimes_\beta c_0$, où α (resp. β) est la norme sur $E \otimes c_0$ (resp. $F \otimes c_0$) induisant la structure de sous-espace de treillis sur E (resp. F). On pose $\|T \otimes \mathrm{id}_{c_0}\| = \|T\|_r$. Nous introduisons aussi la notion d’homogénéité : un sous-espace de treillis E est dit homogène si tout opérateur $T : E \to E$ est régulier. Nous quantifions cette propriété à l’aide d’un paramètre

$$\delta(E) = \sup\{\|T\|_{\mathrm{r}}/\|T\|;\ T : E \to E,\ T \neq 0\}$$

appelé constante d’homogénéité de E.

À la fin de cette section nous montrons que si E est un sous-espace de treillis et $E \subseteq X$ un plongement de E dans un treillis X alors pour tout $1 \le p \le \infty$, la norme induite par $X(l_p)$ sur le produit tensoriel $E \otimes l_p$ ne dépend pas de ce plongement particulier. Cette observation permet de construire les espaces $E(l_p)$ et d’étendre les notions de p-convexité et de q-concavité aux sous-espaces de treillis.

Le sujet principal de la section 4 sont les treillis homogènes. Nous commençons par calculer les constantes d’homogénéité des espaces l_p^n qui sont les treillis les plus simples.

Nous montrons notamment que $\delta(l_p) = \infty$ pour tout $1 < p < \infty$; ce résultat sera très important pour la caractérisation des sous-espaces de treillis homogènes.

Soient X et Y des treillis de Banach. Notons $B_{\mathrm{r}}(X,Y)$ (resp. $B(X,Y)$) l'espace des opérateurs réguliers (resp. bornés) de X dans Y. Rappelons que Y est dit finiment représentable dans X au sens des treillis si pour tout $\varepsilon > 0$ tout sous-treillis de dimension finie de Y est $(1+\varepsilon)$-isomorphe en ordre à un sous-treillis de X.

En 1975 Cartwright et Lotz ont montré (cf. [CL], Th. 1) que si $B_{\mathrm{r}}(X,Y) = B(X,Y)$ alors X (resp. Y) est un AL-espace (resp. AM-espace) sous l'hypothèse que pour un $1 \le p < \infty$, Y (resp. X^*) contient un sous-treillis isomorphe en ordre à l_p. Nous avons observé qu'on peut remplacer cette condition par "l_p est finiment représentable dans Y (resp. X^*) au sens des treillis" et avoir la même conclusion ; et alors, en utilisant un théorème classique de Krivine (cf. [K1]) nous avons obtenu une amélioration de ce résultat : si $B_{\mathrm{r}}(X,Y) = B(X,Y)$ alors X (resp. Y) est un AL-espace (resp. AM-espace) dès que $p(Y) < \infty$ (resp. $q(X) > 1$), où

$$p(Y) = \sup\{p \ge 1;\ Y \text{ est } p\text{-convexe}\} \quad \text{et} \quad q(X) = \inf\{q \ge 1;\ X \text{ est } q\text{-concave}\}.$$

Ce résultat admet comme corollaire immédiat une caractérisation des treillis de Banach homogènes, à savoir que les AM-espaces et les AL-espaces sont les seuls treillis homogènes.

Dans la section 5 nous nous intéressons aux sous-espaces homogènes de L^p, $1 \le p < \infty$. Il est bien connu que la propriété classique d'invariance des variables aléatoires gaussiennes par transformations unitaires entraîne que les espaces $G^p(I)$ sont homogènes. Nous montrons qu'à un isomorphisme régulier près $G^2(I)$ est l'unique sous-espace hilbertien homogène d'un treillis ayant une concavité non-triviale. Ce résultat est une généralisation d'une proposition de Rauch sur les sous-espaces hilbertiens homogènes de L^1. Combinant ces résultats à un théorème classique de Kadec et Pełczyński sur les sous-espaces de L^p, nous montrons que lorsque $2 \le p < \infty$, tout sous-espace homogène de L^p est nécessairement hilbertien et par conséquent régulièrement isomorphe à $G^2(I)$ pour un certain ensemble d'indices I. Ainsi $G^2(I)$ est essentiellement l'unique sous-espace homogène de L^p pour $2 \le p < \infty$. Ceci n'est pas vrai en général : il est facile de voir que $\min(l_2)$ est hilbertien homogène, mais il n'est pas régulièrement isomorphe à $G^2(\mathbb{N})$ comme nous le verrons à la section 7.

Le résultat principal de la section 6 est une version pour les sous-espaces de treillis du théorème classique de Dvoretzky : pour tous $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $N = N(\varepsilon, n) \in \mathbb{N}$ tel que tout sous-espace de treillis de dimension $\ge N$ contient un sous-espace de treillis $(1+\varepsilon)$-isomorphe à l_2^n et $(1+\varepsilon)$-homogène.

Nous démontrons aussi que les sous-espaces de treillis de dimension finie se plongent presque isométriquement régulièrement dans des treillis de dimension finie de la forme $l_\infty^n(l_1^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Signalons que ce résultat est faux dans le cas des espaces d'opérateurs : un espace d'opérateurs de dimension finie n'est pas en général complètement isomorphe à un sous-espace d'un M_n (cf. [P2]).

La section 7 est consacrée à des estimations de distances de Banach–Mazur régulières entre quelques sous-espaces de treillis de dimension finie. Soient E et F des sous-espaces de treillis de dimension n. Notons

$$d_{\mathrm{r}}(E,F)=\inf\{\|T\|_{\mathrm{r}}\|T^{-1}\|_{\mathrm{r}};\ T:E\to F\}$$

la distance de Banach–Mazur régulière entre E et F. Nous montrons que si E et F sont des sous-espaces de treillis de dimension n de constantes de 2-convexité ou de 2-concavité égale à 1 alors

$$d_{\mathrm{r}}(E,F)\le n.$$

Nous considérons d'autres exemples de sous-espaces de treillis dont les distances régulières sont majorées par n.

Rappelons qu'il est classique que le diamètre de Banach–Mazur des espaces de Banach de dimension n est asymptotiquement proche de n. Pisier a montré que ce diamètre vaut exactement n dans le cas des espaces d'opérateurs et les opérateurs complètement bornés (cf. [P5]). Les estimations demontrées dans cette section nous laissent espérer obtenir une majoration optimale du même ordre dans le cas des sous-espaces de treillis de dimension n.

Je remercie le Professeur Gilles Pisier de m'avoir proposé ce sujet de recherche et de m'avoir permis d'exposer ici la démonstration de son théorème de représentation des sous-espaces de treillis.

1. Préliminaires sur les treillis de Banach

Dans la suite tous les treillis seront des treillis de Banach réels ou complexes. On renvoie le lecteur aux ouvrages [LT] ou [Sch] pour la définition et les propriétés élémentaires des treillis de Banach.

Rappelons qu'un opérateur linéaire T d'un treillis X dans un treillis Y est dit *positif* si $T(x)\ge 0$ pour tout élément positif x de X. Si de plus T est inversible (resp. une isométrie), et si T^{-1} est positif, alors T est appelé *isomorphisme d'ordre* (resp. *isométrie d'ordre*).

Soit X un treillis. Soit $p\ge 1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tous $x_1,\ldots,x_n\in X$ on considère les éléments de X définis par $(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ si $1\le p<\infty$ ou $\max_{i\le n}|x_i|$ si $p=\infty$. Soit $\widetilde{X(l_p)}$ l'espace des suites $x=(x_1,x_2,\ldots)\subset X$ pour lesquelles

$$\|x\|_{\widetilde{X(l_p)}}=\sup_n\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\Big)^{1/p}\Big\|_X<\infty\qquad\text{si } 1\le p<\infty,$$

ou

$$\|x\|_{\widetilde{X(l_\infty)}}=\sup_n\|\max_{i\le n}|x_i|\,\|_X<\infty\qquad\text{si } p=\infty.$$

Le sous-espace fermé de $\widetilde{X(l_p)}$ engendré par les suites $x=(x_1,x_2,\ldots)$ dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang, est noté $X(l_p)$; c'est l'espace des suites $(x_n)_{n\ge1}\subset X$ telles que la suite $\{(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{1/p}\}_{n\ge1}$ converge en norme dans X (cf. [LT], pp. 46–47). L'espace $X(l_\infty)$ est aussi noté $X(c_0)$. Pour $n\in\mathbb{N}$ on note aussi $X(l_p^n)$ le sous-espace de $X(l_p)$ formé de toutes les suites dont les termes sont nuls à partir du rang n.

Dans toute la suite $\{e_1,e_2,\ldots\}$ désignera toujours la base canonique de l_p.

Soient X et Y deux treillis et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. Soit l'opérateur $T \otimes \mathrm{id}_{c_0} : X(c_0) \to Y(c_0)$ défini par

$$T \otimes \mathrm{id}_{c_0}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \otimes e_i, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i \in X(l_\infty^n).$$

Définition 1.1. (i) T est dit *régulier* si $\|T \otimes \mathrm{id}_{c_0}\| < \infty$. On note $\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T \otimes \mathrm{id}_{c_0}\|$ la *norme régulière* de T.

(ii) T est une *isométrie régulière* si $T \otimes \mathrm{id}_{c_0}$ est une isométrie.

(iii) T est un *isomorphisme régulier* si T est régulier inversible et si T^{-1} est aussi régulier.

Remarques. (1) Il est clair qu'on a toujours $\|T\| \le \|T\|_{\mathrm{r}}$.

(2) T est régulier s'il existe une constante K telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_1, \dots, x_n \in X, \qquad \|\max_{i \le n} |T(x_i)|\,\|_Y \le K \|\max_{i \le n} |x_i|\,\|_X$$

et $\|T\|_{\mathrm{r}}$ est l'infimum des K vérifiant cette propriété.

(3) Tout opérateur positif T est régulier et $\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T\|$ car dans ce cas on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, \dots, x_n \in X, \qquad \|\max_{i \le n} |T(x_i)|\,\|_Y \le \|T(\max_{i \le n} |x_i|)\|_Y \le \|T\| \cdot \|\max_{i \le n} |x_i|\,\|_X.$$

De plus, réciproquement, sous l'hypothèse que Y est complet en ordre (i.e. que toute famille bornée d'éléments réels de Y a une borne supérieure dans Y), tout opérateur régulier $T : X \to Y$ s'écrit $T = A_+ - A_- + i(B_+ - B_-)$, où A_+, A_-, B_+, B_- sont des opérateurs positifs de X dans Y (cf. [Sch], p. 233 ou [M-N], p. 27).

Signalons que dans [Sch], p. 228, on définit une notion d'opérateur régulier par cette dernière propriété. Les deux notions de régularité sont donc équivalentes lorsque l'espace image de l'opérateur est un treillis complet en ordre.

Il sera parfois utile de recourir à la variante suivante de la notion de régularité :

Définition 1.2. Un opérateur T d'un treillis X dans un treillis Y est dit l_1-*régulier* si l'opérateur $T \otimes \mathrm{id}_{l_1} : X(l_1) \to Y(l_1)$ est borné. Dans ce cas nous noterons

$$\|T\|_{\mathrm{r},1} = \|T \otimes \mathrm{id}_{l_1}\|$$

la *norme* l_1-*régulière* de T.

Soient T^* le transposé de l'opérateur T et X^* le treillis dual de X. Le lemme suivant est élémentaire :

Lemme 1.1. *Soient X et Y deux treillis. Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire.*

(1) *T est régulier si et seulement si T est l_1-régulier; de plus, si c'est le cas,*

$$\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T\|_{\mathrm{r},1}.$$

(2) *T est régulier si et seulement si T^* est régulier; de plus, si c'est le cas,*

$$\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T^*\|_{\mathrm{r}}.$$

Preuve. Il est clair que T est régulier si et seulement si T^* est l_1-régulier et que $\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T^*\|_{\mathrm{r},1}$; donc (2) sera une conséquence de (1). Pour démontrer (1), on considère séparément le cas réel et le cas complexe :

Cas réel. Soit $D = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ le groupe dyadique, muni de la mesure de Haar normalisée. $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ désigne un point générique de D. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par $D_n = \{-1, 1\}^n \subset D$ le sous-groupe de D dont les éléments ε vérifient $\varepsilon_m = 1$ si $m > n$.

Soit $I : l_1^n \to L^\infty(D_n)$ l'opérateur défini par

$$\forall (a_k) \in l_1^n, \qquad I((a_k)) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k.$$

Alors il est facile de vérifier que si X est un treillis réel,

$$\mathrm{id}_X \otimes I : X(l_1^n) \to X(L^\infty(D_n))$$

est une isométrie ; donc, par dualité (posant $J = I^*$),

$$\mathrm{id}_{X^*} \otimes J : X^*(L^1(D_n)) \to X^*(l_\infty^n)$$

est une application quotient. Appliquant ceci à $\mathrm{id}_{X^{**}} \otimes J$ et utilisant la réflexivité locale, on déduit que

$$\mathrm{id}_X \otimes J : X(L^1(D_n)) \to X(l_\infty^n)$$

est aussi une application quotient.

Soit maintenant $T : X \to Y$ un opérateur linéaire entre deux treillis réels. Supposons T régulier. Soit $(x_k)_{k \le n} \in X(l_1^n)$ de norme ≤ 1. Alors

$$\|\mathrm{id}_X \otimes I((x_k))\|_{X(L^\infty(D_n))} \le 1,$$

d'où, par la régularité de T,

$$\|T \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(D_n)}(\mathrm{id}_X \otimes I((x_k)))\|_{Y(L^\infty(D_n))} \le \|T\|_{\mathrm{r}}\,;$$

or, il est clair que

$$T \otimes \mathrm{id}_{L^\infty(D_n)}(\mathrm{id}_X \otimes I((x_k))) = \mathrm{id}_Y \otimes I(T \otimes \mathrm{id}_{l_1^n}((x_k))).$$

On en déduit donc

$$\|T \otimes \mathrm{id}_{l_1^n}((x_k))\|_{Y(l_1^n)} \le \|T\|_{\mathrm{r}},$$

d'où T est l_1-régulier et $\|T\|_{\mathrm{r},1} \le \|T\|_{\mathrm{r}}$.

Inversement, supposons T l_1-régulier. Soit $(x_k)_{k \le n} \in X(l_\infty^n)$ de norme < 1. Alors, il existe $f \in X(L^1(D_n))$ tel que

$$\|f\|_{X(L^1(D_n))} < 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_X \otimes J(f) = (x_k)_{k \le n}.$$

Donc la l_1-régularité de T implique

$$\|T \otimes \mathrm{id}_{L^1(D_n)}(f)\|_{Y(L^1(D_n))} \le \|T\|_{\mathrm{r},1},$$

d'où

$$\|\,\mathrm{id}_Y \otimes J(T \otimes \mathrm{id}_{L^1(D_n)}(f))\|_{Y(l_\infty^n)} \le \|T\|_{\mathrm{r},1}\,;$$

or

$$\mathrm{id}_Y \otimes J(T \otimes \mathrm{id}_{L^1(D_n)}(f)) = (T(x_k))_{k \le n}.$$

Il s'ensuit donc

$$\|(T(x_k))_{k \le n}\|_{Y(l_\infty^n)} \le \|T\|_{\mathrm{r},1},$$

ce qui implique que T est régulier et $\|T\|_{\mathrm{r}} \le \|T\|_{\mathrm{r},1}$.

Cas complexe. C'est essentiellement la même preuve. Cette fois, on devrait utiliser le tore infini $T^{\mathbb{N}} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, à la place du groupe dyadique D ; mais pour éviter les espaces $X(L^\infty(T^n))$ ou $X(L^1(T^n))$ (qui poseraient certains problèmes de définition), nous considérerons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, le groupe $\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}} = (\mathbb{Z}/m\,\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, muni de sa mesure de Haar normalisée. $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ désigne un point générique de $\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_m^n$ est naturellement identifié à un sous-groupe de $\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}$. Par abus de notation, on pose encore

$$I : l_1^n \to L^\infty(\mathbb{Z}_m^n), \quad I((a_k)_{k\le n}) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i2\pi\omega_k/m}.$$

Alors il est facile de vérifier que, pour tout treillis complexe X,

$$\mathrm{id}_X \otimes I : X(l_1^n) \to X(L^\infty(\mathbb{Z}_m^n))$$

est une application injective ; de plus, on a

$$\|\mathrm{id}_X \otimes I\| \le 1, \qquad \|(\mathrm{id}_X \otimes I)^{-1} : \mathrm{id}_X \otimes I(X(l_1^n)) \to X(l_1^n)\| \le 1 + 4\pi/m.$$

Comme dans le précédent cas réel, on en déduit que (avec $J = I^*$)

$$\mathrm{id}_X \otimes J : X(L^1(\mathbb{Z}_m^n)) \to X(l_\infty^n)$$

est de norme ≤ 1 et que, pour tout $(x_k)_{k\le n} \in X(l_\infty^n)$ de norme < 1, il existe $f \in X(L^1(\mathbb{Z}_m^n))$ tel que

$$\mathrm{id}_X \otimes J(f) = (x_k)_{k\le n} \quad \text{et} \quad \|f\|_{X(L^1(\mathbb{Z}_m^n))} \le 1 + 4\pi/m.$$

Alors par passage à la limite quand $m \to \infty$, on peut finir le reste de la preuve exactement comme dans le cas réel. Nous omettons les détails. ∎

Remarques. Soient (Ω, μ) un espace mesuré et X un treillis quelconque. On a :

(1) Tout opérateur continu $T : X \to L^\infty(\mu)$ est régulier et

$$\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T\|.$$

En effet, pour tout entier naturel n et tous éléments $x_1, \ldots, x_n$ de X il est clair que

$$\|\max_{k\le n} |T(x_k)|\,\|_\infty = \max_{k\le n} \|T(x_k)\|_\infty \le \|T\| \cdot \|\max_{k\le n} |x_k|\,\|_X.$$

(2) Tout opérateur continu $S : L^1(\mu) \to X$ est régulier et $\|S\|_{\mathrm{r}} = \|S\|$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x_k)_{k=1}^n \subset X$, on a

$$\Big\| \sum_{k=1}^n |T(x_k)| \Big\|_X \le \sum_{k=1}^n \|T(x_k)\|_X \le \|T\| \Big\| \sum_{k=1}^n |x_k| \Big\|_1,$$

d'où $\|T\| = \|T\|_{\mathrm{r},1}$, donc par le Lemme 1.1, $\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T\|$.

(3) On sait que les espaces L^∞ (resp. L^1) sont les seuls treillis à vérifier la remarque (1) (resp. (2)) (cf. [M-N], p. 48).

2. Théorème de représentation de Pisier

Nous exposons maintenant le théorème de G. Pisier de représentation des sous-espaces de treillis.

Considérons une norme α sur $E \otimes c_0$ vérifiant la propriété suivante :

$$\text{(P)} \qquad \forall T : c_0 \to c_0,\ \forall x \in E \otimes c_0, \quad \alpha((\mathrm{id}_E \otimes T)(x)) \leq \|T\| \alpha(x).$$

Pisier montre que la donnée d'une telle norme sur $E \otimes c_0$ équivaut à l'existence d'un plongement isométrique de E dans un treillis X :

Théorème 2.1 (Pisier). *Soient E un espace de Banach et α une norme sur $E \otimes c_0$ vérifiant la propriété* (P)*. Alors il existe un treillis X et un plongement isométrique $J : E \to X$ tel que*

$$\| \max_{i \leq n} |J(x_i)| \, \|_X = \alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i \Big) \tag{2.1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tous $x_1, \ldots, x_n$ dans E, où $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ désigne la base canonique de c_0.

Inversement, pour tout plongement isométrique $J : E \to X$ l'expression (2.1) *définit une norme sur $E \otimes c_0$ vérifiant* (P)*.*

La preuve de ce théorème est basée sur le lemme fondamental suivant :

Lemme 2.1. *Soit α une norme sur $E \otimes c_0$ vérifiant la propriété* (P)*. Alors pour tout élément $x = \sum x_n \otimes e_n$ dans $E \otimes c_0$ il existe un espace mesuré (Ω, μ) et une application linéaire $T : E \to L^1(\mu)$ tels que*

$$\|T \otimes \mathrm{id}_{c_0} : E \otimes c_0 \to L^1(\mu, c_0)\| \leq 1 \quad \textit{et} \quad \alpha(x) = \| \sup_n |T(x_n)| \, \|_{L^1(\mu)}.$$

Étant donné ce lemme, la preuve du théorème est facile :

Preuve du Théorème 2.1. On considère l'ensemble $\mathcal{I}$ de tous les espaces mesurés (Ω, μ), et on pose

$$C_\mu = \{T : E \to L^1(\mu);\ \|T\|_{\mathrm{r}} \leq 1\},$$

où

$$\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T \otimes \mathrm{id}_{c_0} : E \otimes c_0 \to L^1(\mu, c_0)\|.$$

On construit le treillis

$$X = \bigoplus_{\infty} \Big(\Big(\bigoplus_{\infty} L^1(\Omega, \mu) \Big)_{T \in C_\mu} \Big)_{(\Omega,\mu) \in \mathcal{I}}.$$

On définit alors l'opérateur linéaire $J : E \to X$ par

$$J(x) = \bigoplus ((T(x))_{T \in C_\mu})_{(\Omega,\mu) \in \mathcal{I}}.$$

Soit $x \in E \otimes c_0$. Par définition de C_μ, on a

$$\| \max_n |J(x_n)| \, \|_X = \sup_{(\Omega,\mu) \in \mathcal{I}} \sup_{T \in C_\mu} \| \max_n |T(x_n)| \, \|_{L^1(\mu)} \leq \alpha(x).$$

Mais par le Lemme 2.1 ci-dessus on a aussi l'inégalité inverse, d'où

$$\alpha(x) = \sup_\mu \sup_{t \in C_\mu} \| \max_n |T(x_n)| \, \|_{L^1(\mu)}, \qquad \forall x \in E \otimes c_0,$$

c'est-à-dire que J est une isométrie régulière. D'où le théorème. ■

Preuve du Lemme 2.1. Soit $I = E^*$. Alors pour tout espace de Banach F et pour tout $v \in E \otimes F$ on identifie v à un élément de $B(E^*, F)$. Ainsi

$$v(\xi) \in F, \quad \forall \xi \in I.$$

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ le corps des scalaires de l'espace vectoriel E. On considère l'espace vectoriel $V \subset \mathbb{K}^I$ de toutes les fonctions $\varphi : I \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe, pour un $n \in \mathbb{N}$, un élément $v \in E \otimes l_\infty^n$ tel que

$$\forall \xi \in I, \qquad |\varphi(\xi)| \leq \|v(\xi)\|_{l_\infty^n}. \tag{2.2}$$

Il est clair que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$; en plus V est un idéal dans l'espace vectoriel réticulé $\mathbb{K}^I$.

Tout au long de la démonstration on munit $E \otimes l_\infty^n$ de la norme induite par α en utilisant le plongement isométrique $l_\infty^n \hookrightarrow c_0$ qui identifie l_∞^n au sous-espace de c_0 engendré par les n premiers vecteurs de sa base canonique. Alors on utilise la propriété (P) sous la forme donnée par l'observation suivante :

Sous-lemme 1. *Soient v_1, v_2 dans $E \otimes l_\infty^n$ et $E \otimes l_\infty^m$ respectivement tels que*

$$\forall \xi \in I \qquad \|v_1(\xi)\|_{l_\infty^n} \leq \|v_2(\xi)\|_{l_\infty^m} \; ; \tag{2.3}$$

alors $\alpha(v_1) \leq \alpha(v_2)$.

Preuve. Il est clair que l'ensemble $\{v_2(\xi) : \xi \in I\}$ est un sous-espace vectoriel de l_∞^m. D'autre part (2.3) implique que $v_2(\xi) \mapsto v_1(\xi)$ définit un opérateur linéaire de ce sous-espace dans l_∞^n de norme ≤ 1. Par l'injectivité de l_∞^n, cet opérateur admet une extension $T : l_\infty^m \to l_\infty^n$ avec $\|T\| \leq 1$; et on vérifie aisément que

$$(\mathrm{id}_E \otimes T)(v_2) = v_1.$$

Par la propriété (P) on en déduit que $\alpha(v_1) \leq \alpha(v_2)$, ce qui montre le sous-lemme. ∎

Pour tout $\varphi \in V$ on considère

$$p(\varphi) = \inf\{\alpha(v)\},$$

où l'infimum parcourt tous les v vérifiant (2.2).

Sous-lemme 2. *p est une semi-norme sur V.*

Preuve. Il est clair que p est homogène. Il reste à montrer la sous-additivité :

$$p(\varphi + \psi) \leq p(\varphi) + p(\psi), \qquad \forall \varphi, \psi \in V.$$

Soient $v \in E \otimes l_\infty^n$ et $w \in E \otimes l_\infty^m$ tels que

$$|\varphi(\xi)| \leq \|v(\xi)\|_{l_\infty^n} \quad \text{et} \quad |\psi(\xi)| \leq \|w(\xi)\|_{l_\infty^m}, \qquad \forall \xi \in I.$$

Alors

$$|\varphi(\xi) + \psi(\xi)| \leq \|v(\xi)\|_{l_\infty^n} + \|w(\xi)\|_{l_\infty^m}, \qquad \forall \xi \in I. \tag{2.4}$$

On introduit $u \in E \otimes (l_\infty^n \oplus_1 l_\infty^m)$ donné par

$$u(\xi) = v(\xi) + w(\xi), \qquad \forall \xi \in I.$$

Soit $F = l_\infty^n \oplus_1 l_\infty^m$. On a $\|u(\xi)\|_F = \|v(\xi)\|_{l_\infty^n} + \|w(\xi)\|_{l_\infty^m}$. Mais pour chaque $\varepsilon > 0$, F se plonge $(1+\varepsilon)$-isomorphiquement dans l_∞^M pour un certain $M = M(\varepsilon)$, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur linéaire $U : F \to l_\infty^M$ tel qu'on a

$$\|y\| \le \|U(y)\|_{l_\infty^M} \le (1+\varepsilon)\|y\|, \quad \forall y \in F. \tag{2.5}$$

Soit $z = (\mathrm{id}_E \otimes U)(u) \in E \otimes l_\infty^M$. Par (2.4) et (2.5) on a

$$|\varphi(\xi) + \psi(\xi)| \le \|z(\xi)\|_{l_\infty^M}, \quad \forall \xi \in I,$$

et ainsi

$$p(\varphi + \psi) \le \alpha(z).$$

Mais d'autre part soient

$$J_1 : l_\infty^n \to l_\infty^n \oplus_1 l_\infty^m \quad \text{et} \quad J_2 : l_\infty^m \to l_\infty^n \oplus_1 l_\infty^m$$

les inclusions naturelles :

$$J_1(x) = x \oplus 0, \qquad J_2(y) = 0 \oplus y.$$

Soit

$$\gamma = (\mathrm{id}_E \otimes J_1)(v), \qquad \beta = (\mathrm{id}_E \otimes J_2)(w).$$

Alors $u = \gamma + \beta$. On a donc $z = z_1 + z_2$ avec

$$z_1 = (\mathrm{id}_E \otimes U)\gamma, \qquad z_2 = (\mathrm{id}_E \otimes U)\beta.$$

Par (2.5) on observe que, pour tout $\xi \in I$,

$$\|z_1(\xi)\| \le (1+\varepsilon)\|v(\xi)\| \quad \text{et} \quad \|z_2(\xi)\| \le (1+\varepsilon)\|w(\xi)\|.$$

On obtient donc, par le Sous-lemme 1,

$$\alpha(z_1) \le (1+\varepsilon)\alpha(v) \quad \text{et} \quad \alpha(z_2) \le (1+\varepsilon)\alpha(w),$$

ce qui pour sa part implique que

$$p(\varphi + \psi) \le \alpha(z) \le \alpha(z_1) + \alpha(z_2) \le (1+\varepsilon)\alpha(v) + (1+\varepsilon)\alpha(w).$$

Prenant l'infimum sur tous les v, w possibles et tous les $\varepsilon > 0$ on obtient

$$p(\varphi + \psi) \le p(\varphi) + p(\psi),$$

ce qui prouve que p est une semi-norme. ∎

Revenons à la preuve du lemme. On considère $x \in E \otimes l_\infty^n$ tel que $\alpha(x) = 1$. On pose $\varphi_0(\xi) = \|x(\xi)\|_{l_\infty^n}$. Alors par le Sous-lemme 1, on a

$$p(\varphi_0) = 1 = \alpha(x).$$

Comme p est une semi-norme, par le théorème de Hahn–Banach, il existe une forme linéaire $f : V \to \mathbb{K}$ telle que

$$|f(\varphi)| \le p(\varphi), \qquad \forall \varphi \in V, \qquad f(\varphi_0) = 1.$$

À ce stade on utilise la monotonicité de p, c'est-à-dire, la propriété

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in V, \qquad |\varphi_1| \le |\varphi_2| \;\Rightarrow\; p(\varphi_1) \le p(\varphi_2),$$

pour obtenir une forme linéaire *positive* normant φ_0. Pour tout $\varphi \in V$ avec $\varphi \geq 0$ on définit

$$q(\varphi) = \sup\{\Re(f(y));\ |y| \leq \varphi,\ y \in V\}.$$

Il est clair que $q(\varphi_0) \geq f(\varphi_0) = 1$ et que

$$0 \leq q(\varphi) \leq p(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_+.$$

Observons que q est additive sur V_+ :

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in V_+, \quad q(\varphi_1 + \varphi_2) = q(\varphi_1) + q(\varphi_2).$$

Montrons la sous-additivité : soient $\varphi_1,\ \varphi_2 \in V_+$ tel que $|y| \leq \varphi_1 + \varphi_2$. Par la propriété de décomposition de Riesz il existe $y_i \in V$, $i = 1, 2$, tels que

$$|y_1| \leq \varphi_1, \quad |y_2| \leq \varphi_2 \quad \text{et} \quad |y_1| + |y_2| = |y|$$

(cf. [Sch], p. 53 ou [M-N], p. 3). Nous en déduisons que

$$q(\varphi_1 + \varphi_2) \leq q(\varphi_1) + q(\varphi_2).$$

La sur-additivité est facile à vérifier.

Donc q s'étend en une forme linéaire positive sur V, que nous noterons encore par q.

La fin de la preuve suit un argument classique : on peut associer à (V, q) un espace L^1 abstrait (cf. [LT], pp. 14–15) par le procédé standard suivant : on munit V de la semi-norme

$$|||v||| = q(|v|),$$

alors on forme l'espace quotient

$$\widetilde{V} = V/\{x \in V;\ |||x||| = 0\},$$

qui est un espace normé lorsqu'il est muni de la norme associée à $|||\cdot|||$; et enfin on considère la complétion $\widehat{V}$ de l'espace $\widetilde{V}$. Alors il est clair que $\widehat{V}$ est naturellement muni d'une structure de treillis de Banach pour laquelle c'est un espace L^1 abstrait au sens de Kakutani. On peut donc identifier $\widehat{V}$ à un espace $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ pour un certain espace mesuré (Ω, Σ, μ).

On pose

$$\widehat{x}(\xi) = \xi(x), \quad \forall \xi \in I.$$

Alors $\widehat{x} \in V$. Retraçant les diverses opérations qui interviennent dans la construction de $\widehat{V}$, on obtient un opérateur linéaire naturel $S : V \to L^1(\mu)$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$ on a

$$\begin{aligned}\int \max_{i \leq n} |S(\widehat{x}_i)|\, d\mu &= \inf\{q(\varphi);\ |||\varphi - \max_{1 \leq i \leq n} |\widehat{x}_i|\, ||| = 0\}\\ &\leq q(\max_{1 \leq i \leq n} |\widehat{x}_i|) \leq p(\max_{1 \leq i \leq n} |\widehat{x}_i|) = \alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i\Big),\end{aligned}$$

la dernière egalité étant une conséquence immédiate du Sous-lemme 1. On définit alors

$$T : E \to L^1(\mu) \quad \text{par} \quad T(x) = S(\widehat{x})$$

et on obtient ainsi un opérateur linéaire vérifiant les propriétés du lemme. Ceci conclut la preuve du lemme et donc aussi celle du Théorème 2.1. ■

Remarques. (1) Pisier a fait l'observation suivante sur la norme α vérifiant (P) : si y_1 et y_2 sont deux éléments de la sphère unité de c_0, alors pour tout x dans E on a $\alpha(x \otimes y_1) = \alpha(x \otimes y_2)$. Car, dans ces conditions, il existe des opérateurs $T, S : c_0 \to c_0$ de normes égales à 1 tels que $T(y_1) = y_2$, $S(y_2) = y_1$; et la propriété (P) implique

$$\alpha(x \otimes y_1) = \alpha(x \otimes S(y_2)) \leq \alpha(x \otimes y_2) \quad \text{et} \quad \alpha(x \otimes y_2) = \alpha(x \otimes T(y_1)) \leq \alpha(x \otimes y_1).$$

(2) Il s'ensuit que α est une norme croisée sur le produit tensoriel $E \otimes c_0$. En effet, soient y un élément non nul de c_0 et x dans E. D'après la remarque précédente, $\alpha(x \otimes y) = \|y\| \alpha(x \otimes e_1)$. Or, $\alpha(x \otimes e_1) = \|x\|$ par le Théorème 2.1, d'où la conclusion.

3. Sous-espaces de treillis

Le Théorème 2.1 de représentation de Pisier conduit naturellement à l'introduction de la notion suivante :

Définition 3.1. On dit qu'on munit un espace de Banach E d'une *structure de sous-espace de treillis* lorsqu'on munit le produit tensoriel $E \otimes c_0$ d'une norme α vérifiant la propriété (P) ; et dans ce cas E est appelé *sous-espace de treillis*.

Notation. Soit E un sous-espace de treillis. Par le Théorème 2.1, E peut être considéré comme un sous-espace (isométrique) d'un treillis X, i.e. $E \subseteq X$. On note alors $E(c_0)$ (resp. $E(l_\infty^n)$) le sous-espace fermé de $X(c_0)$ (resp. $X(l_\infty^n)$) engendré par $E \otimes c_0$ (resp. $E \otimes l_\infty^n$). Donc si α est la norme sur $E \otimes c_0$ induisant la structure de sous-espace de treillis sur E, on a, pour tout $x \in E \otimes c_0$,

$$\alpha(x) = \|x\|_{E(c_0)}.$$

Remarquons que $E(c_0)$ est la complétion de $E \otimes c_0$ par rapport à la norme α. Par conséquent, $E(c_0)$ est indépendant du plongement particulier de E dans un treillis associé à la structure de sous-espace de treillis sur E.

Dans la catégorie des sous-espaces de treillis, les opérateurs qui conservent la structure sont les opérateurs dits réguliers. Soient E et F deux sous-espaces de treillis. Pour tout opérateur $T : E \to F$ notons $T \otimes \mathrm{id}_{c_0} : E(c_0) \to F(c_0)$ l'opérateur défini par

$$T \otimes \mathrm{id}_{c_0} \Big(\sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i \Big) = \sum_{i=1}^n T(x_i) \otimes e_i, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i \in E \otimes c_0.$$

Définition 3.2. (1) Soient E et F deux sous-espaces de treillis. Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire. L'opérateur T est dit *régulier* si $T \otimes \mathrm{id}_{c_0} : E(c_0) \to F(c_0)$ est borné. Nous noterons $\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T \otimes \mathrm{id}_{c_0}\|$; c'est la *norme régulière* de T. Nous noterons aussi $B_{\mathrm{r}}(E, F)$, l'espace des opérateurs réguliers de E dans F muni de la norme $\|T\|_{\mathrm{r}}$.

(2) S'il existe un opérateur inversible $T : E \to F$ tel que T et T^{-1} soient réguliers, T est appelé *isomorphisme régulier* et on dit que E et F sont régulièrement isomorphes ; si de plus, $\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T^{-1}\|_{\mathrm{r}} = 1$, T est appelé *isométrie régulière*, et on dit que E et F sont régulièrement isométriques.

Nous noterons

$$d_{\mathrm{r}}(E,F)=\inf\{\|T\|_{\mathrm{r}}\|T^{-1}\|_{\mathrm{r}};\ T:E\to F\},$$

la *distance régulière de Banach–Mazur* entre deux sous-espaces de treillis E, F. Donc $d_{\mathrm{r}}(E,F)<\infty$ si et seulement si E et F sont régulièrement isomorphes.

Exemples. (1) Muni de sa structure naturelle de treillis, tout treillis est un sous-espace de treillis. Dans la suite, si on ne spécifie pas, quand considérés comme sous-espaces de treillis, tous les treillis seront munis de leur structure naturelle de treillis. En particulier, les espaces c_0, l_p et L^p sont des sous-espaces de treillis.

(2) On fixe un espace de probabilité (Σ,ν). Soit I un ensemble d'indices. Pour tout $1\le p<\infty$ le sous-espace $G^p(I)\subset L^p(\Sigma,\nu)$ engendré par une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes standard $\{g_i;\ i\in I\}$ est naturellement muni d'une structure de sous-espace de treillis par l'injection canonique $G^p(I)\hookrightarrow L^p(\Sigma,\nu)$. Nous noterons simplement G^p (resp. G^p_n) lorsque $I=\mathbb{N}$ (resp. $I=\{1,\dots,n\}$), et $G(I)$, G ou G_n lorsque $p=2$.

(3) De même, le sous-espace $R^p(I)\subset L^p(\Sigma,\nu)$ engendré par une famille de variables aléatoires de Rademacher indépendantes, $\{\varepsilon_i;\ i\in I\}$, est naturellement muni d'une structure de sous-espace de treillis. Comme ci-dessus, nous noterons $R^p=R^p(\mathbb{N})$, $R^p_n=R^p(\{1,\dots,n\})$, et R, R_n lorsque $p=2$.

Remarques. (1) Il est bien classique que pour tout $1\le p<\infty$ et pour tous $x_1,\dots,x_n\in l_\infty$,

$$A_p^{-1}\Big\|\sum_{i=1}^n g_ix_i\Big\|_{L^p(\Sigma,\nu;l_\infty)}\le\Big\|\sum_{i=1}^n g_ix_i\Big\|_{L^2(\Sigma,\nu;l_\infty)}\le B_p\Big\|\sum_{i=1}^n g_ix_i\Big\|_{L^p(\Sigma,\nu;l_\infty)},$$
$$A_p^{-1}\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_ix_i\Big\|_{L^p(\Sigma,\nu;l_\infty)}\le\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_ix_i\Big\|_{L^2(\Sigma,\nu;l_\infty)}\le B_p\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_ix_i\Big\|_{L^p(\Sigma,\nu;l_\infty)},$$

où A_p et B_p sont deux constantes positives ne dépendant que de p. Il résulte donc que pour tout I, $G^p(I)$ (resp. $R^p(I)$) est régulièrement isomorphe à $G(I)$ (resp. $R(I)$).

(2) Il est démontré dans [Ra] que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad C^{-1}\log(1+n)\le d_{\mathrm{r}}(G_n,R_n)\le C\log(1+n),$$

où $C>0$ est une constante absolue. Par conséquent, G et R ne sont pas régulièrement isomorphes.

Étant donné un *espace de Banach* E, on voit facilement que parmi toutes les structures de sous-espace de treillis sur E il en existe deux extrémales : pour l'une la norme correspondante sur $E\otimes c_0$ est la plus grande, et pour l'autre la norme correspondante sur $E\otimes c_0$ est la plus petite. Décrivons-les :

La structure $\min(E)$. Soit E un espace de Banach. Rappelons que la norme injective sur $E\otimes c_0$ est définie par

$$\Big\|\sum_{i=1}^n x_i\otimes e_i\Big\|_{E\check{\otimes}c_0}=\max_{i\le n}\|x_i\|_E,\qquad\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x_1,\dots,x_n\in E.$$

Il est facile de voir que la norme injective vérifie la propriété (P). Nous appelerons $\min(E)$ la structure correspondante de sous-espace de treillis sur E. La norme injective est la plus petite norme sur $E\otimes c_0$ induisant une structure de sous-espace de treillis sur E. En effet, soit α une autre norme sur $E\otimes c_0$ vérifiant la propriété (P). Soient $n\in\mathbb{N}$ et $(x_k)_{k=1}^n\subset E$. Notant $P_k : c_0\to c_0$ la projection sur la k-ième coordonnée on a, grâce à (P),

$$\|x_k\| = \alpha\Big(\operatorname{id}_E\otimes P_k\Big(\sum_{i=1}^n x_i\otimes e_i\Big)\Big) \le \alpha\Big(\sum_{i=1}^n x_i\otimes e_i\Big),$$

d'où

$$\Big\|\sum_{i=1}^n x_i\otimes e_i\Big\|_{\min E(l_\infty^n)} = \max_{1\le i\le n}\|x_i\| \le \alpha\Big(\sum_{i=1}^n x_i\otimes e_i\Big).$$

Le plongement isométrique de E dans un treillis, correspondant à la structure $\min(E)$, admet une réalisation concrète très simple, que l'on peut décrire de la façon suivante.

Soit E^* le dual de E. On sait que la boule unité B_{E^*} de E^* est un compact pour la topologie préfaible ω^*. Soit $C(B_{E^*},\omega^*)$ le treillis des fonctions continues sur (B_{E^*},ω^*). Pour tout $x\in E$ notons $\widehat{x}$ l'élément de $C(B_{E^*},\omega^*)$ défini par

$$\widehat{x}(\xi)=\xi(x)\qquad\forall x\in B_{E^*}.$$

L'application $J : x\mapsto J(x)=\widehat{x}$ est un plongement isométrique de E dans $C(B_{E^*},\omega^*)$. Il est clair que ce plongement isométrique réalise la structure $\min(E)$ comme sous-espace du treillis $C(B_{E^*},\omega^*)$.

La structure $\max(E)$. Comme pour la norme injective, on vérifie aussi facilement que la norme projective sur $E\otimes c_0$ induit une structure de sous-espace de treillis sur E. Nous désignerons cette structure de sous-espace de treillis par $\max(E)$.

Rappelons la norme projective $\|\cdot\|_{E\otimes c_0}$ sur $E\mathbin{\widehat{\otimes}} c_0$: Pour tout $v\in E\otimes c_0$,

$$\|v\|_{E\widehat{\otimes}c_0} = \inf\Big\{\sum_{i=1}^n \|x_i\|\cdot\|y_i\|;\ v=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i,\ x_i\in E,\ y_i\in c_0,\ n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

On note $E\mathbin{\widehat{\otimes}} c_0$ le complété de $E\otimes c_0$ pour cette norme.

Soit α une norme sur $E\otimes c_0$ vérifiant (P). Alors α est une norme croisée sur $E\otimes c_0$ (cf. la remarque après le Théorème 2.1), d'où, pour tous $x_1,\ldots,x_n\in E$,

$$\alpha\Big(\sum_{i=1}^n x_i\otimes e_i\Big) \le \Big\|\sum_{i=1}^n x_i\otimes e_i\Big\|_{E\widehat{\otimes}c_0} = \|(x_i)_{i\le n}\|_{\max E(l_\infty^n)}\,;$$

donc la norme correspondant à $\max(E)$ est la plus grande de toutes les normes sur $E\otimes c_0$ induisant une structure de sous-espace de treillis sur E.

Le résultat suivant , dû à Yves Raynaud, décrit une réalisation concrète de la structure $\max(E)$.

Soit $\varGamma=\{T\in B(E,l_1);\ \|T\|\le 1\}$, où $B(E,\,l_1)$ est l'espace des opérateurs bornés de E dans l_1.

Proposition 3.1. *La structure* $\max(E)$ *correspond au plongement isométrique*

$$J : E\to l_\infty(\varGamma;l_1),\qquad J(x)=(T(x))_{T\in\varGamma},\qquad \forall x\in E.$$

Preuve. Commençons par montrer que J est un plongement isométrique. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|_E = \sup_{\xi \in B_{E^*}} \|T_\xi(x)\|_{l_1} \le \sup_{T \in \Gamma} \|T(x)\|_{l_1},$$

où $T_\xi : E \to l_1$ est défini par $T_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle e_1$. L'inégalité inverse étant évidente, on obtient

$$\|J(x)\|_{l_\infty(\Gamma;\, l_1)} = \sup_{T \in \Gamma} \|T(x)\|_{l_1} = \|x\|_E.$$

Il reste à montrer que

$$\Big\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i \Big\|_{E \widehat{\otimes} c_0} = \sup_{T \in \Gamma} \| \sup_{i \le n} |T(x_i)| \, \|_{l_1}, \qquad \forall x_1, \ldots, x_n \in E, \ n \in \mathbb{N}.$$

Pour cela on rappelle la dualité bien connue : $(E \widehat{\otimes} c_0)^* = B(E, l_1)$. Donc, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$ nous avons

$$\Big\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i \Big\|_{E \widehat{\otimes} c_0} = \sup \Big\{ \Big| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), e_i \rangle \Big| ; \ T \in \Gamma \Big\}.$$

Or il est clair que

$$\Big| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), e_i \rangle \Big| = \sum_{i=1}^n |T(x_i)(i)| \le \| \sup_{i \le n} |T(x_i)| \, \|_{l_1},$$

d'où

$$\Big\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i \Big\|_{E \widehat{\otimes} c_0} \le \| \sup_{i \le n} |J(x_i)| \, \|_{l_\infty(\Gamma; l_1)}. \tag{3.1}$$

D'autre part, il est aisé de voir que

$$\alpha\Big(\sum_{i \ge 1} x_i \otimes e_i \Big) = \| \sup_{i \ge 1} |J(x_i)| \, \|_{l_\infty(\Gamma; l_1)}$$

définit une norme croisée α sur le produit tensoriel $E \otimes c_0$. La norme projective étant la plus grande norme croisée sur $E \otimes c_0$, on obtient donc

$$\| \sup_{i \ge 1} |J(x_i)| \, \|_{l_\infty(\Gamma; l_1)} \le \Big\| \sum_{i \ge 1} x_i \otimes e_i \Big\|_{E \widehat{\otimes} c_0}. \tag{3.2}$$

Les inégalités (3.1) et (3.2) donnent le résultat énoncé. ∎

Remarque. Nous verrons plus tard que $\min(E)$ et $\max(E)$ ne sont pas régulièrement isomorphes, pour tout espace de Banach E de dimension infinie. On peut donc munir un même espace de Banach de deux structures de sous-espaces de treillis complètement différentes.

Définition 3.3. Soit E un sous-espace de treillis. Si, en tant qu'espace de Banach, E est isomorphe à un espace de Hilbert, E est dit *sous-espace de treillis hilbertien.*

Définition 3.4. Un sous-espace de treillis E est dit *homogène* s'il existe une constante positive $\lambda < \infty$ telle que

$$\forall T : E \to E, \qquad \|T\|_{\mathrm{r}} \le \lambda \|T\|.$$

La plus petite de telles constantes λ est notée par $\delta(E)$ et appelée *constante d'homogénéité* de E. Ainsi,

$$\delta(E) = \sup\{\|T\|_{\mathrm{r}}/\|T\|;\ T : E \to E,\ T \neq 0\}.$$

REMARQUE. Il est clair que pour tout espace de Banach E, $\min(E)$ et $\max(E)$ sont homogènes de constante égale à 1. Plus généralement, si F est un autre sous-espace de treillis, tout opérateur borné $T : F \to \min(E)$ (resp. $T : \max(E) \to F$) est régulier et $\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T\|$. En effet, par une propriété élémentaire du produit tensoriel injectif,

$$\|T : \min(F) \to \min(E)\|_{\mathrm{r}} = \|T\|;$$

d'autre part, $\mathrm{id}_F : F \to \min(F)$ est de norme régulière égale à 1, d'où

$$\|T : F \to \min(E)\|_{\mathrm{r}} = \|T\|.$$

De façon similaire, $T : \max(E) \to F$ est aussi régulier de norme régulière égale à $\|T\|$.

La proposition suivante est bien connue (cf. e.g. [Ra]). Pour la commodité du lecteur, nous en esquissons une preuve.

PROPOSITION 3.2. *Pour tout ensemble d'indices I, $G(I)$ est homogène de constante* 1.

Preuve. Considérons, sans perte de généralité, G_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que G_n est le sous-espace de $L^2(\Sigma, \nu)$ engendré par une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes standard $\{g_1, \ldots, g_n\}$.

Comme espace de Banach, G_n est isométrique à l_2^n ; donc la boule unité de $B(G_n)$ est l'enveloppe convexe des opérateurs unitaires. Par conséquent, il suffit de montrer que pour tout unitaire $U \in B(G_n)$, $\|U\|_{\mathrm{r}} = 1$. En fait, pour un tel U, par l'invariance des gaussiennes par transformations unitaires, $\{U(g_1), \ldots, U(g_n)\}$ est une copie de $\{g_1, \ldots, g_n\}$. Par conséquent, pour tous $y_1, \ldots, y_n \in c_0$,

$$\begin{aligned}\Big\|U \otimes \mathrm{id}_{c_0}\Big(\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes y_i\Big)\Big\|_{G_n(c_0)} &= \Big\|\sum_{i=1}^{n} U(g_i) \otimes y_i\Big\|_{L^2(\Sigma,\nu;c_0)} \\ &= \Big\|\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes y_i\Big\|_{L^2(\Sigma,\nu;c_0)} = \Big\|\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes y_i\Big\|_{G_n(c_0)},\end{aligned}$$

d'où U est une isométrie régulière. ∎

REMARQUES. (1) Ainsi G, $\min(l_2)$, $\max(l_2)$ sont des sous-espaces de treillis hilbertiens homogènes. Nous montrerons à la dernière section qu'ils sont deux-à-deux non régulièrement isomorphes.

(2) Il est démontré dans [Ra] que R n'est pas homogène ; de plus, il existe deux constantes $0 < C_1, C_2 < \infty$ telles que

$$C_1 \log(1+n) \le \delta(R_n) \le C_2 \log(1+n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La p-convexité et la q-concavité. Soit E un sous-espace de treillis ; dans la suite lorsque nous dirons d'un treillis X qui contient E nous sous-entendrons qu'il existe un plongement de E dans X donné par la structure de sous-espace de treillis sur E. Soit $1 \le p < \infty$. Nous allons introduire une norme sur $E \otimes l_p$. À cet effet considérons un plongement de

E dans un treillis X: $E \subseteq X$. Ce plongement induit une norme sur $E \otimes l_p^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définie par

$$\Big\|\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i \Big\|\Big\| = \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p} \Big\|_X \tag{3.3}$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$.

Le lemme élémentaire qui suit montre que l'expression (3.3) ne dépend pas du plongement de E dans un treillis particulier.

Lemme 3.1. *Soit F un sous-espace de treillis régulièrement isométrique à E. Soit $F \subseteq Y$ un plongement de F dans un treillis Y. Pour tout $1 \le p < \infty$ on a*

$$\Big\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |w(x_i)|^p \Big)^{1/p} \Big\|_Y = \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p} \Big\|_X$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in E$ et pour toute isométrie régulière $w : E \to F$.

Preuve. Soient $q \in \mathbb{R}$ tel que $1/p + 1/q = 1$ et $(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{n,j})_{j \ge 1}$ une suite dense dans la boule unité de l_q^n. Alors, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in E$ et toute isométrie régulière $w : E \to F$ on a

$$\begin{aligned}
\Big\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |w(x_i)|^p \Big)^{1/p} \Big\|_Y &= \lim_{m\to\infty} \Big\| \sup_{j \le m} \Big| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w(x_i) \Big| \Big\|_Y \\
&= \lim_{m\to\infty} \Big\| \sup_{j \le m} \Big| w\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \Big) \Big| \Big\|_Y \\
&\le \|w\|_{\mathrm{r}} \lim_{m\to\infty} \Big\| \sup_{j \le m} \Big| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \Big| \Big\|_X \\
&= \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p} \|_X
\end{aligned}$$

(cf. [K2], p. 7 ou [LT], pp. 42–43). De la même manière on montre que

$$\Big\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p} \Big\|_X = \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |w^{-1} w(x_i)|^p \Big)^{1/p} \Big\|_X \le \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |w(x_i)|^p \Big)^{1/p} \Big\|_Y,$$

ce qui donne le lemme. ■

En vertu de ce lemme nous pouvons définir l'espace $E(l_p)$ qui est la complétion de l'espace vectoriel $\bigcup_{n \ge 1} E \otimes l_p^n$ muni de la norme définie par l'expression (3.3).

Remarque. Soient E, F des sous-espaces de treillis et $u \in B_{\mathrm{r}}(E, F)$. Nous dirons que u est *p-régulier* si

$$\|u\|_{\mathrm{r},p} = \|u \otimes \mathrm{id}_{l_p} : E(l_p) \to F(l_p)\| < \infty.$$

La preuve du Lemme 3.1 donne

$$\|u \otimes \mathrm{id}_{l_p} : E(l_p) \to F(l_p)\| \le \|u\|_{\mathrm{r}}, \quad \forall 1 \le p < \infty,$$

c'est-à-dire que tout opérateur régulier est p-régulier.

Mais la réciproque est fausse : soit E un sous-espace de L^1. On vérifie aisément que pour tout sous-espace de treillis F et tout opérateur $u : E \to F$ on a $\|u\|_{\mathrm{r},1} = \|u\|$. Or prenons $E = F = R$, où R est le sous-espace de L^1 engendré par une famille de fonctions de Rademacher. Nous savons, par la Remarque (2) précédente, que R n'est pas homogène ; il existe donc $u : R \to R$ qui est borné, donc l_1-régulier, mais qui n'est pas régulier.

Cet exemple contraste avec le Lemme 1.1 où nous avons montré que si E et F sont des treillis alors $\|u\|_{\mathrm{r}} = \|u\|_{\mathrm{r},1}$ pour tout $u : E \to F$.

A tout sous-espace de treillis E nous pouvons donc associer les espaces $E(l_p)$. Cette construction va nous permettre d'étendre les notions de p-convexité et de q-concavité aux sous-espaces de treillis (sur la p-convexité et la q-concavité des treillis cf. [LT], pp. 45–46) :

DÉFINITION 3.5. Soient E un sous-espace de treillis, Z un espace de Banach arbitraire et soit $1 \le p \le \infty$.

(1) Un opérateur $u : Z \to E$ est dit *p-convexe* s'il existe une constante $M < \infty$ telle que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} u(x_i) \otimes e_i \Big\|_{E(l_p^n)} \le M \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \Big)^{1/p} \quad \text{si } 1 \le p < \infty$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n \in Z$. Nous noterons $M^{(p)}(u)$ la plus petite valeur possible de M.

(2) Un opérateur $v : E \to Z$ est dit *p-concave* s'il existe une constante $M < \infty$ telle que

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p \Big)^{1/p} \le M \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i \Big\|_{E(l_p^n)} \quad \text{si } 1 \le p < \infty$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$. Nous noterons $M_{(p)}(v)$ la plus petite valeur possible de M.

(3) Nous dirons que E est un sous-espace de treillis *p-convexe* (resp. *p-concave*) si id_E, l'identité de E, est p-convexe (resp. p-concave). Dans ce cas nous noterons $M^{(p)}(E) = M^{(p)}(\mathrm{id}_E)$ et $M_{(p)}(E) = M_{(p)}(\mathrm{id}_E)$, que nous appelerons *constante de p-convexité* (resp. *de p-concavité*) de E.

REMARQUES. (1) Les arguments de la démonstration de la Proposition 1.d.5 de [LT] permettent aussi de montrer que $M^{(p)}(u)$ est une fonction croissante de p.

(2) $M_{(q)}(v)$ est une fonction décroissante de q. En effet, soient r et q tels que $r \ge q$; Notons $v_r = v \otimes \mathrm{id}_{l_r} : E(l_r) \to l_r(Z)$. Alors $M_r(v) = \|v_r\| = \|(v_r)^*\|$. Soit $Q : X^* \to E^*$ l'application quotient, où X est un treillis contenant E. Il est facile de voir que

$$\|(v_r)^*\| = \sup \Big\{ \inf \Big\{ \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^{r'} \Big)^{1/r'} \Big\|_{X^*} ;\ Q(\eta_i) = v^*(\xi_i) \Big\} ; \\ n \in \mathbb{N},\ \xi_i \in Z^*,\ \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^{r'} \le 1 \Big\},$$

où $r' > 0$ vérifie $1/r + 1/r' = 1$. Alors en suivant la preuve de la Proposition 1.d.5 de [LT] on obtient

$$\|(v_r)^*\| = \sup \Big\{ \|((a_1)^{1/r'} v^*(\xi_1), \ldots, (a_n)^{1/r'} v^*(\xi_n))\|_{(E(l_r))^*} ; \\ n \in \mathbb{N},\ \|\xi_i\| = 1,\ a_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \Big\}.$$

Soit $q' > 0$ tel que $1/q + 1/q' = 1$. Puisque $r \geq q$ on a $r' \leq q'$. Alors à l'aide de $Q \otimes \mathrm{id}_{l_{r'}}$, l'application quotient de $X^*(l_{r'})$ sur $(E(l_r))^*$, et des inégalités de type Hölder sur X^*, on montre aisément que

$$\|((a_1)^{1/r'}v^*(\xi_1), \ldots, (a_n)^{1/r'}v^*(\xi_n))\|_{(E(l_r))^*} \\ \leq \|((a_1)^{1/r'}v^*(\xi_1), \ldots, (a_n)^{1/r'}v^*(\xi_n))\|_{(E(l_q))^*}.$$

D'où on obtient finalement que

$$M_r(v) = \|v_r\| = \|(v_r)^*\| \leq \|(v_q)^*\| = M_q(v).$$

(3) La question se pose naturellement de savoir si un sous-espace de treillis q-concave (resp. p-convexe) se plonge dans un treillis q-concave (resp. p-convexe). Pour la q-concavité la réponse est négative. La norme projective étant la plus grande norme croisée sur $E \otimes c_0$, on montre facilement que si E est un sous-espace de treillis q-concave alors $\max(E)$ est aussi q-concave. En particulier $\max(l_2)$ est 2-concave. Or nous verrons à la section 5 qu'il est impossible de plonger $\max(l_2)$ dans un treillis q-concave avec $q < \infty$.

Nous ne savons toujours pas ce qu'il en est de la p-convexité.

4. Treillis homogènes

Commençons par le calcul de la constante d'homogénéité dans le cas des treillis les plus simples :

La constante d'homogenéité de l_p^n

PROPOSITION 4.1. *Si $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, alors :*

(i) *$\delta(l_p^n) = n^{1/p}$ pour tout $p \geq 2$,*
(ii) *$\delta(l_p^n) = n^{1-1/p}$ pour tout $1 \leq p \leq 2$.*

Nous allons montrer cette proposition à l'aide des résultats suivants :

LEMME 4.1. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

(i) *$\|\mathrm{id}_{l_p^n} : \min(l_p^n) \to l_p^n\| = n^{1/p}$,*
(ii) *$\delta(l_p^n) \leq n^{1/p}$.*

Preuve. (i) Soient $x_j \in l_p^n,\ j \leq m,\ m \in \mathbb{N}$. On a

$$\sup_{j \leq m} |x_j| = \sup_{j \leq m} \sum_{i=1}^{m} |x_j(i)| e_i \leq \sup_{j \leq m} \sup_{i \leq n} |x_j(i)| \Big(\sum_{i=1}^{n} e_i \Big) \\ \leq \sup_{j \leq m} \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_j(i)|^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} e_i \Big).$$

D'où

$$\| \max_{j \leq m} |x_j| \, \|_{l_p^n} \leq \max_{j \leq m} \|x_j\|_{l_p^n} \Big\| \sum_{i=1}^{n} e_i \Big\|_{l_p^n} = n^{1/p} \max_{j \leq m} \|x_j\|_{l_p^n}.$$

D'autre part,

$$\| \max_{i\le n} |e_i| \|_{l_p^n} = \Big\| \sum_{i=1}^{n} e_i \Big\|_{l_p^n} = n^{1/p}.$$

Donc,

$$\|\mathrm{id}_{l_p^n} : \min(l_p^n) \to l_p^n\|_r = n^{1/p}.$$

(ii) Pour tout opérateur $T : l_p^n \to l_p^n$, on a la décomposition $T = \mathrm{id}_{l_p^n} \circ T_0 \circ i$, où

$$i : l_p^n \to \min(l_p^n), \quad i(x) = x\,; \quad T_0 : \min(l_p^n) \to \min(l_p^n), \quad T_0(x) = T(x),\ \forall x \in l_p^n.$$

Par la remarque après la Définition 3.4,

$$\|i\|_r = \|i\|, \qquad \|T_0\|_{\mathrm{r}} = \|T_0\| = \|T\|,$$

d'où $\|T\|_{\mathrm{r}} \le \| \mathrm{id}_{l_p^n} \|_{\mathrm{r}} \|T_0\|_r \|i\|_{\mathrm{r}} = n^{1/p}\|T\|$ et donc $\delta(l_p^n) \le n^{1/p}$. ∎

Rappelons que la matrice de Walsh $W_n = (w_{mj}^{(n)})$ d'ordre 2^n se définit par récurrence de la façon suivante : on pose $W_0 = (w_{11}^{(0)}) = (1)$ et pour $n \ge 1$,

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} W_{n-1} & W_{n-1} \\ -W_{n-1} & W_{n-1} \end{bmatrix}$$

(cf. [T-J], p. 279).

Lemme 4.2. *Pour $n = 2^m$, soit $S : l_2^n \to l_2^n$ l'opérateur unitaire associé à la matrice de Walsh. Soit $T = S^*$. On a $\|T\|_{\mathrm{r}} = \sqrt{n}$ et par conséquent, $\delta(l_2^n) = \sqrt{n}$.*

Preuve. Soit $x_i = S(e_i),\ i = 1, \dots, n$. On vérifie aisément que $\max_{i\le n} |x_i| = |x_1|$, donc $\| \max_{i\le n} |x_i| \|_{l_2^n} = 1$. Et comme

$$\max_{i\le n} |T(x_i)| = \max_{i\le n} |e_i| = \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

on a

$$\|T\|_{\mathrm{r}} \ge \Big\| \sum_{i=1}^{n} e_i \Big\|_{l_2^n} = \sqrt{n}.$$

Or par le lemme précédent, $\delta(l_2^n) \le \sqrt{n}$ et $\|T\|_r \le \sqrt{n}$. D'où finalement $\|T\|_{\mathrm{r}} = \sqrt{n}$ et $\delta(l_2^n) = \sqrt{n}$. ∎

Preuve de la Proposition 4.1. (i) On considère $T : l_p^n \to l_p^n$, où $T = S^*$, S étant l'opérateur associé à la matrice de Walsh. Or, il est clair que pour $p \ge 2$ et pour tout $x \in l_p^n$, nous avons

$$\|T(x)\|_{l_p^n} \le \|T(x)\|_{l_2^n} \le \|x\|_{l_2^n} \le n^{1/2-1/p}\|x\|_{l_p^n}.$$

D'où $\|T\| \le n^{1/2-1/p}$. Soit $x_i = S(e_i)$. Alors comme ci-dessus,

$$\| \max_{i\le n} |T(x_i)| \|_{l_p^n} = \| \max_{i\le n} |e_i| \|_{l_p^n} = n^{1/p} \quad \text{et} \quad \| \max_{i\le n} |x_i| \|_{l_p^n} = \|x_1\|_{l_p^n} = n^{1/p-1/2}.$$

D'où

$$n^{1/2} = \frac{\| \max_{i\le n} |T(x_i)| \|}{\| \max_{i\le n} |x_i| \|} \le \|T\|_{\mathrm{r}},$$

et donc

$$\|T\|_{\mathrm{r}}/\|T\| \ge n^{1/p} \quad \text{et} \quad \delta(l_p^n) \ge n^{1/p}.$$

Or, par le Lemme 4.1, $\delta(l_p^n) \le n^{1/p}$. D'où le résultat.

(ii) Il suffit de vérifier que $\delta(l_p^n) = \delta((l_p^n)^*)$. C'est une conséquence du Lemme 1.1 qui dit que $\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T^*\|_{\mathrm{r}}$ pour tout $T : l_p^n \to l_p^n$. ■

Le corollaire suivant résulte immédiatement de la Proposition 4.1 :

Corollaire 4.1. *Pour tout* $1 < p < \infty$, l_p *et* L^p *ne sont pas homogènes.*

On verra bientôt que le corollaire précédent est un cas particulier du résultat principal de la sous-section qui suit.

Caractérisation des treillis homogènes. Rappelons que, lorsque considérés comme sous-espaces de treillis, les treillis sont munis de leur structure naturelle. Rappelons aussi qu'un treillis X est dit un *AM-espace* (resp. *AL-espace*) s'il est isomorphe en ordre à un espace de type L^∞ (resp. L^1). Il est classique que X est un AM-espace (resp. un AL-espace) si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes suites finies (x_i) d'éléments positifs deux-à-deux disjoints de X on a

$$\Big\|\sum_i x_i\Big\| \le C \sup_i \|x_i\| \qquad \Big(\text{resp. } \sum_i \|x_i\| \le C\Big\|\sum_i x_i\Big\|\Big).$$

D'après un théorème classique de Grothendieck (cf. aussi les remarques à la fin du paragraphe 1), tous les AM-espaces et AL-espaces sont homogènes.

Le résultat principal de ce paragraphe montre que ce sont les seuls treillis homogènes. Pour l'énoncer nous aurons besoin d'introduire les indices de p-convexité et de q-concavité. On renvoie le lecteur à [LT] pour la définition de la p-convexité et de la q-concavité. On pose

$$p(X) = \sup\{p \ge 1;\ X \text{ est } p\text{-convexe}\} \quad \text{et} \quad q(X) = \inf\{q \ge 1;\ X \text{ est } q\text{-concave}\}.$$

Rappelons que $B(X,Y)$ (resp. $B_{\mathrm{r}}(X,Y)$) désigne l'espace des opérateurs bornés (resp. opérateurs réguliers) de X dans Y.

Théorème 4.1. *Soient X et Y deux treillis vérifiant $B(X,Y) = B_{\mathrm{r}}(X,Y)$. Si $p(Y) < \infty$ (resp. $q(X) > 1$), alors X est un AL-espace (resp. Y est un AM-espace).*

Nous obtenons immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4.2. *X est un treillis homogène si et seulement si X est un AM-espace ou un AL-espace.*

Rappelons le théorème fondamental de Krivine [K1]: si X est un treillis de dimension infinie, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, X contient deux sous-treillis $(1+\varepsilon)$-isomorphes en ordre respectivement à $l_{q(X)}^n$ et $l_{p(X)}^n$; autrement dit $l_{q(X)}$ et $l_{p(X)}$ sont finiment représentables dans X au sens des treillis.

Modulo ce théorème de Krivine, le Théorème 4.1 est une amélioration d'un résultat de Cartwright et Lotz (cf. [CL], Th. 1), qui peut être, *grosso modo*, reformulé comme suit : soient X et Y deux treillis vérifiant $B(X,Y) = B_{\mathrm{r}}(X,Y)$. Si, pour un $1 \le p < \infty$, Y (resp. X^*) contient un sous-treillis isomorphe en ordre à l_p, alors X est un AL-espace (resp. Y est un AM-espace).

En fait nous allons suivre les lignes de la preuve du Théorème 1 de [CL].

Commençons par énoncer un lemme de [CL] :

Lemme 4.3. *Soit X un treillis. Supposons qu'il existe une constante M telle que*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\| \leq M \sup_{x^* \in X^*,\, \|x^*\| \leq 1} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x^* \rangle|^2 \Big)^{1/2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite $(x_1, \ldots, x_n) \subset X$ d'éléments positifs et deux-à-deux disjoints. Alors X est un AM-espace.

Le lemme qui suit est très élémentaire.

Lemme 4.4. *Soient $n, r \in \mathbb{N}$ avec $r \geq 2$. Alors il existe un $m \in \mathbb{N}$ et une matrice (α_{sj}) d'ordre $m \times n$ tels que $|\alpha_{sj}| = 1$ pour tous s, j, et*

$$\sum_{s=1}^{m} \alpha_{sj_1} \ldots \alpha_{sj_r} \overline{\alpha}_{sk_1} \ldots \overline{\alpha}_{sk_r} = \begin{cases} m & \text{si } \{j_1, \ldots, j_r\} = \{k_1, \ldots, k_r\}, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases} \tag{4.1}$$

pour tous $j_1, \ldots, j_r, k_1, \ldots, k_r \in \{1, \ldots, n\}$.

Preuve. On choisit $m = r^{n+1}$ et $\alpha_{sj} = e^{2i\pi s r^j / m}$ pour tous $s = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$. Soient $j_1, \ldots, j_r, k_1, \ldots, k_r \in \{1, \ldots, n\}$.

Posons $p = r^{j_1} + \ldots + r^{j_r} - (r^{k_1} + \ldots + r^{k_r})$. Alors $|p| < m$, et donc

$$\sum_{s=1}^{m} \prod_{t=1}^{r} \alpha_{sj_t} \overline{\alpha}_{sk_t} = \sum_{s=1}^{m} e^{2i\pi sp/m} = \begin{cases} m & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

À une permutation près, on peut supposer $j_1 \leq \ldots \leq j_r$ et $k_1 \leq \ldots \leq k_r$. Supposons $p = 0$. Démontrons qu'alors $j_t = k_t$ pour $t = 1, \ldots, r$. Sinon, soit $t_0 = \sup\{t;\ j_t \neq k_t,\ 1 \leq t \leq r\}$. Alors $j_{t_0} \neq k_{t_0}$; supposons, par exemple, $j_{t_0} > k_{t_0}$. Alors

$$p = r^{j_1} + \ldots + r^{j_{t_0}} - (r^{k_1} + \ldots + r^{k_{t_0}}) > r^{j_{t_0}} - r \cdot r^{k_{t_0}} \geq 0,$$

d'où une contradiction. Donc $\{j_1, \ldots, j_r\} = \{k_1, \ldots, k_r\}$, d'où le lemme. ∎

Remarque. Dans certaines situations, étant donnés n et r, le choix optimal de m dans le Lemme 4.4 est crucial. C'est l'objet d'un lemme important dans [B], où Bennett a démontré que l'on peut prendre m de l'ordre $O(n^r)$; de plus, si n est un entier premier, alors $m = n^r - 1$ convient. Mais pour l'application que nous avons en vue, le Lemme 4.4 est suffisant.

Pour simplifier l'énoncé du prochain lemme, nous introduisons la définition suivante :

Nous dirons qu'un opérateur $T : X \to Y$ est *fini-matriciel* s'il existe $m, n \in \mathbb{N}$, $(x_1^*, \ldots, x_m^*) \subset X^*$, $(y_1, \ldots, y_n) \subset Y$ des suites de vecteurs positifs et deux-à-deux disjoints et une matrice (α_{ij}) d'ordre $m \times n$ tels que

$$T(x) = \sum_{ij} \alpha_{ij} \langle x, x_i^* \rangle y_j, \qquad \forall x \in X.$$

Lemme 4.5. *Soient X, Y deux treillis vérifiant $q(X) > 1$ (resp. $p(Y) < \infty$). Supposons qu'il existe une constante positive $\lambda < \infty$ telle que pour tout opérateur fini-matriciel $T : X \to Y$ on ait $\|T\|_{\mathrm{r}} \leq \lambda \|T\|$. Alors Y est un AM-espace (resp. X est un AL-espace).*

Preuve. Tout treillis de dimension finie est à la fois un *AM*-espace et un *AL*-espace ; donc on suppose désormais que X et Y sont de dimension infinie. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, soient

$(x_1^*, \ldots, x_m^*) \subset X^*$, $(y_1, \ldots, y_n) \subset Y$ des suites de vecteurs positifs et deux-à-deux disjoints. Soient (α_{ij}) une matrice d'ordre $m \times n$ et $T : X \to Y$ l'opérateur défini par

$$T(x) = \sum_{ij} \alpha_{ij} \langle x, x_i^* \rangle y_j, \qquad \forall x \in X.$$

On a

$$\|T\|_{\mathrm{r}} = \sup \Big\{ \sum_{s=1}^{N} \sum_{i,j} \alpha_{ij} \langle x_s, x_i^* \rangle \langle y_j, y_s^* \rangle \Big\},$$

où le supremum porte sur tous $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N \in X$ avec $\| \max_{s \le N} |x_s| \| \le 1$ et $y_1^*, \ldots, y_N^* \in Y^*$ avec $\|\sum_{s=1}^N |y_s^*| \| \le 1$. D'où on obtient aisément

$$\|T\|_{\mathrm{r}} = \sup \Big\{ \sum_{ij} |\alpha_{ij}| \langle x, x_i^* \rangle \langle y_j, y^* \rangle ;\ x \in X,\ \|x\| \le 1,\ y^* \in Y^*,\ \|y^*\| \le 1 \Big\}.$$

L'hypothèse du lemme se traduit donc par

$$\sup_{\|x\|, \|y^*\| \le 1} \Big\{ \sum_{ij} |\alpha_{ij}| \langle x, x_i^* \rangle \langle y_j, y^* \rangle \Big\} \le \lambda \sup_{\|x\|, \|y^*\| \le 1} \Big| \sum_{ij} \alpha_{ij} \langle x, x_i^* \rangle \langle y_j, y^* \rangle \Big|. \tag{4.2}$$

Supposons $q = q(X) > 1$. On trouve donc $p = p(X^*) < \infty$ car $1/p + 1/q = 1$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $y_1, \ldots, y_n \in Y$ des vecteurs positifs et deux-à-deux disjoints. On fixe un $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \ge \max(p/2, 2)$. Soient $m \in \mathbb{N}$ et la matrice (α_{ij}) donnés par le Lemme 4.4.

Par le théorème de Krivine [K1] il existe m éléments positifs et deux-à-deux disjoints $x_1^*, \ldots, x_m^*$ dans X^* tels que $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ soit 2-équivalent à la base canonique de l_p^m. Il s'ensuit donc que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} x_i^* \Big\| \ge \frac{1}{\sqrt{2}} m^{1/p} \quad \text{et} \quad \Big(\sum_{i=1}^{m} |\langle x, x_i^* \rangle|^q \Big)^{1/q} \le \sqrt{2}\, \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Soit $T : X \to Y$ l'opérateur défini par (α_{ij}), (x_i^*) et (y_j) comme ci-dessus. Alors le côté gauche de (4.2) est égal à

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} x_i^* \Big\| \cdot \Big\| \sum_{j=1}^{n} y_j \Big\|,$$

tandis que, par l'inégalité de Hölder, le côté droit est plus petit que

$$\lambda \sup_{\|x\| \le 1} \|(\langle x, x_i^* \rangle)_i\|_{l^m_{(2r)'}} \sup_{\|y^*\| \le 1} \Big\| \Big(\sum_j \alpha_{ij} \langle y_j, y^* \rangle \Big)_i \Big\|_{l^m_{(2r)}},$$

où $1/(2r)' + 1/(2r) = 1$. D'autre part (rappelant que $r \ge p/2$, et donc $(2r)' \le p' = q$),

$$\|(\langle x, x_i^* \rangle)_i\|_{l^m_{(2r)'}} \le m^{1/p - 1/(2r)} \|(\langle x, x_i^* \rangle)_i\|_{l_q} \le \sqrt{2}\, m^{1/p - 1/(2r)} \|x\|.$$

Nous avons aussi, par le Lemme 4.4,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \Big| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \langle y_j, y^* \rangle \Big|^{2r} &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{1 \le j_s, k_s \le n} \alpha_{ij_1} \ldots \alpha_{ij_r} \overline{\alpha}_{ik_1} \ldots \overline{\alpha}_{ik_r} \prod_{s=1}^{r} \langle y_{j_s}, y^* \rangle \overline{\langle y_{k_s}, y^* \rangle} \\ &= r! m \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_r \le n} \prod_{s=1}^{r} |\langle y_{j_s}, y^* \rangle|^2 = r! m \Big[\sum_{j=1}^{n} |\langle y_j, y^* \rangle|^2 \Big]^r. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Big\|\Big(\sum_j \alpha_{ij}\langle y_j, y^*\rangle\Big)_i\Big\|_{l_{2r}^m} = (r!m)^{1/(2r)}\|(\langle y_j, y^*\rangle)_j\|_{l_2^n}.$$

Combinant les inégalités précédentes, on obtient

$$\Big\|\sum_{j=1}^n y_j\Big\| \le (r!)^{1/(2r)}2\lambda \sup_{\|y^*\|\le 1}\Big[\sum_{j=1}^n |\langle y_j, y^*\rangle|^2\Big]^{1/2},$$

ce qui, par le Lemme 4.3, implique que Y est un AM-espace. De façon similaire, si $p(Y) < \infty$ on montre que X^* est un AM-espace et donc X est un AL-espace. D'où le lemme. ∎

Le Théorème 4.1 est une conséquence immédiate du Lemme 4.5.

Preuve du Théorème 4.1. Comme ci-dessus on peut supposer que X et Y sont de dimension infinie. L'hypothèse $B(X,Y) = B_{\mathrm{r}}(X,Y)$ entraîne l'existence d'une constante $\lambda < \infty$ telle que, pour tout opérateur $T : X \to Y$, on ait $\|T\|_{\mathrm{r}} \le \lambda\|T\|$. D'où la conclusion du théorème par le Lemme 4.5. ∎

5. Sous-espaces hilbertiens homogènes

Soit X un treillis ayant une concavité non-triviale. Dans cette section nous allons montrer que tout sous-espace hilbertien homogène de X est nécessairement isomorphe à G. De plus, si $X = L^p$ avec $2 \le p < \infty$, G caractérise entièrement les sous-espaces homogènes de X.

Convention. On fixe ici une convention pour toute la suite. Soient E un sous-espace de treillis et X un treillis. La notation "$E \subseteq X$" signifiera toujours que la structure de sous-espace de treillis sur E est induite par la structure de treillis de X.

Théorème 5.1. *Soit X un treillis q-concave avec $q < \infty$. Si $E \subseteq X$ est un sous-espace hilbertien homogène, alors E est régulièrement isomorphe à $G(I)$ pour un ensemble d'indices I.*

Remarque. À la fin de la section 3 nous avons remarqué que $\max(l_2)$ est un sous-espace de treillis 2-concave. D'autre part nous verrons à la section 7, à la suite du Corollaire 7.4, que $\max(l_2)$ est un sous-espace de treillis hilbertien homogène qui n'est pas régulièrement isomorphe à G. Le Théorème 5.1 implique donc qu'on ne peut jamais plonger $\max(l_2)$ dans un treillis q-concave avec $q < \infty$.

Pour démontrer ce théorème nous ferons appel au lemme suivant, qui est une généralisation aux treillis q-concaves d'un résultat de Rauch sur les sous-espaces homogènes de L^1 (cf. [Ra]). On rappelle que $d(E,F)$ désigne la distance de Banach-Mazur entre deux espaces de Banach E et F.

Lemme 5.1. *Soit X un treillis q-concave. Soit $E \subset X$ un sous-espace de dimension n. Alors*

$$d_{\mathrm{r}}(E, G_n) \le C[d(E, l_n^2)]^3(\delta(E))^2,$$

où C est une constante ne dépendant que de q et de la constante de q-concavité de X.

Preuve. On peut supposer X séparable. Par la q-concavité X ne peut pas contenir de sous-espace isomorphe à c_0, par conséquent X est un treillis σ-complet (cf. [LT], p. 6) ; cette propriété et la séparabilité impliquent que X est continu en ordre (cf. [LT], p. 7) ; on peut donc supposer que X est un treillis de fonctions mesurables sur un certain espace mesuré (Ω, μ) (cf. [LT], p. 25). Soit un isomorphisme $T : G_n \to E$.

(1) Montrons que $\|T\|_{\mathrm{r}} \le C\|T\|^2\|T^{-1}\|\delta(E)$. Notons $\mathcal{U}(n)$ le groupe des matrices unitaires d'ordre n, muni de la mesure de Haar normalisée. Soient $g_1, \ldots, g_n$ des variables aléatoires gaussiennes indépendantes standard qui engendrent G_n dans $L^2(\Sigma, \nu)$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, posons $f_i = T(g_i)$. Tout $v = (v_{ij}) \in \mathcal{U}(n)$ définit un opérateur sur E (resp. sur G_n) dont la matrice dans la base $\{f_1, \ldots, f_n\}$ (resp. $\{g_1, \ldots, g_n\}$) est la matrice v même. Comme $\{g_1, \ldots, g_n\}$ est une base orthonormée de G_n, v est unitaire sur G_n ; donc

$$\max\{\|v : E \to E\|, \|v^{-1} : E \to E\|\} \le \|T\| \cdot \|T^{-1}\|. \tag{5.1}$$

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_m \in G_n$ avec

$$x_k = \sum_{j=1}^n x_k(j) g_j, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Pour tout $v \in \mathcal{U}(n)$, on a, par l'homogénéité de E et (5.1),

$$\begin{aligned} \|(T(x_k))_{k\le m}\|_{E(l_\infty^m)} &\le \|v^{-1} : E \to E\|_{\mathrm{r}} \|(vT(x_k))_{k\le m}\|_{E(l_\infty^m)} \\ &\le \delta(E)\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \cdot \|(vT(x_k))_{k\le m}\|_{E(l_\infty^m)}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Prenant la moyenne par rapport à $v \in \mathcal{U}(n)$, on obtient

$$\|(T(x_k))_{k\le m}\|_{E(l_\infty^m)} \le \delta(E)\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \cdot \|(vT(x_k))_{k\le m}\|_{L^1(\mathcal{U}(n); X(l_\infty^m))}. \tag{5.3}$$

D'autre part, pour tout $v \in \mathcal{U}(n)$ et tout $k = 1, \ldots, m$, on a

$$vT(x_k) = v\Big(\sum_{j=1}^n x_k(j) T(g_j)\Big) = \sum_{j=1}^n x_k(j) \sum_{i=1}^n v_{ij} f_i.$$

Par un lemme de Marcus et Pisier [MP], il existe une constante absolue L telle que

$$\begin{aligned} \frac{1}{L\sqrt{n}} \Big\| \Big(\sum_{i,j=1}^n x_k(j) g_{ij} f_i\Big)_{k\le m} \Big\|_{L^1(\Sigma; X(l_\infty^m))} &\\ \le \|(vT(x_k))_{k\le m}\|_{L^1(\mathcal{U}(n); X(l_\infty^m))} &\\ \le \frac{L}{\sqrt{n}} \Big\| \Big(\sum_{i,j=1}^n x_k(j) g_{ij} f_i\Big)_{k\le m} \Big\|_{L^1(\Sigma; X(l_\infty^m))}&, \end{aligned} \tag{5.4}$$

où $\{g_{ij};\ i, j \le n\}$ est une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes standard sur (Σ, ν). Pour $i = 1, \ldots, n$, notons

$$Z_i = \Big(\sum_{j=1}^n x_k(j) g_{ij}\Big)_{k\le m}.$$

Z_i est une variable aléatoire gaussienne à valeurs dans l_∞^m.

Par (5.4) et l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\|(vT(x_k))_{k\le m}\|_{L^1(\mathcal{U}(n);X(l_\infty^m))} \le \frac{L}{\sqrt{n}}\Big\|\sum_{i=1}^n f_i Z_i\Big\|_{L^q(\Sigma;X(l_\infty^m))}.$$

Notant C_q la constante de q-concavité de X, on a

$$\Big\|\sum_{i=1}^n f_i Z_i\Big\|_{L^q(\Sigma;X(l_\infty^m))} \le C_q \Big\|\Big\|\sum_{i=1}^n f_i Z_i\Big\|_{L^q(\Sigma;l_\infty^m)}\Big\|_X.$$

Observons que $Z_1,\ldots,Z_n$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes à valeurs dans l_∞^m, qui ont la même distribution. Se rappelant que X est un treillis de fonctions mesurables sur (Ω,μ), on déduit donc que pour tout $t\in\Omega$, comme variables aléatoires à valeurs dans l_∞^m, $\sum_{i=1}^n f_i(t)Z_i$ a la même distribution que $(\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2)^{1/2}\, Z_1$, d'où

$$\Big\|\sum_{i=1}^n f_i(t) Z_i\Big\|_{L^q(\Sigma;l_\infty^m)} = \Big(\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2\Big)^{1/2}\|Z_1\|_{L^q(\Sigma;l_\infty^m)}. \tag{5.5}$$

Comme Z_1 est une variable gaussienne,

$$\|Z_1\|_{L^q(\Sigma;l_\infty^m)} \le K_q\|Z_1\|_{L^2(\Sigma;l_\infty^m)} = K_q\|(x_k)_{k\le m}\|_{G_n(l_\infty^m)}; \tag{5.6}$$

où K_p est une constante ne dépendant que de q.

Par (5.3)–(5.4), on trouve donc

$$\begin{aligned}(5.7)\quad &\|(T(x_k))_{k\le m}\|_{E(l_\infty^m)}\\ &\le LK_qC_q\delta(E)\|T\|\cdot\|T^{-1}\|\frac{1}{\sqrt{n}}\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X\|(x_k)_{k\le m}\|_{G_n(l_\infty^m)}.\end{aligned}$$

Soit $\{g_1',\ldots,g_n'\}$ une copie indépendante de $\{g_1,\ldots,g_n\}$. Alors

$$\Big(\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2\Big)^{1/2}\|g_1'\|_1 = \int_\Sigma \Big|\sum_{i=1}^n f_i(t)g_i'(\sigma)\Big|\,d\nu(\sigma)\,;$$

donc (se rappelant que $\|g_1'\|_1=\sqrt{2/\pi}$)

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X &\le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\|\int_\Sigma\Big|\sum_{i=1}^n f_ig_i'(\sigma)\Big|\,d\nu(\sigma)\Big\|_X\\ &\le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_\Sigma\Big\|\sum_{i=1}^n f_ig_i'(\sigma)\Big\|_E\,d\nu(\sigma)\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_\Sigma\Big\|T\Big(\sum_{i=1}^n g_ig_i'(\sigma)\Big)\Big\|_E\,d\nu(\sigma)\\ &\le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\|T\|\int_\Sigma\Big\|\sum_{i=1}^n g_i\,g_i'(\sigma)\Big\|_{G_n}\,d\nu(\sigma)\\ &\le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sqrt{n}\,\|T\|.\end{aligned}$$

Ceci, combiné à (5.7), implique

$$\|(T(x_k))_{k\le m}\|_{E(l_\infty^m)} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}L\,K_qC_q\delta(E)\|T\|^2\|T^{-1}\|\cdot\|(x_k)_{k\le m}\|_{G_n(l_\infty^m)},$$

d'où

$$\|T\|_{\mathrm{r}} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}LK_qC_q\delta(E)\|T\|^2\|T^{-1}\|.$$

(2) Montrons que $\|T^{-1}\|_{\mathrm{r}} \le C\delta(E)\|T\|\cdot\|T^{-1}\|^2$. Soient

$$x_k = \sum_{j=1}^n x_k(j)f_j \in E, \qquad k=1,\ldots,m.$$

Comme avant, posons

$$Z_i = \Big(\sum_{j=1}^n x_k(j)g_{ij}\Big)_{k\le m}.$$

Les Z_i sont encore des variables aléatoires gaussiennes indépendantes à valeurs dans l_∞^m, ayant la même distribution ; donc les arguments précédents montrent que

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X\|Z_1\|_{L^1(\Sigma;l_\infty^m)} = \Big\|\,\Big\|\sum_{i=1}^n f_iZ_i\Big\|_{L^1(\Sigma;l_\infty^m)}\Big\|_X\,; \tag{5.8}$$

or, par les inégalités de Khintchine–Kahane, on a

$$\begin{aligned}\|(T^{-1}(x_k))_{k\le m}\|_{G_n(l_\infty^m)} &\le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^n x_k(j)g_j\Big)_{k\le m}\Big\|_{L^1(\Sigma;l_\infty^m)}\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\|Z_1\|_{L^1(\Sigma;l_\infty^m)}.\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $t\in\Omega$,

$$\Big(\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2\Big)^{1/2}\|g_1'\|_q = \Big(\int_\Sigma\Big|\sum_{i=1}^n f_i(t)g_i'(\sigma)\Big|^q\,d\nu(\sigma)\Big)^{1/q}.$$

Donc par la q-concavité de X,

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X\|g_1\|_q &\ge C_q^{-1}\Big(\int_\Sigma\Big\|\sum_{i=1}^n f_ig_i'(\sigma)\Big\|_X^q\,d\nu(\sigma)\Big)^{1/q}\\ &= C_q^{-1}\Big(\int_\Sigma\Big\|\sum_{i=1}^n T(g_i)g_i'(\sigma)\Big\|_X^q\,d\nu(\sigma)\Big)^{1/q}\\ &\ge (\|T^{-1}\|C_q)^{-1}\Big(\int_\Sigma\Big\|\sum_{i=1}^n g_ig_i'(\sigma)\Big\|_{G_n}^q\,d\nu(\sigma)\Big)^{1/q},\end{aligned}$$

d'où

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X^{-1} \le K_q'C_q\|T^{-1}\|\,\frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{5.10}$$

où $K'_q = \|g_1\|_q$ est une constante ne dependant que de q. Combinant (5.8)–(5.10) et par l'inégalité de convexité, on obtient

$$\|(T^{-1}(x_k))_{k\le m}\|_{G_n(l_\infty^m)} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}K'_qC_q\|T^{-1}\|\frac{1}{\sqrt{n}}\Big\|\sum_{i=1}^n f_iZ_i\Big\|_{L^1(\Sigma;X(l_\infty^m))}. \tag{5.11}$$

Or, par (5.4),

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big\|\sum_{i=1}^n f_iZ_i\Big\|_{L^1(\Sigma;X(l_\infty^m))} \le L\Big\|\Big(\sum_{j=1}^n x_k(j)\sum_{i=1}^n v_{ij}f_i\Big)_{k\le m}\Big\|_{L^1(\mathcal{U}(n);X(l_\infty^m))}. \tag{5.12}$$

D'autre part, pour $v=(v_{ij})\in\mathcal{U}(n)$, par (4.1) et l'homogénéité de E,

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^n x_k(j)\sum_{i=1}^n v_{ij}f_i\Big)_{k\le m}\Big\|_{X(l_\infty^m)} &\le \|v:E\to E\|_{\mathrm{r}}\|(x_k)_{k\le m}\|_{E(l_\infty^m)}\\ &\le \delta(E)\|T\|\cdot\|T^{-1}\|\cdot\|(x_k)_{k\le m}\|_{E(l_\infty^m)}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Les inégalités (5.11)–(5.13) impliquent

$$\|T^{-1}\|_{\mathrm{r}} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}LK'_qC_q\delta(E)\|T\|\cdot\|T^{-1}\|^2.$$

(3) Des estimations obtenues dans (1) et (2), on tire

$$\|T\|_{\mathrm{r}}\cdot\|T^{-1}\|_{\mathrm{r}} \le C\delta(E)^2(\|T\|\cdot\|T^{-1}\|)^3,$$

où C est une constante ne dependant que de q et de la constante de q-concavité de X. Prenant l'infimum sur tous les isomorphismes $T:G_n\to E$, on trouve

$$d_{\mathrm{r}}(G_n,E)\le C\delta(E)^2[d(G_n,E)]^3,$$

ce qui achève la preuve du lemme. ∎

Lemme 5.2. *Soit $n\in\mathbb{N}$ et $F\subseteq G(I)$ un sous-espace de dimension n. Alors F est régulièrement isométrique à G_n.*

Preuve. $G(I)$ étant un espace de Hilbert, il existe une isométrie $U:G_n\to F$ et une projection $P:G(I)\to G_n$ de norme 1. On a

$$\|U\|_{\mathrm{r}} = \|UP\|_{\mathrm{r}} = \|UP\| \le \|U\| = 1,$$

par homogenéité de $G(I)$. On montre de la même façon que $\|U^{-1}\|_{\mathrm{r}}=1$. Donc U est une isométrie régulière, ce qui donne le lemme. ∎

Preuve du Théorème 5.1. Soit $E\subset X$ un sous-espace hilbertien homogène. Soit un isomorphisme $T:G(I)\to E$. Pour tout $0<\varepsilon<1$, il existe un $m\in\mathbb{N}$ et $x_1,\dots,x_m\in G(I)$ tels que

$$\|\max_{i\le m}|x_i|\,\|=1 \quad\text{et}\quad \|T\|_r\le\|\max_{i\le m}|T(x_i)|\,\|+\varepsilon.$$

Soit $F\subseteq G(I)$ le sous-espace engendré par $\{x_1,\dots,x_m\}$ et n sa dimension. Par le lemme précédent F est régulièrement isométrique à G_n ; par conséquent

$$\|\max_{i\le m}|T(x_i)|\,\|\le\|T|_F\|_{\mathrm{r}} \quad\text{et}\quad \|T\|_{\mathrm{r}}=\sup\{\|T|_F\|_{\mathrm{r}};\ F\subset G(I),\ \dim F<\infty\}.$$

Et le Lemme 4.1 donne alors

$$\|T\|_{\mathrm{r}} \leq C\|T\|^2\|T^{-1}\|\delta(E).$$

De façon similaire, on montre que

$$\|T^{-1}\|_r \leq C\|T\| \cdot \|T^{-1}\|^2\delta(E).$$

Par conséquent, E est régulièrement isomorphe à G, d'où le théorème. ■

Le second résultat de cette section montre que, dans le cas particulier où X est un espace L^p, avec $2 \leq p < \infty$, la condition "hilbertien" peut être retirée de E dans le Théorème 5.1.

Théorème 5.2. *Soient $2 \leq p < \infty$ et $E \subseteq L^p$ un sous-espace fermé. Si E est homogène alors il est régulièrement isomorphe à $G(I)$, pour un ensemble d'indices I.*

Remarque. La question se pose si le théorème précédent s'étend au cas où $1 < p < 2$, ou plus généralement, aux sous-espaces homogènes d'un treillis p-convexe et q-concave avec $1 < p, q < \infty$.

La démonstration du Théorème 5.2 repose essentiellement sur un résultat important de Kadec et Pełczyński qui dit que si $p > 2$ et si F est un sous-espace fermé de L^p alors soit F est isomorphe à un espace de Hilbert, soit F contient un sous-espace isomorphe à l_p et complémenté dans L^p.

Lemme 5.3. *Soient $p > 2$ et F un sous-espace fermé de L^p et non-hilbertien. Alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, F contient un sous-espace $(1 + \varepsilon)$-régulièrement isomorphe à l_p.*

Preuve. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Soit $0 < \varepsilon_0 < 1$ tel que $0 < (1 + \varepsilon_0)/(1 - \varepsilon_0) < 1 + \varepsilon$. Par la preuve du Théorème 2 de [KP], il existe une suite de vecteurs unitaires et deux-à-deux disjoints $(e_i) \subset L^p$ et une suite (a_i) dans F telles que

$$\sum_{i \geq 1} \|e_i - a_i\| \leq \varepsilon_0. \tag{5.14}$$

Il est clair que (e_i) engendre un sous-espace de L^p régulièrement isométrique à l_p et qu'on peut assimiler les e_i à la base canonique de l_p.

Soit F_0 le sous-espace fermé de F engendré par la suite (a_i). Considérons l'application linéaire $T : l_p \to F_0$ définie par $T(e_i) = a_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Soient $(x_i)_{i \geq 1} \subset c_0$. On vérifie aisément que

$$\max_{i \geq 1} \|x_i\| \leq \Big\| \sum_{i \geq 1} e_i \otimes x_i \Big\|_{L^p(c_0)}. \tag{5.15}$$

D'autre part, il est clair que

$$\Big\| \sum_{i \geq 1} (e_i - a_i) \otimes x_i \Big\|_{E(c_0)} \leq \sum_{i \geq 1} \|e_i - a_i\| \cdot \|x_i\| \leq \max_{i \geq 1} \|x_i\| \varepsilon_0. \tag{5.16}$$

Donc, si

$$\Big\| \sum_{i \geq 1} e_i \otimes x_i \Big\|_{L^p(c_0)} = 1,$$

alors, par (5.15), (5.16) et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\Big\|\sum_{i\geq 1} a_i\otimes x_i\Big\|_{L^p(c_0)} \leq \Big\|\sum_{i\geq 1}(e_i-a_i)\otimes x_i\Big\|_{L^p(c_0)} + \Big\|\sum_{i\geq 1} e_i\otimes x_i\Big\|_{L^p(c_0)} \leq 1+\varepsilon_0.$$

D'où

$$\|T\|_{\mathrm{r}} \leq 1+\varepsilon_0.$$

Réciproquement, supposons que $\|\sum_{i\geq 1} a_i\otimes x_i\|_{L^p(c_0)} = 1$. Alors l'inégalité triangulaire donne

$$\Big\|\sum_{i\geq 1} e_i\otimes x_i\Big\|_{L^p(c_0)} \leq 1 + \Big\|\sum_{i\geq 1}(e_i-a_i)\otimes x_i\Big\|_{L^p(c_0)}. \tag{5.17}$$

D'où on déduit par (5.16) et (5.17) que

$$\max_{i\geq 1}\|x_i\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon_0}.$$

Et en appliquant encore l'inégalité triangulaire et (5.17), on obtient

$$\Big\|\sum_{i\geq 1} e_i\otimes x_i\Big\|_{E(c_0)} \leq 1+\frac{\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0} = \frac{1}{1-\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \|T^{-1}\|_{\mathrm{r}} \leq \frac{1}{1-\varepsilon_0}.$$

En conclusion, F_0 et l_p sont $(1+\varepsilon)$-régulièrement isomorphes. ∎

Preuve du Théorème 5.2. Soit E un sous-espace homogène de L^p. Par le Théorème 5.1 il suffit de montrer que E est hilbertien pour obtenir la conclusion énoncée. Si E n'était pas hilbertien alors, d'après Kadec et Pełczyński et le Lemme 5.3, E contiendrait un sous-espace F complémenté et régulièrement isomorphe à l_p. Mais F est homogène, puisque c'est un sous-espace complémenté de E. On aurait alors $\delta(l_p) \leq d_r(l_p, F)\delta(F) < \infty$, ce qui contredit le Corollaire 4.1. ∎

6. Le théorème de Dvoretzky pour les sous-espaces de treillis

Le théorème classique de Dvoretzky dit, en gros, que tout espace de Banach de dimension infinie contient $(l_2^n)_{n\geq 1}$ uniformément et presque isométriquement. Dans cette section nous nous intéressons à une version de ce résultat pour la structure des sous-espaces de treillis :

Théorème 6.1. *Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $\varepsilon>0$, il existe $N=N(n,\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tel que tout sous-espace de treillis de dimension $\geq N$ contient un sous-espace de treillis $(1+\varepsilon)$-isomorphe à l_2^n et $(1+\varepsilon)$-homogène.*

Le Théorème 5.1 permet d'obtenir la conséquence immédiate suivante du théorème précédent :

Corollaire 6.1. *Soit X un treillis q-concave, avec $q<\infty$. Il existe une constante $C<\infty$, qui ne dépend que de q et de la constante de q-concavité de X, telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $N=N(n)$ tel que tout sous-espace de X de dimension $\geq N$ contient G_n C-régulièrement.*

Remarque. Dans le cas général, l'existence de différents sous-espaces de treillis hilbertiens homogènes et qui ne sont pas régulièrement isométriques ne nous permet pas d'obtenir une formulation aussi proche de l'énoncé du théorème de Dvoretzky.

La formulation et la preuve du théorème qui suit sont similaires à celles de la version du théorème de Dvoretzky pour les espaces d'opérateurs de Pisier (cf. [P1]). On a seulement besoin de remplacer dans ses arguments M_m par l_∞^m.

Théorème 6.2. *Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N = N(n, m, \varepsilon)$ tel que tout sous-espace de treillis E de dimension $\geq N$ contient des éléments $x_1, \ldots, x_n$ vérifiant la propriété suivante :*

(D) *Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in l_\infty^m$ et toute matrice unitaire $u = (u_{ij}) \in M_n$, on a*

$$(1+\varepsilon)^{-1}\Big\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i\Big\|_{E(l_\infty^m)} \leq \Big\|\sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n u_{ij} a_j\Big) \otimes x_i\Big\|_{E(l_\infty^m)} \leq (1+\varepsilon)\Big\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i\Big\|_{E(l_\infty^m)}.$$

Rappelons encore quelques notions sur les treillis dont nous aurons besoin par la suite : On sait que tout treillis dual est toujours σ-complet et que si L est séparable et σ-complet alors il existe un espace de probabilité (Ω, Σ, μ) tel que :

(i) L est un idéal dense dans $L^1(\mu)$ et $L^\infty(\mu)$ est dense dans L,
(ii) $\|x\|_1 \leq \|x\| \leq 2\|x\|_\infty$ pour tout $x \in L^\infty(\mu)$ (cf. [LT], p. 25).

Le lemme qui suit est une conséquence immédiate d'un résultat classique qui dit que tout treillis de Banach possède la structure locale inconditionnelle avec la constante d'inconditionnalité égale à 1 (cf. [M] ou [FJT], p. 397).

Lemme 6.1. *Soit E un sous-espace de treillis. Si E est de dimension finie alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un treillis de dimension finie contenant un sous-espace $(1+\varepsilon)$-régulièrement isomorphe à E.*

Dans [PR] Pełczyński et Rosenthal ont montré que tout sous-espace de dimension finie F de L^p se plonge presque isométriquement dans un l_p^m (cf. [PR], Th. A). Leur démonstration donne en fait un plongement régulier et nous allons voir qu'elle permet d'établir un résultat analogue pour les sous-espaces de dimension finie d'un treillis quelconque.

Lemme 6.2. *Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \varepsilon < 1$ il existe un $N(n, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que : Si E est un sous-espace de treillis de dimension n, alors il existe un treillis L de dimension $N' \leq N(n, \varepsilon)$ tel que L contient un sous-espace $\widetilde{E}$ qui est $(1+\varepsilon)$-régulièrement isomorphe à E.*

Preuve. Soient $0 < \varepsilon < 1$ et E un sous-espace de treillis de dimension n. Par les rappels ci-dessus (cf. [LT], p. 25) nous savons qu'il existe un espace de probabilité (Ω, μ) et un treillis X contenant E et tel que $L^\infty(\mu) \subseteq X \subseteq L^1(\mu)$ et $\|x\|_1 \leq \|x\| \leq 2\|x\|_\infty$ pour tout $x \in L^\infty(\mu)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que $0 < (1+n\varepsilon_0)/(1-n\varepsilon_0) < 1+\varepsilon$. Reprenant la construction de la preuve du Théorème 2.1 de [PR] on obtient un sous-treillis L de X de dimension $N' \le N(n,\varepsilon)$, ayant une base de vecteurs deux-à-deux disjoints et vérifiant

$$\forall x \in E \text{ avec } \|x\| = 1,\ \exists y \in L, \qquad \|x-y\| \le \varepsilon_0.$$

Considérons $\{a_1,\dots,a_n\}$ une base d'Auerbach de E et pour tout $i=1,\dots,n$ choisissons un élément $b_i \in L$ tel que $\|a_i - b_i\| \le \varepsilon_0$. Notons $\widetilde{E}$ le sous-espace de L engendré par $\{b_1,\dots,b_n\}$. Nous avons ainsi un opérateur linéaire

$$T : E \to \widetilde{E}, \qquad T(a_i) = b_i,\ i = 1,\dots,n.$$

Pour conclure nous allons montrer que T est un isomorphisme régulier.

Soient $x_1,\dots,x_n \in c_0$ tels que

$$\Big\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes a_i\Big\|_{X(c_0)} = 1.$$

Alors, comme $\{a_1,\dots,a_n\}$ est une base de Auerbach, on a

$$\sup_{i\le n} \|x_i\|_{c_0} \le 1.$$

Nous avons

$$\Big\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes b_i - \sum_{i=1}^n x_i \otimes a_i\Big\|_{X(c_0)} = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes (b_i - a_i)\Big\|_{X(c_0)} \le n \sup_{i\le n} \|x_i\|_{c_0} \varepsilon_0 \le n\varepsilon_0.$$

D'où l'on tire

$$\Big\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes b_i\Big\|_{X(c_0)} \le 1 + n\varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \|T\|_{\mathrm{r}} \le 1 + n\varepsilon_0.$$

Inversement, supposons que $\|\sum x_i \otimes b_i\|_{X(c_0)} = 1$. Dans ce cas on a

$$\sup_{i\le n} \|x_i\|_{c_0} \le \frac{1}{1-n\varepsilon_0}.$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\Big\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes a_i\Big\|_{X(c_0)} \le \Big\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes b_i\Big\|_{X(c_0)} + \Big\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes (a_i - b_i)\|_{X(c_0)}.$$

Par conséquent

$$\Big\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes a_i\Big\|_{X(c_0)} \le 1 + \frac{n\varepsilon_0}{1-n\varepsilon_0} = \frac{1}{1-n\varepsilon_0}.$$

Et finalement on a $\|T^{-1}\|_{\mathrm{r}} \le 1/(1-n\varepsilon_0)$, ce qui nous permet de conclure. ■

Remarque. Comme dans [PR], le fait nouveau dans le lemme précédent par rapport au résultat classique sur la structure locale inconditionnelle des treillis de Banach, c'est qu'on a une relation $n \to N(n,\varepsilon)$ qui ne dépend pas de E. Ceci sera important pour la preuve du Théorème 6.1.

La proposition qui suit a été démontrée par Pisier (cf. [P3]) ; c'est l'analogue, pour les sous-espaces de treillis, d'un résultat de Roger Smith qui dit que si E est un espace d'opérateurs, $n \in \mathbb{N}$ et M_n l'algèbre des matrices carrées d'ordre n, alors pour tout opérateur $T : E \to M_n$ on a $\|T\|_{\mathrm{cb}} = \|T \otimes \mathrm{id}_{M_n}\|$ où, $\|T\|_{\mathrm{cb}} = \sup\{\|T \otimes \mathrm{id}_{M_m}\|;\ m \in \mathbb{N}\}$ (cf. [Sm], p. 163).

Proposition 6.1. *Soit X un treillis de Banach de dimension finie m. Pour tout sous-espace de treillis E et tout opérateur $T : E \to X$ on a*

$$\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T \otimes \mathrm{id}_{l_\infty^m}\|.$$

Preuve. Soient $\{b_1, \dots, b_m\}$ une base 1-inconditionnelle de X et $\{b_1^*, \dots, b_m^*\}$ la base orthogonale correspondante de X^*. Soient $n \geq m$ et $a_1, \dots, a_n \in E$ tels que $\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes e_i\|_{E(l_\infty^n)} = 1$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de l_∞^n. On a

$$\max_{i \leq n} |T(a_i)| = \sum_{j=1}^m \max_{i \leq n} |\langle T(a_i), b_j^* \rangle| b_j$$

et pour tout $j = 1, \dots, m$, il existe $i(j) \leq n$ tel que

$$\max_{i \leq n} |\langle T(a_i), b_j^* \rangle| = |\langle T(a_{i(j)}), b_j^* \rangle| ;$$

donc

$$\max_{j \leq m} |T(a_{i(j)})| = \max_{i \leq n} |T(a_i)|.$$

D'autre part

$$\Big\| \sum_{j=1}^m a_{i(j)} \otimes e_j \Big\|_{E(l_\infty^m)} \leq \Big\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes e_i \Big\|_{E(l_\infty^n)} = 1.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} \| \max_{i \leq n} |T(a_i)| \,\|_X &= \| \max_{j \leq m} |T(a_{i(j)})| \,\|_X \\ &\leq \|T \otimes \mathrm{id}_{l_\infty^m}\| \Big\| \sum_{j=1}^m a_{i(j)} \otimes e_j \Big\|_{E(l_\infty^m)} \leq \|T \otimes \mathrm{id}_{l_\infty^m}\|. \end{aligned}$$

D'où $\|T \otimes \mathrm{id}_{l_\infty^n}\| \leq \|T \otimes \mathrm{id}_{l_\infty^m}\|$ pour tout $n \geq m$ et donc $\|T\|_{\mathrm{r}} = \|T \otimes \mathrm{id}_{l_\infty^m}\|$. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 6.1 :

Preuve du Théorème 6.1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < 1$ et $0 < \varepsilon_0 < 1$ tel que $(1+\varepsilon_0)^2 < 1+\varepsilon$. Soit $m = N(n, \varepsilon_0)$ associé à n et à ε_0 dans le Lemme 6.2. Par le Théorème 6.2 il existe $N = N(n, m, \varepsilon_0)$ tel que tout sous-espace de treillis de dimension $\geq N$ contient des éléments $x_1, \dots, x_n$ vérifiant la propriété (D). En prenant $a_1 = e_1$ et $a_i = 0$ pour $i > 1$ on déduit de (D) que le sous-espace E engendré par la famille $\{x_1, \dots, x_n\}$ est $(1+\varepsilon_0)^2$-isomorphe à l_2^n.

Comme tout opérateur $S : l_2^n \to l_2^n$ de norme inférieure à 1 s'exprime comme combinaison linéaire convexe d'unitaires, la propriété (D) entraîne que

$$\forall T : E \to E, \qquad \|T \otimes \mathrm{id}_{l_\infty^m}\| \leq (1+\varepsilon_0)\|T\|.$$

D'autre part, le Lemme 6.2 dit que E se plonge $(1+\varepsilon_0)$-régulièrement dans un treillis X de dimension $\leq m = N(n, \varepsilon_0)$. D'où on déduit par la Proposition 6.1 que

$$\|T\|_{\mathrm{r}} \leq (1+\varepsilon_0)\|T\|.$$

Par conséquent

$$\delta(E) \leq (1+\varepsilon_0) \leq (1+\varepsilon),$$

ce qui achève la dèmonstration du Théorème 6.1. ■

Avant de conclure cette section observons que le Lemme 6.2 permet aussi de réaliser les sous-espaces de treillis de dimension finie dans des treillis de dimension finie simples et concrets :

Proposition 6.2. *Soit E un sous-espace de treillis de dimension n. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N(n,\varepsilon) = N \in \mathbb{N}$ tel que E est $(1+\varepsilon)$-régulièrement isomorphe à un sous-espace de $l_\infty^N(l_1^N)$.*

Preuve. Par le Lemme 6.2 ci-dessus il suffit de démontrer la proposition pour un treillis à base 1-inconditionnelle de dimension finie n. Supposons alors que E est un treillis ; soit $\{b_1,\dots,b_n\}$ une base 1-inconditionnelle de E et $\{b_1^*,\dots,b_n^*\}$ la base orthogonale correspondante de E^*.

Soit S la sphère unité de E^*. Il est classique qu'il existe un entier $N = N(n,\varepsilon) \leq (1+2/\varepsilon)^n$ et un ε-réseau $\{a_j^*;\ j=1,\dots,N\}$ de S (cf. [P4], p. 49).

Posons $e_j^* = |a_j^*|$, le module de a_j^*, $j=1,\dots,N$. On écrit

$$e_j^* = \sum_{i=1}^n e_j^*(i)\, b_i^*.$$

Pour tout $j=1,\dots,N$ définissons un opérateur $T_j : E \to l_1^N$ par

$$T_j(x) = (x(i)\, e_j^*(i))_{i\leq n}, \qquad \forall x = \sum_{i=1}^n x(i) b_i \in E.$$

Il est clair que T_j est un opérateur positif et

$$\|T_j(x)\|_{l_1^N} = \langle e_j^*, |x|\rangle \leq \|\,|x|\,\| \cdot \|e_j^*\| = \|x\|,$$

d'où

$$\|T_j\|_{\mathrm{r}} = \|T_j\| \leq 1.$$

Maintenant définissons l'opérateur

$$T : E \to l_\infty^N(l_1^N), \qquad x \mapsto (T_j(x))_{j=1}^N.$$

Comme les T_j sont positifs, T l'est aussi ; par conséquent,

$$\|T\|_{\mathrm{r}} = \sup_{j\leq N} \|T_j\|_{\mathrm{r}} \leq 1.$$

Démontrons que T est injectif. Soit $x \in E$ avec $\|x\| = 1$. Choisissons $e^* \in S$ tel que $e^* \geq 0$ et $\langle e^*, |x|\rangle = 1$. Alors il existe un a_j^* tel que $\|a_j^* - e^*\| \leq \varepsilon$. Donc

$$\|e_j^* - e^*\| = \|\,|a_j^*| - e^*\| \leq \|a_j^* - e^*\| \leq \varepsilon.$$

D'où on obtient

$$\|T_j(x)\|_{l_1^N} = \langle e_j^*, |x|\rangle = \langle e^*, |x|\rangle + \langle e_j^* - e^*, |x|\rangle \geq 1-\varepsilon\,;$$

donc

$$\|T(x)\| \geq \|T_j(x)\|_{l_1^N} \geq 1-\varepsilon,$$

qui implique, par homogénéité,

$$\|T(x)\| \geq (1-\varepsilon)\,\|x\|, \qquad \forall x \in E.$$

Par conséquent, T est injectif et

$$\|T^{-1} : T(E) \to E\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Or il facile de vérifier que T^{-1} est positif ; on en déduit

$$\|T^{-1}\|_{\mathrm{r}} = \|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}. \ \blacksquare$$

Remarque. Ce résultat est faux dans le cas des espaces d'opérateurs : en général un espace d'opérateurs de dimension finie ne se plonge pas complètement isométriquement dans un M_n. Pisier étudie ce phénomène dans [P2].

7. Distances régulières

Dans cette section nous allons estimer des distances régulières entre quelques sous-espaces de treillis classiques de dimension finie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il est bien connu que

$$\sup\{d(X,Y);\ X, Y \text{ espaces de Banach, } \dim X = \dim Y = n\} \leq n$$

et que cette majoration est optimale (cf. [P4] ou [P6]). Même si nous n'avons pas pu obtenir une majoration optimale de

$$\sup\{d_{\mathrm{r}}(E,F);\ E, F \text{ sous-espaces de treillis, } \dim E = \dim F = n\},$$

les résultats de cette section constituent un pas dans cette direction.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E, F des espaces vectoriels de dimension n. Il est classique que le dual $(B(E,F))^*$ de $B(E,F)$ s'identifie à $B(F,E)$ en associant à tout $v \in B(F,E)$ la forme linéaire sur $B(E,F)$ définie par $u \mapsto \mathrm{tr}(vu)$.

Ainsi à toute norme α sur $B(E,F)$ on peut associer sa norme duale sur $B(F,E)$ définie par

$$\alpha^*(v) = \sup\{|\mathrm{tr}(vu)|;\ u \in B(E,F),\ \alpha(u) \leq 1\}.$$

Dans la suite nous aurons besoin du théorème classique de John–Lewis qui dit que si α est une norme sur $B(E,F)$, alors il existe $u \in B(E,F)$ tel que $\alpha(u) = 1$ et $\alpha^*(u^{-1}) = n$ (cf. [P4], pp. 27–28).

Nous allons maintenant procéder à des estimations de distances régulières entre sous-espaces de treillis 2-convexes ou 2-concaves.

Cas des sous-espaces de treillis 2-convexes. Soit E un sous-espace de treillis 2-convexe avec $M^{(2)}(E) = 1$. Commençons par introduire les notions suivantes : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout opérateur $u : l_2^n \to E$ posons

$$\gamma(u) = \inf\{\|a\|_\alpha \|b\|_{\mathrm{HS}};\ a : l_2^m \to E,\ b : l_2^n \to l_2^m,\ u = ab,\ m \in \mathbb{N}\}$$

où $\|b\|_{\mathrm{HS}}$ est la norme de Hilbert–Schmidt de b et

$$\|a\|_\alpha = \Big\| \sum_{i=1}^{m} a(e_i) \otimes e_i \Big\|_{E(l_2^m)},$$

$\{e_i\}_{i\le m}$ étant une base orthonormée de l_2^m.

Remarques. (1) Il est clair que la norme $\|a\|_\alpha$ ne dépend pas de la base orthonormée spécifiée, c'est-à-dire que quel que soit l'opérateur unitaire $w : l_2^m \to l_2^m$, on a

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} a(w(e_i)) \otimes e_i \Big\|_{E(l_2^m)} = \Big\| \sum_{i=1}^{m} a(e_i) \otimes e_i \Big\|_{E(l_2^m)}.$$

(2) On a $\|a\|_\alpha = \|a : \min(l_2^m) \to E\|_{\mathrm{r}}$. En effet, soit $E \subseteq X$ un plongement de E dans un treillis X. Par définition

$$\|a : \min(l_2^m) \to E\|_{\mathrm{r}} = \sup \Big\{ \Big\| \sup_{j\ge1} \Big| \sum_{i=1}^{m} x_j(i) a(e_i) \Big| \Big\|_X ;\ (x_j) \subset l_2^m,\ \sup_{j\ge1} \|x_j\|_{l_2^m} \le 1 \Big\}.$$

En choisissant pour (x_j) une suite dense dans la boule unité de l_2^m on obtient la remarque (cf. [K2], p. 7 ou [LT], pp. 42–43).

Lemme 7.1. *γ est une norme sur $B(l_2^n, E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Il suffit de démontrer l'inégalité triangulaire. Soient $u_1, u_2 : l_2^n \to E$. On choisit $a_i : l_2^{m_i} \to E$ et $b_i : l_2^n \to l_2^{m_i}$ tels que

$$u_i = a_i b_i, \quad \|a_i\|_\alpha = \|b_i\|_{\mathrm{HS}} = (\gamma(u_i))^{1/2}, \quad i = 1, 2.$$

Considérons les opérateurs

$$a : l_2^{m_1} \oplus_2 l_2^{m_2} \to E, \quad (x_1, x_2) \mapsto a(x_1, x_2) = a_1(x_1) + a_2(x_2),$$

et

$$b : l_2^n \to l_2^{m_1} \oplus_2 l_2^{m_2}, \quad x \mapsto (b_1(x), b_2(x)).$$

On vérifie aisément que $ab = u_1 + u_2$ et que

$$\|b\|_{\mathrm{HS}} = (\|b_1\|_{\mathrm{HS}}^2 + \|b_2\|_{\mathrm{HS}}^2)^{1/2}.$$

D'autre part la 2-convexité de E donne

$$\|a\|_\alpha = \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{m_1} |a_1(e_i^{(1)})|^2 + \sum_{j=1}^{m_2} |a_2(e_j^{(2)})|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_X \le (\|a_1\|_\alpha^2 + \|a_2\|_\alpha^2)^{1/2},$$

où $(e_i^{(1)})$ (resp. $(e_i^{(2)})$) désigne une base orthonormée de $l_2^{m_1}$ (resp. $l_2^{m_2}$). Ceci donne

$$\gamma(u_1 + u_2) \le (\|b_1\|_{\mathrm{HS}}^2 + \|b_2\|_{\mathrm{HS}}^2)^{1/2} (\|a_1\|_\alpha^2 + \|a_2\|_\alpha^2)^{1/2} = \gamma(u_1) + \gamma(u_2). \ \blacksquare$$

Le résultat qui suit décrit la norme duale de γ.

Lemme 7.2. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $v \in B(E, l_2^n)$. Alors $\gamma^*(v) = M_{(2)}(v)$.*

Preuve. Observons que $\gamma^*(v : E \to l_2^n)$ admet la description suivante :

$$\begin{aligned}\gamma^*(v) &= \sup\{|\mathrm{tr}(vu)|;\ u : l_2^n \to E,\ \gamma(u) \le 1\}\\ &= \sup\Big\{\sum_{i=1}^m \langle y_i, v(x_i)\rangle;\ m \in \mathbb{N},\ (x_i) \subset E,\ (y_i) \subset l_2^n,\\ &\qquad \Big\|\Big(\sum_{i=1}^m |x_i|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X \le 1,\ \sum_{i=1}^m \|y_i\|^2 \le 1\Big\}\\ &= \sup\Big\{\Big(\sum_{i=1}^m \|v(x_i)\|^2\Big)^{1/2};\ m \in \mathbb{N},\ (x_i) \subset E,\ \Big\|\Big(\sum_{i=1}^m |x_i|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X \le 1\Big\},\end{aligned}$$

ce qui donne le lemme. ∎

Remarque. Lorsque $u : l_2^n \to E$ est un opérateur inversible alors

$$\gamma(u) = \inf\{\|a\|_\alpha \|b\|_{\mathrm{HS}};\ a : l_2^n \to E,\ b : l_2^n \to l_2^n,\ u = ab\}.$$

En effet, soient $m \ge n$, $b : l_2^n \to l_2^m$ et $a : l_2^m \to E$ tels que $u = ab$. Comme u est inversible, b est injectif et donc $\dim(\mathrm{Im}(b)) = n$.

Soit $w : l_2^n \to \mathrm{Im}(b) \subseteq l_2^m$ un opérateur unitaire ; alors $w \in B(l_2^n, l_2^m)$ et il est clair que ww^* est la projection orthogonale de l_2^m sur $\mathrm{Im}(b)$. Nous avons donc

$$u = ab = aww^*b.$$

On voit aisément que

$$\|w^*b : l_2^n \to l_2^n\|_{\mathrm{HS}} = \|b\|_{\mathrm{HS}}.$$

D'autre part, l'invariance de $\|a\|_\alpha$ par transformations unitaires donne

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |aw(e_i)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X = \Big\|\Big(\sum_{i=1}^n |a(e_i)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X \le \Big\|\Big(\sum_{i=1}^m |a(e_i)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X,$$

X étant un treillis contenant E. D'où le résultat énoncé.

Ceci dit, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 7.1. *Soit E un sous-espace de treillis de dimension n avec $M^{(2)}(E) = 1$. On a*

$$d_{\mathrm{r}}(\min(l_2^n), E) \le \sqrt{n}.$$

Preuve. Par le Lemme 7.1, γ est une norme sur $B(l_2^n, E)$. Nous pouvons donc appliquer le théorème de John–Lewis : il existe un isomorphisme $u : l_2^n \to E$ tel que

$$\gamma(u) = \gamma^*(u^{-1}) = \sqrt{n}.$$

Par la remarque précédente, il existe $a : l_2^n \to E$ et $b : l_2^n \to l_2^n$ tels que

$$\|a\|_\alpha = 1, \qquad \|b\|_{\mathrm{HS}} = \sqrt{n}, \qquad u = ab.$$

Alors

$$\mathrm{id}_{l_2^n} = u^{-1}ab \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(u^{-1}ab) = n.$$

D'autre part, nous avons

$$\|u^{-1}a\|_{\mathrm{HS}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \|u^{-1}a(e_i)\|^2\Big)^{1/2} \le \gamma^*(u^{-1}) = \sqrt{n},$$

ceci par le Lemme 7.2 et le fait que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a(e_i)\otimes e_i\Big\|_{E(l_2^n)} = \|a\|_\alpha = 1.$$

Nous avons donc

$$n = \mathrm{tr}(u^{-1}ab) \ge \|b\|_{\mathrm{HS}}\|u^{-1}a\|_{\mathrm{HS}}\,;$$

nous sommes dans le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz, par rapport au produit scalaire défini par la trace sur l'espace de Hilbert des opérateurs de Hilbert–Schmidt. Il est bien connu que ceci implique que b^* (l'adjoint de b) et $u^{-1}a$ sont proportionnels, d'où on déduit que b est unitaire et donc

$$\|b : \min(l_2^n) \to \min(l_2^n)\|_{\mathrm{r}} = \|b : l_2^n \to l_2^n\| = 1.$$

Nous obtenons alors

$$\|u : \min(l_2^n) \to E\|_{\mathrm{r}} \le \|a : \min(l_2^n) \to E\|_{\mathrm{r}}\|b : \min(l_2^n) \to \min(l_2^n)\|_{\mathrm{r}} \le \|a\|_\alpha \le 1.$$

En résumé, il existe $u : l_2^n \to E$ tel que $\|u\|_r \le 1$ et $\gamma^*(u^{-1}) = \sqrt{n}$. Or on voit facilement que $\|u^{-1}\|_r = \|u^{-1}\| \le \gamma^*(u^{-1})$. D'où finalement $d_{\mathrm{r}}(\min(l_2^n), E) \le n$, ce qui est le résultat recherché. ■

Le Théorème 7.1 admet la conséquence immédiate suivante :

Corollaire 7.1. *Soient E et F des sous-espaces de treillis de dimension $n \in \mathbb{N}$ avec $M^{(2)}(E) = M^{(2)}(F) = 1$. On a $d_{\mathrm{r}}(E, F) \le n$.*

Le résultat qui suit est encore une conséquence du Théorème 7.1.

Corollaire 7.2. *Soit $E \subset L^2$ avec $\dim E = n$. Alors*

$$d_{\mathrm{r}}(\min(l_2^n), E) = \sqrt{n}.$$

En particulier,

$$d_{\mathrm{r}}(\min(l_2^n), l_2^n) = d_{\mathrm{r}}(\min(l_2^n), G_n) = \sqrt{n}.$$

Preuve. Pour tout opérateur $u : \min(l_2^n) \to E$ on a

$$\|u\|_{\mathrm{r}} = \Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n} |u(e_i)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2\Big)^{1/2}.$$

D'autre part, puisque $\|u^{-1}\|_{\mathrm{r}} = \|u^{-1}\|$, nous avons

$$\|u^{-1}\|_{\mathrm{r}}\|u\|_{\mathrm{r}} = \|u^{-1}\|\Big(\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2\Big)^{1/2} \ge \sqrt{n},$$

ce qui donne

$$d_{\mathrm{r}}(\min(l_2^n), E) \ge \sqrt{n}.$$

E étant un sous-espace de treillis 2-convexe, on a l'inégalité inverse par le Théorème 7.1, d'où l'égalité.

Remarque. On déduit du corollaire précédent que $d_{\mathrm{r}}(\min(l_2), G) = \infty$. Ainsi G et $\min(l_2)$ sont des sous-espaces de treillis hilbertiens homogènes qui ne sont pas régulièrement isomorphes.

Nous verrons à la fin de cette section qu'on a aussi $d_{\mathrm{r}}(\min(l_2), \max(l_2)) = \infty$.

Cas des sous-espaces de treillis 2*-concaves.* Soit E un sous-espace de treillis avec $M_{(2)}(E) = 1$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $\xi_1, \ldots, \xi_m \in E^*$ posons $b = \sum_{i=1}^m \xi_i \otimes e_i : E \to l_2^m$. Alors on définit

$$\|b : E \to l_2^m\|_\beta = \|(\xi_1, \ldots, \xi_m)\|_{(E(l_2^m))^*}.$$

Remarque. Par l'invariance de la norme de $E(l_2^m)$ par transformations unitaires, on voit que la norme $\|b\|_\beta$ ne dépend pas de la base orthonormée choisie de l_2^m, c'est-à-dire, pour tout opérateur unitaire $w : l_2^m \to l_2^m$, on a $\|wb\|_\beta = \|b\|_\beta$.

Soit $u : E \to l_2^n$. On définit

$$\delta(u) = \inf\{\|b\|_\beta \|a\|_{\mathrm{HS}};\ u = ab,\ a \in B(l_2^m, l_2^n),\ b \in B(E, l_2^m),\ m \in \mathbb{N}\}.$$

Il est facile de voir que la 2-concavité de E implique que

$$\|(\xi_1, \ldots, \xi_m)\|_{(E(l_2^m))^*} \le \Big(\sum_{i=1}^m \|\xi_i\|_{E^*}^2\Big)^{1/2}, \qquad \forall m \in \mathbb{N},\ \forall \xi_1, \ldots, \xi_m \in E^*.$$

Utilisant cette observation on peut produire une démonstration semblable à celle du Lemme 7.1 pour établir le lemme suivant :

Lemme 7.3. *δ est une norme sur $B(E, l_2^n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Le résultat qui suit décrit la norme duale de δ :

Lemme 7.4. *$\delta^*(v) = M^{(2)}(v)$.*

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}\delta^*(v : l_2^n \to E) &= \sup\{|\mathrm{tr}(vu)|;\ u : E \to l_2^n,\ \delta(u) \le 1\}\\ &= \sup\Big\{\sum_{i=1}^m \langle \xi_i, v(x_i)\rangle;\ \|(\xi_1, \ldots, \xi_m)\|_{(E(l_2^m))^*} \le 1,\ \Big(\sum_{i=1}^m \|x_i\|^2\Big)^{1/2} \le 1\Big\}\\ &= \sup\Big\{\Big\|\Big(\sum_{i=1}^m |v(x_i)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X;\ \Big(\sum_{i=1}^m \|x_i\|^2\Big)^{1/2} \le 1\Big\}.\end{aligned}$$

D'où le lemme. ∎

Remarque. Comme dans la remarque précédant le Théorème 7.1, on montre aussi facilement que si $v : E \to l_2^n$ est un opérateur inversible, alors

$$\delta(v) = \inf\{\|b : E \to l_2^n\|_\beta \|a : l_2^n \to l_2^n\|_{\mathrm{HS}};\ v = ab\}.$$

Lemme 7.5. *Pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $b : E \to l_2^m$ nous avons*

$$\|b : E \to \max(l_2^m)\|_{\mathrm{r}} \le \|b\|_\beta.$$

Preuve. Notons $(f_j)_{j \ge 1}$ la base canonique de c_0. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_m$ des vecteurs de E^* tels que $b = \sum_{i=1}^m \xi_i \otimes e_i$. On a

$$\|b : E \to \max(l_2^n)\|_{\mathrm{r}}$$
$$= \sup\Big\{\Big\|\sum_{j\geq 1}\Big(\sum_{i=1}^{m}\xi_i(x_j)e_i\Big)\otimes f_j\Big\|_{l_2^m\widehat{\otimes}c_0};\ (x_j)_{j\geq 1}\subset E,\ \Big\|\sum_{j\geq 1}x_j\otimes e_j\Big\|_{E(c_0)}\leq 1\Big\}$$
$$= \sup\Big\{\sum_{j\geq 1}\sum_{i=1}^{m}\xi_i(x_j)\langle T(f_j),e_i\rangle;\ \Big\|\sum_{j\geq 1}x_j\otimes e_j\Big\|_{E(c_0)}\leq 1,\ \|T : c_0\to l_2^m\|\leq 1\Big\}$$
$$= \sup\Big\{\sum_{i=1}^{m}\Big\langle\xi_i,\sum_{j\geq 1}\langle T(f_j),e_i\rangle x_j\Big\rangle;\ \Big\|\sum_{j\geq 1}x_j\otimes e_j\Big\|_{E(c_0)}\leq 1,\ \|T : c_0\to l_2^m\|\leq 1\Big\}.$$

Fixons $(x_j)\subset E$ et $T : c_0\to l_2^m$ tels que

$$\Big\|\sum_{j\geq 1}x_j\otimes e_j\Big\|_{E(c_0)} = 1 \quad \text{et} \quad \|T : c_0\to l_2^m\| = 1.$$

Soit X un treillis contenant E. Il est clair que

$$\sum_{i=1}^{m}\Big\langle\xi_i,\sum_{j\geq 1}\langle T(f_j),e_i\rangle x_j\Big\rangle \leq \|(\xi_1,\ldots,\xi_m)\|_{(E(l_2^m))^*}\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{m}\Big|\sum_{j\geq 1}\langle T(f_j),e_i\rangle x_j\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X.$$

Or

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{m}\Big|\sum_{j\geq 1}\langle T(f_j),e_i\rangle x_j\Big|^2\Big)^{1/2}\|_X = \Big\|\sup_{t\geq 1}\Big|\sum_{j\geq 1}\langle T(f_j),z_t\rangle x_j\Big|\Big\|_X,$$

où $(z_t)_{t\geq 1}$ est une suite dense dans la boule unité de l_2^m. Or pour tout $t\geq 1$ on a

$$\Big|\sum_{j\geq 1}\langle T(f_j),z_t\rangle x_j| = \Big|\sum_{j\geq 1}\langle f_j,T^*(z_t)\rangle x_j\Big| \leq \Big(\sum_{j\geq 1}|\langle f_j,T^*(z_t)\rangle|\Big)\sup_{j\geq 1}|x_j|.$$

On en déduit

$$\Big\|\sup_{t\geq 1}\Big|\sum_{j\geq 1}\langle T(f_j),z_t\rangle x_j\Big|\Big\|_X \leq \sup_{t\geq 1}\sum_{j\geq 1}|\langle f_j,T^*(z_t)\rangle|.$$

D'autre part, il est facile de voir que

$$\sup_{t\geq 1}\sum_{j\geq 1}|\langle f_j,T^*(z_t)\rangle| = \|T^* : l_2^m\to l_1\| = \|T : c_0\to l_2^m\| = 1.$$

D'où on obtient $\|b\|_{\mathrm{r}}\leq\|b\|_\beta$, ce qui donne le lemme. ■

Nous pouvons maintenant énoncer le deuxième résultat de cette section :

THÉORÈME 7.2. *Soit E un sous-espace de treillis de dimension $n\in\mathbb{N}$ avec $M_{(2)}(E)=1$. On a*

$$d_{\mathrm{r}}(\max(l_2^n),E)\leq\sqrt{n}.$$

Preuve. Par le Lemme 7.4, δ est une norme sur $B(E,l_2^n)$. Par le théorème de John–Lewis il existe un isomorphisme $u : E\to l_2^n$ tel que

$$\delta(u) = \delta^*(u^{-1}) = \sqrt{n}.$$

Soient $a : E \to l_2^n$ et $b : l_2^n \to l_2^n$ tels que $\|a\|_\beta = 1$, $\|b\|_{\mathrm{HS}} = \sqrt{n}$ et $u = ba$. Alors $bau^{-1} = \mathrm{id}_{l_2^n}$ et $\mathrm{tr}(bau^{-1}) = n$. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\|au^{-1}\|_{\mathrm{HS}} &= \Big(\sum_{i=1}^n \|au^{-1}(e_i)\|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |\langle \xi_j, u^{-1}(e_i)\rangle|^2\Big)^{1/2}\\ &= \sup\Big\{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\langle \xi_j, u^{-1}(e_i)\rangle;\ \sum_{i,j}^n |\alpha_{ij}|^2 \le 1\Big\}\\ &= \sup\Big\{\sum_{j=1}^n \Big\langle \xi_j, u^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}e_i\Big)\Big\rangle;\ \sum_{i,j}^n |\alpha_{ij}|^2 \le 1\Big\}\\ &\le \|(\xi_1,\dots,\xi_n)\|_{(E(l_2^n))^*}\sup\Big\{\Big\|\Big(\sum_{j=1}^n |u^{-1}(x_j)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_X;\ \Big(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2\Big)^{1/2} \le 1\Big\},\end{aligned}$$

où X est un treillis contenant E. D'où

$$\|au^{-1}\|_{\mathrm{HS}} \le M^{(2)}(u^{-1}) = \gamma^*(u^{-1}) = \sqrt{n}.$$

On en déduit que

$$n = \mathrm{tr}(bau^{-1}) \ge \|b\|_{\mathrm{HS}}\|au^{-1}\|_{\mathrm{HS}}.$$

Comme dans la preuve du théorème précédent, ceci implique que b est unitaire. Ce fait et le Lemme 7.5 donnent

$$\|u\|_{\mathrm{r}} = \|ba\|_{\mathrm{r}} \le \|b\|_{\mathrm{r}}\|a\|_{\mathrm{r}} \le \|b\|\cdot\|a\|_\beta = 1,$$

la structure de sous-espace de treillis sur l_2^n étant $\max(l_2^n)$. Il existe donc $u : E \to \max(l_2^n)$ tel que

$$\|u\|_{\mathrm{r}} \le 1 \quad \text{et} \quad \|u^{-1}\|_{\mathrm{r}} = \|u^{-1}\| \le \delta^*(u^{-1}) \le \sqrt{n},$$

d'où on obtient $d_{\mathrm{r}}(E, \max(l_2^n)) \le \sqrt{n}$, ce qui conclut la preuve du théorème. ■

Ce théorème admet la conséquence immédiate suivante :

Corollaire 7.3. *Soient E et F des sous-espaces de treillis de dimension n avec $M_{(2)}(E) = M_{(2)}(F) = 1$. On a $d_{\mathrm{r}}(E,F) \le n$.*

Le résultat qui suit est aussi une conséquence du Théorème 7.2 :

Corollaire 7.4. *Soit $E \subset L^2$ avec* $\dim E = n$. *On a*

$$d_{\mathrm{r}}(\max(l_2^n), E) = \sqrt{n}.$$

En particulier,

$$d_{\mathrm{r}}(\max(l_2^n), l_2^n) = d_{\mathrm{r}}(\max(l_2^n), G_n) = \sqrt{n}.$$

Preuve. Fixons un entier $m \ge n$. Pour tout $u : E \to \max(l_2^n)$ on a

$$\|u\|_{\mathrm{r}} \ge \sup\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^m u(x_j)\otimes e_j\Big\|_{l_2^n\widehat{\otimes} l_\infty^m};\ (x_j)\subset E,\ \Big\|\sum_{j=1}^m x_j\otimes e_j\Big\|_{E(l_\infty^m)} \le 1\Big\}.$$

Il est clair que

$$\alpha\Big(\sum_{j=1}^m y_j\otimes e_j\Big) = \Big(\sum_{j=1}^m \|y_j\|_E^2\Big)^{1/2}$$

définit une norme croisée sur $l_2^n \otimes l_\infty^m$. Par conséquent

$$\Big\| \sum_{j=1}^m u(x_j) \otimes e_j \Big\|_{l_2^n \widehat{\otimes} l_\infty^m} \geq \Big(\sum_{j=1}^m \|u(x_j)\|^2 \Big)^{1/2}$$

et

$$\|u^{-1}\|_{\mathrm{r}} \|u\|_{\mathrm{r}} \geq \sup \Big\{ \Big(\sum_{j=1}^m \|x_j\|^2 \Big)^{1/2};\ (x_j) \subset E,\ \Big\| \sum_{j=1}^m x_j \otimes e_j \Big\|_{E(l_\infty^m)} \leq 1 \Big\}.$$

Notons $(f_i)_{i \leq n}$ une base orthonormée de E et choisissons

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{m}} \Big(\sum_{i=1}^n f_i \Big)$$

pour tout $j = 1, \ldots, m$. Nous avons

$$\Big\| \sum_{j=1}^m x_j \otimes e_j \Big\|_{E(l_\infty^m)} = \sqrt{\frac{n}{m}} \leq 1 \quad \text{et} \quad \Big(\sum_{j=1}^m \|x_j\|^2 \Big)^{1/2} = \sqrt{n}.$$

D'où $d_{\mathrm{r}}(\max(l_2^n), E) \geq \sqrt{n}$. Par le Théorème 7.2 nous avons l'inégalité inverse, ce qui permet d'obtenir le corollaire. ■

Remarque. On déduit du corollaire précédent que $d_{\mathrm{r}}(\max(l_2), G) = \infty$.

Sur des distances régulières à $\max(E)$ *et à* $\min(E)$. Avant d'énoncer la proposition qui suit rappelons qu'un opérateur $u : X \to Y$ entre espaces de Banach est dit p-*absolument sommant*, $1 \leq p \leq \infty$, s'il existe une constante C telle que pour toutes suites finies $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ on a

$$\Big(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^p \Big)^{1/p} \leq C \sup \Big\{ \Big(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \Big)^{1/p};\ x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leq 1 \Big\}.$$

On définit la *norme p-sommante* de u par $\pi_p(u) = \inf C$.

Rappelons aussi qu'un opérateur $T : X \to Y$ entre espaces de Banach est dit *p-intégral* s'il admet une factorisation de la forme $T = \beta i \alpha$, où

$$\alpha : X \to C(K), \quad i : C(K) \to L^p(K, \mu) \quad \text{et} \quad \beta : L^p(K, \mu) \to Y,$$

K étant un espace compact et μ une probabilité sur K. On définit la *norme p-intégrale* de T par

$$i_p(T) = \inf\{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|;\ T = \beta i \alpha\}.$$

Il est bien connu que si $\gamma = \|\cdot\|$ alors $\gamma^* = i_1$ par la dualité de la trace.

Proposition 7.1. *Soient E et F deux sous-espaces de treillis.*

(1) *Pour tout opérateur $u : \min(E) \to \max(F)$,*

$$\|u : \min(E) \to \max(F)\|_{\mathrm{r}} = \pi_1(u^* : F^* \to E^*).$$

(2) *On a*

$$d_{\mathrm{r}}(\min(E), \max(F)) = \inf\{\|v^{-1} : E^* \to F^*\|\, \pi_1(v)\},$$

l'infimum étant sur tous les isomorphismes $v : F^* \to E^*$.

3) *Si* $\dim E = \dim F = n$, *alors*

$$\sqrt{n} \le d_{\mathrm{r}}(\min(E), \max(F)) \le n.$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\|u : \min(E) \to \max(F)\|_{\mathrm{r}} \\
&\quad = \sup\Big\{\Big\|\sum_{i\ge 1} u(x_i)\otimes e_i\|_{F\widehat{\otimes} c_0};\ (x_i)\subset E,\ \max_{i\ge 1}\|x_i\|\le 1\Big\} \\
&\quad = \sup\Big\{\sum_{i\ge 1} T(e_i)(u(x_i));\ (x_i)\subset E,\ \max_{i\ge 1}\|x_i\|\le 1,\ T\in B(c_0, F^*),\ \|T\|\le 1\Big\} \\
&\quad = \sup\Big\{\sum_{i\ge 1} u^*(\xi_i)(x_i);\ (x_i)\subset E,\ \max_{i\ge 1}\|x_i\|\le 1,\ (\xi_i)\subset F^*,\ \sup_{|\varepsilon|=1}\Big\|\sum_{i\ge 1}\varepsilon_i\xi_i\Big\|\le 1\Big\},
\end{aligned}$$

car tout $T \in B(c_0, F^*)$ est entièrement déterminé par la suite $(T(e_i) = \xi_i)_{i\ge 1}$ et on vérifie aisément que

$$\|T\| = \sup_{|\varepsilon|=1}\Big\|\sum_{i\ge 1}\varepsilon_i\xi_i\Big\|,$$

où $|\varepsilon| = 1$ désigne toutes les suites $\varepsilon = (\varepsilon_i)$ avec $|\varepsilon_i| = 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Donc

$$\|u : \min(E) \to \max(F)\|_{\mathrm{r}} = \pi_1(u^* : F^* \to E^*),$$

ce qui donne (1) et (2).

Supposons $\dim E = \dim F = n$. Alors par la propriété d'idéal de la norme π_1 nous avons

$$\sqrt{n} = \pi_2(\mathrm{id}_{E^*}) \le \pi_1(\mathrm{id}_{E^*}) \le \|v^{-1}\|\pi_1(v)$$

pour tout isomorphisme $v : F^* \to E^*$. D'autre part, il est bien connu que

$$\pi_1(v) \le i_1(v)$$

(cf. [W], p. 218) et la norme $i_1(\cdot)$ est duale de $\|\cdot\|$ par la trace. Par le théorème de John–Lewis il existe un isomorphisme $v : F^* \to E^*$ tel que $\|v^{-1}\| = 1$ et $i_1(v) = n$, ce qui donne

$$\sqrt{n} \le d_{\mathrm{r}}(\min(E), \max(F)) \le n$$

et la conclusion de la proposition. ∎

Nous pouvons extraire de cette proposition des estimations de distances régulières entre quelques sous-espaces de treillis relativement simples :

Exemples. (1) Pour tout sous-espace de treillis E de dimension n nous avons

$$d_{\mathrm{r}}(\min(E), l_1^n) = d_{\mathrm{r}}(\max(E), \min(l_1^n)) = n.$$

En particulier,

$$d_{\mathrm{r}}(l_\infty^n, l_1^n) = n.$$

En effet, il est clair que $\max(l_1^n) = l_1^n$; la Proposition 7.1 donne

$$d_{\mathrm{r}}(\min(E), l_1^n) \ge \pi_1(\mathrm{id}_{l_\infty^n}) = n \quad \text{et} \quad d_{\mathrm{r}}(\max(l_\infty^n), E) \ge \pi_1(\mathrm{id}_{l_\infty^n}) = n,$$

car, par la propriété d'idéal de la norme π_1, nous avons

$$\|(u^*)^{-1}\|\,\pi_1(u^* : l_\infty^n \to E^*) \geq \pi_1(\mathrm{id}_{l_\infty^n}) \quad \text{et} \quad \|(v^*)^{-1}\|\pi_1(v^* : E^* \to l_\infty^n) \geq \pi_1(\mathrm{id}_{l_\infty^n}),$$

pour tous isomorphismes $u : E \to l_1^n$, $v : l_1^n \to E$. L'inégalité inverse est donnée par la Proposition 7.1.

(2) Soient E et F deux sous-espaces de treillis tels que E (resp. F) est isométrique à l_∞^n (resp. à l_1^n) en tant qu'espaces de Banach. Alors

$$d_{\mathrm{r}}(E,F) \leq n.$$

En effet, soit $q : l_1^n \to l_\infty^n$ l'opérateur défini par $q(e_i) = e_i$ pour tous $i = 1, \ldots, n$. On a

$$\|q : E \to F\|_{\mathrm{r}} \leq \|q : \min(E) \to \max(F)\|_{\mathrm{r}} = \|q : l_\infty^n \to l_1^n\|_{\mathrm{r}} = \pi_1(q^* : l_\infty^n \to l_1^n) = n.$$

D'autre part,

$$\|q^{-1} : F \to E\|_{\mathrm{r}} \leq \|q^{-1} : \min(l_1^n) \to \max(l_\infty^n)\|_{\mathrm{r}} = \pi_1((q^{-1})^* : l_1^n \to l_\infty^n) = 1.$$

D'où $d_{\mathrm{r}}(E,F) \leq n$.

(3) Pour tous sous-espaces de treillis E et F de dimension n on a

$$d_{\mathrm{r}}(E, \min(F)) \leq n \quad \text{et} \quad d_{\mathrm{r}}(E, \max(F)) \leq n.$$

En effet, pour tout isomorphisme u de E sur F nous avons

$$\begin{aligned}\|u : E \to \max(F)\|_{\mathrm{r}} &\leq \|u : \min(E) \to \max(F)\|_{\mathrm{r}} \\ &\leq \pi_1(u^* : F^* \to E^*) \leq i_1(u^* : F^* \to E^*)\,;\end{aligned}$$

d'autre part

$$\|u^{-1}\|_{\mathrm{r}} = \|u^{-1}\| = \|(u^*)^{-1} : E^* \to F^*\|.$$

Le théorème de John–Lewis permet alors de trouver un isomorphisme u tel que

$$\pi_1(u^* : E^* \to F^*) = n \quad \text{et} \quad \|(u^*)^{-1}\| = 1,$$

ce qui donne

$$d_{\mathrm{r}}(E, \max(F)) \leq n.$$

Un raisonnement analogue permet de montrer la deuxième inégalité.

Remarque. À partir de la Proposition 7.1, on a $d_{\mathrm{r}}(\min(E), \max(E)) = \pi_1(\mathrm{id}_{E^*})$ pour tout sous-espace de treillis E. On en déduit que $d_{\mathrm{r}}(\min(E), \max(E)) = \infty$ si $\dim E = \infty$. C'est un exemple de deux structures de sous-espaces de treillis complètement différentes sur un même espace de Banach.

En particulier $d_{\mathrm{r}}(\min(l_2), \max(l_2)) = \infty$, comme nous l'avons annoncé auparavant.

Dans la suite nous évoquerons les notions classiques de type et de cotype d'un espace de Banach X ; on renvoie le lecteur à [P6] pour leurs définitions. Nous noterons $C_q(X)$ la constante de cotype q de X. Soient $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ et X un treillis. Les faits suivants sont bien connus :

(1) Si X est un treillis q-concave alors il est de cotype q. Si X est p-convexe et q-concave alors il est de type p (cf. [LT], p. 82).

(2) Si X est de type p alors son dual X^* est de cotype q, où $1/p + 1/q = 1$ (cf. [P6]).

Le résultat qui suit est aussi une conséquence immédiate de la Proposition 7.1.

Corollaire 7.5. *Il existe une constante $K < \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et E, F des sous-espaces de treillis de dimension n on a*

$$d_{\mathrm{r}}(E,F) \le KC_2(E^*)C_2(F^*)\, n.$$

Preuve. Nous savons déjà que

$$\|u : E \to F\|_{\mathrm{r}} \le \pi_1(u^* : F^* \to E^*) \quad \text{et} \quad \|u^{-1} : F \to E\|_{\mathrm{r}} \le \pi_1((u^*)^{-1} : E^* \to F^*)$$

pour tout isomorphisme $u : E \to F$. Or on sait qu'il existe une constante $K_0 < \infty$ telle que

$$\pi_1(u^* : F^* \to E^*) \le K_0 C_2(F^*)\pi_2(u^* : F^* \to E^*)$$

et que

$$\pi_1((u^*)^{-1} : E^* \to F^*) \le K_0 C_2(E^*)\pi_2((u^*)^{-1} : E^* \to F^*)$$

(cf. [W], p. 230). Par le théorème de John–Lewis, il existe $v : F^* \to E^*$ tel que

$$\pi_2(v) = \pi_2(v^{-1}) = \sqrt{n}.$$

Par conséquent

$$d_{\mathrm{r}}(E,F) \le KC_2(F^*)C_2(E^*)n,$$

en prenant $K = K_0^2$. D'où le corollaire. ■

Remarque. Les exemples de sous-espaces de treillis de dimension n exposés dans ce paragraphe donnent tous des distances régulières majorées par n. Mais nous ne savons pas si cela est vrai en général.

Références

[B] G. Bennett, *Some ideals of operators on Hilbert space*, Studia Math. 55 (1976), 27–40.

[CL] D. Cartwright and H. Lotz, *Some characterizations of AM- and AL-spaces*, Math. Z. 142 (1975), 97–103.

[FJT] T. Figiel, W. B. Johnson and L. Tzafriri, *On Banach lattices and spaces having local unconditional structure, with applications to Lorentz function spaces*, J. Approx. Theory 13 (1975), 395–412.

[KP] M. I. Kadec and A. Pełczyński, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L^p*, Studia Math. 21 (1962), 161–176.

[K1] J. L. Krivine, *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Ann. of Math. 104 (1976), 1–29.

[K2] —, *Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés*, Sém. Maurey–Schwartz 1973–1974, exposés XXII–XXIII, Centre de Math., Ecole Polytech., Paris, 1974.

[LT] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*, Springer, 1979.

[MP] M. B. Marcus and G. Pisier, *Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis*, Ann. of Math. Stud. 101, Princeton Univ. Press, 1981.

[M] B. Maurey, *Type et cotype dans les espaces ayant une structure locale inconditionnelle*, Sém. Maurey–Schwartz 1973–1974, exposés XXIV–XXV, Centre de Math., Ecole Polytech., Paris, 1974.

[M-N] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer, 1991.

[PR] A. Pełczyński and H. P. Rosenthal, *Localization techniques in L^p-spaces*, Studia Math. 52 (1975), 263–289.

[P1] G. Pisier, *Dvoretzky's theorem for operator spaces*, Houston J. Math. 22 (1996), 399–416.
[P2] —, *Exact operator spaces*, Recent Advances in Operators Algebras (Orléans, 1992), Astérisque 232 (1995), 159–186.
[P3] —, *Complex interpolation and regular operators between Banach lattices*, Arch. Math. (Basel) 62 (1994), 261–269.
[P4] —, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Univ. Press, 1989.
[P5] —, *The operator Hilbert space OH, complexe interpolation and tensor norms*, Mem. Amer. Math. Soc. 585 (1996).
[P6] —, *Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 60, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
[Ra] P. Rauch, *Pseudocomplémentation dans les espaces de Banach*, Studia Math. 100 (1991), 251–282.
[Ru] Z. J. Ruan, *Subspaces of C^*-algebras*, J. Funct. Anal. 76 (1988), 217–230.
[Sch] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Grundlehren Math. Wiss. Springer, 1974.
[Sm] R. R. Smith, *Completely bounded maps between C^*-algebras*, J. London Math. Soc. 27 (1983), 157–166.
[T-J] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach–Mazur Distances and Finite-Dimensional Operator Ideals*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math. 38, Longman Sci & Tech., 1989.
[W] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge Univ. Press, 1991.