

## Théorie de jauge et groupoïdes

par

**Jean-Claude Hausmann** (Genève)

**Abstract.** Dans cet article, nous montrons que les différents points de vue de la théorie de jauge (classique, sur graphes) sont des cas particuliers de représentations de groupoïdes topologiques sur un fibré principal. Nous résolvons le problème de l'existence de telles représentations et de leur classification à transformation de jauge près.

La théorie de jauge étudie l'espace des connexions sur un  $G$ -fibré principal, modulo l'action du groupe de jauge. Provenant de la physique, son intérêt s'est imposé en topologie différentielle, notamment par ses applications à la topologie des variétés de dimension 4. Il y a deux cadres de théorie de jauge, tous deux utilisés en physique mathématique :

- la topologie différentielle, où une connexion est une distribution de l'espace total du fibré de plans supplémentaires aux orbites de  $G$ ,
- la théorie de jauge sur graphes, où une connexion est un procédé qui associe à chaque arrête  $a$  d'un graphe  $\Gamma$  un élément de  $v(a) \in G$ .

Le second point de vue est vu comme une discrétisation du premier : on imagine  $\Gamma$  comme une grille lisse par morceaux, approximant la variété base. On trivialisait le fibré au-dessus des sommets de  $\Gamma$ . Le transport parallèle le long de l'arrête détermine l'élément  $v(a) \in G$ . Le passage à la limite, lorsque la grille devient infiniment fine, suscite beaucoup d'intérêt.

Dans cet article, nous montrons que ces points de vue sont deux cas particuliers de la notion de *représentation d'un groupoïde topologique* sur un fibré, une généralisation du concept de *fibré principal équivariant*. L'étude et la classification de ces représentations de groupoïdes topologiques jettent un nouvel éclairage sur divers points des différentes théories de jauge.

**Remerciements.** Ce travail a bénéficié du support du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique. L'auteur tient également à remercier E. Dror-Farjoun, P. de la Harpe et R. Vogt pour d'utiles discussions.

---

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 22A22, 55R10, 53C05; Secondary 22A30, 55R37, 81T13.

**1. Présentation des résultats.** Soit  $X$  un espace topologique. Un  $X$ -groupoïde est un espace topologique  $C$  muni de :

(a) deux applications continues  $\alpha, \beta : C \rightarrow X$  (*source* et *but*). Pour  $x, y \in X$ , on note  $C_x := \alpha^{-1}(\{x\})$ ,  $C^y := \beta^{-1}(\{y\})$  et  $C_x^y := C_x \cap C^y$ . Le groupoïde  $C$  est dit *transitif* si  $C_x^y \neq \emptyset$  pour tous  $x, y \in X$  ;

(b) une *composition* partiellement définie

$$C \times_X C := \{(c_1, c_2) \in C \mid \alpha(c_1) = \beta(c_2)\} \rightarrow C, \quad (c_1, c_2) \mapsto c_1 c_2,$$

qui est continue,  $C \times_X C$  étant un sous-espace de  $C \times C$  avec la topologie produit. On demande que  $\alpha(c_1 c_2) = \alpha(c_2)$ ,  $\beta(c_1 c_2) = \beta(c_1)$  et que la composition soit associative ;

(c) une application continue  $i : X \rightarrow C$ , associant à  $x$  l'*unité*  $i_x \in C_x^x$  qui est élément neutre à gauche et à droite pour la composition ;

(d) une anti-involution continue  $c \mapsto c^{-1}$  de  $C$ , envoyant  $C_x^y$  sur  $C_y^x$ , telle que  $cc^{-1} = i_{\alpha(c)}$  et  $c^{-1}c = i_{\beta(c)}$ .

On suppose que  $X$  est muni d'un point base  $* \in X$ . En vertu de (d), l'espace  $C_*^*$  est un groupe topologique que l'on note  $\Omega_C$ .

On peut voir  $C$  comme l'espace des morphismes (tous inversibles) d'une petite catégorie topologique dont l'espace des objets est  $X$ . C'est le point de vue de [Ma]. Si l'on préfère les groupoïdes "sans objets" [Co, II.5], on présentera  $C$  comme un groupoïde topologique dont l'espace des unités est identifié à  $X$ .

Soit  $G$  un groupe topologique et soit  $\xi := (E \xrightarrow{p} X)$  un  $G$ -espace principal au-dessus de  $X$ . On entend par là que  $p$  est continue et que l'on s'est donné une action continue libre  $E \times G \rightarrow E$  telle que  $p$  induise une bijection continue du quotient  $E/G$  sur  $X$ . Par exemple, un  $G$ -fibré principal sur  $X$  est un  $G$ -espace au-dessus de  $X$  qui est localement trivial. On suppose que l'espace  $E$  est pointé par  $\tilde{*} \in p^{-1}(*)$ .

Une *représentation* d'un  $X$ -groupoïde  $C$  sur un  $G$ -espace  $\xi$  est une application continue  $w : C \times_X E \rightarrow E$  (où  $C$  est vu au-dessus de  $X$  via  $\alpha$ ) telle que, pour tous  $c, d \in C$ ,  $z \in E$  et  $g \in G$ , on ait

1.  $w(c, z) = \beta(c)$ ,
2.  $w(cd, z) = w(c, w(d, z))$ ,
3.  $w(c^{-1}, w(c, z)) = z$ ,
4.  $w(c, z \cdot g) = w(c, z) \cdot g$ .

Par exemple, si  $X = *$ , alors  $C$  est un groupe topologique et  $w$  correspond à une représentation (= homomorphisme continu) de  $C$  dans  $G$ . Plus généralement, si  $w$  est une représentation de  $C$  sur  $\xi$ , l'équation  $w(c, \tilde{*}) = \tilde{*} \cdot h(c)$  définit un homomorphisme continu  $h^w : \Omega_C \rightarrow G$  appelé l'*holonomie* de  $w$ .

Les résultats de cet article concernent l'existence et la classification de représentations d'un  $X$ -groupoïde  $C$  sur un  $G$ -fibré principal  $\xi$  donnés. Nos hypothèses principales seront que  $C$  est un  $X$ -groupoïde *localement trivial* et  $G$  un groupe SIN (définitions ci-dessous).

Soit  $C$  un  $X$ -groupoïde. Une  $C$ -contraction est une application continue  $\varrho : U_\varrho \rightarrow C^*$ , où  $U_\varrho$  est un ouvert de  $X$ , telle que  $\alpha(\varrho(x)) = x$ . Soit  $\text{Cont}_C(X)$  l'ensemble des  $C$ -contractions. Le  $X$ -groupoïde  $C$  est dit *localement trivial* si  $\{U_\varrho \mid \varrho \in \text{Cont}_C(X)\}$  est un recouvrement ouvert de  $X$  ([Ma, p. 32] ; cette définition coïncide avec la terminologie de [Eh] si  $C$  est transitif). Si le recouvrement  $\{U_\varrho\}$  est de plus numérisable <sup>(1)</sup>, c'est-à-dire s'il existe une partition de l'unité  $\{\mu_\varrho : X \rightarrow [0, 1]\}$  qui lui est subordonnée, on dira que  $C$  est un  $X$ -groupoïde *localement trivial numérisable*. Plusieurs exemples naturels de tels groupoïdes sont présentés au paragraphe 6.

Reprenant les idées de Ch. Ehresmann [Eh], nous démontrerons au §2 l'existence d'une *représentation universelle de  $C$*  et d'un principe de reconstruction :

**THÉORÈME 1.1 (Théorème A).** *Soit  $C$  un  $X$ -groupoïde localement trivial numérisable. Alors :*

(a) *L'application  $\beta : C_* \rightarrow X$  est un  $\Omega_C$ -fibré principal numérisable (que nous appellerons  $\xi_C$ ). La formule  $\tilde{w}(c, u) := cu$  définit une représentation de  $C$  sur  $\xi_C$ .*

(b) *Soit  $\xi := (E \xrightarrow{p} X)$  un  $G$ -espace principal muni d'une représentation  $w$  de  $C$ . Alors  $\xi$  est le fibré associé à  $\xi_C$ ,*

$$E = C_* \times_{\Omega_C} G = C_* \times_{h^w} G,$$

*où  $\Omega_C$  agit à gauche sur  $G$  via l'holonomie  $h^w$  de  $w$ . En particulier,  $\xi$  est un  $G$ -fibré principal numérisable. De plus, la représentation  $w$  est obtenue de  $\tilde{w}$  par la formule  $w(c, [u, g]) = [\tilde{w}(c, u), g] = [cu, g]$ .*

Rappelons qu'un  $G$ -fibré principal numérisable  $\xi$  sur  $X$  est induit du fibré universel  $EG \rightarrow BG$  sur le classifiant de Milnor  $BG$  par une application continue (unique à homotopie près)  $\nu_\xi : X \rightarrow BG$ . En particulier, d'après le théorème A, un  $X$ -groupoïde localement trivial numérisable  $C$  donnera une application  $\nu_C := \nu_{\xi_C} : X \rightarrow B\Omega_C$  induisant  $\xi_C$ . Le théorème d'existence d'une représentation de  $C$  sur  $\xi$ , qui découle facilement du théorème A, est le suivant :

**THÉORÈME 1.2 (Théorème d'existence).** *Soient  $C$  un  $X$ -groupoïde localement trivial numérisable et  $\xi$  un  $G$ -fibré principal. Alors,  $\xi$  admet une*

---

<sup>(1)</sup> Nous utilisons "numérisable" pour équivalent français du néologisme anglais "numerable" introduit par Dold [Do]. De même, un fibré sera dit *numérisable* s'il admet un recouvrement numérisable d'ouverts trivialisants.

représentation de  $C$  si et seulement si il est numérisable et s'il existe un homomorphisme continu  $\phi : \Omega_C \rightarrow G$  tel que  $B\phi \circ \nu_C$  soit homotope à  $\nu_\xi$ .

Ayant résolu la question de l'existence, intéressons-nous à l'ensemble  $\mathcal{R}(C, \xi)$  des représentations de  $C$  sur  $\xi$ . Il est muni d'une action du groupe de jauge  $\mathcal{G}$  de  $\xi$ . Les éléments de  $\mathcal{G}$ , les *transformations de jauge*, sont les automorphismes  $G$ -équivariants de  $E$  au-dessus de  $\text{id}_X$ . Pour  $w \in \mathcal{R}(C, \xi)$  et  $\chi \in \mathcal{G}$ , on définit  $w^\chi$  par

$$w^\chi(c, z) := \chi^{-1}(w(c, \chi(z))),$$

ce qui donne une action à droite de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{R}(C, \xi)$ . Le sous-groupe invariant  $\mathcal{G}_1$  de  $\mathcal{G}$  formé des transformations de jauge fixant  $\tilde{*}$  joue un rôle important car il agit librement sur  $\mathcal{R}(C, \xi)$  (voir 5.5).

Les ensembles  $\mathcal{R}(C, \xi)$  et  $\mathcal{G}$  sont munis de la topologie compact-ouvert (CO-topologie). Nous démontrerons au §3 que  $\mathcal{G}$  est un groupe topologique et que l'action  $\mathcal{R}(C, \xi) \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{R}(C, \xi)$  est continue, ceci sous l'hypothèse que  $G$  est SIN. Rappelons qu'un groupe topologique est SIN si son élément neutre admet un système fondamental de voisinages qui sont  $G$ -invariants (par conjugaison; SIN = small invariant neighbourhood). Par exemple, les groupes compacts, abélien ou discrets sont SIN (voir [Pa] pour la littérature classique sur ces groupes). Nous montrerons que si  $G$  est SIN, la CO-topologie sur  $\mathcal{R}(C, \xi)$  et  $\mathcal{G}$  provient de structures uniformes et que toutes les opérations sont uniformément continues (voir §3).

Pour étudier les quotients  $\mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G}$ , introduisons l'espace  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$  des représentations (i.e. homomorphismes continus) de  $\Omega_C$  dans  $G$ , muni de la CO-topologie. Soit  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi$  le sous-espace des  $\phi \in \mathcal{R}(\Omega_C, G)$  tels que l'application composée  $n(\phi) := B\phi \circ \nu_C$  soit homotope à  $\nu_\xi$  ( $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi$  est une union de composantes connexes par arcs de  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$ ).

Au niveau des espaces classifiants, on désigne par  $\text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  l'espace des applications continues pointées  $f : X \rightarrow BG$  qui induisent  $\xi$ , muni de la CO-topologie.

Un espace topologique  $Z$  est dit *semi-localement contractile* si tout  $z \in Z$  admet un voisinage  $U_z$  dont l'inclusion  $U_z \hookrightarrow Z$  est homotope à une application constante. Cette condition ne dépend que du type d'homotopie de  $Z$ .

**THÉORÈME 1.3 (Théorème B).** *Soit  $C$  un  $X$ -groupeïde localement trivial numérisable et séparé. Soit  $\xi$  un  $G$ -fibré principal numérisable sur  $X$ . On suppose que  $G$  est SIN, que  $X$  est localement compact et que  $\text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  est semi-localement contractile. Soit  $h : \mathcal{R}(C, \xi) \rightarrow \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi$  l'application qui à une représentation  $w$  de  $C$  associe son holonomie  $h^w$ . Alors  $h$  est un  $\mathcal{G}_1$ -fibré principal.*

Nous ne savons pas si l'hypothèse " $\text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  semi-localement contractile" est toujours vérifiée. Observons que cette condition ne dépend que des types d'homotopie de  $X$  et de  $G$ . Elle est vraie si, par exemple,  $X$  est compact et  $G$  est un groupe de Lie compact. En effet,  $BG$  a alors le type d'homotopie d'un CW-complexe dénombrable, limite inductive de quotients de variétés de Stiefel [St, §19.6]. L'espace  $\text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  est ainsi semi-localement contractile par [Mil, lemmes 2 et 3, p. 277]. D'autre part, tout recouvrement d'un espace compact est numérisable, ce qui prouve le :

**COROLLAIRE 1.4.** *Soit  $C$  un  $X$ -groupoïde localement trivial et séparé, avec  $X$  compact. Soit  $\xi$  un  $G$ -fibré principal sur  $X$  avec  $G$  un groupe de Lie compact. Alors  $h : \mathcal{R}(C, \xi) \rightarrow \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi$  est un  $\mathcal{G}_1$ -fibré principal.*

Le théorème B montre que le quotient  $\mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G}_1$  est homéomorphe à  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi$ . Pour décrire  $\mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G}$ , on considère l'action à droite de  $G$  sur  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$  par conjugaison. Si  $G$  est connexe par arcs, cette action préserve  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi$ .

**THÉORÈME 1.5 (Théorème C).** *Avec les hypothèses du théorème B, l'application  $h$  induit un homéomorphisme  $\mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G}_1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi$ . Si, de plus,  $G$  est connexe par arcs, elle induit un homéomorphisme  $\mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G} \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi/G$ .*

Les théorèmes B et C présentent une analogie avec des résultats de la théorie de jauge qu'il serait intéressant d'étudier plus à fond. On sait que, si  $\xi$  est un  $G$ -fibré différentiable sur une variété compacte  $X$  ( $G$  groupe de Lie compact connexe), alors l'espace des connexions sur  $\xi$  modulo  $\mathcal{G}_1$  a le type d'homotopie faible de  $\text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  [DK, prop. 5.1.4]. On verra au §6.4 qu'une connexion donne une représentation d'un groupoïde  $\mathbf{D}(X)$  construit à l'aide des chemins dans  $X$  lisses par morceaux. Pour l'instant, observons que les espaces  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi$  et  $\text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  sont reliés par une application continue  $n : \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi \rightarrow \text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  (détails en 5.3) dont on peut décrire la fibre homotopique lorsque  $X$  est "bien pointé" :

**THÉORÈME 1.6 (Théorème D).** *Supposons que l'on ait les hypothèses du théorème B et que l'inclusion  $\{*\} \subset X$  soit une cofibration. Alors, la fibre homotopique de  $n : \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi \rightarrow \text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  a le type d'homotopie faible de  $\mathcal{R}(C, \xi)$ .*

Le §2 est consacré à la preuve du théorème A et du théorème d'existence. Les §3 et 4 préparent aux preuves des théorèmes B, C et D, qui sont données dans le §5. Enfin, le §6 présente quelques exemples et applications. Parmi ceux-ci, on mentionnera le fait qu'une connexion classique pour un fibré différentiable sur une variété  $X$  donne naissance à une représentation d'un  $X$ -groupoïde que l'on construit à l'aide des chemins lisses par morceaux

dans  $X$ . Ceci nous permet de montrer que, pour une connexion  $A$ , le transport parallèle le long des chemins lisses par morceaux s'étend en un transport parallèle le long de tout chemin  $C^0$  si et seulement si la connexion  $A$  est plate (prop. 6.8). On trouvera également, au §6.6, des applications à la classification des fibrés équivariants sur des espaces homogènes.

## 2. Preuve des théorèmes A et d'existence

LEMME 2.1. *Soit  $C$  un  $X$ -groupoïde localement trivial numérisable. Soit  $\xi : (E \xrightarrow{p} X)$  un  $G$ -espace principal admettant une représentation  $w$  de  $C$ . Alors,  $\xi$  est un  $G$ -fibré principal avec recouvrement trivialisant (numérisable)  $\{U_\varrho \mid \varrho \in \text{Cont}_C(X)\}$ . Plus précisément,  $\xi$  restreint à  $U_\varrho$  admet la trivialisatation  $\psi_\varrho^w : p^{-1}(U_\varrho) \rightarrow U_\varrho \times G$  donnée par*

$$(1) \quad \psi_\varrho^w(z) := (p(z), \lambda_w(z)) \quad \text{où} \quad w(\varrho(p(z)), z) = \tilde{*}\lambda_w(z).$$

*Preuve.* Il est banal que  $\psi_\varrho^w$  est  $G$ -équivariante et on vérifie que l'inverse de  $\psi_\varrho^w$  est  $(\psi_\varrho^w)^{-1}(x, g) := w(\varrho(x)^{-1}, \tilde{*}) \cdot g$ . ■

*Preuve du théorème A.* Observons que l'application  $\beta : C_* \rightarrow X$  est surjective si  $C$  est localement trivial. En effet, si  $x \in X$ , il existe  $\varrho \in \text{Cont}_C(X)$  telle que  $x \in U_\varrho$  et alors  $x = \beta(\varrho(x)^{-1})$ . L'action de  $\Omega_C$  sur  $C_*$  est définie par  $u \cdot c := uc$ . Si  $\beta(u) = \beta(\bar{u})$ , alors  $\bar{u} = \bar{u} \cdot c$  avec  $c := \bar{u}^{-1}u$ . L'application  $\beta$  induit donc une bijection continue  $\bar{\beta} : C_*/\Omega_C \rightarrow X$ . Les trivialisations construites ci-dessous font que  $\beta$  est ouverte et donc  $\bar{\beta}$  est un homéomorphisme.

Pour  $\varrho \in \text{Cont}_C(X)$ , on définit la trivialisatation  $\hat{\psi}_\varrho : \beta^{-1}(U_\varrho) \rightarrow U_\varrho \times \Omega_C$  de la manière suivante :

$$(2) \quad \hat{\psi}_\varrho(u) = (\beta(u), \varrho(\beta(u))u).$$

Elle admet pour inverse

$$(3) \quad \hat{\psi}_\varrho^{-1}(x, c) = \varrho(x)^{-1}c.$$

La  $\Omega_C$ -équivariance de l'homéomorphisme  $\hat{\psi}_\varrho$  est banale. Ceci montre que  $\beta : C_* \rightarrow X$  est un fibré  $\Omega_C$ -principal avec recouvrement trivialisant numérisable  $\{U_\varrho\}$ . Le fait que la formule  $\tilde{w}(c, u) = cu$  définisse une représentation de  $C$  sur ce fibré provient des axiômes de groupoïde.

Passons au point (b) du théorème A. Soit  $w$  une représentation de  $C$  sur un  $G$ -espace principal  $\xi := (E \xrightarrow{p} X)$ . Le lemme 2.1 montre que  $\xi$  est un fibré principal numérisable. L'espace  $E$  étant pointé par  $\tilde{*} \in p^{-1}(*)$ , on définit  $\Phi : C_* \times_{\Omega_C} G \rightarrow E$  par

$$(4) \quad \Phi(u, g) = w(u, \tilde{*}) \cdot g.$$

•  $\Phi$  est bien définie : Soit  $c \in \Omega_C$ . On a

$$\begin{aligned} \Phi(uc, g) &= w(uc, \tilde{*}) \cdot g = w(u, w(c, \tilde{*})) \cdot g = w(u, \tilde{*} \cdot h(c)) \cdot g \\ &= w(u, \tilde{*}) \cdot (h(c)g) = \Phi(u, h(c)g). \end{aligned}$$

•  $\Phi$  est  $G$ -équivariante : évident.

•  $\Phi$  est surjective : Soit  $z \in E$ . Soit  $\varrho \in \text{Cont}_C(X)$  telle que  $p(z) \in U_\varrho$ . Posons  $u := \varrho(p(z))^{-1} \in C_*^{p(z)}$ . On a ainsi  $p(\Phi(u, 1)) = \beta(u) = p(z)$ . Il existe donc un unique  $g \in G$  tel que  $\Phi(u, g) = \Phi(u, 1) \cdot g = z$ .

•  $\Phi$  est injective : Supposons que  $\Phi(u, g) = \Phi(\bar{u}, \bar{g})$ . On a donc  $\bar{u} = uc$  avec  $c := u^{-1}\bar{u} \in \Omega_C$  et

$$\Phi(\bar{u}, \bar{g}) = w(u, c, *) \cdot \bar{g} = w(u, w(c, *)) \cdot \bar{g} = w(u, *) \cdot (h(c)\bar{g}).$$

Comme d'autre part

$$\Phi(\bar{u}, \bar{g}) = \Phi(u, g) = w(u, *) \cdot g,$$

il s'ensuit que  $g = h(c)\bar{g}$ . Dans  $C_* \times_{\Omega_C} G$ , on aura ainsi les égalités

$$(\bar{u}, \bar{g}) = (uc, \bar{g}) = (u, h(c)\bar{g}) = (u, g).$$

•  $\Phi$  est un homéomorphisme : Soit  $\varrho \in \text{Cont}_C(X)$ . Avec les trivialisations  $\psi_\varrho$  et  $\hat{\psi}_\varrho$  introduites en (1) et (2), l'application

$$\Phi_\varrho := \psi_\varrho \circ \Phi \circ \hat{\psi}_\varrho^{-1} : U_\varrho \times (\Omega_C \times_{\Omega_C} G) \rightarrow U_\varrho \times G$$

s'écrit  $\Phi_\varrho(x, (c, g)) = (x, h(c)g)$ . L'application  $\Phi_\varrho$  est donc un homéomorphisme pour tout  $\varrho$ , ce qui implique que  $\Phi$  est un homéomorphisme.

*Preuve du théorème d'existence.* Supposons que  $\xi$  admette une représentation  $w$  de  $C$ . Par le point (b) du théorème A,  $\xi$  est obtenu du fibré  $\xi_C$  par la construction de Borel avec l'holonomie  $h^w$ . Cela implique que  $\nu_\xi$  est homotope à  $Bh^w \circ \nu_C$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe un homomorphisme continu  $\phi : \Omega_C \rightarrow G$  tel que  $\nu_\xi$  est homotope à  $B\phi \circ \nu_C$ . L'espace total du fibré induit  $\nu_x i^*(EG)$  est de la forme  $C_* \times_{\Omega_C} G$  et admet donc la représentation  $w(c, [u, g]) = [cu, g]$ . Le fibré  $\nu_x i^*(EG)$  étant isomorphe à  $\xi$ , cela donne une représentation de  $C$  sur  $\xi$ . ■

**3. Structures uniformes sur  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{R}(C, \xi)$ .** Dans ce paragraphe,  $\xi : E \xrightarrow{p} X$  désigne un  $G$ -fibré principal numérisable et  $\mathcal{G}$  son groupe de jauge, muni de la CO-topologie. Le fait que  $\mathcal{G}$  est un groupe topologique est non-trivial, car  $E$  n'est même pas supposé localement compact. Pour démontrer ce fait, nous allons, lorsque  $G$  est SIN, munir  $\mathcal{G}$  d'une structure uniforme  $U_\mathcal{G}$ , dont on montrera, si  $X$  est séparé, qu'elle induit la CO-topologie (proposition 3.5). La même stratégie sera utilisée pour l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{R}(C, \xi)$ .

Pour décrire  $U_\mathcal{G}$ , considérons l'application continue  $\gamma : E \times_X E \rightarrow G$  définie par l'équation

$$(5) \quad y = z \cdot \gamma(y, z), \quad (y, z) \in E \times_X E.$$

Soit  $\mathcal{V}_G$  l'ensemble des ouverts  $V$  de  $G$  contenant l'élément neutre et tels que  $V = V^{-1}$ . Pour  $V \in \mathcal{V}_G$  et  $K$  un compact de  $X$ , on définit

$$\mathcal{O}^G(K, V) := \{(\chi, \tilde{\chi}) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid \gamma(\chi(z), \tilde{\chi}(z)) \in V \text{ pour tout } z \in p^{-1}(K)\}.$$

Comme  $\mathcal{O}^G(K_1, V_1) \cap \mathcal{O}^G(K_2, V_2)$  contient  $\mathcal{O}^G(K_1 \cup K_2, V_1 \cap V_2)$ , la famille  $\mathcal{O}^G(K, V)$  est un système fondamental d'entourages de la diagonale dans  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ , déterminant, par définition, la structure uniforme  $\mathbf{U}_G$  sur  $\mathcal{G}$ .

**PROPOSITION 3.1.** *Si  $G$  est un groupe SIN, le groupe de jauge  $\mathcal{G}$ , muni de la structure uniforme  $\mathbf{U}_G$ , est un groupe topologique. De plus,  $\mathcal{G}$  est alors SIN.*

*Preuve.* Nous allons tout d'abord démontrer que la multiplication  $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  et le passage à l'inverse sont uniformément continus. La topologie induite par  $\mathbf{U}_G$  fera donc de  $\mathcal{G}$  un groupe topologique dont on vérifiera directement qu'il est SIN.

Soient  $\chi_1, \chi_2, \tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2$  des éléments de  $\mathcal{G}$ . Par définition de l'application  $\gamma : E \times_X E \rightarrow G$ , on a, pour  $z \in E$ ,

$$\tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi}_2(z) = \chi_1 \circ \chi_2(z) \cdot \gamma(\tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi}_2(z), \chi_1 \circ \chi_2(z)).$$

Par  $G$ -équivariance des transformations de jauge, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi}_2(z) &= \tilde{\chi}_1(\chi_2(z) \cdot \gamma(\tilde{\chi}_2(z), \chi_2(z))) = \tilde{\chi}_1(\chi_2(z)) \cdot \gamma(\tilde{\chi}_2(z), \chi_2(z)) \\ &= \chi_1(\chi_2(z)) \cdot \gamma(\tilde{\chi}_1(\chi_2(z)), \chi_1(\chi_2(z))) \cdot \gamma(\tilde{\chi}_2(z), \chi_2(z)). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\gamma(\tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi}_2(z), \chi_1 \circ \chi_2(z)) = \gamma(\tilde{\chi}_1 \circ \chi_2(z), \chi_1 \circ \chi_2(z)) \gamma(\tilde{\chi}_2(z), \chi_2(z)).$$

Soit  $V \in \mathcal{V}_G$ . Comme  $G$  est un groupe topologique, il existe  $W \in \mathcal{V}_G$  tel que  $W \cdot W \subset V$ . La condition  $(\tilde{\chi}_1 \circ \tilde{\chi}_2, \chi_1 \circ \chi_2) \in \mathcal{O}^G(K, V)$  sera vraie si  $(\tilde{\chi}_1, \chi_1)$  et  $(\tilde{\chi}_2, \chi_2)$  sont dans  $\mathcal{O}^G(K, W)$ . Ceci démontre la continuité uniforme de la composition  $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ .

Pour le passage à l'inverse, soient  $\chi, \tilde{\chi} \in \mathcal{G}$ . Les équations

$$\chi(z) = z \cdot \gamma(\chi(z), z), \quad \tilde{\chi}(z) = z \cdot \gamma(\tilde{\chi}(z), z)$$

donnent

$$\tilde{\chi}(z) = \chi(z) \cdot \gamma(\chi(z), z)^{-1} \cdot \gamma(\tilde{\chi}(z), z),$$

d'où

$$(6) \quad \gamma(\tilde{\chi}(z), \chi(z)) = \gamma(\chi(z), z)^{-1} \gamma(\tilde{\chi}(z), z).$$

Observons que

$$\chi_1(\chi_2(z)) = \chi_1(z) \cdot \gamma(\chi_2(z), z) = z \cdot \gamma(\chi_1(z), z) \cdot \gamma(\chi_2(z), z)$$

et donc

$$(7) \quad \gamma(\chi_1 \circ \chi_2(z), z) = \gamma(\chi_1(z), z) \gamma(\chi_2(z), z).$$



On en déduit que  $\gamma(\chi^{-1}(z), z) = \gamma(\chi(z), z)^{-1}$ . En changeant  $\chi, \tilde{\chi}$  en  $\chi^{-1}, \tilde{\chi}^{-1}$  dans (6), on obtient ainsi

$$(8) \quad \begin{aligned} \gamma(\tilde{\chi}^{-1}(z), \chi^{-1}(z)) &= \gamma(\chi(z), z) \gamma(\tilde{\chi}(z), z)^{-1} \\ &= \gamma(\chi(z), z) \gamma(\tilde{\chi}(z), \chi(z))^{-1} \gamma(\chi(z), z)^{-1}. \end{aligned}$$

Soient  $V \in \mathcal{V}_G$  et  $K$  un compact de  $X$ . Comme  $G$  est SIN, il existe un voisinage invariant  $W$  de l'élément neutre contenu dans  $V$ . En remplaçant au besoin  $W$  par  $W \cup W^{-1}$ , on peut supposer que  $W = W^{-1}$ . Grâce à l'équation (8), si  $(\tilde{\chi}, \chi) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K, W)$ , alors  $(\tilde{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K, V)$ , ce qui prouve la continuité uniforme de  $\chi \mapsto \chi^{-1}$ .

Pour voir que  $\mathcal{G}$  est SIN, on utilise que tout voisinage de  $\text{id}_E$  contient un voisinage du type  $\mathcal{H}(K, W) := \{\chi \mid (\chi, \text{id}_E) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K, W)\}$  où  $K$  est un compact de  $X$  et  $W$  un voisinage invariant de l'élément neutre dans  $G$ . Par la formule (7), on a, pour tout  $\tilde{\chi} \in \mathcal{G}$  et tout  $z \in E$ ,

$$\gamma(\tilde{\chi}^{-1} \circ \chi \circ \tilde{\chi}(z), z) = \gamma(\tilde{\chi}(z), z)^{-1} \gamma(\chi(z), z) \gamma(\tilde{\chi}(z), z).$$

On en déduit immédiatement que  $\mathcal{H}(K, W)$  est  $\mathcal{G}$ -invariant. ■

Définissons  $\text{res} : \mathcal{G} \rightarrow G$  par la formule

$$(9) \quad \chi(\ast) = \ast \cdot \text{res}(\chi).$$

L'équation (7) implique que  $\text{res}$  est un homomorphisme. Le noyau de  $\text{res}$  est évidemment  $\mathcal{G}_1$ . Le groupe  $G$  est muni de sa structure uniforme naturelle : une base d'entourages est donnée par  $\mathcal{O}^V := \{(\tilde{g}, g) \mid \tilde{g}g^{-1} \in V\}$ . On obtient la même structure uniforme avec la condition  $\tilde{g}^{-1}g \in V$  lorsque  $G$  est SIN.

**PROPOSITION 3.2.** *Si  $G$  est SIN, l'homomorphisme  $\text{res}$  est uniformément continu. Si  $G$  est connexe par arcs,  $\text{res}$  est surjectif.*

*Preuve.* Pour tout  $V \in \mathcal{V}_G$ , on a  $\text{res}(\mathcal{O}^{\mathcal{G}}(\ast, V)) \subset V$ , ce qui prouve la continuité uniforme de  $\text{res}$  (ceci ne semble pas utiliser que  $G$  est SIN mais rappelons que cette condition est nécessaire pour que  $\mathcal{G}$  soit un groupe topologique par la proposition 3.1).

La preuve de la surjectivité de  $\text{res}$  utilise que  $\xi$  est numérisable. Soit  $\mu : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue telle que  $\mu(\ast) \neq 0$  et dont le support est contenu dans un ouvert trivialisant  $U$ . Soit  $\psi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  une trivialisant. Posons  $\psi(z) = (p(z), \delta(z))$ . En divisant  $\mu$  par  $\mu(\ast)$ , on peut supposer que  $\mu(\ast) = 1$ . Soit  $g \in G$ . Comme  $G$  est connexe par arcs, il existe un chemin continu  $g(t)$  avec  $g(0) = e$  et  $g(1) = g$ . On définit alors  $\chi \in \mathcal{G}$  par

$$\chi(z) := \begin{cases} \psi^{-1}(p(z), g(\mu(p(z)))) \delta(z) & \text{si } p(z) \in U, \\ z & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que  $\text{res}(\chi) = g$ . ■

Nous allons maintenant munir l'espace  $\mathcal{R}(C, \xi)$  des représentations de  $C$  sur  $\xi$  de la structure uniforme  $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}(C, \xi)$  dont une base d'entourages est

donnée par

$$\mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L, V) :=$$

$$\{(w, \tilde{w}) \in \mathcal{R}(C, \xi) \times \mathcal{R}(C, \xi) \mid \gamma(w(c, z), \tilde{w}(c, z)) \in V, \forall (c, z) \in L \times_X E\}$$

où  $V \in \mathcal{V}_G$  et  $L$  est un compact de  $C$ .

**PROPOSITION 3.3.** *L'action  $\mathcal{R}(C, \xi) \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{R}(C, \xi)$  est uniformément continue.*

*Preuve.* Soient  $\chi, \tilde{\chi} \in \mathcal{G}$  et  $w, \tilde{w} \in \mathcal{R}(C, \xi)$ . Pour  $(c, z) \in C \times_X E$ , on démontre, comme dans la preuve de la proposition 3.1, que  $\gamma(\tilde{w}^{\tilde{\chi}}(c, z), w^{\chi}(c, z))$  est le produit  $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$  avec

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma(\tilde{\chi}^{-1}(w(c, \chi(z))), \chi^{-1}(w(c, \chi(z)))), \\ \gamma_2 &= \gamma(\tilde{w}(c, \chi(z)), w(c, \chi(z))), \\ \gamma_3 &= \gamma(\tilde{\chi}(z), \chi(z)). \end{aligned}$$

Soient  $L$  un compact de  $C$  et  $V \in \mathcal{V}_G$ . Si  $W \in \mathcal{V}_G$  est  $G$ -invariant et satisfait  $W \cdot W \cdot W \subset V$ , cela prouve, en utilisant la formule (8), que si  $(\tilde{\chi}, \chi) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(\alpha(L), W) \cap \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(\beta(L), W)$  et  $(\tilde{w}, w) \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L, W)$ , alors  $(\tilde{w}^{\tilde{\chi}}, w^{\chi}) \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L, V)$ . ■

Enfin, l'espace  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$  peut être muni d'une structure uniforme  $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}$  ayant pour base d'entourages

$$\mathcal{O}^{\mathcal{R}}(K, V) := \{(h, \tilde{h}) \in \mathcal{R}(\Omega_C, G) \times \mathcal{R}(\Omega_C, G) \mid \tilde{h}(c)h(c^{-1}) \in V, \forall c \in K\}$$

où  $V \in \mathcal{V}_G$  et  $K$  est un compact de  $\Omega_C$ .

**PROPOSITION 3.4.** *Si  $G$  est SIN, l'action de  $G$  sur  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$  par conjugaison est uniformément continue.*

*Preuve.* Soit  $V \in \mathcal{V}_G$ . Soit  $W \in \mathcal{V}_G$  tel que  $W$  soit  $G$ -invariant et que  $W \cdot W \cdot W \subset V$ . Soient  $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{R}(\Omega_C, G)$  et  $g, \tilde{g} \in G$ . Soient  $L$  un compact de  $\Omega_C$  et  $c \in L$ . La formule

$$(\tilde{g}^{-1}\tilde{\varphi}(c)\tilde{g})(g^{-1}\varphi(c)g)^{-1} = \tilde{g}^{-1}\tilde{\varphi}(c)(\tilde{g}g^{-1})\tilde{\varphi}^{-1}(c)(\tilde{\varphi}(c)\varphi^{-1}(c))\tilde{g}(\tilde{g}^{-1}g)$$

montre que  $\tilde{g}\tilde{g}^{-1} \in W$  et  $(\tilde{\varphi}, \varphi) \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L, W)$  impliquent que  $(\tilde{g}^{-1}\tilde{\varphi}\tilde{g}, g^{-1}\varphi g) \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L, V)$ . ■

Nous terminons ce paragraphe en montrant que les structures uniformes considérées induisent la CO-topologie. Rappelons que, par définition, une sous-base de la CO-topologie sur l'espace fonctionnel  $\text{map}(X, Y)$  est formée des ensembles  $\text{CO}(K, U) := \{f \in \text{map}(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$ , où  $K$  parcourt l'ensemble des compacts de  $X$  et  $U$  celui des ouverts de  $Y$ .

**PROPOSITION 3.5.** *Si  $G$  est SIN et  $X$  est un espace séparé, les topologies sur  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{R}(C, \xi)$  et  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$  induites par les structures uniformes  $\mathbf{U}_{\mathcal{G}}$ ,  $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}(C, \xi)$  et  $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}$  coïncident avec la CO-topologie.*

Nous aurons besoin d'un analogue du lemme de Lebesgue (voir aussi [Bo, II.4.3]) :

**LEMME 3.6.** *Soit  $f : K \rightarrow E$  une application continue d'un compact dans l'espace total de  $\xi$ . Soit  $U$  un ouvert de  $E$  avec  $f(K) \subset U$ . Alors, il existe  $V \in \mathcal{V}_G$  tel que  $f(K) \cdot V \subset U$ .*

*Preuve.* Pour tout  $z \in K$ , il existe un ouvert  $S_z$  de  $E$  et  $V_z \in \mathcal{V}_G$  tels que  $f(z) \in S_z \subset U$  et  $S_z$  est de la forme  $\sigma(p(S_z)) \times (f(z) \cdot V_z \cdot V_z)$ , où  $\sigma$  est une section locale de  $\xi$  au voisinage de  $p(f(z))$ . Comme  $K$  est compact, on a  $f(K) = \bigcup_{z \in K_0} S_z$  pour un sous-ensemble fini  $K_0$  de  $K$ . Soit  $V := \bigcap_{z \in K_0} V_z \in \mathcal{V}_G$ . Alors, pour tout  $z \in K$ , on a  $f(z) \cdot V \subset U$ . En effet, il existe  $y \in K_0$  tel que  $f(z) \in f(y)\dot{V}_y$ , d'où

$$f(z)\dot{V} \subset f(y) \cdot V_y \cdot V \subset f(y) \cdot V_y \cdot V_y \subset U. \blacksquare$$

*Preuve de 3.5.* L'affirmation pour  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)$  est un fait classique pour les applications dans un espace uniforme [Bo, X.3.4, théorème 2].

*Preuve pour  $\mathcal{G}$ .* Rappelons qu'une sous-base d'ouverts pour la topologie induite par  $\mathbf{U}_G$  est formée des ensembles

$$\mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, V)(\chi) := \{\tilde{\chi} \in \mathcal{G} \mid (\chi, \tilde{\chi}) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, V)\},$$

où  $L$  est un compact de  $X$ ,  $V \in \mathcal{V}_G$  et  $\chi \in \mathcal{G}$ . Il s'agit de comparer ces ouverts à ceux de la CO-topologie sur  $\mathcal{G}$ .

Soient  $\chi \in \mathcal{G}$ ,  $K$  un compact de  $E$  et  $U$  un ouvert de  $E$  tels que  $\chi(K) \subset U$ . Par le lemme 3.6, il existe  $V \in \mathcal{V}_G$  tel que  $\chi(K) \cdot V \subset U$ . On a  $\chi \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(p(K), V)(\chi) \subset \text{CO}(K, U)$  (observons que  $p(K)$  est compact puisque  $X$  est séparé).

Réciproquement, soient  $\chi \in \mathcal{G}$ ,  $L$  un compact de  $X$  et  $V \in \mathcal{V}_G$ . Il faut trouver un ouvert  $\Sigma$  pour la CO-topologie tel que  $\chi \in \Sigma \subset \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, V)(\chi)$ . Comme  $G$  est SIN, il existe  $W \in \mathcal{V}_G$  qui est  $G$ -invariant avec  $W \subset V$ .

Considérons tout d'abord le cas où  $L$  est contenu dans un ouvert  $Y$  de  $X$  au-dessus duquel  $\xi$  admet une section  $\sigma$ . L'ensemble  $\chi(\sigma(L)) \cdot W$  est un ouvert de  $p^{-1}(L)$ . Il existe donc un ouvert  $U$  de  $E$  tel que  $\chi(\sigma(L)) \cdot W = U \cap p^{-1}(L)$ . Soit  $\tilde{\chi} \in \text{CO}(\sigma(L), U)$ . Si  $z \in p^{-1}(L)$ , il existe  $g \in G$  tel que  $z = \sigma(p(z)) \cdot g$ . La  $G$ -équivariance de  $\tilde{\chi}$  donne, pour tout  $u \in E$ , la formule

$$(10) \quad \gamma(\tilde{\chi}(u \cdot g), \chi(u \cdot g)) = g^{-1}\gamma(\tilde{\chi}(u), \chi(u))g.$$

Comme  $W$  est  $G$ -équivalent, la formule (10) appliquée à  $u := \sigma(p(z))$  entraîne que  $\gamma(\tilde{\chi}(z), \chi(z)) \in W$ , ce qui prouve que  $\chi \in \text{CO}(\sigma(L), U) \subset \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, V)(\chi)$ .

Dans le cas général on recouvre  $L$  par un nombre fini d'ouverts trivialisants,  $L \subset Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ , au-dessus desquels on choisit des sections  $\sigma_i$  de  $\xi$ . On choisit des compacts  $L_i \subset L \cap Y_i$  tels que  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ . En

construisant, comme ci-dessus, les  $\chi(\sigma_i(L_i)) \cdot W \subset U_i$ , on aura

$$\chi \in \bigcap_{i=1}^n \text{CO}(\sigma_i(L_i), U_i) \subset \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, W)(\chi) \subset \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(L, V)(\chi). \blacksquare$$

*Preuve pour  $\mathcal{R}(C, \xi)$ .* Soit  $w \in \mathcal{R}(C, \xi)$ . Soient  $L$  un compact de  $C \times_X E$  et  $U$  un ouvert de  $E$  tel que  $w(L) \subset U$ . Par le lemme 3.6, il existe  $V \in \mathcal{V}_G$  tel que  $w(L) \cdot V \subset U$  et l'on a  $w \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L, V)(w) \subset \text{CO}(L, U)$ .

Réciproquement, soient  $w \in \mathcal{R}(C, \xi)$ ,  $K$  un compact de  $C$  et  $V \in \mathcal{V}_G$ . Comme  $G$  est SIN, il existe  $W \in \mathcal{V}_G$  qui est  $G$ -invariant avec  $W \subset V$ . Considérons tout d'abord le cas où  $\alpha(K)$  est contenu dans un ouvert  $Y$  de  $X$  au-dessus duquel  $\xi$  admet une section  $\sigma$ . L'ensemble  $w(\sigma(\alpha(K))) \cdot W$  est un ouvert de  $p^{-1}(\beta(K))$ . Il existe donc un ouvert  $U$  de  $E$  tel que  $w(\sigma(\alpha(K))) \cdot W = U \cap p^{-1}(L)$ . On démontre, comme dans la preuve pour  $\mathcal{G}$  ci-dessus, que  $w \in \text{CO}(\sigma(\alpha(K)), U) \subset \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K, V)(w)$ . Le cas général s'obtient aussi comme dans la preuve pour  $\mathcal{G}$ .  $\blacksquare$

**4. Groupe de jauge et classifiant de Milnor.** Les résultats de ce paragraphe seront utilisés pour la preuve du théorème D et les techniques se retrouveront dans la preuve du théorème C.

Soient  $\xi : E \xrightarrow{p} X$  et  $\eta : A \xrightarrow{\bar{p}} B$  deux  $G$ -fibrés principaux numéri-sables. Tous les espaces sont pointés. Désignons par  $\text{Map}_{\bullet G}^{\bullet}(E, A)$  l'espace des applications continues pointées  $G$ -équivariantes de  $E$  dans  $A$ , muni de la CO-topologie. Le passage au quotient donne une application  $q : \text{Map}_{\bullet G}^{\bullet}(E, A) \rightarrow \text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$  où  $\text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$  est l'espace des applications continues pointées  $h : X \rightarrow B$  telles que  $h^* \eta \approx \xi$ , muni de la CO-topologie. Le groupe de jauge  $\mathcal{G}_1$  de  $\xi$  agit à droite sur  $\text{Map}_{\bullet G}^{\bullet}(E, A)$  par pré-composition et  $q(f \circ \chi) = q(f)$ .

**THÉORÈME 4.1.** *Supposons que  $X$  est localement compact, que l'espace  $\text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$  est semi-localement contractile et que  $G$  est SIN. Alors, l'application  $q : \text{Map}_{\bullet G}^{\bullet}(E, A) \rightarrow \text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$  est un  $\mathcal{G}_1$ -fibré principal.*

Pour démontrer le théorème 4.1, on utilise, dans l'esprit du §3, une sous-base particulière de la CO-topologie sur  $\text{Map}_{\bullet G}^{\bullet}(E, A)$ . Considérons l'ensemble  $\mathcal{T}$  des applications  $G$ -équivariantes  $\tau : \bar{p}^{-1}(U_{\tau}) \rightarrow G$  où  $U_{\tau}$  est un ouvert de  $B$ . Comme  $\eta$  est un  $G$ -fibré principal, la collection  $\{U_{\tau} \mid \tau \in \mathcal{T}\}$  est un recouvrement ouvert de  $B$ . Soit  $f \in \text{Map}_{\bullet G}^{\bullet}(E, A)$ . Soient  $K$  un compact de  $X$  et  $\tau \in \mathcal{T}$  tels que  $f(p^{-1}(K)) \in \bar{p}^{-1}(U_{\tau})$ . Soit encore  $V \in \mathcal{V}_G$ . On définit  $\mathbf{W}(f, K, \tau, V)$  comme l'ensemble des  $\tilde{f} \in \text{Map}_{\bullet G}^{\bullet}(E, A)$  telles que, pour tout  $z \in p^{-1}(K)$ , on ait  $\bar{p} \circ \tilde{f}(z) \subset U_{\tau}$  et  $\tau(\tilde{f}(z)) \in \tau(f(z)) \cdot V$ .

**LEMME 4.2.** *Si  $G$  est SIN, les ensembles  $\mathbf{W}(f, K, \tau, V)$  forment une sous-base de la CO-topologie sur  $\text{Map}_{\bullet G}^{\bullet}(E, A)$ .*

*Preuve.* Appelons  $\mathbf{T}$  la topologie engendrée par les  $\mathbf{W}(f, K, \tau, V)$  et  $\mathbf{T}_{\text{co}}$  la CO-topologie. Pour  $L$  un compact de  $E$  et  $S$  un ouvert de  $A$ , notons  $\text{CO}(L, S) := \{h \in \text{Map}_{\mathbf{G}}^{\bullet}(E, A) \mid h(L) \subset S\}$ . Les ensembles  $\text{CO}(L, S)$  forment la sous-base standard de  $\mathbf{T}_{\text{co}}$ .

Soit  $\mathbf{W}(f, K, \tau, V)$ . Soit  $\sigma : U_{\tau} \rightarrow A$  une section de  $\eta$  restreinte à  $U_{\tau}$ . Comme l'application quotient  $q(f) \in \text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$  envoie  $K$  dans  $U_{\tau}$ , le fibré  $\xi$  admet une section  $\widehat{\sigma}$  au-dessus de  $K$  telle que  $f \circ \widehat{\sigma} = \sigma \circ q(f)$ . Soient  $L := \widehat{\sigma}(K)$  et  $S := \sigma(U) \cdot W$  où  $W \in \mathcal{V}_G$  est  $G$ -invariant et contenu dans  $V$ . Soit  $\widetilde{f} \in \text{CO}(L, S)$ . Si  $z \in p^{-1}(K)$ , on a  $z = z_0 \cdot g$  avec  $z_0 := \widehat{\sigma}(p(z)) \in L$  et

$$\widetilde{f}(z) := \widetilde{f}(z_0) \cdot g \in f(z_0) \cdot W \cdot g = f(z_0) \cdot g \cdot (g^{-1}Wg) = f(z) \cdot W.$$

Ceci montre que  $f \in \text{CO}(L, S) \subset \mathbf{W}(f, K, \tau, V)$  et donc  $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}_{\text{co}}$ .

Réciproquement, soient  $L$  un compact de  $E$  et  $S$  un ouvert de  $A$  avec  $f(L) \subset S$ . Supposons tout d'abord que  $S = S(\tau, V) := \sigma(U_{\tau}) \times V$  pour  $V \in \mathcal{V}_G$  et  $\sigma$  la section de  $\eta$  restreint à  $U_{\tau}$  telle que  $\tau \circ \sigma(y) = e$ , l'élément neutre de  $G$ . On a donc  $\tau \circ f(L) \subset V$ . Par l'analogie du lemme de Lebesgue [Bo, II.4.3], il existe  $W \in \mathcal{V}_G$  tel que  $\tau(f(z)) \cdot W \subset V$  pour tout  $z \in K$ . Il est alors clair que  $f \in \mathbf{W}(f, p(L), \tau, W) \subset \text{CO}(L, S)$ .

Comme les ouverts  $S(\tau, V)$  forment une base de la topologie de  $A$ , on aura, en général,

$$\text{CO}(L, S) = \bigcap_{i=1}^m \text{CO}(L_i, S(\tau_i, V_i)) \supset \bigcap_{i=1}^m \mathbf{W}(f, p(L_i), \tau_i, W_i) \ni f.$$

On a ainsi prouvé  $\mathbf{T} \supset \mathbf{T}_{\text{co}}$ . ■

*Preuve du théorème 4.1*

4.3. *Principe de la démonstration.* On va montrer que :

1. L'application  $q$  est continue,  $\mathcal{G}_1$ -équivariante et induit une injection de  $\text{Map}_{\mathbf{G}}^{\bullet}(E, A)/\mathcal{G}_1$  dans  $\text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$ .
2. L'action  $\text{Map}_{\mathbf{G}}^{\bullet}(E, A) \times \mathcal{G}_1 \rightarrow \text{Map}_{\mathbf{G}}^{\bullet}(E, A)$  est libre et continue.
3. Si  $f_1, f_2 \in \text{Map}_{\mathbf{G}}^{\bullet}(E, A)$  satisfont  $q(f_1) = q(f_2)$ , les points 1 et 2 donnent un unique  $\delta(f_1, f_2) \in \mathcal{G}_1$  tel que  $f_2 = f_1 \circ \delta(f_1, f_2)$ . Ceci définit une application  $\delta : \text{Map}_{\mathbf{G}}^{\bullet}(E, A) \times_{\text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}} \text{Map}_{\mathbf{G}}^{\bullet}(E, A) \rightarrow \mathcal{G}_1$ . On démontre que  $\delta$  est continue.
4. L'application  $q$  admet des sections locales continues.

Les points ci-dessus permettent de démontrer que  $q$  est un  $\mathcal{G}_1$ -fibré principal. En effet, pour construire des trivialisations locales, on choisit une section continue  $s : T \rightarrow \text{Map}_{\mathbf{G}}^{\bullet}(E, A)$  de  $q$  au-dessus d'un ouvert  $T$  de  $\text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$ . La correspondance  $(f, \chi) \mapsto s(f) \circ \chi$  donne une bijection continue  $\mathcal{G}_1$ -équivariante  $\tau : T \times \mathcal{G}_1 \rightarrow q^{-1}(T)$ . Son inverse  $\tau^{-1}(\widetilde{f}) = (q(\widetilde{f}), \delta(s(q(\widetilde{f})), \widetilde{f}))$  étant continue par le point 3, l'application  $\tau$  est un homéomorphisme.

4.4. *L'application  $q : \text{Map}_{\mathcal{G}}^{\bullet}(E, A) \rightarrow \text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$  est continue.* Soit  $f \in \text{Map}_{\mathcal{G}}^{\bullet}(E, A)$ . Soient  $K$  un compact de  $X$  et  $U$  un ouvert de  $B$  avec  $q(f) \in \text{CO}(K, U)$ . On peut écrire  $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$  où  $K_i$  est un compact contenu dans le domaine de définition d'une section locale  $\sigma_i$  de  $\xi$ . On a alors

$$q\left(\bigcap_{i=1}^m \text{CO}(\sigma_i(K_i), p^{-1}(U))\right) \subset \bigcap_{i=1}^m \text{CO}(K_i, U) = \text{CO}(K, U).$$

4.5. *L'action  $\text{Map}_{\mathcal{G}}^{\bullet}(E, A) \times \widehat{\mathcal{G}}_1 \rightarrow \text{Map}_{\mathcal{G}}^{\bullet}(E, A)$  est libre et continue.* Il est banal que cette action est libre. Soit  $(f, \chi) \in \text{Map}_{\mathcal{G}}^{\bullet}(E, A) \times \widehat{\mathcal{G}}_1$ . Considérons un voisinage de  $f \circ \chi$  de la forme  $\mathbf{W}(f \circ \chi, K, \tau, V)$ . Soit  $W \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}$  tel que  $W \cdot W \subset V$ . Comme dans la preuve de la proposition 3.1, on vérifie que  $\tilde{f} \circ \tilde{\chi} \in \mathbf{W}(f \circ \chi, K, \tau, V)$  si  $\tilde{f} \in \mathbf{W}(f, K, \tau, W)$  et  $(\tilde{\chi}, \chi) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}}(K, W)$ .

4.6. *L'application  $q$  induit une injection continue de  $\text{Map}_{\mathcal{G}}^{\bullet}(E, A)/\widehat{\mathcal{G}}_1$  dans  $\text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$ .* Il est clair que  $q$  est  $\mathcal{G}$ -invariante. Supposons que  $q(f_1) = q(f_2) =: f$ . On a alors des uniques isomorphismes  $\tilde{f}_i : E \xrightarrow{\sim} E(f^*\eta)$ , ( $i = 1, 2$ ). La composition  $\phi := \tilde{f}_2^{-1} \circ \tilde{f}_1$  est un élément de  $\mathcal{G}$  et  $f_1 = f_2 \circ \phi$ . (Observons que  $q$  est évidemment surjective. Nous omettons ce fait car il est redonné par le point 4.8. Cette économie sera avantageuse dans la preuve du théorème B.)

4.7. *Continuité de l'application  $\delta$ .* Soient  $f_1, f_2 \in \text{Map}_{\mathcal{G}}^{\bullet}(E, A)$  telles que  $f_2 = f_1 \circ \chi$ . Il s'agit de montrer que  $\chi$  dépend continûment du couple  $(f_1, f_2)$ . Soient  $K$  un compact de  $X$  et  $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ . Soit  $W \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}$  tel que  $W \cdot W \subset V$ . Supposons tout d'abord qu'il existe  $\tau$  telle que  $K \subset f_1^{-1}(U_{\tau}) \cap f_2^{-1}(U_{\tau})$ . Soient  $\tilde{f}_i \in \mathbf{W}(f_i, K, \tau, W)$  ( $i = 1, 2$ ) avec  $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 \circ \tilde{\chi}$ . Pour  $z \in p^{-1}(K)$ , on a

$$\tau(\tilde{f}_2(z)) \in \tau(f_2(z)) \cdot W = \tau(f_1(\chi(z))) \cdot W \in \tau(\tilde{f}_1(\chi(z))) \cdot W \cdot W.$$

D'autre part,

$$\tau(\tilde{f}_2(z)) = \tau(\tilde{f}_1(\tilde{\chi}(z))) = \tau(\tilde{f}_1(\chi(z)))\gamma(\tilde{\chi}(z), \chi(z)).$$

Comme  $V = V^{-1}$ , on aura  $\tilde{\chi}(z) \in \chi(z) \cdot V$ . Dans le cas général, on utilise que  $K$  est une réunion finie de compacts  $K_i$  tels que  $K_i \subset f_1^{-1}(U_{\tau_i}) \cap f_2^{-1}(U_{\tau_i})$ .

4.8. *Construction de sections locales.* Nous allons construire une section locale au-dessus de chaque ouvert  $T$  de  $\text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$  dont l'inclusion  $T \subset \text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$  est contractile. On suppose donc qu'il existe une application  $H : I \times T \rightarrow \text{Map}^{\bullet}(X, B)_{\xi}$ , où  $I = [0, 1]$ , telle que  $H(0, f) = f$  et  $H(1, f) = f_1$ . Comme  $X$  est localement compact,  $H$  donne naissance à une application continue  $h : I \times T \times X \rightarrow B$  [Du, p. 261] telle que  $h(t, f, *) = *$ . Désignons par  $h_t : T \times X \rightarrow B$  l'application continue  $h_t(f, x) = h(t, f, x)$  et par  $\mathcal{E}_t$

l'espace total du fibré induit sur  $T \times X$  par  $h_t : \mathcal{E}_t := E(h_t^* \eta)$ . Vu que  $h_t(f, *) = *$ , l'espace  $\mathcal{E}_t$  est pointé par  $(*, \tilde{*})$ .

Comme  $\eta$  est numérisable, le relèvement des homotopies donne un isomorphisme de  $G$ -fibrés pointés de  $h_1^* \eta$  sur  $h_0^* \eta$ . D'autre part, on a des isomorphismes de  $G$ -fibrés pointés  $h_1^* \eta \approx T \times f_1^* \eta \approx T \times \xi$ . Tout ceci forme un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} T \times E & \xrightarrow{\approx} & T \times E(h_1^* \eta) & \xrightarrow{\approx} & \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\approx} & \mathcal{E}_0 \longrightarrow A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T \times X & \xrightarrow{\text{id}} & T \times X & \xrightarrow{\text{id}} & T \times X & \xrightarrow{\text{id}} & T \times X \xrightarrow{h_0} B \end{array}$$

Comme  $\text{Map}_G^\bullet(E, A)$  est munie de la CO-topologie, la ligne supérieure détermine une application continue  $T \rightarrow \text{Map}_G^\bullet(E, A)$  au-dessus de l'inclusion  $T \subset \text{Map}^\bullet(X, B)_\xi$ , c'est-à-dire une section locale continue au-dessus de  $T$ .

Par 4.8, la démonstration du théorème 4.1 est ainsi terminée. De la même manière, on démontre le résultat analogue pour les applications non-pointées  $q : \text{Map}_G(E, A) \rightarrow \text{Map}(X, B)_\xi$  :

**THÉORÈME 4.9.** *Supposons que  $X$  est localement compact, que l'espace  $\text{Map}(X, B)_\xi$  est semi-localement contractile et que  $G$  est SIN. Alors, l'application  $q : \text{Map}_G(E, A) \rightarrow \text{Map}(X, B)_\xi$  est un  $\mathcal{G}$ -fibré principal.*

Le cas particulier où  $\eta$  est le fibré de Milnor  $EG \rightarrow BG$  est intéressant à cause de la proposition suivante, utilisée pour démontrer le théorème D :

**PROPOSITION 4.10.** *Soit  $\xi$  un  $G$ -fibré principal numérisable sur  $X$ . Alors, l'espace  $\text{Map}_G(E, EG)$  est contractile. Si, de plus,  $X$  est localement compact et que l'inclusion  $\{*\} \subset X$  soit une cofibration,  $\text{Map}_G^\bullet(E, EG)$  est faiblement contractile (i.e. ses groupes d'homotopie sont ceux d'un point).*

*Preuve.* La preuve habituelle que deux applications  $G$ -équivariantes  $f_0, f_1 : E \rightarrow EG$  sont toujours homotopes fournit une homotopie canonique entre  $f_0$  et  $f_1$ , qui dépend continûment de  $(f_0, f_1)$  (voir [Hu, prop. 12.3]). L'espace  $\text{Map}_G(E, EG)$  est donc contractile (convexe), de même que  $EG = \text{Map}_G(G, EG)$ . Pour montrer l'assertion sur  $\text{Map}_G^\bullet(E, EG)$ , il suffit de montrer que la suite

$$\text{Map}_G^\bullet(E, EG) \hookrightarrow \text{Map}_G(E, EG) \xrightarrow{\text{ev}} EG$$

est, avec nos hypothèses sur  $X$ , une fibration de Hurewicz, où  $\text{ev}$  est l'évaluation sur le point base  $\tilde{*}$ .

Soient  $f : A \rightarrow \text{Map}_G(E, EG)$  une application continue et  $F_\# : [0, 1] \times A \times \{\tilde{*}\} \rightarrow EG$  une homotopie de  $\text{ev} \circ f$ . Par passage au quotient, on obtient  $\tilde{f} : A \rightarrow \text{Map}(X, BG)$  et  $\tilde{F} : [0, 1] \times A \times \{*\} \rightarrow BG$ . Comme  $X$  est localement compact, ces applications induisent des applications continues  $\tilde{f}^\sim : A \times X \rightarrow BG$  et  $\tilde{F}_* : [0, 1] \times A \times \{*\} \rightarrow BG$ . Étant équivariante,

l'application induite  $f^\sim : A \times E \rightarrow EG$  est donc aussi continue (bien que  $E$  ne soit pas supposé localement compact).

Comme  $* \subset X$  est une cofibration, il existe une rétraction de  $[0, 1] \times X$  sur  $\{0\} \times X \cup [0, 1] \times \{*\}$  qui permet d'étendre  $\bar{F}_*$  en  $\bar{F}^\sim : [0, 1] \times A \times X \rightarrow BG$ . Ceci prouve que  $\text{Map}^\bullet(X, BG) \rightarrow \text{Map}(X, BG) \rightarrow BG$  est une fibration de Hurewicz. Par relèvement des homotopies, l'espace total du fibré induit sur  $[0, 1] \times A \times X$  par  $\bar{F}^\sim$  est  $G$ -homéomorphe à  $[0, 1] \times A \times E$ , ce qui produit une homotopie  $F^\sim : [0, 1] \times A \rightarrow \text{Map}_G(E, EG)$  partant de  $f$  et au-dessus de  $F$ . ■

4.11. REMARQUE. On déduit de 4.1, 4.9 et 4.10 que  $\pi_i(\text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi) \approx \pi_i(B\mathcal{G}_1)$  et  $\pi_i(\text{Map}(X, BG)_\xi) \approx \pi_i(B\mathcal{G})$ . Nous ne savons pas, en général, si ces isomorphismes sont induits par une application  $\text{Map}(X, BG)_\xi \rightarrow B\mathcal{G}$ . Observons que des résultats analogues ont été obtenus dans d'autres contextes ([DDK], [DK, prop. 5.1.4]).

## 5. Preuve des théorèmes B, C et D

### Préparatifs

5.1. *Continuité des foncteurs de Milnor.* Nous aurons besoin de savoir que les foncteurs  $E$  et  $B$  de Milnor sont continus, ce qui ne semble pas figurer dans la littérature :

LEMME 5.2. *Soit  $\mathcal{R}(F, G)$  l'espace des homomorphismes continus entre les groupes topologiques  $F$  et  $G$ . Supposons que  $F$  est séparé. Alors les applications*

$$E : \mathcal{R}(F, G) \rightarrow \text{Map}_F^\bullet(EF, EG) \quad (\phi \mapsto E\phi)$$

et

$$B : \mathcal{R}(F, G) \rightarrow \text{Map}^\bullet(BF, BG) \quad (\phi \mapsto B\phi)$$

sont continues (tous les espaces étant munis de la  $CO$ -topologie).

*Preuve.* Comme l'application  $\text{Map}_F^\bullet(EF, EG) \rightarrow \text{Map}^\bullet(BF, BG)$  est continue (se démontre comme 4.4), il suffit de donner une preuve pour l'application  $E$ .

Rappelons que si  $P$  est un groupe topologique, les éléments de  $EP$  sont représentés par des suites  $(t_j p_j)$ , où  $j \in \mathbb{N}$ ,  $t_j \in [0, 1]$  et  $p_j \in P$ . On désigne par  $\tau_i : EP \rightarrow [0, 1]$  l'application  $\tau_i((t_j p_j)) := t_i$  et par  $\gamma_i : \tau_i^{-1}([0, 1]) \rightarrow P$  l'application  $\gamma_i((t_j p_j)) := p_i$  (on utilise les mêmes notations  $\tau_i$  et  $\gamma_i$  pour tout groupe  $P$ ). L'espace  $EP$  est muni de la topologie la plus grossière telle que les applications  $\tau_i$  et  $\gamma_i$  soient continues. Une sous-base  $\mathcal{S}$  de cette topologie est donc constituée par les ouverts du type

1.  $\tau_i^{-1}(J)$  où  $J$  est un ouvert de  $[0, 1]$ ,
2.  $\gamma_i^{-1}(V)$  où  $V$  est un ouvert de  $P$ .



Soient  $\phi_0 \in \mathcal{R}(F, G)$ ,  $K$  un compact de  $EF$  et  $U$  un ouvert de  $EG$  tels que  $\phi_0(K) \subset U$ . Soit  $\text{CO}(K, U) := \{\alpha \in \text{Map}_F^\bullet(EF, EG) \mid \alpha(K) \subset U\}$ . Il faut montrer que  $E^{-1}(\text{CO}(K, U))$  est un voisinage de  $\phi_0$  dans  $\mathcal{R}(F, G)$ . Il suffit de le faire pour  $U \in \mathcal{S}$  (voir [Bo, X.3.4, remarque 2]).

Si  $U$  est du type 1 ci-dessus, cela ne pose pas de problème. En effet,  $\tau_i \circ E = \tau_i$ , d'où  $E^{-1}(\text{CO}(K, U)) = \mathcal{R}(F, G)$ . Si  $U = \gamma_i^{-1}(V)$  avec  $V$  un ouvert de  $G$ , on pose  $K_i := \gamma_i(K)$  ( $\gamma_i$  est définie sur  $K$  puisque  $\tau_i \circ E = \tau_i$ ). L'espace  $K_i$  est compact puisque  $F$  est séparé. Comme  $\gamma_i \circ E\phi = \phi \circ \gamma_i$ , on a  $\phi_0 \in \text{CO}(K_i, V) \subset E^{-1}(\text{CO}(K, U))$ . ■

5.3. *L'application  $n : \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi \rightarrow \text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$ .* En choisissant une partition de l'unité  $\mu_\varrho$  subordonnée au recouvrement  $U_\varrho$  ( $\varrho \in \text{Cont}_C(X)$ ), on détermine, grâce aux trivialisations  $\widehat{\psi}_\varrho$  de (2), une application classifiante  $\nu_C : X \rightarrow B\Omega_C$  (voir [Hu, ch. 4, prop. 12.1 et th. 12.2]). Il est possible de faire ce choix de manière que  $\nu_C$  soit pointée (le point base de  $EF$ , pour un groupe topologique  $F$ , est toujours la suite  $(1e, 0, 0, \dots)$ , où  $e$  est l'élément neutre de  $F$ ; le point base de  $BF$  est l'image de celui de  $EF$ ). Pour cela, il faut tout d'abord avoir une partition de l'unité dénombrable et trivialisante  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) telle que  $\mu_1(*) = 1$ . Or, une telle partition existe car :

- il existe une partition de l'unité  $\widehat{\mu}_\varrho$  et  $\widehat{\varrho} \in \text{Cont}_C(X)$  tels que  $\widehat{\mu}_{\widehat{\varrho}(x)} = 1$  au voisinage de  $*$ . Pour voir cela, on choisit  $\widehat{\varrho}$  tel que  $\mu_{\widehat{\varrho}}(*) \neq 0$ . On considère une fonction  $\delta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\delta(t) = 0$  si  $t \geq \mu_{\widehat{\varrho}}(*)/2$  et  $\delta(t) > 0$  si  $t < \mu_{\widehat{\varrho}}(*)/2$ . On pose

$$\mu'_\varrho(x) := \begin{cases} \mu_{\widehat{\varrho}}(x) & \text{si } \varrho = \widehat{\varrho}, \\ \delta(\mu_{\widehat{\varrho}}(x))\mu_\varrho(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ces définitions,

$$\widehat{\mu}_\varrho(x) := \frac{\mu'_\varrho(x)}{\sum_\sigma \mu'_\sigma(x)}$$

est une partition de l'unité avec  $\widehat{\mu}_{\widehat{\varrho}(x)} = 1$  au voisinage de  $*$ .

- Le procédé de [Hu, ch. 4, prop. 12.1] fournit, à partir de la partition  $\widehat{\mu}_\varrho$ , une partition de l'unité  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) telle que  $\mu_1(x) = 1$  au voisinage de  $*$ .

On peut supposer que  $\widehat{\varrho}(*) = i_{\widehat{\varrho}(*)}$ . Sinon,  $\widehat{\varrho}(*) = b \in \Omega_C$  et l'on remplace  $\widehat{\varrho}$  par  $b^{-1}\widehat{\varrho}$ . Dans ces conditions, l'application  $\nu_C$  obtenue par [Hu, ch. 4, prop. 12.1] est pointée.

Ayant fixé  $\nu_C \in \text{map}(X, B\Omega_C)$  comme ci-dessus, on définit  $n : \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi \rightarrow \text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  par  $n(\phi) := B\phi \circ \nu_C$ . Comme  $C$  est séparé, l'application  $\phi \mapsto B\phi$  est continue (lemme 5.2), d'où la continuité de  $n$ .

*Preuve du théorème B.* Par le théorème d'existence, on a  $\mathcal{R}(C, \xi) = \emptyset$  si et seulement  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi = \emptyset$ . Dans ce cas, le théorème B est banal. On

suppose donc que  $\mathcal{R}(C, \xi) \neq \emptyset$ . Le théorème A implique que l'image de  $h$  est dans  $\mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi$ . Le principe de la preuve du théorème B est alors le même que celui du théorème 4.1 (voir 4.3).

5.4. *h est continue.* Soit  $w \in \mathcal{R}(C, \xi)$ . Soient  $K$  un compact de  $\Omega_C$  et  $U$  un ouvert de  $G$  tels que  $h^w(K) \subset U$ . En utilisant une trivialisatoin locale de  $\xi$  au voisinage de  $*$ , on peut trouver un ouvert  $\tilde{U}$  de  $E$  tel que  $\tilde{U} \cap E_* = \tilde{*} \cdot U$ . Alors  $w \in \text{CO}(K \times \{\tilde{*}\}, \tilde{U})$  qui est un ouvert de  $\mathcal{R}(C, \xi)$  et  $h(\text{CO}(K \times \{\tilde{*}\}, \tilde{U})) \subset \text{CO}(K, U)$ .

5.5. *L'action  $\mathcal{R}(C, \xi) \times \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{R}(C, \xi)$  est continue et libre.* La continuité, utilisant le fait que  $G$  est SIN, a été démontrée dans la proposition 3.3. Soit  $w \in \mathcal{R}(C, \xi)$  et  $\chi \in \mathcal{G}$ . Si  $\chi \neq \text{id}_E$ , il existe  $z \in E$  tel que  $\chi(z) \neq z$ . Soit  $\theta \in C_{p(z)}^*$ . Comme  $\chi$  restreinte à  $p^{-1}(*)$  est l'identité, on aura  $w^\chi(\theta, z) \neq w(\theta, z)$ , ce qui montre l'assertion 5.5.

5.6.  *$\mathcal{G}$ -invariance de  $h$ .* Soit  $\chi \in \mathcal{G}$ . Posons  $\chi(\tilde{*}) = \tilde{*} \cdot g$ , autrement dit,  $g := \text{res}(\chi)$ . Pour  $c \in \Omega_C$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{*} \cdot h^{(w^\chi)}(c) &= w^\chi(c, \tilde{*}) = \chi^{-1}(w(c, \tilde{*} \cdot g)) = \chi^{-1}(\tilde{*} \cdot h^w(c)) \cdot g \\ &= \chi^{-1}(\tilde{*}) \cdot (h^w(c) g) = \tilde{*} \cdot (g^{-1} h^w(c) g), \end{aligned}$$

d'où

$$(11) \quad h^{(w^\chi)}(c) = \text{res}(\chi)^{-1} h^w(c) \text{res}(\chi)$$

et  $h$  induit des applications

$$\bar{h}_1 : \mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi \quad \text{et} \quad \bar{h} : \mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi/G.$$

5.7. *Injectivité de  $\bar{h}_1$ .* Soient  $w, \tilde{w} \in \mathcal{R}(C, \xi)$  telles que  $h^w = h^{\tilde{w}}$ . Soit  $z \in E$ . Choisissons  $\varrho \in \text{Cont}_C(X)$  tel que  $p(z) \in U_\varrho$  et notons  $\theta := \varrho(p(z)) \in C_{p(z)}^*$ . On définit

$$(12) \quad \chi(z) := \tilde{w}(\theta^{-1}, w(\theta, z)).$$

Nous allons montrer que l'égalité  $h^w = h^{\tilde{w}}$  entraîne que  $\chi(z)$  ne dépend pas du choix de  $\varrho$ . Soit  $\bar{\varrho}$  une autre  $C$ -contraction, donnant  $\bar{\theta}$  et  $\bar{\chi}(z)$ . Rappelons que la fibre  $p^{-1}(*)$  est identifiée à  $G$  par  $g \mapsto \tilde{*} \cdot g$ . Via cette identification,  $G$  agit à gauche sur  $p^{-1}(*)$  et, si  $c \in \Omega_C$  et  $y \in p^{-1}(*)$ , on a  $w(c, y) = h^w(c) \cdot y$ . Avec ces conventions, on a

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(z) &= \tilde{w}(\bar{\theta}^{-1}, w(\bar{\theta}, z)) = \tilde{w}(\bar{\theta}^{-1}, w(\bar{\theta}\theta^{-1}\theta, z)) \\ &= \tilde{w}(\bar{\theta}^{-1}, w(\bar{\theta}\theta^{-1}, w(\theta, z))) = \tilde{w}(\bar{\theta}^{-1}, h^w(\bar{\theta}\theta^{-1}) \cdot w(\theta, z)) \\ &= \tilde{w}(\theta^{-1}\bar{\theta}\bar{\theta}^{-1}, h^w(\bar{\theta}\theta^{-1}) \cdot w(\theta, z)) = \\ &= \tilde{w}(\theta^{-1}, \underbrace{h^{\tilde{w}}(\bar{\theta}\bar{\theta}^{-1})}_{=1} h^w(\bar{\theta}\theta^{-1}) \cdot w(\theta, z)) = \tilde{w}(\theta^{-1}, w(\theta, z)) = \chi(z). \end{aligned}$$

On a ainsi défini une application  $\chi : E \rightarrow E$  qui, par la formule (12), est continue. Son inverse s'obtient en échangeant  $w$  et  $\tilde{w}$ . Les formules  $\chi(z \cdot g) = \chi(z) \cdot g$  pour  $g \in G$  et  $p(\chi(z)) = p(z)$  sont banales. De plus, on a  $\chi(\tilde{*}) = \tilde{*}$ , d'où  $\chi \in \mathcal{G}_1$ .

Voyons maintenant que  $\tilde{w}^\chi = w$ . Soient  $z \in E$  et  $c \in C_{p(z)}$ . Observons que, dans la formule (12), on n'utilise la  $C$ -contraction  $\varrho$  que pour garantir la continuité. La définition de  $\chi(z)$  ne nécessite que l'élément  $\theta \in C_{p(z)}^*$  et  $\chi(z)$  ne dépend pas de  $\theta$ . En choisissant  $\theta$  pour la définition de  $\chi(z)$  et  $\theta c^{-1}$  pour celle de  $\chi^{-1}(\tilde{w}(c, \chi(z)))$ , on aura

$$\begin{aligned} \tilde{w}^\chi(c, z) &= \chi^{-1}(\tilde{w}(c, \chi(z))) = \chi^{-1}(\tilde{w}(c, \tilde{w}(\theta^{-1}, w(\theta, z)))) \\ &= \chi^{-1}(\tilde{w}(c\theta^{-1}, w(\theta, z))) = w(c\theta^{-1}, \tilde{w}(\theta c^{-1}, \tilde{w}(c\theta^{-1}, w(\theta, z)))) \\ &= w(c\theta^{-1}, w(\theta, z)) = w(c, z). \end{aligned}$$

5.8. *L'application  $\delta : \mathcal{R}(C, \xi) \times_{\mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi} \mathcal{R}(C, \xi) \rightarrow \mathcal{G}$  est uniformément continue.* Soient  $V \in \mathcal{V}_G$  et  $K$  un compact de  $X$ . Supposons d'abord que  $K \subset U_\varrho$  pour une  $C$ -contraction  $\varrho \in \text{Cont}_C(X)$ . Comme  $C$  est séparé, les sous-espaces  $L$  et  $L^{-1}$  de  $C$  définis par

$$L := \{\varrho(x) \mid x \in K\} \subset C^* \quad \text{et} \quad L^{-1} := \{\varrho(x)^{-1} \mid x \in K\} \subset C_*$$

sont compacts. Soit  $W \in \mathcal{V}_G$  tel que  $W \cdot W \in V$ . Soient  $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in \mathcal{R}(C, \xi)$ . Il suit de 5.7 que  $\delta$  satisfait, pour  $z \in p^{-1}(K)$ , à l'équation

$$(13) \quad \delta(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(z) = \tilde{w}_1(\theta^{-1}, \tilde{w}_2(\theta, z))$$

avec  $\theta := \varrho(p(z)) \in C_{p(z)}^*$ . Il s'ensuit que si  $(\tilde{w}_1, w_1) \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L^{-1}, W)$  et  $(\tilde{w}_2, w_2) \in \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L, W)$ , alors  $(\delta(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2), \delta(w_1, w_2)) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}_1}(K, V)$ .

Dans le cas général, on utilise que  $K = \bigcup_{\varrho \in P} K_\varrho$  où  $P$  est un ensemble fini dans  $\text{Cont}_C(X)$  et  $K_\varrho$  est un compact de  $U_\varrho$ . On définit, comme ci-dessus,  $L_\varrho := \varrho(K_\varrho)$  et  $L_\varrho^{-1} := \varrho(K_\varrho)^{-1}$  et on aura

$$\left. \begin{array}{l} (\tilde{w}_1, w_1) \in \bigcap_{\varrho \in P} \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L_\varrho^{-1}, W) \\ \text{et} \\ (\tilde{w}_2, w_2) \in \bigcap_{\varrho \in P} \mathcal{O}^{\mathcal{R}}(L_\varrho, W) \end{array} \right\} \Rightarrow (\delta(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2), \delta(w_1, w_2)) \in \mathcal{O}^{\mathcal{G}_1}(K, V).$$

5.9. *Sections locales.* Soit  $T$  un ouvert de  $\text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  tel que l'inclusion  $T \subset \text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  soit contractile. Soit  $S := n^{-1}(T)$ , où  $n : \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi \rightarrow \text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  est l'application définie en 5.3. Considérons l'application composée

$$(14) \quad N : S \times X \xrightarrow{n \times \text{id}} T \times X \xrightarrow{\text{ev}_X} BG$$

Comme  $X$  est localement compact, l'évaluation  $\text{ev}_X$  est continue et  $N$  est continue. Désignons par  $\mathcal{E} := N^*EG$  l'espace total du  $G$ -fibré principal sur  $S \times X$  induit par  $N$ .

Observons que  $N$  est aussi la composition

$$(15) \quad N : S \times X \xrightarrow{\text{id}_S \times \nu_C} S \times B\Omega_C \xrightarrow{\text{ev}_\Omega} BG$$

de  $\text{id}_S \times \nu_C$  avec l'application d'évaluation (peut-être non-continue)  $\text{ev}_\Omega$ .

Comme le  $\Omega_C$ -fibré induit sur  $X$  par  $\nu_C$  est  $\xi_C : C_* \xrightarrow{\beta} X$ , on obtient, en utilisant (15), que l'espace  $\mathcal{E}$  est le quotient de  $S \times C_* \times G$  par la relation d'équivalence  $(\phi, ub, g) \sim (\phi, u, \phi(b)g)$ , où  $(\phi, u, g) \in S \times C_* \times G$  et  $b \in \Omega_C$ . Considérons  $\mathcal{E}$  comme un espace au-dessus de  $X$  par l'application  $(\phi, u, g) \mapsto \beta(u)$  et définissons l'application continue  $v : C \times_X \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  par  $v(c, (\phi, u, g)) := (\phi, cu, g)$ .

Comme l'application  $S \rightarrow \text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi$  est homotope à une application constante, on montre, comme dans 4.8, qu'il existe un homéomorphisme  $G$ -équivariant  $S \times E \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$  au-dessus de  $\text{id}_{S \times X}$ . Via cet homéomorphisme et en composant avec la projection  $S \times E \rightarrow E$ , l'application  $v$  donne une application continue  $\hat{v} : C \times_X (S \times E) \rightarrow E$ . À son tour,  $\hat{v}$  détermine une application continue  $w : S \rightarrow \text{map}(C \times_X E, E)$ . On vérifie facilement que l'image de  $w$  est dans  $\mathcal{R}(C, \xi)$ . La préservation des points base par les divers isomorphismes utilisés entraîne que  $w$  est une section locale de  $h$  au-dessus de  $S$ .

Ayant établi les points 5.4 à 5.9, la démonstration du théorème B se termine comme expliqué dans 4.3. ■

*Preuve du théorème C.* Soient  $w, \tilde{w} \in \mathcal{R}(C, \xi)$  et  $g \in G$  tels que  $h^w = g^{-1}h^{\tilde{w}}g$ . Comme  $G$  est connexe par arcs, il existe, par la proposition 3.2, un élément  $\chi \in \mathcal{G}$  tel que  $\chi(\tilde{*}) = \tilde{*} \cdot g$ . L'équation (11) montre qu'alors  $h^{w^\chi} = h^{\tilde{w}}$ . Comme  $\bar{h}_1$  est injective par 5.7, les représentations  $w^\chi$  et  $\tilde{w}$  sont dans la même classe modulo  $\mathcal{G}_1$ . Cela prouve l'injectivité de  $\bar{h}$ . Le diagramme commutatif

$$(16) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\bar{h}_1} & \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}(C, \xi)/\mathcal{G} & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi/G \end{array}$$

et le fait que  $\bar{h}_1$  soit un homéomorphisme (vu le théorème B) font que  $\bar{h}$  est un homéomorphisme.

*Preuve du théorème D*

LEMME 5.10. *L'application  $n$  est couverte par un morphisme de  $\mathcal{G}_1$ -fibrés principaux*

$$(17) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{R}(C, \xi) & \xrightarrow{\hat{n}} & \text{Map}_G^\bullet(E, EG) \\ \downarrow h & & \downarrow \\ \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi & \xrightarrow{n} & \text{Map}^\bullet(X, BG)_\xi \end{array}$$

Le théorème D découlera du lemme 5.10 puisque l'inclusion  $\{*\} \subset X$  est une cofibration, et l'espace  $\text{Map}_G^\bullet(E, EG)$  est faiblement contractile (proposition 4.10). En fait, l'application  $n$  est classifiante pour le  $\mathcal{G}_1$ -fibré principal  $h : \mathcal{R}(C, \xi) \rightarrow \mathcal{R}(\Omega_C, G)_\xi$ .

*Preuve du lemme 5.10.* Le procédé pour fixer l'application  $\nu_c$  vu en 5.3 produit en fait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_* & \xrightarrow{\widehat{\nu}_C} & E\Omega_C \\ \downarrow \beta & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\nu_C} & B\Omega_C \end{array}$$

où  $\widehat{\nu}_C \in \text{Map}_G^\bullet(C_*, E\Omega_C)$ . L'application  $\widehat{n} \in \text{map}_G(\mathcal{R}(C, \xi), \text{Map}_G^\bullet(E, EG))$  est définie par  $\widehat{n}(w) := Eh^w \circ \widehat{\nu}_C$ . Le diagramme (17) est bien commutatif. Observons que  $\widehat{n}$  est obtenue par le procédé de [Hu, ch. 4, prop. 12.1] à l'aide de la partition de l'unité  $\widehat{\mu}_\varrho$  construite en 5.3 et des trivialisations  $\psi_\varrho^w$  du lemme 2.1.

## 6. Exemples et applications

**6.1. Le groupoïde associé à un fibré principal.** Soit  $\xi : E \xrightarrow{p} X$  un  $G$ -fibré principal. Soit  $EE := EE(\xi) := (E \times E)/G$ , le quotient de  $E \times E$  par l'action diagonale de  $G$ . Dénotons par  $\langle a, b \rangle$  l'orbite de  $(a, b)$  dans  $EE$ . On fait de  $EE$  un  $X$ -groupoïde en posant  $\alpha(\langle a_2, a_1 \rangle) := p(a_1)$ ,  $\beta(\langle a_2, a_1 \rangle) := p(a_2)$ ,  $i_x := \langle a, a \rangle$  avec  $p(a) = x$ ; la composition vient de la formule  $\langle a_3, a_2 \rangle \langle a_2, a_1 \rangle = \langle a_3, a_1 \rangle$ , ou, plus généralement,

$$\langle a_3, a'_2 \rangle \langle a_2, a_1 \rangle = \langle a_3 \cdot \gamma(a'_2, a_2), a_1 \rangle$$

où  $\gamma$  est l'application définie en (5). L'inverse est évidemment donné par  $\langle a, b \rangle^{-1} = \langle b, a \rangle$ . Le  $X$ -groupoïde ainsi obtenu s'appelle le  *$X$ -groupoïde associé à  $\xi$*  [Ma, p. 5].

Le groupe structural  $G$  de  $\xi$  est isomorphe à  $\Omega_{EE}$  par  $g \mapsto \langle \widetilde{*} \cdot g, \widetilde{*} \rangle$ . Observons que  $EE$  est localement trivial numérisable si  $\xi$  est numérisable. En effet,  $x \mapsto \langle \widetilde{*}, \sigma(x) \rangle$  est une  $EE$ -contraction lorsque  $\sigma$  est une section locale de  $\xi$ .

Le  $X$ -groupoïde  $EE$  a une représentation tautologique  $v$  sur  $\xi$  déterminée par l'application continue  $v : (E \times E) \times E \rightarrow E$  définie par  $v((a, b), z) := a \cdot \gamma(b, z)$ ; son holonomie est  $\text{id}_G$ . Pour un  $X$ -groupoïde  $C$ , désignons par  $\text{Mor}(C, EE)$  l'ensemble des morphismes continus de  $C$  dans  $EE$  (au-dessus de  $\text{id}_X$ ).

**PROPOSITION 6.1.** *La composition avec la représentation tautologique donne une bijection de  $\text{Mor}(C, EE(\xi))$  sur  $\mathcal{R}(C, \xi)$ .*

*Preuve.* La bijection inverse  $w \mapsto \Psi_w$  est donnée par  $\Psi_w(c) := \langle w(c, z), z \rangle$  ( $z \in E_{\alpha(c)}$ ). La seule chose non-triviale à vérifier est que  $\Psi_w$  est continu.

Soient  $c \in C$  et  $T \ni \Psi_w(c)$  un ouvert de  $EE$ . Soit  $z \in E_{\alpha(c)}$ . Il existe

- un ouvert  $V$  de  $E$  contenant  $w(c, z)$ ,
- un ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $x := \alpha(c) = p(z)$  et une section continue locale  $\sigma : U \rightarrow E$  de  $\xi$  avec  $\sigma(x) = z$  et
- $W \in \mathcal{V}_G$

tels que  $\pi(V \times (\sigma(U) \cdot W)) \subset T$ , où  $\pi$  désigne la projection de  $E \times E$  sur  $EE$ . Par continuité de  $w$ , il existe un ouvert  $A$  de  $C$  contenant  $c$  et un ouvert  $R$  de  $E$  contenant  $z$  tels que  $w(A \times R) \subset V$ . Soient  $U'$  un ouvert de  $X$  et  $W' \in \mathcal{V}_G$  tels que  $x \in U' \subset U$ ,  $W' \subset W$  et  $\sigma(U') \cdot W' \subset R$ . Soit  $A' := A \cap \alpha^{-1}(U')$ . On a  $c \in A'$  et  $\Psi_w(A') \subset \pi(V \times (\sigma(U') \cdot W')) \subset T$ , ce qui prouve la continuité de  $\Psi_w$  en  $c$ . ■

**6.2. Prégroupeïdes.** Comme nous le verrons plus loin, une façon commode de définir un groupeïde topologique est de partir d'une catégorie topologique avec anti-involution (prégroupeïde). Soit  $X$  un espace topologique muni d'un point base  $* \in X$ . Un  $X$ -prégroupeïde est un espace topologique  $\tilde{C}$  muni de deux applications continues  $\alpha, \beta : \tilde{C} \rightarrow X$ , d'une *composition* partiellement définie et d'une application  $x \mapsto i_x$  de  $X$  dans  $\tilde{C}$  qui satisfont aux propriétés (a), (b) et (c) de la définition du §1 d'un  $X$ -groupeïde. En revanche, la condition (d) consiste seulement en

(d')  $\tilde{C}$  est muni d'une anti-involution continue  $c \mapsto \bar{c}$ , envoyant  $\tilde{C}_x^y$  sur  $\tilde{C}_y^x$ .

Une *représentation* d'un  $X$ -prégroupeïde  $\tilde{C}$  sur un  $G$ -espace  $\xi$  est une application continue  $w : \tilde{C} \times_X E \rightarrow E$  (où  $\tilde{C}$  est vu au-dessus de  $X$  via  $\alpha$ ) telle que, pour tous  $c, d \in \tilde{C}$ ,  $z \in E$  et  $g \in G$ , on ait

1.  $p(w(c, z)) = \beta(c)$ ,
2.  $w(cd, z) = w(c, w(d, z))$ ,
3.  $w(\bar{c}, w(c, z)) = z$ ,
4.  $w(c, z \cdot g) = w(c, z) \cdot g$ .

Si  $X$  est séparé, un  $X$ -prégroupeïde détermine un  $X$ -groupeïde séparé, avec la propriété suivante :

**PROPOSITION 6.2.** *Soit  $\tilde{C}$  un  $X$ -prégroupeïde localement triviale numérisable avec  $X$  séparé. Alors, il existe un unique  $X$ -groupeïde séparé localement triviale numérisable  $C$  avec un morphisme continu surjectif  $\tilde{C} \rightarrow C$  satisfaisant à la condition suivante : toute représentation de  $\tilde{C}$  sur un  $G$ -fibré principal  $\xi$  au-dessus de  $X$ , avec  $G$  séparé, est induite par une unique représentation de  $C$ .*

La démonstration de 6.2 utilise le lemme suivant :

LEMME 6.3. *Soit  $C$  un  $X$ -groupoïde localement trivial. Alors,  $C$  est séparé si et seulement si  $X$  et  $\Omega_C$  le sont.*

*Preuve.* Supposons que  $X$  et  $\Omega_C$  soient séparés (l'autre sens est banal). Comme  $C$  est localement trivial,  $\beta : C_* \rightarrow X$  est un  $\Omega_C$ -fibré principal, par le théorème A. L'espace  $C_*$  est donc séparé. Il en est évidemment de même pour  $C^*$ . On utilise alors que  $C = C_* \times_{\Omega_C} C^*$  pour établir que  $C$  est séparé. ■

*Preuve de la proposition 6.2.* Soit  $\widehat{C}$  l'ensemble quotient de  $\widetilde{C}$  par la relation d'équivalence engendrée par  $c\bar{u}d \sim cd$  pour tous  $c, d, u \in \widetilde{C}$  avec  $\beta(d) = \alpha(u) = \alpha(c)$ . Il est clair que la structure (algébrique) de  $X$ -prégroupoïde descend sur  $\widehat{C}$  et que  $\widehat{C}$  est un  $X$ -groupoïde (algébrique), avec  $[c]^{-1} = [\bar{c}]$ . La topologie sur  $\widehat{C}$  sera obtenue de la manière suivante : considérons l'ensemble  $\mathcal{K}$  des paires  $(K, T)$ , où :

- $K$  est un sous-groupe normal de  $\Omega_{\widehat{C}}$ . Le quotient de  $\widehat{C}$  par le sous-groupoïde normal  $N_K := \{uKu^{-1} \mid u \in \widehat{C}_*\}$  est alors un  $X$ -groupoïde.
- $T$  est une topologie sur  $\widehat{C}/N_K$  qui fait de  $\widehat{C}/N_K$  un groupoïde topologique et telle que la projection  $\widetilde{C} \rightarrow \widehat{C}/N_K$  soit continue.

Les projections  $\widehat{C} \rightarrow \widehat{C}/N_K$  ( $(K, T) \in \mathcal{K}$ ) forment un système projectif de  $X$ -groupoïdes au-dessous de  $\widehat{C}$  (non-vide, car on peut prendre pour  $T$  la topologie grossière). On munit  $\widehat{C}$  de la topologie de limite projective pour ce système de projections. On vérifie que  $\widehat{C}$  est alors un  $X$ -groupoïde, que  $\widetilde{C} \rightarrow \widehat{C}$  est continue et que tout morphisme continu de  $\widetilde{C}$  dans un  $X$ -groupoïde se factorise de façon unique par l'un des quotients  $\widehat{C}/N_K$ . Comme  $\widetilde{C}$  est localement trivial numérisable,  $\widehat{C}$  l'est aussi. Nous ignorons si la topologie ainsi obtenue sur  $\widehat{C}$  est la topologie quotient de celle de  $\widetilde{C}$ .

Comme  $X$  est séparé, l'adhérence de  $\{i_*\}$  est contenue dans  $\Omega_C$  où elle constitue un sous-groupe fermé. En quotientant  $\widehat{C}$  par le sous-groupoïde normal engendré par  $\overline{\{i_*\}}$ , on obtient, avec la topologie quotient, un  $X$ -groupoïde  $C$  [Ma, th. 2.15, p. 38]. Comme  $\overline{\{i_*\}}$  est fermé dans  $\Omega_C$ , le groupe  $\Omega_C$  est séparé. On en déduit que  $C$  est séparé par le lemme 6.3. Il est aussi clair que tout morphisme continu de  $\widetilde{C}$  dans un  $X$ -groupoïde séparé se factorise de façon unique par  $\widetilde{C} \rightarrow C$ .

Soit  $\tilde{w} : \widetilde{C} \times E \rightarrow E$  une représentation de  $\widetilde{C}$  sur un  $G$ -fibré principal  $\xi$ . Comme dans la proposition 6.1,  $\tilde{w}$  détermine un morphisme continu  $\Psi_{\tilde{w}}$  de  $\widetilde{C}$  dans  $EE := EE(\xi)$  tel que  $\Psi_{\tilde{w}}(\bar{c}) = \Psi_{\tilde{w}}(c)^{-1}$ . Puisque  $EE$  est localement trivial et que  $X$  et  $G$  sont séparés, l'espace  $EE$  est séparé par le lemme 6.3. Le morphisme  $\Psi_{\tilde{w}}$  se factorise en un unique morphisme continu  $\Psi_w : C \rightarrow EE$  correspondant, par la proposition 6.1, à  $w \in \mathcal{R}(C, \xi)$ . ■

### 6.3. Groupoïdes de chemins

6.4. *Chemins de Moore.* Soit  $X$  un espace topologique séparé. Soit  $\widetilde{\mathbf{Ch}}(X)$  la catégorie des *chemins de Moore* dans  $X$ . Un chemin de Moore est un couple  $(a, c)$  où  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  et  $c : [0, a] \rightarrow X$  est une application continue.

La topologie sur  $\widetilde{\mathbf{Ch}}$  est induite par l'application  $(a, c) \mapsto c^\sharp$  de  $\widetilde{\mathbf{Ch}}$  dans  $\text{map}([0, 1], X)$ , où  $c^\sharp(t) = c(at)$ , avec la CO-topologie sur  $\text{map}([0, 1], X)$ . (Observons que  $\widetilde{\mathbf{Ch}}$  n'est pas séparé puisque tous les chemins constants ont même image dans  $\text{map}([0, 1], X)$ .) Les applications  $\alpha, \beta : \mathbf{Ch} \rightarrow X$  sont données par  $\alpha(a, c) = c(a)$  et  $\beta(a, c) = c(0)$ . L'espace  $C_x^y$  est donc l'ensemble des chemins allant de  $y$  à  $x$  (cette malencontreuse inversion est due à la convention usuelle de la règle de composition des chemins). La composition  $(a, c) = (a_2, c_2)(a_1, c_1)$ , lorsque  $\beta(a_1, c_1) = \alpha(a_2, c_2)$ , est définie par  $a := a_2 + a_1$  et

$$c(t) = \begin{cases} c_2(t) & \text{si } t \leq a_2, \\ c_1(t - a_2) & \text{si } t \geq a_2. \end{cases}$$

Cette composition est bien associative et l'unité  $i_x$  est donnée par le chemin constant  $[0, 0] \rightarrow \{x\}$ . La définition de l'involution est donnée par  $\overline{(a, c)} := (a, \bar{c})$  où  $\bar{c}(t) := c(a - t)$ . On vérifie facilement que  $\mathbf{Ch}(X)$  est un prégroupoïde. Il est localement trivial si et seulement si  $X$  est connexe par arcs et semi-localement contractile.

Le groupoïde séparé associé à  $\widetilde{\mathbf{Ch}}(X)$  par la proposition 6.2 sera noté  $\mathbf{Ch}(X)$  et appelé le *groupoïde des chemins de Moore dans  $X$* .

6.5. *Le groupoïde fondamental.* Soit  $\mathbf{Ch}_1(X) \subset \mathbf{Ch}(X)$  l'ensemble des classes de chemins  $(a, c)$  qui sont des lacets ( $c(0) = c(a)$ ) et tels qu'il existe une homotopie  $H : [0, a] \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $H(0, s) = H(a, s) = c(0)$ ,  $H(t, 0) = c(t)$  et  $H(t, 1) = c(0)$ . Les éléments de  $\mathbf{Ch}_1(X)$  forment un sous- $X$ -groupoïde normal totalement intransitif de  $\mathbf{Ch}(X)$ . L'espace quotient  $\pi(X)$  hérite donc une structure de  $X$ -groupoïde et la projection  $\mathbf{Ch}(X) \rightarrow \pi(X)$  est un morphisme continu [Ma, th. 2.15, p. 38].

Il est clair qu'algébriquement,  $\pi(X)$  s'identifie au groupoïde fondamental de  $X$  et  $\Omega_{\pi(X)}$  au groupe fondamental  $\pi_1(X, *)$  [Sp, ch. 1, §7]. Cependant,  $\pi(X)$  est ici muni d'une topologie. Il est localement trivial si  $X$  est connexe par arcs et semi-localement simplement connexe [Sp]. Si, de plus,  $X$  est localement connexe par arcs, on peut montrer que  $\Omega_{\pi(X)} = \pi_1(X, *)$  est discret, que le  $\Omega_{\pi(X)}$ -fibré principal du théorème A est le revêtement universel de  $X$  et que la topologie sur  $\pi(X)$  s'identifie à celle de [BD]. Nous n'utiliserons pas ces résultats. La proposition suivante est intéressante pour les  $G$ -fibrés principaux avec  $G$  un groupe de Lie.

PROPOSITION 6.6. *Soit  $G$  un groupe topologique admettant un voisinage de son élément neutre qui ne contienne aucun sous-groupe non-trivial. Alors,*



toute représentation de  $\mathbf{Ch}(X)$  sur un  $G$ -espace principal  $\xi$  au-dessus de  $X$  se factorise par une représentation du groupoïde fondamental  $\pi(X)$  de  $X$ .

*Preuve.* Soit  $w \in \mathcal{R}(\mathbf{Ch}(X), \xi)$ . On regarde  $w$  comme un morphisme continu  $w : \mathbf{Ch}(X) \rightarrow EE(\xi)$  par le lemme 6.1. Il s'agit de montrer que  $\mathbf{Ch}_1(X) \subset \ker w$ .

Pour  $x \in X$ , désignons par  $\text{Vois}_x$  l'ensemble des voisinages ouverts de  $x$ . Observons que l'ensemble  $\{\widetilde{\mathbf{Ch}}(W)_x^x \mid W \in \text{Vois}_x\}$  constitue un système fondamental de voisinages ouverts de  $i_x$  dans le monoïde  $\widetilde{\mathbf{Ch}}(X)_x^x$ . En choisissant  $\tilde{x} \in E_x$ , on obtient une holonomie  $h_x^w : \widetilde{\mathbf{Ch}}(X)_x^x \rightarrow G$  en  $x$  qui est un morphisme continu de monoïdes avec anti-involution. Comme il existe un voisinage de l'élément neutre dans  $G$  qui ne contient aucun sous-groupe non-trivial et que chaque élément de  $\{\widetilde{\mathbf{Ch}}(W)_x^x \mid W \in \text{Vois}_x\}$  est un sous-monoïde avec anti-involution de  $\widetilde{\mathbf{Ch}}(X)_x^x$ , on en déduit qu'il existe  $U_x \in \text{Vois}_x$  tel que  $\widetilde{\mathbf{Ch}}(U_x)_x^x \subset \ker h_x^w$ . Soit  $\mathbf{Ch}_{\text{loc}}(X)$  le sous-groupoïde normal de  $\mathbf{Ch}(X)$  engendré par l'image des  $\widetilde{\mathbf{Ch}}(U_x)_x^x$  pour tous les  $x \in X$ . Par ce qui précède, on a  $\mathbf{Ch}_{\text{loc}}(X) \subset \ker w$ .

Soit  $\gamma \in \mathbf{Ch}_1(X)_x^x$  représenté par un lacet  $c : [0, a] \rightarrow X$  en  $x$ . Par définition de  $\mathbf{Ch}_1(X)$ , il existe une homotopie de lacets  $H : [0, a] \times [0, 1] \rightarrow X$  entre  $c$  et le lacet constant. Par l'argument habituel du nombre de Lebesgue, on peut décomposer  $[0, a] \times [0, 1]$  en petits rectangles  $R_i$  ( $1 = 1, \dots, N$ ) tels que  $H(R_i) \subset U_{x(i)}$ . Il s'ensuit facilement que  $\gamma \in \mathbf{Ch}_{\text{loc}}(X) \subset \ker w$ , ce qui prouve que  $\mathbf{Ch}_1(X) \subset \ker w$ . ■

**6.4. Chemins lisses par morceaux – Connexions.** Soit  $X$  une variété différentiable  $C^1$  paracompacte. On dénotera par  $\widetilde{\mathbf{D}} = \widetilde{\mathbf{D}}(X)$  l'espace des chemins  $C^1$  par morceaux sur  $X$ . En tant qu'ensemble,  $\widetilde{\mathbf{D}}$  est le sous-prégroupoïde de  $\widetilde{\mathbf{Ch}}(X)$  formé des chemins qui sont des compositions de chemins  $C^1$ . La topologie, plus fine, s'obtient via l'application  $(a, c) \mapsto c^\sharp$  en topologisant l'ensemble  $\mathbf{M}^\sharp$  des applications  $C^1$  par morceaux de  $[0, 1]$  dans  $X$ . Pour cela, soit

$$P = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1\}$$

un partage de  $[0, 1]$ . Soit

$$\mathbf{M}_P^\sharp := \{c \in \mathbf{M}^\sharp \mid c_{|[t_i, t_{i+1}]} \in C^1([t_i, t_{i+1}], X)\}$$

où  $C^1([a, b], X)$  est l'espace des applications  $C^1$  de  $[a, b]$  dans  $X$  muni de la topologie  $C^1$ . On a une application  $\mathbf{M}_P^\sharp \rightarrow C^1([0, 1], X)^k$  donné par

$$c \mapsto (c_{|[t_0, t_1]}^\sharp, c_{|[t_1, t_2]}^\sharp, \dots, c_{|[t_{k-1}, t_k]}^\sharp)$$

en étendant la définition de  $c^\sharp$  à un chemin  $c : [a, b] \rightarrow X$  par  $c^\sharp(t) := c(a + (b - a)t)$ . L'application  $(a, c) \mapsto c^\sharp$  induit une topologie (non-séparée)

sur  $\mathbf{M}_P^\sharp$ . Si  $P'$  est un partage plus fin que  $P$  (i.e.  $P \subset P'$ ), on vérifie que l'inclusion naturelle  $\mathbf{M}_P^\sharp \subset \mathbf{M}_{P'}^\sharp$  est continue. La topologie sur  $\mathbf{M}$  est, par définition, celle de limite inductive des  $\mathbf{M}_P^\sharp$  pour tous les partages de  $[0, 1]$ .

Le groupoïde séparé associé à  $\tilde{\mathbf{D}}(X)$  sera noté  $\mathbf{D}(X)$  et appelé le *groupoïde des chemins lisses par morceaux dans  $X$* . Si  $X$  est connexe, alors  $\mathbf{D}(X)$  est localement trivial numérisable. On a un morphisme évident de groupoïdes topologiques de  $\mathbf{D}(X)$  dans  $\mathbf{Ch}(X)$ .

**PROPOSITION 6.7.** *Soit  $G$  un groupe de Lie et  $\xi : E \xrightarrow{p} X$  un  $G$ -fibré principal différentiable  $C^1$  au-dessus d'une variété  $X$ . Soit  $A$  une connexion sur  $\xi$  [KN, ch. II]. Alors, le transport parallèle associé à  $A$  détermine une représentation de  $\mathbf{D}(X)$  sur  $\xi$ .*

*Preuve.* Par la proposition 6.2, il suffit de voir qu'une connexion  $A$  définit une représentation  $w_A : \tilde{\mathbf{D}}(X) \times E \rightarrow E$  de  $\tilde{\mathbf{D}}(X)$ , le point  $w_A(c, z)$  étant le résultat du transport  $A$ -parallèle de  $z$  au-dessus de  $c$ . Les conditions 1. à 4. de la définition d'une représentation découlent immédiatement des propriétés classiques du transport parallèle [KN, ch. II, prop. 3.2 et 3.3]. La seule chose à vérifier est que  $w_A$  est continue en tout  $(c, z) \in \tilde{\mathbf{D}}(X) \times E$ . Vu la topologie sur  $\tilde{\mathbf{D}}(X)$ , il est suffisant de le faire pour  $c \in C^1([0, 1], U)$  où  $U$  est un ouvert de  $X$  trivialisant pour  $\xi$  et domaine d'une carte. On peut donc supposer que  $E = U \times G$  ou  $U$  est un ouvert d'un espace euclidien et  $z = (c(0), e)$ . Le relevé horizontal  $\tilde{c}$  de  $c$  partant de  $z$  s'écrit alors  $\tilde{c}(t) = (c(t), g(t))$  où  $g \in C^1([0, 1], G)$  avec  $g(0) = e$ .

Considérons un voisinage ouvert  $Q$  dans  $E$  de  $w_A(c, z) = \tilde{c}(1) = (c(1), g(1))$ . Il s'agit de trouver un voisinage  $T$  de  $(c, z)$  dans  $C^1([0, 1], U) \times E$  tel que  $w_A(T) \subset Q$ . On peut supposer que  $Q$  est de la forme  $S \times (g(1) \cdot V)$  où  $V \in \mathcal{V}_G$  et  $S$  est un ouvert de  $U$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que la boule ouverte  $B(0, \varepsilon)$  de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$  dans  $T_e G = \text{Lie}(G)$ , muni de la métrique de Killing, est envoyée difféomorphiquement sur  $W \in \mathcal{V}_G$  avec  $W \cdot W \subset V$ .

Par [KN, ch. II, prop. 1.1], la connexion  $A$  est donnée par une 1-forme  $\gamma_A \in \Omega^1(E, \text{Lie}(G))$  et l'on a  $\gamma_A(\dot{\tilde{c}}(t)) = 0$  pour tout  $t$  puisque  $\tilde{c}$  est horizontal. Par continuité de  $\gamma_A$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(c(1), \delta) \subset S$  et

$$(18) \quad \sup_{t \in [0, 1]} \{ \|c_1(t) - c(t)\|, \|\dot{c}_1(t) - \dot{c}(t)\| \} < \delta \Rightarrow \|\gamma_A(\dot{\tilde{c}}_1(t))\| < \varepsilon$$

où  $\tilde{c}_1(t) := (c_1(t), g(t))$ . Soit  $h \in C^1([0, 1], G)$  la courbe telle que  $\hat{c}_1(t) \cdot h(t)$  soit horizontal. Par [KN, preuve du lemme p. 69], la courbe  $h$  satisfait  $h(0) = e$  et  $\dot{h}(t) = T_e R_{h(t)}(\gamma_A(\dot{\tilde{c}}_1(t)))$ , où  $R_a$  est la translation à droite  $g \mapsto ag$ . On déduit de (18) que  $\ell(h)$  est  $< \varepsilon$ , où  $\ell(h)$  est la longueur de  $h$  pour la métrique riemannienne sur  $G$  obtenue par translations à droite de la métrique de Killing. L'exponentielle des rayons donnant des géodésiques minimisantes pour cette métrique riemannienne, on en déduit que  $h(1) \in W$ .

L'ouvert  $T := T_\delta \times (B(c(0), \delta) \times W)$  de  $C^1([0, 1], U) \times G$ , où  $T_\delta$  est l'ouvert de  $C^1([0, 1], U)$  apparaissant dans (18), contient  $(c, z)$  et satisfait  $w_A(T) \subset Q$ . ■

Le langage des représentations de groupoïdes permet de bien poser le problème suivant : quand est-ce que le transport parallèle associé à une connexion sur un fibré différentiable s'étend aux chemins  $C^0$  ? La réponse est la suivante :

**PROPOSITION 6.8.** *Soient  $G$ ,  $\xi$  et  $A$  comme dans la proposition 6.7. Alors, la représentation  $w_A \in \mathcal{R}(\mathbf{D}(X), \xi)$  induite par le transport parallèle de  $A$  s'étend en une représentation de  $\mathbf{Ch}(X)$  sur  $\xi$  si et seulement si  $A$  est une connexion plate.*

*Preuve.* Par définition,  $A$  est plate si et seulement si  $E$  est feuilletée en variétés horizontales [KN, II.9]. Il est clair que dans ce cas le transport parallèle de  $A$  s'étend en une représentation  $\bar{w}_A \in \mathcal{R}(\mathbf{Ch}(X), \xi)$ . Réciproquement, si une telle extension existe, comme le groupe de Lie  $G$  n'a pas de petits sous-groupes, la proposition 6.6 assure que  $\bar{w}_A$  se factorise par le groupoïde fondamental  $\pi(X)$ . Le théorème de réduction classique [KN, II, th. 7.1] montre qu'alors le fibré  $\xi|_U : p^{-1}(U) \rightarrow U$ , au-dessus de tout ouvert contractile  $U$  de  $X$ , admet une réduction de son groupe structural au groupe trivial et que  $A$  restreinte à  $p^{-1}(U)$  est plate. ■

**6.5. Théorie de jauge sur graphes.** Rappelons qu'un *graphe* (non-orienté)  $\Gamma$  consiste en une paire d'ensembles  $(S(\Gamma), A(\Gamma))$  (sommets et arêtes) avec deux applications  $\alpha, \beta : A(\Gamma) \rightarrow S(\Gamma)$  et une involution  $a \mapsto \bar{a}$  sur  $A$  telle que  $\alpha(\bar{a}) = \beta(a)$  et  $\beta(\bar{a}) = \alpha(a)$ . Par exemple, pour  $n \in \mathbb{N}$ , le graphe  $[n]$  se définit par  $S([n]) := \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $A([n]) := \{(i, j) \mid |i - j| = 1\}$ ,  $\alpha(i, j) := j$ ,  $\beta(i, j) := i$  et  $(i, j) := (j, i)$ .

Un *chemin* (de longueur  $n$ ) dans  $\Gamma$  est un morphisme de graphes de  $[n]$  dans  $\Gamma$ . L'ensemble des chemins dans  $\Gamma$  forment un  $S(\Gamma)$ -prégroupeoïde  $\tilde{C}_\Gamma$ , muni de la topologie discrète. Les applications source et but, la composition et l'anti-involution sont définies comme pour les chemins de Moore dans un espace topologique (voir §6.3). Observons que  $A(\Gamma)$  s'identifie naturellement au sous-ensemble de  $\tilde{C}_\Gamma$  formé des chemins de longueur 1. Le  $S(\Gamma)$ -groupoïde associé par la proposition 6.2 sera noté  $\mathbf{C}(\Gamma)$ . Il est également discret et s'identifie au groupoïde fondamental de la réalisation géométrique  $| \Gamma |$  de  $\Gamma$ . De même,  $\Omega_{\mathbf{C}(\Gamma)}$  s'identifie au groupe fondamental  $\pi_1(| \Gamma |, *)$ . Nous supposons que  $| \Gamma |$  est connexe.

Ce qui s'appelle en anglais un "*G-valued lattice gauge field*" sur  $\Gamma$  correspond à un  $G$ -fibré  $\xi$  sur  $S(\Gamma)$  muni d'une représentation  $w \in \mathcal{R}(\mathbf{C}(\Gamma), \xi)$ . Comme  $S(\Gamma)$  est discret, le fibré  $\xi$  est trivial. Une trivialisatation peut en être obtenue à l'aide de  $w$  en choisissant un arbre maximal  $T$  dans  $\Gamma$ . En effet,  $T$  donne une  $\mathbf{C}(\Gamma)$ -contraction sur tout  $S(\Gamma)$ . En fixant une trivialisatation

$E(\xi) = S(\Gamma) \times G$  de  $\xi$ , la représentation  $w$  est déterminée par la donnée d'une application  $w_1 : A(\Gamma) \rightarrow G$  telle que  $w_1(\bar{a}) = w_1(a)^{-1}$ . La formule reliant  $w$  à  $w_1$  est la suivante :

$$(19) \quad w(a, (\alpha(a), g)) = (\beta(a), w_1(a)), \quad a \in A(\Gamma).$$

Dans la littérature sur le sujet, l'application  $w_1$  est prise comme définition d'un “ $G$ -valued lattice gauge field” ([Cr, ch. 7], [PS, §3]).

Si  $\Gamma$  est fini, le groupe  $\pi_1(|\Gamma|, *)$  est libre de rang  $1 - \chi(|\Gamma|)$ , où  $\chi(|\Gamma|)$  est la caractéristique d'Euler de  $|\Gamma|$ . Les théorèmes B et C donnent ainsi des homéomorphismes

$$(20) \quad \mathcal{R}(\mathbf{C}(\Gamma), \xi)/\mathcal{G}_1 \approx \mathcal{R}(\pi_1(|\Gamma|, *), G) \approx G^{1-\chi(|\Gamma|)}$$

et

$$(21) \quad \mathcal{R}(\mathbf{C}(\Gamma), \xi)/\mathcal{G} \approx G^{1-\chi(|\Gamma|)}/\text{conjugaison}.$$

Sous certaines hypothèses, la donnée de  $(\xi, w)$  détermine un  $G$ -fibré principal  $\xi_w$  sur  $|\Gamma|$  qui n'est pas trivial (voir, par exemple, [PS]). Par (21), on obtient une partition de  $G^{1-\chi(|\Gamma|)}/\text{conjugaison}$  en fonction des classes d'isomorphisme de  $\xi_w$  qu'il serait intéressant d'étudier.

**6.6. Fibrés équivariants.** Soit  $\Gamma$  un groupe topologique agissant à gauche sur  $X$ . Le graphe de l'action

$$C := \{(y, \gamma, x) \in X \times \Gamma \times X \mid y = \gamma x\}$$

est un  $X$ -groupoïde par les données suivantes :  $\alpha(y, \gamma, x) := x$ ,  $\beta(y, \gamma, x) := y$ ,  $i_x := (x, e, x)$ ,  $(z, \gamma_2, y)(y, \gamma_1, x) := (z, \gamma_2\gamma_1, x)$  et  $(y, \gamma, x)^{-1} := (x, \gamma^{-1}, y)$ . Le groupe  $\Omega_C$  est banalement isomorphe au groupe d'isotropie  $\Gamma^{\{*\}}$  de  $*$ . Le  $X$ -groupoïde  $C$  est localement trivial si l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est transitive et si l'application  $q : \Gamma \rightarrow X$  donnée par  $\gamma \mapsto \gamma *$  admet des sections locales continues. Cette application sera alors un  $\Gamma^{\{*\}}$  (le fibré  $\xi_C$  du théorème A). On sait que cette situation se produit si, par exemple,  $X$  est le quotient  $\Gamma/\Gamma_0$  d'un groupe de Lie  $\Gamma$  par un sous-groupe fermé  $\Gamma_0$  [St, §7.5].

Soit  $\xi : E \xrightarrow{p} X$  un  $G$ -fibré principal sur  $X$ . Une représentation de  $C$  sur  $\xi$  est simplement une action à gauche de  $\Gamma$  sur  $E$  telle que la projection  $p : E \rightarrow X$  soit équivariante. On parle de  $G$ -fibré principal  $\Gamma$ -équivariant ou d'action de  $\Gamma$  sur  $\xi$ . L'espace  $\mathcal{R}(C, \xi)$  classe ces  $\Gamma$ -actions sur  $\xi$  à conjugaison par une transformation de jauge près. Par le théorème B,  $\mathcal{R}(C, \xi) \approx \mathcal{R}(\Gamma^{\{*\}}, G)_\xi$ . Remarquons que  $B \times_{\Gamma^{\{*\}}} E\Gamma \approx B\Gamma^{\{*\}}$ ; dans le cas où  $G$  est abélien, on retrouve ainsi le théorème A de [LMS]. Les relations avec d'autres approches de fibrés équivariants, comme par exemple [BH], restent à étudier.

Voici quelques exemples :

6.9.  $\Gamma = SO(3)$  agissant sur  $X = S^2$  et  $G = S^1$ . On a  $\Omega_C = S^1$  et le fibré principal  $\xi_C$  du théorème A est le fibré tangent unitaire à  $S^2$ , dont

la classe d'Euler est 2. Par le théorème d'existence, un  $S^1$ -fibré principal sur  $S^2$  admettra une  $SO(3)$ -action si et seulement si sa classe d'Euler est paire. Dans ce cas, l'espace  $\mathcal{R}(S^1, S^1)$  étant discret (homéomorphe à  $\mathbb{Z}$  par le degré), le théorème B implique qu'il y a exactement une classe d'action de  $SO(3)$  sur  $\xi$  à conjugaison par une transformation de jauge près. Observons qu'il n'y a aucun choix possible pour l'action sur la fibre au-dessus de  $*$ ; cette action est déterminée par  $\xi$ .

6.10.  $\Gamma = SU(2)$  agissant sur  $X = S^2$  et  $G = S^1$ . Le fibré  $\xi_C$  du théorème A est alors le fibré de Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$ . On en déduit que tout  $S^1$ -fibré principal sur  $S^2$  admet une  $SU(2)$ -action unique à conjugaison par une transformation de jauge près.

6.11.  $\Gamma = SU(2)$  agissant sur  $X = S^2$  et  $G = SO(3)$ . Il y a deux  $SO(3)$ -fibrés principaux  $\xi_0$  et  $\xi_1$  sur  $S^2$ ,  $\xi_0$  étant le fibré trivial. Tout deux associés au fibré de Hopf, ils admettent des  $SU(2)$ -actions mais seul  $\xi_0$  admet des  $SO(3)$ -actions. Un homomorphisme continu de  $S^1$  dans  $SO(3)$  est différentiable, donc un élément de  $\mathcal{R}(S^1, SO(3))$  est un sous-groupe à un paramètre dont l'image est un tore maximal de  $SO(3)$ . On en déduit que si l'on identifie l'algèbre de Lie  $so(3)$  à  $\mathbb{R}^3$  (quaternions purs), l'espace  $\mathcal{R}(S^1, SO(3))$  est la réunion des sphères de rayons entiers  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Donc,  $\mathcal{R}(C, \xi_0)/\mathcal{G}_1$  est homéomorphe à la réunion des 2-sphères de rayons  $2n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) et  $\mathcal{R}(C, \xi_1)/\mathcal{G}_1$  à celles de rayon  $2n + 1$ . Quant à  $\mathcal{R}(C, \xi_i)/\mathcal{G}$ , ils sont tous deux discrets dénombrables.

### Références

- [Bo] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Livre III : Topologie générale*, 3e éd., Hermann, 1960–61.
- [BH] D. Brandt et J.-C. Hausmann, *Théorie de jauge et symétries des fibrés*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), 509–537.
- [BD] R. Brown and G. Danesh-Naruie, *The fundamental groupoid as a topological groupoid*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 19 (1975), 237–244.
- [Co] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.
- [Cr] M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge Univ. Press, 1983.
- [Do] A. Dold, *Partitions of unity in the theory of fibrations*, Ann. of Math. 78 (1963), 223–255.
- [DK] S. Donaldson and P. Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds*, Clarendon Press, 1991.
- [DDK] E. Dror, W. Dwyer and D. Kan, *Automorphisms of fibrations*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980) 491–494.
- [Du] J. Dugundji, *Topology*, Allyn & Bacon, 1966.
- [Eh] C. Ehresmann, *Catégories topologiques et catégories différentiables*, in: Colloque de géométrie différentielle globale (Bruxelles, 1958), Gauthier-Villars, 1959, 137–150.
- [Hu] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, 2e éd., Springer, 1975.

- [KN] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Wiley, 1963.
- [LMS] R. Lashof, J. P. May and G. B. Segal, *Equivariant bundles with abelian structural group*, in: Proc. Northwestern Homotopy Theory Conference (Evanston, IL, 1982), Contemp. Math. 19, Amer. Math. Soc., 1983, 167–176.
- [Ma] K. Mackenzie, *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press, 1987.
- [Mi1] J. Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 272–280.
- [Mi2] —, *Construction of universal bundles II*, Ann. of Math. 63 (1956), 430–436.
- [Pa] T. W. Palmer, *Classes of nonabelian, noncompact, locally compact groups*, Rocky Mountain J. Math. 8 (1978), 683–741.
- [PS] A. V. Phillips and D. A. Stone, *The computation of characteristic classes of lattice gauge fields*, Comm. Math. Phys. 131 (1990), 255–282.
- [Sp] E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.
- [St] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, 1951.

Mathématiques-Université  
B.P. 240  
CH-1211 Genève 24, Suisse  
E-mail: hausmann@math.unige.ch

*Received 20 September 2000;  
in revised form 29 March 2001*