

## Comportement local moyen de la fonction de Brjuno

par

Michel Balazard (Marseille) et Bruno Martin (Calais)

**Abstract.** We describe the average behaviour of the Brjuno function  $\Phi$  in the neighbourhood of any given point of the unit interval. In particular, we show that the Lebesgue set of  $\Phi$  is the set of Brjuno numbers and we find the asymptotic behaviour of the modulus of continuity of the integral of  $\Phi$ .

**1. Introduction.** Désignons par  $[u]$  la partie entière du nombre réel  $u$ , et par  $\{u\}$  sa partie fractionnaire :

$$\{u\} = u - [u], \quad [u] \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \{u\} < 1.$$

Posons  $X = ]0, 1[ \setminus \mathbb{Q}$ . L'application

$$\alpha : X \rightarrow X, \quad x \mapsto \{1/x\}$$

définit une transformation mesurable de  $X$  muni de la tribu borélienne dans lui-même.

Ryll-Nardzewski (cf. [12, Theorem 2, p. 76]) a observé que la mesure de probabilité

$$\mu = \frac{dx}{(1+x) \log 2}$$

est invariante <sup>(1)</sup> par  $\alpha$  : la mesure image  $\alpha\mu$  n'est autre que  $\mu$ .

En d'autres termes, si  $f \in L^1(0, 1)$ , alors  $f \circ \alpha$  appartient aussi à  $L^1(0, 1)$  et

$$\int_0^1 f(\alpha(x)) \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 f(x) \frac{dx}{1+x}.$$

Nous définissons les fonctions itérées de  $\alpha$  en posant  $\alpha_0(x) = x$  et, pour

---

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 26A27; Secondary 11A55.

*Key words and phrases*: Brjuno function, Brjuno numbers, Lebesgue set, continued fractions.

<sup>(1)</sup> On trouve une assertion équivalente dans l'article de Doeblin [3, p. 357]

$k \geq 1$ ,  $\alpha_k(x) = \alpha(\alpha_{k-1}(x))$ . Les fonctions  $\alpha_k$  ( $k \geq 0$ ) sont définies sur  $X$ , à valeurs dans  $X$ , et laissent la mesure  $\mu$  invariante <sup>(2)</sup>.

Posons

$$(1) \quad \Phi(x) = \sum_{k \geq 0} \alpha_0(x) \alpha_1(x) \cdots \alpha_{k-1}(x) \log(1/\alpha_k(x)).$$

Cette série à termes positifs définit une fonction  $\Phi : X \rightarrow ]0, \infty]$ , appelée *fonction de Brjuno* <sup>(3)</sup>. On constate aisément que  $\Phi$  satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(2) \quad \Phi(x) = \log(1/x) + x\Phi(\alpha(x)) \quad (x \in X).$$

Les nombres irrationnels  $x$  pour lesquels  $\Phi(x) = \infty$ , appelés *nombres de Cremer*, constituent un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. On appelle *nombres de Brjuno* les nombres  $x$  pour lesquels la série converge.

La fonction de Brjuno intervient dans l'étude des systèmes dynamiques engendrés par les itérations d'une fonction holomorphe  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Citons en particulier un théorème de Yoccoz [14] : si  $f'(0) = e^{2i\pi x}$  où  $x \in X$ , alors  $f$  est localement linéarisable au voisinage de  $z = 0$  si et seulement si  $x$  est un nombre de Brjuno.

Marmi, Moussa et Yoccoz [8] ont entrepris l'étude de la régularité de la fonction de Brjuno et de certaines de ses variantes. Ils établissent notamment que  $\Phi$  appartient à  $L^p(0, 1)$  pour tout  $p \geq 1$  et, ce qui est une propriété plus forte, qu'elle est à oscillation moyenne bornée :

$$(3) \quad \sup \frac{1}{|I|} \int_I \left| \Phi(x) - \frac{1}{|I|} \int_I \Phi(t) dt \right| dx < \infty,$$

où le supremum est pris sur tous les intervalles ouverts  $I$  inclus dans  $]0, 1[$ , et où  $|I|$  désigne la longueur de  $I$ .

Dans ce travail, nous caractérisons les points de Lebesgue de  $\Phi$  : étant donnée une fonction  $f$  localement intégrable sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ , on dit que  $x$  est un *point de Lebesgue* de  $f$  si

$$\frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} |f(t) - f(x)| dt = o(1) \quad (h \rightarrow 0).$$

---

<sup>(2)</sup> On peut montrer que  $\alpha$  est une transformation *mélangeante* sur  $(X, \mu)$ . Cela permet de démontrer une assertion de Gauss dans une lettre à Laplace du 30 janvier 1812 (sur la convergence de la fonction de répartition de  $\alpha_k$ , par rapport à la mesure de Lebesgue, quand  $k \rightarrow \infty$ , cf. [5, pp. 371–374]). Cette assertion de Gauss avait été démontrée pour la première fois par Kuzmin en 1928 (cf. [7]). Le §4 de [1] expose clairement cette théorie.

<sup>(3)</sup> Il s'agit ici d'une variante de la fonction définie par Yoccoz dans [14, pp. 11–16] : nous utilisons la théorie habituelle des fractions continues, alors que Yoccoz en considère une version légèrement modifiée.

Un théorème classique de la théorie de l'intégrale de Lebesgue stipule que presque tout élément de  $J$  est un point de Lebesgue de  $f$  (cf. [13, Chap. 7] par exemple). Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 1. *Les points de Lebesgue de la fonction  $\Phi$  sont exactement les nombres de Brjuno.*

Notre deuxième résultat est une description complète du comportement local de la fonction croissante et absolument continue  $\Psi$  définie par

$$(4) \quad \Psi(x) = \int_0^x \Phi(t) dt \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Pour le formuler, nous prolongeons d'abord  $\Phi$  aux nombres rationnels de l'intervalle  $]0, 1[$ . Si  $r \in ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$ , on peut définir  $\alpha_k(r)$  par itération de  $\alpha$  tant que  $k$  ne dépasse pas la longueur  $K = K(r)$  de l'écriture de  $r$  en fraction continue ; nous appellerons *profondeur de  $r$*  cette quantité  $K(r)$  (voir au §5.3 ci-dessous la définition précise). On a alors  $\alpha_K(r) = 0$  et  $\alpha_k(r) > 0$  pour  $0 \leq k < K$ . On pose

$$\Phi(r) = \sum_{0 \leq k < K} \alpha_0(r) \alpha_1(r) \cdots \alpha_{k-1}(r) \log(1/\alpha_k(r)).$$

On a par exemple  $\Phi(1/k) = \log k$  si  $k$  est entier,  $k \geq 2$ . Par convention, on pose  $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$ . L'équation fonctionnelle (2) est alors encore valable si  $x \in ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$ .

THÉORÈME 2. *Soit  $x_0 \in [0, 1]$ . On a*

- (i)  $\Psi(x_0 + h) - \Psi(x_0) = o(h \log(1/|h|)) \quad (h \rightarrow 0, x_0 \in X),$
- (ii)  $\frac{\Psi(x_0 + h) - \Psi(x_0)}{h} \rightarrow \Phi(x_0) \quad (h \rightarrow 0, x_0 \in X),$
- (iii)  $\Psi(x_0 + h) - \Psi(x_0)$   
 $= \frac{1}{q} h \log(1/|h|) + \left( \frac{1}{q} - 2 \frac{\log q}{q} + \Phi(x_0) \right) h + O(qh^2 \log((q^2|h|)^{-1}))$   
 $(x_0 = p/q, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1, |h| < 2/3q^2),$

où la constante implicite dans le  $O$  est absolue.

Soit

$$\omega(h) = \sup\{|\Psi(x) - \Psi(y)| : 0 \leq x, y \leq 1, |x - y| \leq h\}$$

le module de continuité de la fonction  $\Psi$ . Notre troisième résultat fournit un équivalent asymptotique pour  $\omega(h)$  quand  $h$  tend vers 0.

THÉORÈME 3. *On a*

$$\omega(h) = h \log(1/h) + O(h) \quad (0 < h \leq 1).$$

Nous emploierons désormais les notations

$$(5) \quad \beta_k(x) = \alpha_0(x) \alpha_1(x) \cdots \alpha_k(x)$$

(par convention,  $\beta_{-1} = 1$ ) et

$$(6) \quad \gamma_k(x) = \beta_{k-1}(x) \log(1/\alpha_k(x)) \quad (x \in X, k \geq 0),$$

de sorte que  $\gamma_0(x) = \log(1/x)$  et que

$$(7) \quad \Phi(x) = \sum_{k \geq 0} \gamma_k(x) \quad (x \in X)$$

et

$$(8) \quad \Phi(x) = \sum_{k < K} \gamma_k(x) + \beta_{K-1}(x) \Phi(\alpha_K(x)) \quad (x \in X, K \in \mathbb{N}).$$

L'identité (8) est une forme généralisée de l'équation fonctionnelle (2).

Le §2 contient quelques remarques générales sur le comportement local moyen des fonctions localement intégrables. Au §3, nous rappelons les éléments de la théorie des fractions continues qui nous seront utiles. Nous obtenons au §4 une première majoration du module de continuité  $\omega(h)$ , essentiellement grâce au théorème de Ryll-Nardzewski. Pour la suite, notre approche est fondée sur un découpage diophantien de  $X$  qui fait intervenir la notion de cellule, déjà sous-jacente dans [8]. Nous définissons cette notion et l'étudions en détail au §5, en introduisant notamment les notions de profondeur et d'épaisseur d'un sous-intervalle de  $]0, 1[$ . Nous évaluons ensuite, au §6, l'intégrale des fonctions  $\gamma_k$  sur un intervalle. Au §7 nous démontrons le point (iii) du théorème 2. Après avoir traité le cas des nombres de Cremer au §8 nous démontrons le théorème 1 au §9 et le théorème 3 au §10. Au §11 final, nous formulons des questions ouvertes.

Toutes les constantes implicites dans les symboles  $O$  sont absolues. Cela étant, les calculs conduisent naturellement à des majorations numériquement explicites, et nous avons généralement adopté ce mode de présentation. Enfin, nous emploierons la notation d'Iverson :  $[A] = 1$  si la propriété  $A$  est vérifiée,  $[A] = 0$  sinon.

**2. Généralités.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  une partie de  $I$  telle que  $I \setminus X$  est de mesure nulle, et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable sur chaque segment inclus dans  $I$ . Pour fixer les idées, nous supposons que  $0 \in I$ .

Considérons les quatre ensembles suivants :

- l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points de  $X$  où  $f$  est continue ;
- l'ensemble  $\mathcal{L}$  des points  $x_0 \in X$  tels que

$$\frac{1}{h} \int_{x_0-h/2}^{x_0+h/2} |f(x) - f(x_0)| dx \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0);$$

- l'ensemble  $\mathcal{L}^1$  des points  $x_0 \in I$  tels qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  avec

$$\frac{1}{h} \int_{x_0-h/2}^{x_0+h/2} |f(x) - \alpha| dx \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0);$$

- l'ensemble  $\mathcal{D}$  des points de dérivabilité de la fonction

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x \in I).$$

L'ensemble  $\mathcal{L}$  est l'ensemble de Lebesgue de  $f$ , et  $\mathcal{L}^1$  est l'«ensemble de Lebesgue  $L^1$ » de  $f$  (voir par exemple [4, §2]). On a

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}^1 \subset \mathcal{D},$$

chaque inclusion pouvant être stricte. L'ensemble  $I \setminus \mathcal{L}$  est de mesure nulle (théorème de Lebesgue).

Le cas de la fonction de Brjuno, que nous analysons en détail dans cet article, illustre la question générale suivante. Soit  $f_n : I \rightarrow [0, \infty[$  ( $n \geq 0$ ) une suite de fonctions intégrables telle que

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$$

soit intégrable sur  $I$ . Comment déterminer les ensembles  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}^1$  et  $\mathcal{D}$  à partir de la connaissance des fonctions  $f_n$ ?

Sans entrer plus avant dans l'étude de ce problème en toute généralité, contentons-nous d'indiquer un exemple montrant qu'un point  $x_0 \in I$  tel que

- chaque fonction  $f_n$  est continue en  $x_0$ ,
- la série  $f(x_0)$  converge,

n'est pas nécessairement un point de dérivabilité de  $F$ . Il suffit de prendre  $I = \mathbb{R}$ ,  $f_0 = 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,

$$f_n(t) = |t| \cdot [|t| \leq n^{-2/3}].$$

Chaque  $f_n$  est continue en 0 avec  $f_n(0) = 0$ , donc  $f(0) = 0$ . Cependant  $f(x) = |x|^{-1/2} - |x|\{|x|^{-3/2}\}$  ( $x \neq 0$ ), donc  $F$  n'est pas dérivable en 0.

Si  $f$  est la fonction de Brjuno  $\Phi$ , on a  $\mathcal{C} = \emptyset$  (la fonction de Brjuno est non bornée au voisinage de tout point de  $[0, 1]$ , au vu, par exemple, du point (iii) du théorème 2) et  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^1 = \mathcal{D}$  est l'ensemble des nombres de Brjuno, d'après le théorème 1 et le point (ii) du théorème 2.

**3. Fractions continues.** Dans cette section nous rappelons quelques éléments de la théorie des fractions continues, et nous donnons des estimations élémentaires concernant les fonctions  $\alpha_k$  et  $\beta_k$ .

**3.1. Quotients incomplets, réduites.** Pour  $k \in \mathbb{N}$ , nous définissons la fonction <sup>(4)</sup>

$$a_k : X \rightarrow \mathbb{N}$$

par les relations  $a_0 = 0$  et  $a_k = \lfloor 1/\alpha_{k-1} \rfloor$  ( $k \geq 1$ ). Les fonctions  $a_k$ ,  $k \geq 1$ , sont à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . On appelle  $a_k(x)$  le  $k^{\text{ème}}$  quotient incomplet de  $x$ . Avec la notation classique

$$[X_0; X_1, \dots, X_k] = X_0 + \frac{1}{X_1 + \frac{1}{X_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{X_{k-1} + \frac{1}{X_k}}}}},$$

on a pour tout  $k \geq 0$ ,

$$x = [a_0(x); a_1(x), \dots, a_{k-1}(x), a_k(x) + \alpha_k(x)] \quad (x \in X).$$

On définit aussi les fonctions  $p_k, q_k : X \rightarrow \mathbb{N}$  par les relations

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, & q_{-1} &= 0, \\ p_0 &= 0, & q_0 &= 1, \\ p_1 &= 1, & q_1 &= a_1, \\ &\vdots & &\vdots \\ p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, & q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (k \geq 1), \end{aligned}$$

de sorte que

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, t] = \frac{p_{k-1}t + p_{k-2}}{q_{k-1}t + q_{k-2}} \quad (k \geq 1, t > 0),$$

et

$$[a_0; a_1, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}.$$

Les fonctions  $q_k$  ( $k \geq 0$ ) et  $p_k$  ( $k \geq 1$ ) sont à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . La fraction  $p_k(x)/q_k(x)$  est appelée la  $k^{\text{ème}}$  réduite de  $x$ . Elle est irréductible car

$$(9) \quad p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}.$$

Une autre identité dont nous aurons l'usage est

$$(10) \quad p_{k+1} q_{k-1} - p_{k-1} q_{k+1} = (-1)^{k-1} a_{k+1}.$$

---

<sup>(4)</sup> Pour tout ce qui concerne ce paragraphe on pourra se référer par exemple à [11, Chapter 7].

La suite  $\{q_k\}_{k \geq -1}$  est à croissance au moins exponentielle <sup>(5)</sup>. En effet, pour tout  $k \geq 1$  on a

$$(11) \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2} \geq 2q_{k-2}.$$

En particulier,

$$(12) \quad q_k \geq F_{k+1} \quad (k \geq 0),$$

où  $F_n$  est le  $n^{\text{ème}}$  nombre de Fibonacci ( $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$  pour  $n \geq 1$ ). On déduit également de (11) que

$$(13) \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^k q_j &= \sum_{j=2}^k q_{j-2} + q_{k-1} + q_k \\ &\leq \sum_{j=2}^k (q_j - q_{j-1}) + q_{k-1} + q_k = 2q_k + q_{k-1} - q_1 \leq 3q_k, \end{aligned}$$

majoration valable pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Nous utiliserons à plusieurs reprises une majoration de la somme des inverses des nombres de Fibonacci :

$$(14) \quad \sum_{k \geq 0} 1/F_{k+1} \leq 3,36.$$

### 3.2. Fonctions $\alpha_k$ et $\beta_k$ . De la formule

$$(15) \quad \begin{aligned} x &= [a_0(x); a_1(x), \dots, a_{k-1}(x), a_k(x) + \alpha_k(x)] \\ &= \frac{p_k(x) + \alpha_k(x)p_{k-1}(x)}{q_k(x) + \alpha_k(x)q_{k-1}(x)}, \end{aligned}$$

on déduit

$$(16) \quad \alpha_k(x) = -\frac{p_k(x) - xq_k(x)}{p_{k-1}(x) - xq_{k-1}(x)}.$$

Cela implique les identités

$$(17) \quad \beta_k(x) = (-1)^{k-1} (p_k(x) - xq_k(x)) \quad (x \in X)$$

et

$$(18) \quad \beta_k(x) = \frac{1}{q_{k+1}(x) + \alpha_{k+1}(x)q_k(x)} \quad (x \in X).$$

On dispose par conséquent de l'encadrement

$$(19) \quad \frac{1}{q_{k+1} + q_k} \leq \beta_k \leq \frac{1}{q_{k+1}} \quad (k \geq -1).$$

---

<sup>(5)</sup> Nous entendons par là l'existence d'une constante  $c > 1$  telle que  $q_k \geq c^k$ . Mais on n'a pas forcément  $\liminf_{k \rightarrow \infty} q_{k+1}/q_k > 1$ .

Une majoration plus générale nous sera utile : la définition (5) entraîne

$$(20) \quad \beta_{i+j} = \beta_i \cdot \beta_{j-1} \circ \alpha_{i+1} \quad (i \geq -1, j \geq 0),$$

d'où l'on déduit, d'après (19) et (12),

$$(21) \quad \beta_{i+j} \leq \frac{1}{q_{i+1} F_{j+1}}.$$

Par ailleurs, notant que  $\lfloor 1/\alpha_k \rfloor = a_{k+1}$  et que  $a_{k+1} = (q_{k+1} - q_{k-1})/q_k$ , nous avons d'après (11) les inégalités

$$(22) \quad \frac{q_{k+1}}{2q_k} \leq \frac{1}{\alpha_k} \leq a_{k+1} + 1 \quad (k \geq 0).$$

**3.3. Comparaison des fonctions  $\gamma_k$  et  $q_k^{-1} \log q_{k+1}$ .** Les fonctions  $\gamma_k$  et  $q_k^{-1} \log q_{k+1}$  sont proches l'une de l'autre. La proposition suivante exprime précisément ce fait.

PROPOSITION 1. *Pour  $k \geq 0$ , on a*

$$(23) \quad -\frac{\log(2q_k)}{q_k} \leq \gamma_k - \frac{\log q_{k+1}}{q_k} \leq [k = 0] \frac{\log 2}{q_k}.$$

*Démonstration.* D'après (18), on a

$$\frac{\log q_{k+1}}{q_k} - \gamma_k = \frac{q_k \log(q_{k+1} \alpha_k) + \alpha_k q_{k-1} \log q_{k+1}}{q_k(q_k + \alpha_k q_{k-1})} \geq \frac{q_k \log(q_{k+1} \alpha_k)}{q_k(q_k + \alpha_k q_{k-1})}.$$

Or, pour  $k > 0$ ,  $q_{k-1} \geq 1$ , et donc

$$q_{k+1} \alpha_k = \frac{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}{a_{k+1} + \alpha_{k+1}} \geq 1.$$

On obtient ainsi la deuxième inégalité de (23) lorsque  $k > 0$ , c'est-à-dire,

$$\gamma_k \leq \frac{\log q_{k+1}}{q_k}.$$

Pour  $k = 0$ , on a

$$\gamma_0 - \frac{\log q_1}{q_0} = \log(1/x) - \log a_1 = \log \frac{a_1 + \alpha_1}{a_1} \leq \log \frac{a_1 + 1}{a_1} \leq \log 2.$$

Par ailleurs,

$$\gamma_k = \frac{\log(1/\alpha_k)}{q_k + \alpha_k q_{k-1}}$$

est une fonction décroissante de  $\alpha_k$ . Comme  $\alpha_k \leq 1/a_{k+1}$ , on a donc

$$\gamma_k \geq \frac{\log a_{k+1}}{q_k + q_{k-1}/a_{k+1}} = \frac{a_{k+1} \log a_{k+1}}{q_{k+1}}.$$

Pour montrer que

$$\gamma_k - \frac{\log q_{k+1}}{q_k} \geq -\frac{\log(2q_k)}{q_k},$$



il suffit donc de montrer que

$$(24) \quad a_{k+1} \log a_{k+1} \geq \frac{q_{k+1}}{q_k} \log \frac{q_{k+1}}{2q_k}.$$

Si  $a_{k+1} = 1$ , on a  $q_{k+1} = q_k + q_{k-1} \leq 2q_k$ , donc (24) est vérifiée. Si  $a_{k+1} \geq 2$ , on a  $q_{k+1}/q_k \geq 2$  et

$$a_{k+1} = \frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{q_k} \geq \frac{q_{k+1}}{q_k} - 1.$$

L'inégalité (24) résultera alors de

$$(x - 1) \log(x - 1) \geq x \log(x/2) \quad (x \geq 2),$$

ce qui découle de l'étude du sens de variation de la différence

$$(x - 1) \log(x - 1) - x \log(x/2)$$

sur  $[2, \infty[$ . ■

En particulier,  $x \in X$  est un nombre de Brjuno si et seulement si la série

$$(25) \quad \sum_{k \geq 0} \frac{\log q_{k+1}(x)}{q_k(x)}$$

est convergente.

**4. Majoration du module de continuité de  $\Psi$ .** Sans utiliser la notion de cellule (§5), on peut déjà donner une majoration utile du module de continuité de  $\Psi$ , proposition 3 ci-dessous. Pour la démontrer, nous majorons d'abord l'intégrale de  $\log(1/\alpha_k)$  sur un intervalle de longueur  $h$ , proposition 2 ci-dessous.

Notre démonstration de la proposition 2 requiert une majoration de la fonction  $\Gamma$  d'Euler, sans doute classique mais pour laquelle nous ne disposons pas de référence. Rappelons que pour  $x > 0$ ,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 (\log 1/t)^{x-1} dt.$$

LEMME 1. Pour  $q \in [2, \infty[$ , on a

$$2\Gamma(q + 1) \leq q^q.$$

*Démonstration.* Notons  $\psi$  la dérivée logarithmique de la fonction  $\Gamma$ . L'inégalité proposée est vraie pour  $q = 2$ . Ensuite, il suffit de voir que les dérivées logarithmiques des deux membres vérifient la même inégalité pour  $q \geq 2$ , c'est-à-dire que

$$(26) \quad \psi(q + 1) \leq \log q + 1 \quad (q \geq 2).$$

Or, nous disposons de la formule classique

$$(27) \quad \psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \quad (x \neq 0, -1, -2, \dots),$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler. Pour  $x > 0$ , on a donc

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n(n+x)} \\ &\leq -\gamma - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x+1} + \int_1^\infty \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \\ &= 1 - \gamma - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \log(x+1). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\psi(q+1) - \log q \leq \log \left( 1 + \frac{2}{q} \right) - \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q+2} + 1 - \gamma \leq 1 \quad (q \geq 2). \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 2. Soit  $I$  un intervalle de longueur  $h \leq e^{-2}$ , inclus dans  $[0, 1]$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\int_I \log(1/\alpha_k(x)) dx \leq eh \log(1/h).$$

*Démonstration.* Pour  $q > 1$  et  $p = q/(q-1)$ , l'inégalité de Hölder donne

$$\int_I \log(1/\alpha_k(x)) dx \leq h^{1/p} \left( \int_0^1 \log^q(1/\alpha_k(x)) dx \right)^{1/q}.$$

Comme  $\alpha$  laisse la mesure  $\mu$  invariante, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log^q(1/\alpha_k(x)) dx &\leq 2 \int_0^1 \log^q(1/\alpha_k(x)) \frac{dx}{1+x} = 2 \int_0^1 \log^q(1/x) \frac{dx}{1+x} \\ &\leq 2 \int_0^1 \log^q(1/x) dx = 2\Gamma(q+1). \end{aligned}$$

D'après le lemme 1,

$$\int_I \log(1/\alpha_k(x)) dx \leq qh^{1-1/q} \quad (q \geq 2).$$

En effectuant le choix  $q = \log(1/h)$ , pour lequel  $q \geq 2$  d'après l'hypothèse faite sur  $h$ , nous obtenons la majoration annoncée.  $\blacksquare$

PROPOSITION 3. On a

$$\omega(h) \leq 10h \log(1/h) \quad (0 < h \leq e^{-2}).$$

*Démonstration.* Pour  $0 < h \leq e^{-2}$ , on a

$$\begin{aligned} \Psi(x+h) - \Psi(x) &= \int_x^{x+h} \Phi(t) dt = \sum_{k \geq 0} \int_x^{x+h} \gamma_k(t) dt \\ &\leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{F_{k+1}} \int_x^{x+h} \log(1/\alpha_k(t)) dt \quad (\text{d'après (19) puis (12)}) \\ &\leq eh \log(1/h) \sum_{k \geq 0} \frac{1}{F_{k+1}} \quad (\text{d'après la proposition 2}) \\ &\leq 3,36eh \log(1/h) \quad (\text{d'après (14)}), \end{aligned}$$

et cela entraîne bien la majoration annoncée. ■

### 5. Notion de cellule

**5.1. Définition et propriétés.** Soit  $b_0 = 0, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{N}^*$ . La cellule (de profondeur  $k$ )  $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k)$  est l'intervalle ouvert d'extrémités  $[b_0; b_1, \dots, b_k]$  et  $[b_0; b_1, \dots, b_{k-1}, b_k + 1]$ . Par convention, la seule cellule de profondeur 0 est  $]0, 1[$ .

La notion de cellule n'est pas nouvelle : elle intervient naturellement dans le cadre de la théorie métrique et ergodique des fractions continues sous l'appellation de cylindre (cf. [2, page 30 et chapitre 3.5]) ou d'intervalle (fondamental) d'ordre  $n$  (cf. [6, §12] ou [1, §4] par exemple).

Nous énonçons à présent quelques propriétés élémentaires concernant les cellules.

- Dans la cellule  $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k)$ , les fonctions  $a_j, p_j, q_j$  sont constantes pour  $j \leq k$  :

$$a_j(x) = b_j, \quad \frac{p_j(x)}{q_j(x)} = [b_0; b_1, \dots, b_j] \quad (x \in \mathfrak{c}(b_1, \dots, b_j)).$$

- La cellule  $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k)$  est l'intervalle ouvert d'extrémités

$$\frac{p_k}{q_k} \quad \text{et} \quad \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$$

(dans cet ordre si  $k$  est pair ; dans l'ordre opposé si  $k$  est impair). Sa longueur est

$$(28) \quad \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})}.$$

- On a

$$\alpha(\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k) \cap X) = \mathfrak{c}(b_2, \dots, b_k) \cap X.$$

- Soit  $k \geq 1$ , et  $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k)$  une cellule de profondeur  $k$ . Les cellules de profondeur  $k+1$  incluses dans  $\mathfrak{c}$  forment une suite  $(\mathfrak{c}_n)_{n \geq 1}$  d'intervalles ou-

verts qui constitue une partition de  $\mathfrak{c}$  privée d'une partie de  $\mathbb{Q}$  (les rationnels de la forme  $[b_0; b_1, \dots, b_k, n]$ ,  $n$  décrivant  $\mathbb{N}^*$ ).

La cellule  $\mathfrak{c}_n$  est l'intervalle d'extrémités

$$[b_0; b_1, \dots, b_k, n] = \frac{np_k + p_{k-1}}{nq_k + q_{k-1}},$$

$$[b_0; b_1, \dots, b_{k-1}, b_k, n+1] = \frac{(n+1)p_k + p_{k-1}}{(n+1)q_k + q_{k-1}}.$$

Ainsi  $\mathfrak{c}_n$  et  $\mathfrak{c}_{n+1}$  sont contigües, et  $\mathfrak{c}_n$  est l'ensemble des nombres de la forme

$$\frac{sp_k + p_{k-1}}{sq_k + q_{k-1}}, \quad n < s < n+1.$$

Dans  $\mathfrak{c}_n$ , la fonction  $q_{k+1}$  a la valeur constante  $nq_k + q_{k-1}$ . Observons que  $(p_k + p_{k-1})/(q_k + q_{k-1})$  est l'une des extrémités de  $\mathfrak{c}_1$ , mais que  $p_k/q_k$  n'est l'extrémité d'aucune cellule  $\mathfrak{c}_n$ . En revanche,  $p_k/q_k$  est la limite quand  $n$  tend vers l'infini des extrémités de  $\mathfrak{c}_n$ .

**5.2. Distance d'un irrationnel donné au bord de la cellule de profondeur  $k$  qui le contient.** Soit  $x \in X$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Il existe une unique cellule de profondeur  $k$  qui contient  $x$  :

$$\mathfrak{c} = \begin{cases} \left[ \frac{p_k}{q_k}, \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} \right[ & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \left[ \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}, \frac{p_k}{q_k} \right[ & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

où l'on a posé  $p_j = p_j(x)$ ,  $q_j = q_j(x)$  pour  $j \geq -1$ . La distance de  $x$  au bord de  $\mathfrak{c}$  joue un rôle déterminant dans la suite de notre travail. Nous la notons  $\delta_k(x)$ . On a par exemple

$$\delta_0(x) = \min(x, 1-x) \quad (x \in X).$$

Observons tout de suite que la suite  $k \mapsto \delta_k(x)$  est décroissante (au sens large) et tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini. Cherchons maintenant à exprimer  $\delta_k(x)$  en termes des fonctions précédemment définies. On a d'abord, d'après (17),

$$(29) \quad x - \frac{p_k}{q_k} = (-1)^k \frac{\beta_k(x)}{q_k}.$$

Pour la distance de  $x$  à l'autre extrémité de  $\mathfrak{c}$ , on a

$$x - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{\beta_{k+1}(x)}{q_{k+1}} + \left( \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} \right)$$

$$= (-1)^{k-1} \left( \frac{\beta_{k+1}(x)}{q_{k+1}} + \frac{a_{k+1} - 1}{q_{k+1}(q_k + q_{k-1})} \right),$$

où la deuxième égalité résulte des identités (9) et (10). Nous obtenons ainsi la formule

$$\delta_k = \min\left(\frac{\beta_k}{q_k}, \frac{\beta_{k+1}}{q_{k+1}} + \frac{a_{k+1} - 1}{q_{k+1}(q_k + q_{k-1})}\right).$$

PROPOSITION 4. *Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a*

$$\delta_k \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} \quad \text{et} \quad \delta_k \geq \begin{cases} \frac{1/2}{q_{k+1} q_{k+2}} & \text{si } a_{k+1} = 1, \\ \frac{1/2}{q_k q_{k+1}} & \text{si } a_{k+1} \geq 2. \end{cases}$$

*Démonstration.* On a d'abord, d'après (19),

$$\delta_k \leq \frac{\beta_k}{q_k} \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Ensuite, si  $a_{k+1} = 1$ , toujours d'après (19),

$$\delta_k = \frac{\beta_{k+1}}{q_{k+1}} \geq \frac{1/2}{q_{k+1} q_{k+2}},$$

et si  $a_{k+1} \geq 2$ ,

$$\delta_k \geq \min\left(\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}, \frac{1}{q_{k+1}(q_k + q_{k-1})}\right) \geq \frac{1/2}{q_k q_{k+1}}. \blacksquare$$

La proposition suivante sera utilisée au §6.3 lors de la preuve de la proposition 11.

PROPOSITION 5. *Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a*

$$\frac{\log((2\delta_k)^{-1})}{q_k} \leq 2 \frac{\log q_{k+1}}{q_k} + 2 \frac{\log q_{k+2}}{q_{k+1}}.$$

*Démonstration.* Si  $a_{k+1} \geq 2$  on a, d'après la proposition 4,

$$\frac{\log((2\delta_k)^{-1})}{q_k} \leq \frac{\log(q_k q_{k+1})}{q_k} \leq 2 \frac{\log q_{k+1}}{q_k}.$$

Si  $a_{k+1} = 1$ , on a

$$\frac{\log((2\delta_k)^{-1})}{q_k} \leq \frac{\log(q_{k+1} q_{k+2})}{q_k}.$$

Mais dans ce cas on a aussi  $q_{k+1} \leq 2q_k$ , d'où

$$\frac{\log q_{k+2}}{q_k} \leq 2 \frac{\log q_{k+2}}{q_{k+1}},$$

ce qui démontre l'inégalité annoncée.  $\blacksquare$

**5.3. Profondeur d'un nombre rationnel.** Soit  $r$  un nombre rationnel,  $0 < r < 1$ , mis sous forme irréductible  $p/q$ . Il peut s'écrire d'une et une seule façon sous la forme

$$r = [0; b_1, \dots, b_k]$$

avec  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_i \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 \leq i \leq k$ , et  $b_k \geq 2$ . Nous dirons alors que  $r$  est de *profondeur*  $k$  <sup>(6)</sup>. Par convention, 0 et 1 sont de profondeur 0.

Écrivons  $[0; b_1, \dots, b_{k-1}]$  sous forme réduite  $p_{k-1}/q_{k-1}$  (si  $k = 1$ , on a  $p_0 = 0$  et  $q_0 = 1$ ). Le nombre rationnel  $r$  est une extrémité de deux cellules de profondeur  $k$  (qui sont donc contigües) :

- $\mathfrak{c}$  d'extrémités  $[0; b_1, \dots, b_{k-1}, b_k - 1] = \frac{p - p_{k-1}}{q - q_{k-1}}$  et  $r$ ;
- $\mathfrak{c}'$  d'extrémités  $r$  et  $[0; b_1, \dots, b_{k-1}, b_k + 1] = \frac{p + p_{k-1}}{q + q_{k-1}}$ .

Comme  $b_k \geq 2$ , on a  $q_{k-1} \leq q/2$ . La longueur de  $\mathfrak{c}$  est

$$\frac{1}{(q - q_{k-1})q} > \frac{1}{q^2}.$$

tandis que la longueur de  $\mathfrak{c}'$  est

$$\frac{1}{q(q + q_{k-1})} \geq \frac{2}{3q^2}.$$

En particulier, on a l'inclusion

$$\left] r - \frac{2}{3q^2}, r + \frac{2}{3q^2} \right[ \setminus \{r\} \subset \mathfrak{c} \cup \mathfrak{c}'.$$

**5.4. Profondeur et épaisseur d'un segment inclus dans  $]0, 1[$ .** Soit  $I = [a, b]$  un segment inclus dans  $]0, 1[$ , de longueur  $h = b - a > 0$  et d'extrémités  $a, b$  irrationnelles. Il existe un unique entier naturel  $K$  tel que  $I$  soit inclus dans une cellule de profondeur  $K$ , mais dans aucune cellule de profondeur  $K + 1$ . Nous dirons alors que  $I$  est de *profondeur*  $K$ . Dans le cas où  $x = (a + b)/2$  est aussi irrationnel, le nombre  $K$  est défini par l'encadrement

$$(30) \quad \delta_{K+1}(x) < h/2 < \delta_K(x).$$

Signalons une petite subtilité. Il est exact que la longueur d'un segment  $I$  tend uniformément vers 0 quand sa profondeur  $K$  tend vers l'infini : d'après (28) et (12) on a

$$|I| \leq \frac{1}{F_{K+1}F_{K+2}}.$$

---

<sup>(6)</sup> On trouvera dans [10] une liste de problèmes arithmétiques sur la profondeur des nombres rationnels.

En revanche,  $|I|$  peut tendre vers 0 alors que  $K$  garde une valeur constante, 0 par exemple : il suffit que  $1/2$  appartienne à  $I$ . Cela étant, dans le cas où  $x \in X$  est fixé et  $I = [x - h/2, x + h/2]$  avec  $x \pm h/2 \in X$ , on a

$$(31) \quad \lim_{h \rightarrow 0} K(x, h) = \infty$$

puisque

$$\frac{1/2}{q_{K+2}(x)q_{K+3}(x)} < h$$

d'après (30) et la proposition 4.

Nous définissons également l'épaisseur de  $I$  comme le nombre de cellules de profondeur  $K + 1$  qui ont une intersection non vide avec  $I$ , où  $K$  est la profondeur de  $I$ . L'épaisseur de  $I$  est un nombre entier supérieur ou égal à 2.

**5.5. Convention.** Nous redéfinissons maintenant, et pour toute la suite, les fonctions  $a_k, p_k, q_k, \alpha_k, \beta_k$  en les prolongeant par continuité (sans changer de notation) sur chaque cellule de profondeur  $k$  (et donc également sur chaque cellule de profondeur supérieure à  $k$ ). Ainsi, en posant  $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k)$ , on aura pour  $x \in \mathfrak{c}$  :

$$(32) \quad \begin{aligned} a_k(x) &= b_k, \\ \frac{p_k(x)}{q_k(x)} &= \frac{p_k}{q_k} = [0; b_1, \dots, b_k], \\ \alpha_k(x) &= \frac{q_k x - p_k}{-q_{k-1} x + p_{k-1}}, \end{aligned}$$

$$(33) \quad \beta_k(x) = (-1)^{k-1} (p_k - x q_k).$$

En particulier,  $\alpha_k$  est dérivable sur  $\mathfrak{c}$  et y vérifie

$$(34) \quad \alpha'_k = (-1)^k \beta_{k-1}^{-2} = (-1)^k (q_k + \alpha_k q_{k-1})^2.$$

On a aussi la relation valable sur  $\mathfrak{c}$  :

$$(35) \quad \beta_{k-1} = \frac{1}{q_k} (1 - q_{k-1} \beta_k).$$

**6. Estimations en moyenne de  $\gamma_k$  sur un intervalle inclus dans une cellule de profondeur  $K$ .** Soit  $I$  un intervalle inclus dans une cellule de profondeur  $K$ . Notre objectif est ici de majorer l'intégrale  $\int_I \gamma_k(t) dt$ , où  $\gamma_k$  est définie par (6). Pour  $j \leq K$ , nous noterons  $p_j, q_j$  les valeurs constantes de ces fonctions sur  $I$ .

La discussion portera essentiellement sur les tailles respectives de  $k$  et  $K$ . Nous ferons fréquemment usage, sans toujours le mentionner explicitement, des encadrements (19) et (22). Enfin nous supposerons toujours que la longueur  $h$  de  $I$  vérifie  $h \leq e^{-2}$ .

**6.1. Le cas  $k < K$**

PROPOSITION 6. *Pour  $k < K$ , on a*

$$\int_I \gamma_k(t) dt \leq h \frac{\log(2q_{k+1})}{q_k} \leq \frac{h \log(1/h)}{2q_k} + \frac{h}{q_k}.$$

*Démonstration.* La première inégalité résulte de (23). Pour la seconde, on observe que  $I$  est inclus dans une cellule de profondeur  $k + 1$  dont la longueur est

$$\frac{1}{q_{k+1}(q_{k+1} + q_k)} < \frac{1}{q_{k+1}^2},$$

donc  $q_{k+1} < h^{-1/2}$  et

$$\log(2q_{k+1}) \leq \log(h^{-1/2}) + \log 2 \leq \frac{1}{2} \log(1/h) + 1,$$

d'où le résultat. ■

Par ailleurs, lorsque  $k < K$ , nous disposons d'une majoration uniforme de la dérivée de  $\gamma_k$  dans une cellule de profondeur  $K$ , ce qui nous conduit au résultat suivant.

PROPOSITION 7. *Soit  $I$  un segment de longueur  $h$  inclus dans une cellule  $\mathfrak{c}$  de profondeur  $K$ , et  $x$  un point quelconque de  $I$ . Pour  $k < K$ , on a*

$$\int_I |\gamma_k(t) - \gamma_k(x)| dt \leq \frac{3}{2} q_{k+1} h^2.$$

*Démonstration.* D'après les formules (32) et (33), la fonction  $\gamma_k$  est dérivable sur  $\mathfrak{c}$  pour  $k \leq K$ , et (33) et (34) fournissent

$$(36) \quad \gamma'_k = (-1)^{k-1} q_{k-1} \log(1/\alpha_k) + \frac{(-1)^{k-1}}{\beta_k}.$$

Nous en déduisons, pour  $k < K$ ,  $t \in I$ ,

$$(37) \quad |\gamma'_k(t)| \leq q_{k-1} \log(a_{k+1}+1) + q_{k+1} + q_k \leq q_k a_{k+1} + q_{k-1} + 2q_{k+1} = 3q_{k+1}.$$

La conclusion découle alors de l'inégalité des accroissements finis et de l'inégalité

$$\int_I |t - x| dt \leq \frac{h^2}{2}. \quad \blacksquare$$

**6.2. Le cas  $k = K$ .** Dans ce paragraphe et le suivant, nous donnons deux estimations, l'une comparant  $\int_I \gamma_K(t) dt$  à  $h \log(1/h)$ , l'autre à  $h$ . Pour simplifier les formulations et les démonstrations qui suivent, nous supposons dans ces §§6.2 et 6.3 que  $I$  est un segment dont les extrémités et le milieu sont irrationnels. Nous noterons respectivement  $h$ ,  $x$ ,  $K$  et  $E$  la longueur, le milieu, la profondeur et l'épaisseur de  $I$ .

Pour la première estimation, un lemme élémentaire sera utile.



LEMME 2. On a

$$\int_I \log(1/t) dt \leq h \log(1/h) + h.$$

*Démonstration.* Comme  $t \mapsto \log(1/t)$  est positive et décroissante sur  $]0, 1]$ , on a

$$\int_I \log(1/t) dt \leq \int_0^h \log(1/t) dt = h \log(1/h) + h. \blacksquare$$

PROPOSITION 8. On a

$$\int_I \gamma_K(t) dt \leq \frac{h \log(1/h)}{q_K} ([E > 2] + [E = 2]/2) + \frac{2h}{q_K}.$$

*Démonstration.* En effet,

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_K(t) dt &= \int_I \beta_{K-1}(t) \log \beta_{K-1}(t) dt + \int_I \beta_{K-1}(t) \log(1/\beta_K(t)) dt \\ &\leq \int_I \beta_{K-1}(t) \log(1/\beta_K(t)) dt \quad (\text{car } \beta_{K-1}(t) \leq 1) \\ &= \frac{1}{q_K^2} \int_{\beta_K(I)} (1 - uq_{K-1}) \log(1/u) du, \end{aligned}$$

où l'on a posé  $u = \beta_K(t)$  et utilisé (35). On a donc

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_K(t) dt &\leq \frac{1}{q_K^2} \int_{\beta_K(I)} \log(1/u) du \\ &\leq \frac{1}{q_K^2} |\beta_K(I)| \log(1/|\beta_K(I)|) + \frac{|\beta_K(I)|}{q_K^2} \quad (\text{d'après le lemme 2}) \\ &= \frac{1}{q_K^2} (q_K h) \log((q_K h)^{-1}) + \frac{q_K h}{q_K^2} \\ &= \frac{h}{q_K} \log(1/h) + \frac{(1 - \log q_K)h}{q_K}, \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition dans le cas où  $E > 2$ .

Par ailleurs, si  $E = 2$ , les nombres  $x \pm h/2$  se situent chacun dans l'une de deux cellules adjacentes, disons  $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_K, b_{K+1} - 1)$  et  $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_K, b_{K+1})$ , où  $b_{K+1} \geq 2$ . Posons

$$[0; b_1, \dots, b_K, b_{K+1}] = \frac{p}{q} \quad ((p, q) = 1),$$

et  $q$  est d'ailleurs la valeur maximale de la fonction  $q_{K+1}$  sur  $I$ .

La longueur de  $I$  est inférieure à la somme des longueurs de ces deux cellules :

$$h \leq \left| \frac{p + p_K}{q + q_K} - \frac{p - p_K}{q - q_K} \right| = \frac{2}{(q + q_K)(q - q_K)}.$$

Comme  $b_{K+1} \geq 2$ , on a  $q = b_{K+1}q_K + q_{K-1} \geq 2q_K$ , ce qui implique

$$(38) \quad h \leq \frac{8/3}{q^2},$$

et donc

$$\log(2q) \leq \frac{1}{2} \log(1/h) + \log(2\sqrt{8/3}) \leq \frac{1}{2} \log(1/h) + 2.$$

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_K(t) dt &\leq \frac{1}{q_K} \int_I \log(2q_{K+1}(t)) dt \quad (\text{d'après (23)}) \\ &\leq \frac{h}{q_K} \log(2q) \leq \frac{h}{2q_K} \log(1/h) + \frac{2h}{q_K}. \blacksquare \end{aligned}$$

PROPOSITION 9. *On a*

$$\int_I \gamma_K(t) dt \leq 8h\gamma_K(x) + \frac{h}{q_K}(6 \log q_K + 4).$$

*Démonstration.* D'après (19), on a

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_K(t) dt &= \int_I \beta_{K-1}(t) \log(1/\alpha_K(t)) dt \\ &= \int_I \beta_{K-1}(t)^3 \cdot \beta_{K-1}(t)^{-2} \log(1/\alpha_K(t)) dt \\ &\leq q_K^{-3} \int_I \beta_{K-1}(t)^{-2} \log(1/\alpha_K(t)) dt. \end{aligned}$$

Comme  $\alpha'_K(t) = (-1)^K/\beta_{K-1}^2(t)$ , il suit

$$(39) \quad \int_I \gamma_K(t) dt \leq q_K^{-3} \int_{\alpha_K(I)} \log(1/u) du.$$

L'intervalle  $\alpha_K(I)$  a pour extrémités  $\alpha_K(x-h/2)$  et  $\alpha_K(x+h/2)$ . Or, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|\alpha_K(x \pm h/2) - \alpha_K(x)| \leq (h/2) \max_{\xi \in I} \beta_{K-1}(\xi)^{-2} \leq 2q_K^2 h.$$

Supposons d'abord  $4q_K^2 h \leq \alpha_K(x)$ . Nous en déduisons

$$\frac{1}{u} \leq \frac{2}{\alpha_K(x)} \quad (u \in \alpha_K(I)),$$

donc

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_K(t) dt &\leq q_K^{-3} \log(2/\alpha_K(x)) \int_{\alpha_K(I)} du \leq q_K^{-3} \log(2/\alpha_K(x)) \cdot 4q_K^2 h \\ &\leq 8h\beta_{K-1}(x) \log(1/\alpha_K(x)) + \frac{4h}{q_K} \log 2 \leq 8h\gamma_K(x) + \frac{3h}{q_K}. \end{aligned}$$

Supposons ensuite  $4q_K^2 h \geq \alpha_K(x)$ . Nous avons dans ce cas, d'après la proposition 2,

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_K(t) dt &\leq \max_{t \in I} |\beta_{K-1}(t)| eh \log(1/h) \leq \frac{e}{q_K} h \log(4q_K^2/\alpha_K(x)) \\ &= \frac{e}{q_K} h \log(1/\alpha_K(x)) + \frac{h}{q_K} (2e \log 2 + 2e \log q_K) \\ &\leq 6h\gamma_K(x) + \frac{h}{q_K} (6 \log q_K + 4), \end{aligned}$$

d'où la conclusion. ■

**6.3. Le cas  $k > K$ .** Nos calculs nécessiteront une majoration élémentaire.

LEMME 3. Soient  $m$  et  $n$  des nombres entiers tels que  $1 \leq m < n$ . Alors

$$\sum_{m \leq l \leq n} \frac{1}{l^3} \leq 3 \frac{n-m}{m^2 n}.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq l \leq n} \frac{1}{l^3} &\leq \frac{1}{m^3} + \int_m^n \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{m^3} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{m^3} + \frac{n^2 - m^2}{2m^2 n^2} \leq \frac{1}{m^3} + \frac{n-m}{m^2 n}. \end{aligned}$$

Maintenant, comme  $1 \leq m \leq n-1$ , on a  $m(n-m) \geq n-1 \geq n/2$ , donc

$$\frac{1}{m^3} \leq 2 \frac{n-m}{m^2 n},$$

d'où le résultat. ■

Nous sommes maintenant en mesure de traiter le cas  $k > K$ .

PROPOSITION 10. Pour  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k > K$ , on a

$$\int_I \gamma_k(t) dt \leq [E = 2] \frac{6}{q_{K+1}(x) F_{k-K}} h \log(1/h) + [E > 2] \frac{72}{q_K F_{k-K}} h.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{c}$  la cellule de profondeur  $K$  qui contient  $I$ . Comme  $\mathfrak{c}$  est l'intervalle d'extrémités

$$\frac{p_K}{q_K} \quad \text{et} \quad \frac{p_K + p_{K-1}}{q_K + q_{K-1}},$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} x + (-1)^K h/2 &= \frac{up_K + p_{K-1}}{uq_K + q_{K-1}}, \\ x + (-1)^{K-1} h/2 &= \frac{vp_K + p_{K-1}}{vq_K + q_{K-1}}, \end{aligned}$$

avec  $1 \leq u < 1/\alpha_K(x) < v < +\infty$ . Posons  $m = \lfloor u \rfloor$  et  $n = \lfloor v \rfloor$ , de sorte que  $1 \leq m \leq a_{K+1}(x) \leq n$  et  $E = n - m + 1$ ,  $n > m$ .

On a donc, en utilisant l'identité (9),

$$\begin{aligned} (40) \quad h &= \left| \frac{up_K + p_{K-1}}{uq_K + q_{K-1}} - \frac{vp_K + p_{K-1}}{vq_K + q_{K-1}} \right| = \frac{v - u}{(uq_K + q_{K-1})(vq_K + q_{K-1})} \\ &\geq \frac{v - u}{q_K^2(u + 1)(v + 1)} \geq \frac{v - u}{6q_K^2 mn}, \end{aligned}$$

où la dernière minoration découle de  $u + 1 \leq 3m$  et  $v + 1 \leq 2n$ .

Rappelons que les cellules de profondeur  $K + 1$  incluses dans  $\mathfrak{c}$  sont les intervalles

$$\mathfrak{c}_l = \left\{ \frac{sp_K + p_{K-1}}{sq_K + q_{K-1}} : l < s < l + 1 \right\} \quad (l \geq 1).$$

On a

$$x + (-1)^K h/2 \in \overline{\mathfrak{c}_m}, \quad x + (-1)^{K-1} h/2 \in \overline{\mathfrak{c}_n}.$$

D'autre part,  $I$  est inclus dans la réunion des  $\overline{\mathfrak{c}_l}$ ,  $m \leq l \leq n$ , donc

$$(41) \quad \int_I \gamma_k(t) dt \leq \sum_{n \leq l \leq m} \int_{\mathfrak{c}_l} \beta_{k-1}(t) \log(1/\alpha_k(t)) dt.$$

Distinguons alors deux cas.

PREMIER CAS :  $E = 2$ . On a donc  $n = m + 1$ . Comme  $I \subset \overline{\mathfrak{c}_m} \cup \overline{\mathfrak{c}_{m+1}}$ , il s'ensuit que

$$q_{K+1}(t) = \begin{cases} mq_K + q_{K-1} \\ \text{ou} \\ (m + 1)q_K + q_{K-1} \end{cases} \quad (t \in I, t \notin \partial \mathfrak{c}_m).$$

En particulier, pour  $t \in I$ ,  $t \notin \partial \mathfrak{c}_m$ , on a

$$(42) \quad \frac{q_{K+1}(t)}{q_{K+1}(x)} \geq \frac{mq_K + q_{K-1}}{(m + 1)q_K + q_{K-1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, d'après la majoration (21) et la proposition 2,

$$\begin{aligned} (43) \quad \int_I \gamma_k(t) dt &\leq \frac{2}{q_{K+1}(x)F_{k-K}} \int_I \log(1/\alpha_k(t)) dt \\ &\leq \frac{2}{q_{K+1}(x)F_{k-K}} eh \log(1/h). \end{aligned}$$

DEUXIÈME CAS :  $E \geq 3$ . On a donc  $v - u \geq 1$ , d'où

$$(44) \quad n - m \leq v - (u - 1) \leq 2(v - u).$$

D'après la majoration (21) appliquée avec  $i = K$  et  $j = k - K - 1$  dans (41),

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_k(t) dt &\leq \frac{1}{F_{k-K}} \sum_{n \leq l \leq m} \int_{\mathfrak{c}_l} \frac{\log(1/\alpha_{k-K-1}(\alpha_{K+1}(t)))}{q_{K+1}(t)} dt \\ &\leq \frac{1}{q_K F_{k-K}} \sum_{n \leq l \leq m} \frac{1}{l} \int_{\mathfrak{c}_l} \log(1/\alpha_{k-K-1}(\alpha_{K+1}(t))) dt, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du fait que pour  $t \in \mathfrak{c}_l$ ,  $q_{K+1}(t) = lq_K + q_{K-1}$ . Nous effectuons dans chaque  $\int_{\mathfrak{c}_l}$  le changement de variable  $w = \alpha_{K+1}(t)$ . Notant que d'après (34),

$$dt = (-1)^{K+1} \frac{dw}{(q_{K+1} + wq_K)^2},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_k(t) dt &\leq \frac{1}{q_K F_{k-K}} \sum_{m \leq l \leq n} \frac{1}{l} \int_0^1 \log(1/\alpha_{k-K-1}(w)) \frac{dw}{(q_{K+1} + wq_K)^2} \\ &\leq \frac{1}{q_K^3 F_{k-K}} \int_0^1 \log(1/\alpha_{k-K-1}(w)) dw \sum_{m \leq l \leq n} \frac{1}{l^3} \\ &\leq \frac{2}{q_K^3 F_{k-K}} \int_0^1 \log(1/\alpha_{k-K-1}(w)) \frac{dw}{1+w} \sum_{m \leq l \leq n} \frac{1}{l^3}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3 et l'invariance de la mesure  $\mu$  par  $\alpha_{k-K-1}$ , il vient

$$\int_I \gamma_k(t) dt \leq \frac{6(n-m)}{q_K^3 F_{k-K} m^2 n} \int_0^1 \log(1/w) dw = \frac{6(n-m)}{q_K^3 F_{k-K} m^2 n},$$

et, d'après (40) et (44),

$$(45) \quad \int_I \gamma_k(t) dt \leq 12 \frac{v-u}{q_K^3 F_{k-K} m^2 n} \leq 72 \frac{h}{q_K F_{k-K} m} \leq 72 \frac{h}{q_K F_{k-K}}.$$

La conclusion découle de (43) et (45). ■

PROPOSITION 11. Pour  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k > K$ , on a

$$\begin{aligned} &\int_I \gamma_k(t) dt \\ &\leq \frac{h}{F_{k-K}} \left( \frac{72[E > 2]}{q_K} + 12 \frac{[E = 2] \log q_{K+2}(x)}{q_{K+1}(x)} + 12 \frac{[E = 2] \log q_{K+3}(x)}{q_{K+2}(x)} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* On a

$$\frac{\log(1/h)}{q_{K+1}(x)} \leq \frac{\log((2\delta_{K+1}(x))^{-1})}{q_{K+1}(x)} \leq 2 \frac{\log q_{K+2}(x)}{q_{K+1}(x)} + 2 \frac{\log q_{K+3}(x)}{q_{K+2}(x)}$$

d'après la proposition 5. Le résultat découle de cette inégalité et de la proposition 10. ■

**7. Comportement de  $\Psi$  au voisinage d'un point rationnel.** Nous commençons par traiter les cas des points 0 et 1.

LEMME 4. *On a*

$$\int_0^x \Phi(\alpha(t)) dt = O(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

*Démonstration.* Pour  $0 < x < 1$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^x \Phi(\alpha(t)) dt &\leq \int_0^{1/a_1(x)} \Phi(\alpha(t)) dt \quad (\text{car } x \leq 1/\lfloor 1/x \rfloor = 1/a_1(x)) \\ &= \sum_{n \geq a_1(x)} \int_{1/(n+1)}^{1/n} \Phi\left(\frac{1}{t} - n\right) dt \\ &= \sum_{n \geq a_1(x)} \int_0^1 \Phi(u) \frac{du}{(n+u)^2} = \int_0^1 \Phi(u) \sum_{n \geq a_1(x)} \frac{1}{(n+u)^2} du \\ &\leq \frac{2}{a_1(x)} \int_0^1 \Phi(u) du = O(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMME 5. *Pour  $0 < x \leq 1$ , on a*

$$(46) \quad \Psi(x) = x \log(1/x) + x + O(x^2)$$

et

$$(47) \quad \Psi(1) - \Psi(1-x) = x \log(1/x) + x + O(x^2 \log(2/x)).$$

*Démonstration.* Pour  $0 < x \leq 1$ , on a, d'après l'équation fonctionnelle de  $\Phi$ ,

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \int_0^x \Phi(t) dt = \int_0^x (t\Phi(\alpha(t)) + \log(1/t)) dt \\ &= \int_0^x \log(1/t) dt + O\left(x \int_0^x \Phi(\alpha(t)) dt\right) = x \log(1/x) + x + O(x^2), \end{aligned}$$

d'après le lemme 4.

Pour établir (47), il suffit de traiter le cas  $0 < x < 1/2$ . On a

$$\begin{aligned} \Psi(1) - \Psi(1-x) &= \int_{1-x}^1 \Phi(t) dt = \int_{1-x}^1 (t\Phi(\alpha(t)) + \log(1/t)) dt \\ &= \int_{1-x}^1 (t\Phi((1-t)/t) + \log(1/t)) dt. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable  $u = (1-t)/t$  puis en employant (46), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Psi(1) - \Psi(1-x) &= \int_0^{x/(1-x)} \left( \frac{\Phi(u)}{1+u} + \log(1+u) \right) \frac{du}{(1+u)^2} \\ &= \int_0^{x/(1-x)} (\Phi(u) + O(u\Phi(u)) + O(u)) du \\ &= \frac{x}{1-x} \log \frac{1-x}{x} + \frac{x}{1-x} + O(x^2 \log(1/x)) \\ &= x \log(1/x) + x + O(x^2 \log(1/x)). \blacksquare \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le point (iii) du théorème 2.

PROPOSITION 12. *On a uniformément pour  $r$  rationnel et  $h$  réel tels que  $0 < r < 1$ ,  $q^2|h| < 2/3$  (où  $q$  est le dénominateur de l'écriture irréductible de  $r$ ) :*

$$(48) \quad \begin{aligned} &\Psi(r+h) - \Psi(r) \\ &= \frac{h}{q} \log(1/|h|) + \left( \frac{1}{q} - 2 \frac{\log q}{q} + \Phi(r) \right) h + O(qh^2 \log((q^2|h|)^{-1})). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $K \in \mathbb{N}^*$  la profondeur du nombre rationnel  $r$ . Comme  $0 < |h| < 2/3q^2$ , on sait d'après le §5.3 que l'intervalle ouvert d'extrémités  $r$  et  $r+h$  est inclus dans l'une des deux cellules de profondeur  $K$  :

- $\mathfrak{c}$  d'extrémités  $\frac{p-p_{K-1}}{q-q_{K-1}}$  et  $r$  ;
- $\mathfrak{c}'$  d'extrémités  $r$  et  $\frac{p+p_{K-1}}{q+q_{K-1}}$ .

Les trois nombres  $\frac{p-p_{K-1}}{q-q_{K-1}}$ ,  $r$  et  $\frac{p+p_{K-1}}{q+q_{K-1}}$  se succèdent dans cet ordre si  $K$  est pair, et dans l'ordre inverse si  $K$  est impair. Par conséquent,

$$(-1)^K h > 0 \Leftrightarrow r+h \in \mathfrak{c}'.$$

On a

$$\begin{aligned} \Psi(r+h) - \Psi(r) &= \int_r^{r+h} \Phi(t) dt \\ &= \sum_{k < K} \int_r^{r+h} \gamma_k(t) dt + \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t) \Phi(\alpha_K(t)) dt, \end{aligned}$$

d'après l'identité (8). Or,

$$\begin{aligned} \left| \int_r^{r+h} \sum_{k < K} \gamma_k(t) dt - h\Phi(r) \right| &= \left| \sum_{k < K} \int_r^{r+h} (\gamma_k(t) - \gamma_k(r)) dt \right| \\ &\leq \frac{3}{2} h^2 \sum_{k < K} q_{k+1} \leq \frac{9}{2} q h^2, \end{aligned}$$

d'après la proposition 7 et l'inégalité (13).

Il reste donc à établir

$$\begin{aligned} (49) \quad \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t) \Phi(\alpha_K(t)) dt \\ = \frac{1}{q} h \log((q^2|h|)^{-1}) + \frac{h}{q} + O(qh^2 \log((q^2|h|)^{-1})). \end{aligned}$$

La fonction  $\alpha_K$  est définie sur chacune des cellules  $\mathfrak{c}$  et  $\mathfrak{c}'$ . Suivant que  $r+h$  appartienne à  $\mathfrak{c}$  ou à  $\mathfrak{c}'$ , nous prolongeons  $\alpha_K$  (par continuité à droite ou à gauche suivant la parité de  $K$ ) respectivement à  $\mathfrak{c} \cup \{r\}$  ou  $\mathfrak{c}' \cup \{r\}$ , et dans l'intégrale du premier membre de (49) nous effectuons le changement de variable  $u = \alpha_K(t)$ . Distinguons deux cas.

PREMIER CAS :  $(-1)^K h > 0$ . Dans ce cas, l'intervalle d'extrémités  $r$  et  $r+h$  est inclus dans  $\bar{\mathfrak{c}'}$ . On a  $q_K = q$ ,  $p_K = p$  et

$$u = \alpha_K(t) = \frac{q_K t - p_K}{-q_{K-1} t + p_{K-1}},$$

de sorte que, compte tenu de (34),

$$\int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t) \Phi(\alpha_K(t)) dt = (-1)^K \int_{\alpha_K(r)}^{\alpha_K(r+h)} \Phi(u) \frac{du}{(q_K + q_{K-1}u)^3}.$$

On a  $\alpha_K(r) = 0$  et

$$\alpha_K(r+h) = \frac{q^2 h}{-q_{K-1} p - q_{K-1} q h + p_{K-1} q} = \frac{q^2 |h|}{1 - |h| q q_{K-1}}.$$

Nous posons donc

$$(50) \quad x' = \frac{q^2 |h|}{1 - |h| q q_{K-1}}.$$



Comme  $q_{K-1} \leq q/2$ , on a  $0 < x' < 1$  et

$$\begin{aligned} & \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t) \Phi(\alpha_K(t)) dt \\ &= \frac{(-1)^K}{q^3} \int_0^{x'} \Phi(u) \frac{du}{(1 + uq_{K-1}/q)^3} = \frac{(-1)^K}{q^3} \int_0^{x'} \Phi(u)(1 + O(u)) du \\ &= \frac{(-1)^K}{q^3} x' \log(1/x') + \frac{(-1)^K}{q^3} x' + O(q^{-3} x'^2 \log(2/x')) \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de (46) et du lemme 4.

DEUXIÈME CAS :  $(-1)^K h < 0$ . Dans ce cas, l'intervalle d'extrémités  $r$  et  $r + h$  est inclus dans  $\bar{c}$ . Dans cette cellule, on a

$$u = \alpha_K(t) = \frac{(q - q_{K-1})t - p + p_{K-1}}{-q_{K-1}t + p_{K-1}}.$$

Par suite,  $\alpha_K(r) = 1$  et

$$\begin{aligned} \alpha_K(r + h) &= \frac{(q - q_{K-1})p/q - (p - p_{K-1}) + h(q - q_{K-1})}{-q_{K-1}p/q + p_{K-1} - q_{K-1}h} \\ &= 1 + \frac{hq^2}{(-1)^K - qq_{K-1}h} = 1 - x, \end{aligned}$$

avec cette fois

$$(51) \quad x = \frac{q^2|h|}{1 + |h|qq_{K-1}} \quad (\leq 2/3).$$

Alors, d'après (47),

$$\begin{aligned} & \int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t) \Phi(\alpha_K(t)) dt \\ &= (-1)^{K-1} \int_{1-x}^1 \Phi(u) \frac{du}{(q + (u-1)q_{K-1})^3} \\ &= \frac{(-1)^{K-1}}{q^3} \int_{1-x}^1 \Phi(u) du + O\left(q^{-3} \int_{1-x}^1 \Phi(u)(1-u) du\right) \\ &= \frac{(-1)^{K-1}}{q^3} \int_{1-x}^1 \Phi(u) du + O(q^{-3} x^2 \log(1/x)) \\ &= \frac{(-1)^{K-1}}{q^3} x \log(1/x) + \frac{(-1)^{K-1}}{q^3} x + O(q^{-3} x^2 \log(1/x)). \end{aligned}$$

Nous avons donc dans les deux cas, avec  $y = x$  ou  $x'$ ,

$$\int_r^{r+h} \beta_{K-1}(t)\Phi(\alpha_K(t)) dt = \frac{\text{sgn}(h)}{q^3}y \log(1/y) + \frac{\text{sgn}(h)}{q^3}y + O(q^{-3}y^2 \log(2/y)).$$

Comme  $q_{K-1} < q/2$  et  $|h| < 2/3q^2$ , nous en déduisons

$$\log(1/y) = \log((q^2|h|)^{-1}) + O(q^2h)$$

et

$$y = q^2|h| + O(h^2q^4),$$

ce qui entraîne bien (49). ■

### 8. Comportement de $\Psi$ au voisinage d'un nombre de Cremer.

Nous commençons par démontrer le point (i) du théorème 2, qui concerne tous les irrationnels, qu'ils soient de Cremer ou de Brjuno.

PROPOSITION 13. *Soit  $x \in X$ . On a*

$$\Psi(x + h/2) - \Psi(x - h/2) = o(h \log(1/h)) \quad (h \rightarrow 0).$$

*Démonstration.* Soit  $x \in X$  et  $K \in \mathbb{N}$ . Soit  $0 < h < \min(e^{-2}, 2\delta_K(x))$  de sorte que l'intervalle  $I = ]x - h/2, x + h/2[$  soit inclus dans la cellule de profondeur  $K$  contenant  $x$ .

Nous avons, d'après les majorations (23) et (21),

$$\int_I \Phi(t) dt \leq h \sum_{k < K} \frac{\log(2q_{k+1})}{q_k} + \sum_{k \geq K} \frac{1}{q_K F_{k-K+1}} \int_I \log(\alpha_k(t)) dt,$$

avec  $q_k = q_k(x)$  pour  $k \leq K$ . En employant la proposition 2 et l'inégalité (14), nous obtenons

$$\int_I \Phi(t) dt \leq 4h \log(2q_K) + \frac{10}{q_K} h \log(1/h).$$

Par conséquent,

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|\Psi(x + h/2) - \Psi(x - h/2)|}{h \log(1/h)} \leq \frac{10}{q_K}.$$

Comme  $K$  est arbitraire, cela démontre le résultat. ■

Nous démontrons maintenant le point (ii) du théorème 2 lorsque  $x$  est un nombre de Cremer.

PROPOSITION 14. *Soit  $x$  un nombre de Cremer. On a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(x + h) - \Psi(x)}{h} = +\infty.$$

*Démonstration.* Comme la fonction  $\gamma_k$  est positive, nous avons en toute généralité, pour  $h > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(x+h) - \Psi(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \sum_{k \geq 0} \gamma_k(t) dt \\ &\geq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \sum_{k \leq K} \gamma_k(t) dt = \sum_{k \leq K} \frac{\int_x^{x+h} \gamma_k(t) dt}{h}. \end{aligned}$$

Si  $x$  est irrationnel, chacune des fonctions  $\gamma_k$  est continue au point  $x$ , ce qui entraîne

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(x+h) - \Psi(x)}{h} \geq \sum_{k \leq K} \gamma_k(x) \quad (x \in X, K \in \mathbb{N}).$$

Si  $x$  est un point de Cremer, le membre de droite tend vers l'infini avec  $K$ , ce qui implique le résultat voulu. ■

**9. Démonstration du théorème 1 et comportement de  $\Psi$  au voisinage d'un nombre de Brjuno.** Les propositions 14 et 12 impliquent que tout point de Lebesgue de  $\Phi$  est nécessairement un nombre de Brjuno. Il reste donc à établir que

$$(52) \quad \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} |\Phi(t) - \Phi(x)| dt \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

quand  $x$  est un nombre de Brjuno. Cela impliquera directement le point (ii) du théorème 2 lorsque  $x_0$  est un nombre de Brjuno.

Par densité de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , on peut supposer que les nombres  $x \pm h/2$  sont irrationnels. Posons alors  $I = [x - h/2, x + h/2]$  et notons  $K = K(x, h)$  la profondeur de ce segment. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_I |\Phi(t) - \Phi(x)| dt &\leq \sum_{k < K} \int_I |\gamma_k(t) - \gamma_k(x)| dt + \int_I \gamma_K(t) dt \\ &\quad + \sum_{k > K} \int_I \gamma_k(t) dt + h \sum_{k \geq K} \gamma_k(x). \end{aligned}$$

Majorons chacun des quatre termes du second membre. En notant désormais  $q_j = q_j(x)$  pour tout  $j$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sum_{k < K} \int_I |\gamma_k(t) - \gamma_k(x)| dt &\leq \frac{3h}{2} \sum_{k < K} q_{k+1} \quad (\text{d'après la proposition 7}) \\ &\leq \frac{9}{2} q_K h \quad (\text{d'après (13)}) \\ &\leq \frac{9}{q_{K+1}}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de la proposition 4 puisque  $h/2 < \delta_K(x)$  ; puis,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_I \gamma_K(t) dt &\leq 8\gamma_K(x) + \frac{6 \log q_K + 4}{q_K} \quad (\text{d'après la proposition 9}) \\ &\leq \frac{14 \log q_{K+1} + 10}{q_K} \quad (\text{d'après (23)}); \end{aligned}$$

ensuite, d'après la proposition 11,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sum_{k>K} \int_I \gamma_k(t) dt &\leq \left( \frac{72}{q_K} + 12 \frac{\log q_{K+2}}{q_{K+1}} + 12 \frac{\log q_{K+3}}{q_{K+2}} \right) \sum_{k>K} \frac{1}{F_{k-K}} \\ &\leq \frac{242}{q_K} + 41 \frac{\log q_{K+2}}{q_{K+1}} + 41 \frac{\log q_{K+3}}{q_{K+2}}; \end{aligned}$$

et enfin

$$\sum_{k \geq K} \gamma_k(x) \leq \sum_{k \geq K} \frac{\log(2q_{k+1})}{q_k} \quad (\text{d'après (23)}).$$

Finalement, on obtient

$$(53) \quad \frac{1}{h} \int_I |\Phi(t) - \Phi(x)| dt \leq \sum_{k \geq K} \frac{42 \log q_{k+1} + 253}{q_k}.$$

Puisque  $x$  est un nombre de Brjuno, le membre de droite de (53) tend vers 0 lorsque  $K$  tend vers l'infini, et donc lorsque  $h$  tend vers 0 d'après (31), ce qui achève la preuve. ■

**10. Démonstration du théorème 3.** Le lemme 5 du §7 prouve que

$$\omega(h) \geq h \log(1/h) + O(h).$$

Il reste donc à établir

$$(54) \quad \omega(h) \leq h \log(1/h) + O(h).$$

Lorsque  $h > e^{-2}$ , il s'agit de montrer que  $\omega(h) = O(1)$ , ce qui est vrai car  $\Phi \in L^1(0, 1)$ . Il suffit donc de montrer que si  $I$  est un segment de longueur  $h \leq e^{-2}$  inclus dans  $[0, 1]$ , on a

$$(55) \quad \int_I \Phi(t) dt \leq h \log(1/h) + O(h).$$

En fait, par densité de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , on peut également supposer que les extrémités et le milieu  $x$  de  $I$  sont irrationnels. Soit alors  $K$  la profondeur de  $I$  et  $E$  son épaisseur.

Notons  $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(a_1, \dots, a_K)$  la cellule de profondeur  $K$  qui contient  $I$  et, pour  $j \leq K$ , désignons par  $p_j$  et  $q_j$  les valeurs constantes de ces fonctions dans  $\mathfrak{c}$ . Comme  $I$  n'est pas inclus dans une cellule de profondeur  $K + 1$ , il existe  $a_{K+1} \geq 2$  tel que le nombre rationnel

$$r = [0; a_1, \dots, a_K, a_{K+1}] = \frac{p}{q} \quad ((p, q) = 1)$$

appartienne à  $I$ . Observons que  $p$  et  $q$  sont les valeurs respectives des fonctions  $p_{K+1}$  et  $q_{K+1}$  dans la cellule  $\mathfrak{c}(a_1, \dots, a_K, a_{K+1})$ . D'autre part, si  $E = 2$ , le nombre  $x$  se situe soit dans la cellule  $\mathfrak{c}(a_1, \dots, a_K, a_{K+1})$ , soit dans la cellule  $\mathfrak{c}(a_1, \dots, a_K, a_{K+1} - 1)$ . Par conséquent

$$(56) \quad q_{K+1}(x) = q \text{ ou } q - q_K, \quad \text{et donc} \quad q_{K+1}(x) \geq q/2.$$

Nous distinguons alors deux cas :  $q \leq 100$  et  $q > 100$ , où la valeur 100 est choisie pour obtenir simplement l'inégalité cherchée dans le second cas (pour le premier cas, n'importe quelle valeur convient).

PREMIER CAS :  $q \leq 100$ . Écrivons  $I = [r - \alpha h, r + \beta h]$  avec  $0 < \alpha, \beta < 1$  et  $\alpha + \beta = 1$ . On peut supposer  $h < 1/15000$ , et donc  $q^2 h < 2/3$ . D'après la proposition 12, on a alors

$$\begin{aligned} \int_I \Phi(t) dt &= (\Psi(r + \beta h) - \Psi(r)) + (\Psi(r) - \Psi(r - \alpha h)) \\ &= \frac{\beta h}{q} \log((\beta h)^{-1}) + \frac{\alpha h}{q} \log((\alpha h)^{-1}) + O(h) \\ &= \frac{h \log(1/h)}{q} + \frac{h}{q} (\alpha \log(1/\alpha) + \beta \log(1/\beta)) + O(h) \\ &\leq h \log 1/h + O(h), \end{aligned}$$

car la fonction  $t \mapsto t \log(1/t)$  est bornée sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

DEUXIÈME CAS :  $q > 100$ . En notant  $m$  le plus grand entier inférieur ou égal à  $K$  tel que  $q_m \leq 100$ , nous effectuons la décomposition

$$\int_I \Phi(t) dt = \sum_I \int_{k < m} \gamma_k(t) dt + \int_I \gamma_m(t) dt + \sum_I \int_{k > m} \gamma_k(t) dt.$$

Nous avons, d'après (23),

$$\begin{aligned} \sum_{k < m} \int_I \gamma_k(t) dt &\leq h \sum_{k < m} \frac{\log(2q_{k+1})}{q_k} \leq h \log(2q_m) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{F_k} \\ &\leq 3,36h \log 200, \end{aligned}$$

et donc

$$\int_I \Phi(t) dt \leq \int_I \gamma_m(t) dt + \sum_{k > m} \int_I \gamma_k(t) dt + O(h).$$

Il reste à établir la majoration

$$(57) \quad \int_I \gamma_m(t) dt + \sum_{k>m} \int_I \gamma_k(t) dt \leq h \log(1/h) + O(h).$$

Pour ce faire, nous distinguons deux sous-cas.

PREMIER SOUS-CAS :  $m < K$ . La fonction  $q_{m+1}$  est alors constante sur  $I$  et, par maximalité de  $m$ , on a  $q_{m+1} > 100$ . Nous avons alors directement, avec (21) et la proposition 2,

$$\begin{aligned} \sum_{k>m} \int_I \gamma_k(t) dt &\leq \frac{1}{q_{m+1}} \sum_{k>m} \frac{1}{F_{k-m}} \int_I \log(1/\alpha_k(t)) dt \\ &\leq \frac{3,36eh \log(1/h)}{100} \leq \frac{h}{4} \log(1/h). \end{aligned}$$

Par ailleurs la proposition 6 nous donne

$$\int_I \gamma_m(t) dt \leq \frac{h \log(1/h)}{2} + h.$$

On obtient donc

$$\int_I \Phi(t) dt \leq \frac{3}{4} h \log(1/h) + O(h).$$

DEUXIÈME SOUS-CAS :  $m = K$ . Nous appliquons alors les propositions 8 et 10 :

$$\begin{aligned} \int_I \gamma_K(t) dt + \sum_{k>K} \int_I \gamma_k(t) dt \\ \leq h \log(1/h) \cdot \left( \frac{[E > 2] + [E = 2]/2}{q_K} + \frac{6[E = 2]}{q_{K+1}(x)} \sum_{k>K} \frac{1}{F_{k-K}} \right) \\ + h \left( \frac{1}{q_K} + \frac{72[E > 2]}{q_K} \sum_{k>K} \frac{1}{F_{k-K}} \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{[E > 2] + [E = 2]/2}{q_K} + \frac{6[E = 2]}{q_{K+1}(x)} \sum_{k>K} \frac{1}{F_{k-K}} \\ \leq [E > 2] + [E = 2] \left( \frac{1}{2} + \frac{12}{q} 3,36 \right) \quad (\text{d'après (56)}) \\ \leq 1 \quad (\text{car } q > 100), \end{aligned}$$

nous avons bien établi (55) dans tous les cas. ■

**11. Questions.** Il serait d'abord intéressant de déterminer le comportement asymptotique du module de continuité  $L^1$  de la fonction de Brjuno,

$$\omega_1(h) = \sup_{0 < h' \leq h} \int_0^1 |\Phi(t+h') - \Phi(t)| dt$$

(où  $\Phi$  est prolongée par 1-périodicité sur  $\mathbb{R}$ ), quand  $h$  tend vers 0.

D'autre part, dans [9], Marmi, Moussa et Yoccoz prolongent la fonction de Brjuno au demi-plan  $\Im z > 0$ . Ils étudient en détail les propriétés de la *fonction de Brjuno complexe*, et notamment son comportement quand  $\Im z \rightarrow 0$ . Il serait intéressant de relier nos résultats et les leurs, en particulier le point (iii) du théorème 2 avec le §5.2.9 de [9]. Comme nous avons conçu le présent travail dans le cadre strict de l'analyse réelle, nous laissons ces questions ouvertes.

**Remerciements.** Bruno Martin a bénéficié d'un financement par la fondation autrichienne FWF dans le cadre du projet S9605 de son réseau Analytic Combinatorics and Probabilistic Number Theory. Les auteurs remercient d'autre part le laboratoire Poncelet (CNRS–Université Indépendante de Moscou) pour son accueil lors de la préparation de cet article.

### Références

- [1] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, Wiley, New York, 1965.
- [2] K. Dajani et C. Kraaikamp, *Ergodic Theory of Numbers*, Carus Math. Monogr. 29, Math. Assoc. Amer., Washington, DC, 2002.
- [3] W. Doeblin, *Remarques sur la théorie métrique des fractions continues*, Compos. Math. 7 (1940), 353–371.
- [4] A. M. D'yachkov, *Description of sets of Lebesgue points and summability points of a Fourier series*, Mat. Sb. 182 (1991), 1367–1374 (en russe).
- [5] C. F. Gauss, *Werke. Zehnten Bandes erste Mitteilung*, Herausg. Kgl. Ges. Wiss. zu Göttingen, Teubner, Leipzig, 1917.
- [6] A. Y. Khinchin, *Continued Fractions*, Dover, Mineola, NY, 1997.
- [7] R. Kuzmin, *Sur un problème de Gauss*, dans : Atti Congr. Intern. dei Matematici Bologna 1928, t. VI, 83–89.
- [8] S. Marmi, P. Moussa et J.-C. Yoccoz, *The Brjuno functions and their regularity properties*, Comm. Math. Phys. 186 (1997), 265–293.
- [9] S. Marmi, P. Moussa et J.-C. Yoccoz, *Complex Brjuno functions*, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), 783–841.
- [10] M. Mendès France, *Remarks and problems on finite and periodic continued fractions*, Enseign. Math. (2) 39 (1993), 249–257.
- [11] I. Niven, H. S. Zuckerman et H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5ème éd., Wiley, New York, 1991.
- [12] C. Ryll-Nardzewski, *On the ergodic theorems. II. Ergodic theory of continued fractions*, Studia Math. 12 (1951), 74–79.
- [13] R. L. Wheeden et A. Zygmund, *Measure and Integral. An Introduction to Real Analysis*, Dekker, New York, 1977.

- [14] J.-C. Yoccoz, *Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques*, dans : Petits diviseurs en dimension 1, Astérisque 231 (1995), 3–88.

Michel Balazard  
Institut de Mathématiques de Luminy  
UMR 6206  
CNRS, Aix Marseille Université  
Campus de Luminy, Case 907  
13288 Marseille Cedex 9, France  
E-mail: balazard@iml.univ-mrs.fr

Bruno Martin  
Laboratoire de Mathématiques Pures  
et Appliquées  
CNRS, Université du Littoral Côte d'Opale  
50 rue F. Buisson, BP 599  
62228 Calais Cedex, France  
E-mail: martin@lmpa.univ-littoral.fr

*Received 2 February 2010;  
in revised form 7 August 2012*