STUDIA MATHEMATICA 167 (2) (2005)

Idéaux fermés de certaines algèbres de Beurling et application aux opérateurs à spectre dénombrable

par

Cyril Agrafeuil (Bordeaux)

Abstract. We denote by $\mathbb{T}$ the unit circle and by $\mathbb{D}$ the unit disc of $\mathbb{C}$. Let s be a non-negative real and ω a weight such that $\omega(n) = (1+n)^s$ $(n \geq 0)$ and the sequence $(\omega(-n)/(1+n)^s)_{n\geq 0}$ is non-decreasing. We define the Banach algebra

$$A_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) : \|f\|_\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|\omega(n) < +\infty \Big\}.$$

If I is a closed ideal of $A_\omega(\mathbb{T})$, we set $h^0(I) = \{z \in \mathbb{T} : f(z) = 0 \ (f \in I)\}$. We describe all closed ideals I of $A_\omega(\mathbb{T})$ such that $h^0(I)$ is at most countable. A similar result is obtained for closed ideals of the algebra $A_s^+(\mathbb{T}) = \{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0 \ (n < 0)\}$ without inner factor. Then we use this description to establish a link between operators with countable spectrum and interpolating sets for $\mathcal{A}^\infty$, the space of infinitely differentiable functions in the closed unit disc $\overline{\mathbb{D}}$ and holomorphic in $\mathbb{D}$.

1. Introduction. On note $\mathbb{T}$ le cercle unité et $\mathbb{D}$ le disque unité. Pour un entier $p \geq 0$, on note $\mathcal{C}^p(\mathbb{T})$ l'algèbre des fonctions p fois continûment dérivables sur $\mathbb{T}$. Si $\omega = (\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels strictement positifs, on définit

$$A_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) : \|f\|_\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|\omega(n) < +\infty \Big\},$$

où $\widehat{f}(n)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f. On dit qu'une suite $\omega = (\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un *poids* si $\omega(n) \geq 1$ et $\omega(m+n) \leq \omega(m)\omega(n)$ pour tout m, n dans $\mathbb{Z}$. Si ω est un poids, $A_\omega(\mathbb{T})$ muni de la norme $\| \ \|_\omega$ est une algèbre de Banach. Elle est régulière si et seulement si

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\log \omega(n)}{1+n^2} < +\infty$$

(voir [12, ex. 7, p. 118]). Soit p un entier positif tel que $A_\omega(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}^p(\mathbb{T})$. Si I est un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$, on pose

2000 *Mathematics Subject Classification*: 46J20, 47A30, 30H05.

$$h^k(I) = \{z \in \mathbb{T} : f(z) = \cdots = f^{(k)}(z) = 0 \ (f \in I)\} \quad (k \in \{0, \dots, p\}).$$

Soit s un réel positif ; on note $[s]$ sa partie entière. On dira qu'une suite de réels strictement positifs $\omega = (\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie la *condition* (W_s) si

$$(\mathrm{W}_s) \qquad \begin{cases} \omega(n) = (1+n)^s \quad (n \geq 0), \\ \text{la suite } \left(\dfrac{\omega(-n)}{(1+n)^s}\right)_{n\geq 0} \text{ est croissante,} \end{cases}$$

et qu'elle vérifie la *condition* (A) si

$$(\mathrm{A}) \qquad \omega(-n) = O(e^{\varepsilon\sqrt{n}}) \quad (n \to +\infty) \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Soit $\omega = (\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ un poids vérifiant les conditions (W_s) et (A). On a alors l'inclusion $A_\omega(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{T})$, et $A_\omega(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach régulière. Dans le cas particulier où le poids ω est défini par $\omega(n) = (1+|n|)^s$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, avec s un réel positif, on notera $(A_s(\mathbb{T}), \| \, \|_s)$ l'algèbre $(A_\omega(\mathbb{T}), \| \, \|_\omega)$. On remarque que $A_0(\mathbb{T}) = A(\mathbb{T})$ n'est rien d'autre que l'algèbre de Wiener. On posera également

$$A_s^+(\mathbb{T}) = \{f \in A_s(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0 \ (n < 0)\}.$$

Pour $f \in A_s^+(\mathbb{T})$, on note $S(f)$ son facteur intérieur et on pose

$$Z_+^k(f) = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : f(z) = \cdots = f^{(k)}(z) = 0\} \quad (k \in \{0, \dots, [s]\}).$$

Si I est un idéal fermé de $A_s^+(\mathbb{T})$, on note S_I son *facteur intérieur*, c'est-à-dire le plus grand diviseur intérieur commun à tous les éléments de I non nuls (voir [10, p. 85]), et on pose

$$h_+^k(I) = \bigcap_{f\in I} Z_+^k(f).$$

Nous décrivons dans un premier temps tous les idéaux fermés I de $A_\omega(\mathbb{T})$ lorsque $h^0(I)$ est au plus dénombrable et lorsque le poids ω vérifie les conditions (W_s) et (A). Plus précisément, nous montrons (théorème 3.2) que, sous ces conditions, on a

$$I = \{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f^{(j)}(z) = 0 \text{ sur } h^j(I) \ (0 \leq j \leq [s])\}.$$

Dans le cas $s = 0$, nous retrouvons ainsi un résultat connu (voir [19]). Nous déduisons alors de ce résultat une caractérisation des idéaux fermés I de $A_s^+(\mathbb{T})$ sans facteur intérieur (c'est-à-dire tels que $S_I = 1$) tels que $h_+^0(I)$ est au plus dénombrable. On note $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions holomorphes et bornées dans $\mathbb{D}$. Si $E_{[s]} \subset \cdots \subset E_0$ sont des fermés de $\mathbb{T}$ et S une fonction intérieure, on définit

$$\begin{aligned} &I(S;\, E_0, \dots, E_{[s]}) \\ &\quad = \{f \in A_s^+(\mathbb{T}) : S \mid S(f),\ E_0 \subset Z_+^0(f) \cap \mathbb{T}, \dots, E_{[s]} \subset Z_+^{[s]}(f) \cap \mathbb{T}\}, \end{aligned}$$

où $S \mid S(f)$ signifie que S divise $S(f)$, c'est-à-dire que $S(f)/S$ est dans $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$. Nous montrons que si I est un idéal fermé de $A_s^+(\mathbb{T})$ sans facteur intérieur tel que $h_+^0(I)$ est au plus dénombrable, alors

$$I = I(1;\, h_+^0(I) \cap \mathbb{T}, \dots, h_+^{[s]}(I) \cap \mathbb{T}).$$

Notons que dans le cas $s = 0$, les idéaux fermés I de $A^+(\mathbb{T}) = A_0^+(\mathbb{T})$ ont été caractérisés par J.-P. Kahane dans [11] lorsque $h_+^0(I)$ est fini, par C. Bennett et J. E. Gilbert dans [3] lorsque $h_+^0(I)$ est dénombrable, et enfin par J. Esterle, E. Strouse et F. Zouakia dans [8] lorsque $h_+^0(I)$ est le Cantor triadique. D'autre part, J. Esterle a construit un idéal fermé I de $A^+(\mathbb{T})$ tel que $I \neq I(S_I; h_+^0(I))$, démontrant ainsi que la conjecture de C. Bennett et J. E. Gilbert dans [3] est fausse.

Dans un deuxième temps, nous allons utiliser ce résultat pour étudier le comportement de certains opérateurs à spectre dénombrable et inclus dans $\mathbb{T}$. Soit E un fermé de $\mathbb{T}$ et s, t deux réels positifs ou nuls. On désignera par $P(s,t,E)$ la propriété suivante : tout opérateur T inversible sur un espace de Banach tel que $\operatorname{Sp} T \subset E$ et qui vérifie les conditions

$$\|T^n\| = O(n^s) \qquad (n \to +\infty), \tag{1}$$

$$\|T^{-n}\| = O(e^{\varepsilon\sqrt{n}}) \qquad (n \to +\infty) \text{ pour tout } \varepsilon > 0, \tag{2}$$

vérifie également la propriété plus forte

$$\|T^{-n}\| = O(n^t) \qquad (n \to +\infty). \tag{3}$$

M. Zarrabi a montré dans [19, théorème 3.1 et remarque 2.a] qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ vérifie la propriété $P(0,0,E)$ si et seulement si E est dénombrable.

Nous nous proposons d'étudier la propriété $P(s,t,E)$ pour n'importe quel réel $s \geq 0$. On dira qu'un fermé E de $\mathbb{T}$ vérifie la *condition de Carleson* si

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{d(e^{it},E)}\, dt < +\infty, \tag{C}$$

et qu'il vérifie la *condition* (ATW) s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\frac{1}{|L|}\int_L \log^+ \frac{1}{d(e^{it},E)}\, dt \leq C_1 \log\frac{1}{|L|} + C_2 \qquad \text{pour tout arc } L \text{ de } \mathbb{T}, \tag{ATW}$$

où $|L|$ désigne la longueur de l'arc L, et $d(e^{it},E)$ la distance de e^{it} à E.

La condition (ATW) vient de [1], où les auteurs montrent que les ensembles vérifiant (ATW) sont les ensembles d'interpolation pour $\mathcal{A}^\infty$, l'espace des fonctions holomorphes dans le disque unité et de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\overline{\mathbb{D}}$.

Nous montrons (théorème 5.2) que si E est un fermé dénombrable de $\mathbb{T}$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) E vérifie la condition (ATW).
(ii) E vérifie la condition (C) et pour tout réel $s \geq 0$, il existe un réel t tel que la propriété $P(s,t,E)$ soit vérifiée.

Nous montrons ensuite que si E n'est pas dénombrable, alors la propriété $P(0,t,E)$ n'est vérifiée pour aucun réel $t \geq 0$.

Je voudrais remercier mon directeur de thèse, Mohamed Zarrabi, pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui, et qui sont à l'origine de cet article.

2. Unité approchée pour certains idéaux de $A_\omega(\mathbb{T})$. Nous allons établir ici que lorsque le poids ω satisfait la condition (W_s), alors l'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ vérifie la condition de Ditkin analytique forte (au sens de [3, p. 4]). Pour cela, nous avons besoin des trois lemmes élémentaires suivants :

Lemme 2.1. *Soient β un réel tel que $0 \leq \beta < 1$ et j un entier positif. Alors pour tout réel x tel que $0 \leq x < 1$, nous avons l'inégalité suivante* :

$$\sum_{k=j}^{+\infty}(1+k)^\beta x^k \leq \frac{(j+1)^\beta x^j}{1-x} + \frac{x^{j+1}}{(1-x)^{\beta+1}}.$$

Démonstration. Soit x un réel tel que $0 \leq x < 1$; posons

$$f(x) = \sum_{k=j}^{+\infty}(1+k)^\beta x^k - \frac{(j+1)^\beta x^j}{1-x} - \frac{x^{j+1}}{(1-x)^{\beta+1}}.$$

En développant en série les fonctions $x \mapsto 1/(1-x)$ et $x \mapsto 1/(1-x)^{\beta+1}$, on montre que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^{k+j},$$

avec $a_1 = (j+2)^\beta - (j+1)^\beta - 1$ et pour tout $k \geq 2$,

$$a_k = (k+j+1)^\beta - (j+1)^\beta - \frac{(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(k-1)!}.$$

Il est facile de voir que $a_1 \leq 0$. Pour démontrer ce lemme, il suffit donc de montrer que pour tout $k \geq 2$, $a_k \leq 0$. On commence par remarquer que, pour tout $k \geq 2$, la fonction

$$t \mapsto (k+t+1)^\beta - (t+1)^\beta - \frac{(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(k-1)!}$$

est décroissante sur $[-1,+\infty)$. Par conséquent, pour tout $k \geq 2$, on a

$$a_k \leq k^\beta - \frac{(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(k-1)!}. \tag{4}$$

Puisque $\beta < 1$, on a $(1+t)^\beta \le 1 + \beta t$ pour tout réel t positif. En utilisant cette inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(k-1)!} &= (1+\beta)\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\beta}{k-1}\right)\\ &\ge (1+1)^\beta\left(1+\frac{1}{2}\right)^\beta\cdots\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^\beta = k^\beta.\end{aligned}$$

On déduit alors de cette inégalité et de (4) que $a_k \le 0$ pour tout $k \ge 2$, ce qu'il s'agissait de démontrer. ∎

LEMME 2.2. *Soit $\omega = (\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :*

(i) *les suites $(\omega(-n)/(1+n))_{n\ge 0}$ et $(\omega(n)/(1+n))_{n\ge 0}$ soient croissantes.*

(ii) $0 < \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{\omega(n+1)}{\omega(n)} < \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{\omega(n+1)}{\omega(n)} < +\infty.$

On note $A = \inf_{n\in\mathbb{Z}} \omega(n+1)/\omega(n)$ et $B = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \omega(n+1)/\omega(n)$, et on définit la suite $\omega_1 = (\omega_1(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ par

$$\omega_1(n) = \frac{\omega(n)}{1+|n|} \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Alors on a les deux propriétés suivantes :

(1) *On a la double inégalité $A\|f'\|_{\omega_1} \le \|f\|_\omega \le |\widehat{f}(0)|\omega(0) + 3B\|f'\|_{\omega_1}$.*
(2) *Soit f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ qui s'annule au point 1 ; alors $f/(\alpha-1)$ est dans $A_{\omega_1}(\mathbb{T})$, où $\alpha : z \mapsto z$.*

Démonstration. (1) Cela découle immédiatement de la relation $\widehat{f'}(n) = (n+1)\widehat{f}(n+1)$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(2) On écrit $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)(\alpha^n - 1)$, d'où

$$\frac{f}{\alpha-1} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \widehat{f}(n)(\alpha^n + \cdots + \alpha^{-1}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n)(1 + \cdots + \alpha^{n-1}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f}{\alpha-1}\right\|_{\omega_1} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} |\widehat{f}(n)|(\omega_1(n) + \cdots + \omega_1(-1))\\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|(\omega_1(0) + \cdots + \omega_1(n-1)).\end{aligned} \tag{5}$$

Comme les suites $(\omega_1(-n))_{n\geq 0}$ et $(\omega_1(n))_{n\geq 0}$ sont croissantes, on déduit de (5) que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f}{\alpha-1}\right\|_{\omega_1} &\leq \sum_{n=-\infty}^{-1}|\widehat{f}(n)|\,|n|\omega_1(n)+\sum_{n=1}^{+\infty}|\widehat{f}(n)|n\omega_1(n)\\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(n)|\omega(n)<+\infty. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Lemme 2.3. *Soient* $0\leq\beta<1$ *un réel et* $\omega=(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *une suite vérifiant la condition* (W_β)*. On définit une suite de fonctions de* $A_\omega(\mathbb{T})$ *par*

$$e_n=\frac{\alpha-1}{\alpha-1-1/n}\qquad(n\geq 1),\tag{6}$$

où α *est la fonction* $z\mapsto z$*. Alors pour toute fonction* f *dans* $A_\omega(\mathbb{T})$ *telle que* $f(1)=0$*, on a*

$$\|(e_n-1)f\|_\omega\leq 3\|f\|_\omega,\tag{7}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\|(e_n-1)f\|_\omega=0.\tag{8}$$

Démonstration. Soit f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ telle que $f(1)=0$. En écrivant $f=f-f(1)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(j)(\alpha^j-1)$, on voit que (7) sera démontré si on vérifie que

$$\|(e_n-1)(\alpha^j-1)\|_\omega\leq 3\omega(j)\qquad(j\in\mathbb{Z}).$$

Soit $n\geq 1$. Un simple calcul montre que

$$e_n=1-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\alpha^k,$$

et

$$(e_n-1)(\alpha^j-1)=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\alpha^{j+k}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\alpha^k.$$

Supposons que $j\geq 0$. On a

$$\begin{aligned}\|(e_n-1)(\alpha^j-1)\|_\omega &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{j-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k(1+k)^\beta\\ &\quad+\frac{((n+1)/n)^j-1}{n+1}\sum_{k=j}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k(1+k)^\beta.\end{aligned}$$

On a alors l'inégalité suivante :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^j-1\leq\min\left(1,\frac{j}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^j.\tag{9}$$

En effet, $((n+1)/n)^j - 1 \le ((n+1)/n)^j$, ce qui prouve l'inégalité ci-dessus dans le cas où $j \ge n$. Dans le cas où $j \le n$ et $j \ne 0$, on déduit de l'inégalité des accroissements finis que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^j - 1 \le \frac{j}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{j-1} = \frac{j}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^j.$$

Par conséquent, dans le cas $j \le n$, on a

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^j - 1 \le \frac{j}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^j$$

(le cas $j = 0$ étant évident). On déduit alors de l'inégalité (9) et du lemme 2.1 appliqué pour $x = n/(n+1)$ la majoration suivante :

$$\|(e_n - 1)(\alpha^j - 1)\|_\omega \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{j-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k (1+k)^\beta + \min\left(1, \frac{j}{n}\right)((j+1)^\beta + (n+1)^\beta). \tag{10}$$

En observant maintenant que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{j-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k (1+k)^\beta \le (1+j)^\beta,$$

et en distinguant les cas $j \le n$ et $j \ge n+1$, on obtient

$$\|(e_n - 1)(\alpha^j - 1)\|_\omega \le 3(1+j)^\beta = 3\omega(j).$$

Supposons maintenant que $j \le -1$. On a

$$\|(e_n - 1)(\alpha^j - 1)\|_\omega = \frac{1}{n+1}\sum_{k=j}^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-j}\omega(k) + \frac{1-(n/(n+1))^{-j}}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k (1+k)^\beta.$$

Avec les mêmes arguments que ceux utilisés précédemment, on obtient

$$\|(e_n - 1)(\alpha^j - 1)\|_\omega \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=j}^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-j}\omega(k) + 2\min\left(1, -\frac{j}{n}\right)(n+1)^\beta. \tag{11}$$

Grâce aux hypothèses faites sur le poids ω, on a $(1+|j|)^\beta \le \omega(j)$ et $\omega(k) \le \omega(j)$ si $j \le k \le -1$. On en déduit alors que

$$\|(e_n - 1)(\alpha^j - 1)\|_\omega \le \omega(j) + 2(1+|j|)^\beta \le 3\omega(j).$$

On vient donc de démontrer que pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\|(e_n - 1)(\alpha^j - 1)\|_\omega \leq 3\,\omega(j),$$

ce qui entraîne (7). Pour (8), on pose $f_m = \sum_{j=-m}^{+m} \widehat{f}(j)(\alpha^j - 1)$, de sorte que $\lim_{m\to+\infty} \|f - f_m\|_\omega = 0$. On a alors, en utilisant (7),

$$\begin{aligned} \|(e_n - 1)f\|_\omega &\leq \|(e_n - 1)f_m\|_\omega + \|(e_n - 1)(f - f_m)\|_\omega \\ &\leq \|(e_n - 1)f_m\|_\omega + 3\|f - f_m\|_\omega. \end{aligned} \tag{12}$$

De (10) et (11), on déduit que pour $j \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to+\infty} \|(e_n - 1)(\alpha^j - 1)\|_\omega = 0$, ce qui entraîne que $\lim_{n\to+\infty} \|(e_n - 1)f_m\|_\omega = 0$. Il est maintenant facile de voir que $\lim_{n\to+\infty} \|(e_n - 1)f\|_\omega = 0$. ■

Proposition 2.4. *Soit ω un poids satisfaisant* (W_s). *On pose*

$$u_n = e_n^{[s]+1} \qquad (n \geq 1), \tag{13}$$

où e_n est la fonction définie en (6). *Alors pour toute fonction f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ telle que $f^{(k)}(1) = 0$ pour $0 \leq k \leq [s]$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \|(u_n - 1)f\|_\omega = 0.$$

Démonstration. Dans cette démonstration on posera $p = [s]$ et on notera, pour $0 \leq k \leq p$, $\omega_k = (\omega_k(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite définie par

$$\omega_k(n) = \frac{\omega(n)}{(1 + |n|)^k}.$$

En utilisant les relations $e_n = n(\alpha - 1)(e_n - 1)$ et $(\alpha - 1)e_n' = -(e_n - 1)e_n$ $(n \geq 1)$, on montre par récurrence que pour tout k dans $\{0, \ldots, p\}$, on a

$$(u_n - 1)^{(k)} = \frac{e_n - 1}{(\alpha - 1)^k} P_k(e_n) \qquad (n \geq 1), \tag{14}$$

où P_k est un polynôme de degré inférieur à $k + p$ ne dépendant pas de n.

Soit maintenant f dans $A_\omega(\mathbb{T})$ telle que $f(1) = 0$. D'après le lemme 2.2, il s'agit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \|[(u_n - 1)f]^{(p)}\|_{\omega_p} = 0, \tag{15}$$

$$\lim_{n\to+\infty} [((u_n - 1)f)^\wedge](k) = 0 \qquad (0 \leq k \leq p - 1). \tag{16}$$

Les conditions (16) se montrent facilement à l'aide du théorème de convergence dominée, il reste donc à montrer (15). En utilisant la formule de Leibniz et l'identité (14), on obtient

$$\begin{aligned} [(u_n - 1)f]^{(p)} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (u_n - 1)^{(k)} f^{(p-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (e_n - 1) \frac{f^{(p-k)}}{(\alpha - 1)^k} P_k(e_n). \end{aligned} \tag{17}$$

Or les hypothèses sur le poids ω nous permettent d'utiliser le lemme 2.2 qui nous assure que

$$\frac{f^{(p-k)}}{(\alpha-1)^k} \in A_{\omega_p}(\mathbb{T}) \quad (0 \le k \le p).$$

De plus, ω_p vérifie la condition (W_β) avec $\beta = s - p$. On déduit alors du lemme 2.3 que si $g \in A_{\omega_p}(\mathbb{T})$ et $g(1) = 0$, alors $\|e_n g\|_{\omega_p} \le 4\|g\|_{\omega_p}$ $(n \ge 1)$. Et comme pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$, la fonction $f^{(p-k)}/(\alpha-1)^k$ s'annule en 1, on peut alors trouver une constante $C > 0$ indépendante de n et de k telle que

$$\left\|(e_n - 1)\,\frac{f^{(p-k)}}{(\alpha-1)^k}\,P_k(e_n)\right\|_{\omega_p} \le C\left\|(e_n - 1)\,\frac{f^{(p-k)}}{(\alpha-1)^k}\right\|_{\omega_p}. \tag{18}$$

De plus, toujours d'après le lemme 2.3,

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|(e_n - 1)\,\frac{f^{(p-k)}}{(\alpha-1)^k}\right\|_{\omega_p} = 0 \quad (0 \le k \le p).$$

Par conséquent, on déduit alors de (17) et (18) que

$$\lim_{n\to+\infty}\|[(u_n - 1)f]^{(p)}\|_{\omega_p} = 0. \ \blacksquare$$

3. Idéaux fermés de $A_\omega(\mathbb{T})$ et de $A_s^+(\mathbb{T})$. Il est montré dans [2] que si ω est un poids vérifiant (W_s) et (A), et I un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ tel que $h^0(I) = \{z_0\}$, alors il existe j dans $\{1, \dots, [s]\}$ tel que $I = \{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f(z_0) = \dots = f^{(j)}(z_0) = 0\}$. Nous allons montrer que ce résultat s'étend aux fermés dénombrables. Introduisons d'abord la notation suivante : si f est dans $A_\omega(\mathbb{T})$, et I un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$, on pose $I(f) = \{g \in A_\omega(\mathbb{T}) : fg \in I\}$. On a le résultat suivant :

LEMME 3.1. *Soit ω un poids vérifiant* (W_s) *et* (A), *et I un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ tel que $h^0(I)$ ait un point isolé z_0. Soit* $k = \max\big\{j \in \{0, \dots, [s]\} : z_0 \in h^j(I)\big\}$. *Alors il existe g dans I de la forme $g = (\alpha - z_0)^{k+1}\psi$, avec $\psi \in A_\omega(\mathbb{T})$ et $\psi(z_0) \ne 0$.*

Démonstration. Comme z_0 est un point isolé dans $h^0(I)$, il existe $\psi \in A_\omega(\mathbb{T})$ telle que

$$\psi = \begin{cases} 1 & \text{sur un voisinage de } z_0, \\ 0 & \text{sur un voisinage de } h^0(I) \setminus \{z_0\}. \end{cases}$$

L'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ étant régulière, $1 - \psi \in I(\psi)$, ce qui prouve que $h^0(I(\psi)) \subset \{z_0\}$. Puisque $\psi \notin I$, on a $I(\psi) \ne A_\omega(\mathbb{T})$, et donc $h^0(I(\psi)) = \{z_0\}$. Par conséquent, comme ω vérifie les conditions (W_s) et (A), on déduit de la proposition 6 de [2] qu'il existe un entier γ, $0 \le \gamma \le [s]$, tel que

$$I(\psi) = \{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f(z_0) = \dots = f^{(\gamma)}(z_0) = 0\}.$$

Comme $I \subset I(\psi)$, on a $\gamma \leq k$. D'autre part $(\alpha - z_0)^{\gamma+1}$ appartient à $I(\psi)$, et donc la fonction $g = (\alpha - z_0)^{\gamma+1}\psi$ appartient à I. Comme $g^{(k)}(z_0) = 0$ et $\psi(z_0) \neq 0$, on a $\gamma \geq k$. Donc $\gamma = k$, et la fonction g ainsi définie convient. ∎

Théorème 3.2. *Soit* ω *un poids vérifiant* (W_s) *et* (A), *et* I *un idéal fermé de* $A_\omega(\mathbb{T})$ *tel que* $h^0(I)$ *est dénombrable. Alors*

$$I = \{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f^{(j)} = 0 \textit{ sur } h^j(I)\ (0 \leq j \leq [s])\}.$$

Démonstration. Soit I un idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ tel que $h^0(I)$ est dénombrable, et notons $J = \{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f^{(j)} = 0 \text{ sur } h^j(I)\ (0 \leq j \leq [s])\}$. L'inclusion $I \subset J$ étant évidente, il reste à montrer l'autre. Soit $f \in J$. Nous allons montrer que $I(f) = A_\omega(\mathbb{T})$. Soient $z_0 \in h^0(I) \setminus h^{[s]}(I)$ et $k \in \{0, \dots, [s]-1\}$ tels que $z_0 \in h^k(I) \setminus h^{k+1}(I)$. Il est facile de voir que $J \subset \overline{(\alpha - z_0)^{k+1}A_\omega(\mathbb{T})}^{\|\,\|_\omega}$. Par conséquent, il existe une suite $(f_m)_{m\geq 0}$ de fonctions de la forme $f_m = (\alpha - z_0)^{k+1}\phi_m$, avec $\phi_m \in A_\omega(\mathbb{T})$, telle que $\lim_{m\to+\infty} \|f - f_m\|_\omega = 0$. De plus, comme $z_0 \notin h^{[s]}(I)$, le point z_0 est nécessairement isolé dans $h^0(I)$. Donc d'après le lemme précédent, il existe g dans I qui s'écrit $g = (\alpha - z_0)^{k+1}\psi$ avec $\psi \in A_\omega(\mathbb{T})$ et $\psi(z_0) \neq 0$. Posons alors

$$\Psi_m = \phi_m g = f_m \psi \quad (m \geq 0).$$

Pour tout entier $m \geq 0$ on a $\Psi_m \in I$ et $\lim_{m\to+\infty} \|\Psi_m - f\psi\|_\omega = 0$. Comme I est fermé, on a donc $f\psi \in I$, c'est-à-dire $\psi \in I(f)$. Par conséquent, $z_0 \notin h^0(I(f))$ (car $\psi(z_0) \neq 0$). Finalement, on en déduit dans un premier temps que

$$h^0(I(f)) \subset h^{[s]}(I). \tag{19}$$

Supposons que $h^0(I(f)) \neq \emptyset$; alors $h^0(I(f))$ admet un point isolé ξ_0. Sans perte de généralité, on va supposer que $\xi_0 = 1$. L'algèbre $A_\omega(\mathbb{T})$ étant régulière, il existe une fonction Φ telle que

$$\Phi = \begin{cases} 1 & \text{sur un voisinage de } 1, \\ 0 & \text{sur un voisinage de } h^0(I(f)) \setminus \{1\}. \end{cases}$$

On pose $L_\Phi = \{h \in A_\omega(\mathbb{T}) : h\Phi \in I(f)\}$, l'idéal de division de $I(f)$ par Φ. On a $1 - \Phi \in L_\Phi$, et donc $h^0(L_\Phi) \subset \{1\}$. Comme ω vérifie les conditions (A) et (W_s), on déduit de la proposition 6 de [2] que $\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f(1) = \dots = f^{(\gamma)}(1) = 0\} \subset L_\Phi$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie en (13) appartient à L_Φ. D'après l'inclusion $h^0(I(f)) \subset h^{[s]}(I)$ établie en (19), on a $f^{(k)}(1) = 0$ pour $0 \leq k \leq [s]$. Et comme le poids ω vérifie la condition (W_s), on déduit du lemme 2.4 que $\lim_{n\to+\infty} \|(u_n - 1)f\|_\omega = 0$. Puisque $u_n\Phi f \in I$ $(n \geq 1)$ et $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\Phi f - \Phi f\|_\omega = 0$, on a $\Phi f \in I$, ce qui contredit le fait que $1 \in h^0(I(f))$. Finalement, on a montré que $h^0(I(f)) = \emptyset$, et donc $I(f) = A_\omega(\mathbb{T})$, ce qui signifie exactement que $f \in I$. ∎

On va maintenant s'intéresser aux idéaux fermés de $A_s^+(\mathbb{T})$. Puisque l'algèbre $A_s(\mathbb{T})$ vérifie la condition de Ditkin analytique forte, le théorème B de [3] nous assure que tout idéal fermé I de $A_s^+(\mathbb{T})$ tel que $h_+^0(I)$ est fini, est de la forme

$$I = I^{A_s} \cap S_I \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}),$$

où I^{A_s} est l'idéal fermé de $A_s(\mathbb{T})$ engendré par I. Par conséquent, compte tenu du théorème 3.2, I est de la forme

$$I = \{f \in A_s^+(\mathbb{T}) : S_I \,|\, S(f) \text{ et } f^{(j)} = 0 \text{ sur } h^j(I) \cap \mathbb{T}\ (0 \leq j \leq [s])\}.$$

Soit I un idéal fermé non nul de $A_s^+(\mathbb{T})$. On note

$$\pi_s^+ : A_s^+(\mathbb{T}) \to A_s^+(\mathbb{T})/I$$

la surjection canonique. On a alors le résultat suivant :

Lemme 3.3. *Soient s un réel positif et I un idéal fermé non réduit à $\{0\}$ de $A_s^+(\mathbb{T})$ tel que $S_I = 1$. Alors*

$$\|\pi_s^+(\alpha)^{-n}\| = O(e^{\varepsilon\sqrt{n}}) \quad (n \to +\infty) \textit{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Démonstration. C'est un résultat établi par A. Atzmon dans la preuve de la proposition 8 de [2] dans le cas où $I = \{f \in A_s^+(\mathbb{T}) : f_{|E} = 0\}$, et qui est une conséquence du lemme 5.c de [2] (voir aussi [19, proposition 2.1]). Le résultat ci-dessus se démontre de façon analogue. ∎

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 3.4. *Soient s un réel positif et I un idéal fermé de $A_s^+(\mathbb{T})$ tel que $S_I = 1$ et $h_+^0(I)$ est au plus dénombrable. Alors*

$$I = I(1;\, h_+^0(I), \ldots, h_+^{[s]}(I)). \tag{20}$$

Démonstration. Soit I un idéal fermé sans facteur intérieur de $A_s^+(\mathbb{T})$ tel que $h_+^0(I)$ est au plus dénombrable. On déduit du lemme 3.3 que

$$\|\pi_s^+(\alpha)^{-n}\| = O(e^{\varepsilon\sqrt{n}}) \quad (n \to +\infty) \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

On considère alors le poids ω défini par

$$\begin{cases} \omega(n) = (1+n)^s & (n \geq 0), \\ \omega(-n) = (1+n)^s \sup_{0<k\leq n} \|\pi_s^+(\alpha)^{-k}\| & (n > 0), \end{cases}$$

et on définit l'application continue $\theta : A_\omega(\mathbb{T}) \to A_s^+(\mathbb{T})/I$ par

$$\theta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) \pi_s^+(\alpha)^n.$$

On a $\theta_{|A_s^+(\mathbb{T})} = \pi_s^+$, et donc

$$\operatorname{Ker}\theta \cap A_s^+(\mathbb{T}) = I. \tag{21}$$

Si I^{A_ω} désigne l'idéal fermé de $A_\omega(\mathbb{T})$ engendré par I, on a

$$I^{A_\omega} = \overline{\bigcup_{n\geq 0} \alpha^{-n} I}^{A_\omega(\mathbb{T})}.$$

Or il est facile de voir que $\alpha^{-n} I \subset \operatorname{Ker}\theta$ pour tout $n \geq 0$, et donc

$$I^{A_\omega} \cap A_s^+(\mathbb{T}) \subset \operatorname{Ker}\theta \cap A_s^+(\mathbb{T}) = I.$$

L'autre inclusion étant évidente, on a donc

$$I = I^{A_\omega} \cap A_s^+(\mathbb{T}).$$

Puisque $S_I = 1$, on a $h_+^k(I) \subset \mathbb{T}$ pour tout $0 \leq k \leq [s]$. Il est alors facile de voir que $h^k(I^{A_\omega}) = h_+^k(I)$ pour tout $0 \leq k \leq [s]$; on déduit finalement du théorème 3.2 que

$$I = I(1;\, h_+^0(I), \ldots, h_+^{[s]}(I)). \ \blacksquare$$

4. Interpolation. On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le cercle, que l'on équipe de sa topologie d'espace de Fréchet usuelle définie par les normes $(\varrho_\nu)_{\nu\in\mathbb{R}^+}$ définies par

$$\varrho_\nu(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|(1+|n|)^\nu.$$

On note également

$$\mathcal{A}^\infty = \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D}) = \{f \text{ holomorphe dans } \mathbb{D} : f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) \text{ et } f_{|\mathbb{T}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})\},$$

que l'on regardera comme l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ à coefficients de Fourier strictement négatifs nuls. Soit E un fermé du cercle unité ; on définit

$$I_\infty(E) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) : f_{|E}^{(i)} = 0 \ (i \geq 0)\},$$

et on pose $I_\infty^+(E) = I_\infty(E) \cap \mathcal{A}^\infty$.

Le dual de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ est $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$, l'ensemble des distributions sur $\mathbb{T}$. On associe à chaque distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ une suite de coefficients de Fourier $(\widehat{T}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, où pour tout entier n, $\widehat{T}(n) = \langle \alpha^{-n}, T\rangle$ (avec $\alpha : z \mapsto z$), qui vérifient $|\widehat{T}(n)| = O(|n|^m)$ pour un certain entier $m \geq 0$. La dualité entre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ est donnée par la formule

$$\langle f, T\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\widehat{T}(-n) \qquad (f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}),\, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})).$$

$I_\infty(E)^\perp$ (resp. $I_\infty^+(E)^\perp$) désigne l'ensemble des distributions s'annulant sur $I_\infty(E)$ (resp. sur $I_\infty^+(E)$). De même $(\mathcal{A}^\infty)^\perp$ est l'ensemble des distributions s'annulant sur $\mathcal{A}^\infty$, c'est-à-dire les distributions à coefficients négatifs nuls.

Dans le cas particulier où le poids ω est défini par $\omega(n) = (1+n)^s$ et $\omega(-n) = (1+n)^t$ pour tout $n \geq 0$, avec t et s deux réels, on notera $(A_{s,t}(\mathbb{T}), \| \, \|_{s,t})$ l'algèbre $(A_\omega(\mathbb{T}), \| \, \|_\omega)$. Nous supposerons dorénavant que $t \geq s$, de sorte que $A_{s,t}(\mathbb{T})$ satisfait les conditions (W_s) et (A). Si E est un fermé de $\mathbb{T}$, on notera

$$I_{s,t}(E) = \{ f \in A_{s,t}(\mathbb{T}) : f_{|E} = \cdots = f_{|E}^{([s])} = 0 \},$$

et $I_s^+(E) = I_{s,t}(E) \cap A_s^+(\mathbb{T})$. On identifiera le dual de $A_{s,t}(\mathbb{T})$ (que l'on note $(A_{s,t}(\mathbb{T}))'$) au sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ formé des distributions T telles que

$$\sup_{n \leq 0} \frac{|\widehat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} + \sup_{n>0} \frac{|\widehat{T}(n)|}{(1+n)^t} < +\infty.$$

$I_{s,t}(E)^\perp$ (resp. $I_s^+(E)^\perp$) désigne l'ensemble des éléments de $(A_{s,t}(\mathbb{T}))'$ s'annulant sur $I_{s,t}(E)$ (resp. sur $I_s^+(E)$). De même $A_s^+(\mathbb{T})^\perp$ est l'ensemble des éléments de $(A_{s,t}(\mathbb{T}))'$ s'annulant sur $A_s^+(\mathbb{T})$, c'est-à-dire les éléments de $(A_{s,t}(\mathbb{T}))'$ à coefficients négatifs nuls.

Définition 4.1. Soient s et t deux réels positifs tels que $t \geq s$. On dira qu'un fermé E du cercle unité est *d'interpolation pour* $A_{s,t}(\mathbb{T})$ si

$$\forall f \in A_{s,t}(\mathbb{T}), \, \exists \, g \in A_s^+(\mathbb{T}) : \quad f_{|E}^{(i)} = g_{|E}^{(i)} \quad (0 \leq i \leq [s]),$$

c'est-à-dire si $A_s^+(\mathbb{T}) + I_{s,t}(E) = A_{s,t}(\mathbb{T})$. On dira qu'un fermé E du cercle unité est *d'interpolation pour* $\mathcal{A}^\infty$ si

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}), \, \exists g \in \mathcal{A}^\infty : \quad f_{|E}^{(i)} = g_{|E}^{(i)} \quad (i \geq 0),$$

c'est-à-dire si $\mathcal{A}^\infty + I_\infty(E) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$.

H. Alexander, B. A. Taylor et D. L. Williams [1] ont donné une caractérisation géométrique des ensembles d'interpolation pour $\mathcal{A}^\infty$. Ils ont montré qu'un fermé du cercle unité est d'interpolation pour $\mathcal{A}^\infty$ si et seulement si E vérifie la condition (ATW). On a également la caractérisation suivante de ces ensembles :

Proposition 4.1. *Soit E un fermé du cercle unité. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *E est un ensemble d'interpolation pour $\mathcal{A}^\infty$.*
(ii) $I_\infty^+(E)^\perp = I_\infty(E)^\perp + (\mathcal{A}^\infty)^\perp$.
(iii) *Pour tout $s \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ et $t \geq 0$ tels que*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\widehat{T}(n)|}{(1+|n|)^t} \leq C \sup_{n \leq 0} \frac{|\widehat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} \qquad (T \in I_\infty(E)^\perp).$$

Démonstration. L'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) a été établie dans [1, proposition 2.1]. On va achever la preuve en prouvant que (i)$\Leftrightarrow$(iii). On sait que E est d'interpolation pour $\mathcal{A}^\infty$ si et seulement si l'injection canonique

$$i : \mathcal{A}^\infty / I_\infty^+(E) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) / I_\infty(E)$$

est surjective. Puis en utilisant la proposition 4 du paragraphe IV.30 de [4], qui caractérise les surjections entre espaces de Fréchet, on déduit que E est d'interpolation pour $\mathcal{A}^\infty$ si et seulement si pour tout $s \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ et $t \geq 0$ tels que pour tout T dans $I_\infty(E)^\perp$,

$$(|\langle f, T\rangle| \leq \varrho_s(f),\ f \in \mathcal{A}^\infty / I_\infty^+(E)) \Rightarrow (|\langle f, T\rangle| \leq C\varrho_t(f),\ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) / I_\infty(E)),$$

c'est-à-dire si et seulement si pour tout $s \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ et $t \geq 0$ tels que

$$\left(\sup_{n \leq 0} \frac{|\widehat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} \leq 1,\ T \in I_\infty(E)^\perp \right) \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\widehat{T}(n)|}{(1+|n|)^t} \leq C,$$

ce qui est clairement équivalent à (iii). ∎

On a également un résultat analogue concernant les ensembles d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$ $(t \geq s)$:

Proposition 4.2. *Soit E un fermé du cercle unité et s, t deux réels positifs tels que $t \geq s$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *E est un ensemble d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$.*
(ii) *$I_s^+(E)^\perp = I_{s,t}(E)^\perp + A_s^+(\mathbb{T})^\perp$.*
(iii) *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sup_{n>0} \frac{|\widehat{T}(n)|}{(1+|n|)^t} + \sup_{n \leq 0} \frac{|\widehat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} \leq C \sup_{n \leq 0} \frac{|\widehat{T}(n)|}{(1+|n|)^s} \qquad (T \in I_{s,t}(E)^\perp).$$

On est maintenant en mesure d'énoncer un résultat qui fait le lien entre les ensembles d'interpolation pour $\mathcal{A}^\infty$ et les ensembles d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$ $(t \geq s)$.

Théorème 4.3. *Soit E un fermé du cercle unité $\mathbb{T}$.*

(i) *Si E est d'interpolation pour $\mathcal{A}^\infty$, alors pour tout $s \geq 0$, il existe $t \geq s$ tel que E soit d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$.*
(ii) *Réciproquement, si E est dénombrable et si pour tout $s \geq 0$, il existe $t \geq s$ tel que E soit d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$, alors E est d'interpolation pour $\mathcal{A}^\infty$.*

Démonstration. (i) Cette assertion découle directement des caractérisations (iii) des propositions 4.1 et 4.2 puisque $I_{s,t}(E)^\perp$ s'injecte dans $I_\infty(E)^\perp$.

(ii) Supposons que E vérifie les hypothèses de l'assertion (ii) ; on va montrer que E satisfait la propriété (iii) de la proposition 4.1. Soit s un réel positif ; il existe $t \geq s$ tel que E soit d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$. Donc d'après la proposition 4.2, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout élément de $I_{s,t}(E)^\perp$,

$$\sup_{n>0} \frac{|\widehat{T}(n)|}{(1+|n|)^t} \le C \sup_{n\le 0} \frac{|\widehat{T}(n)|}{(1+|n|)^s}. \tag{22}$$

Soit alors T un élément de $I_\infty(E)^\perp$. Si $\sup_{n\le 0} |\widehat{T}(n)|/(1+|n|)^s = +\infty$, alors T vérifie trivialement (22).

Supposons donc que $\sup_{n\le 0} |\widehat{T}(n)|/(1+|n|)^s < +\infty$. Il existe alors $t' \ge t$ tel que T soit dans $(A_{s,t'}(\mathbb{T}))'$. Notons K la fermeture de $I_\infty(E)$ dans $A_{s,t'}(\mathbb{T})$. On vérifie facilement que K est un idéal fermé de $A_{s,t'}(\mathbb{T})$ tel que $h(K) \subset E$, et ainsi d'après le théorème 3.2, $I_{s,t'}(E) \subset K$. L'inclusion inverse étant acquise, on a finalement $K = I_{s,t'}(E)$. Et comme T est dans $I_\infty(E)^\perp$, T appartient à $I_{s,t'}(E)^\perp$ par continuité de T sur $A_{s,t'}(\mathbb{T})$. Mais puisque E est d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$, les inclusions naturelles

$$A_s^+(\mathbb{T})/I_s^+(E) \subset A_{s,t'}(\mathbb{T})/I_{s,t'}(E) \subset A_{s,t}(\mathbb{T})/I_{s,t}(E)$$

sont en réalité des égalités. Par conséquent, leurs duaux sont égaux et donc $T \in I_{s,t}(E)^\perp$. Ainsi T vérifie la propriété (22), ce qui achève la démonstration. ∎

5. Interpolation dans $A_{s,t}(\mathbb{T})$ et opérateurs

PROPOSITION 5.1. *Soit E un fermé du cercle unité, s et t deux réels positifs tels que $t \ge s$.*

(i) *Si on suppose que E est dénombrable et d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$, alors E vérifie la propriété $P(s,t,E)$.*

(ii) *Réciproquement, si E vérifie la condition de Carleson* (C) *et la propriété $P(s,t,E)$, alors E est d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$.*

Démonstration. (i) Soit T un opérateur inversible sur un espace de Banach X vérifiant les conditions (1) et (2). On définit alors le poids ω par

$$\begin{cases} \omega(n) = (1+n)^s & (n \ge 0), \\ \omega(-n) = (1+n)^s \sup_{0<k\le n} \|T^{-k}\| & (n > 0). \end{cases}$$

Puisque T vérifie la condition (1), on peut définir un opérateur borné Φ de $A_\omega(\mathbb{T})$ dans $\mathcal{L}(X)$ par

$$\Phi(f) = f(T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) T^n \qquad (f \in A_\omega(\mathbb{T})).$$

Puisque $A_\omega(\mathbb{T})$ est régulière, on a $h(\operatorname{Ker}\Phi) = \operatorname{Sp} T \subset E$ (voir [7, théorème 2.5]), et donc $\{f \in A_\omega(\mathbb{T}) : f_{|E} = \cdots = f_{|E}^{([s])} = 0\} \subset \operatorname{Ker}\Phi$ d'après le théorème 3.2. En utilisant le fait que E est d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$

et des méthodes similaires à celles utilisées dans [20] pour la preuve du théorème 2.6, on montre que, pour $n \geq 0$,

$$\|T^{-n}\| \leq C\|\alpha^{-n}\|_{s,t} = C(1+n)^t,$$

ce qui prouve que T vérifie la propriété (3).

(ii) Pour la réciproque, on considère l'opérateur T défini sur $A_s^+(\mathbb{T})/I_s^+(E)$ par

$$T : \pi_s^+(f) \mapsto \pi_s^+(\alpha f) \qquad (f \in A_s^+(\mathbb{T})),$$

où π_s^+ est la surjection canonique de $A_s^+(\mathbb{T})$ sur $A_s^+(\mathbb{T})/I_s^+(E)$. On a $\|T^n\| = O(n^s)$ $(n \to +\infty)$. Or, puisque E est de Carleson, $I_s^+(E)$ est non réduit à $\{0\}$ (voir [5]). De plus, $I_s^+(E)$ est sans facteur intérieur, donc en utilisant le lemme 3.3, on obtient l'évaluation

$$\|T^{-n}\| = O(e^{\varepsilon\sqrt{n}}) \qquad (n \to +\infty) \text{ pour tout } \varepsilon > 0. \tag{23}$$

Et puisque $\operatorname{Sp} T = \operatorname{Sp} \pi_s^+(\alpha) = E$, on a

$$\|T^{-n}\| = \|\pi_s^+(\alpha)^{-n}\| = O(n^t) \qquad (n \to +\infty),$$

ce qui montre que E est un ensemble d'interpolation pour $A_{s,t}(\mathbb{T})$. ∎

Le résultat suivant, annoncé dans l'introduction, est alors une conséquence directe du théorème 4.3 et de la proposition 5.1.

Théorème 5.2. *Soit E un fermé dénombrable du cercle unité $\mathbb{T}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E vérifie la condition* (ATW).
(ii) *E vérifie la condition* (C), *et pour tout $s \geq 0$, il existe $t \geq s$ tel que la propriété $P(s,t,E)$ soit vérifiée.*

Nous allons conclure en montrant que les hypothèses du théorème sont optimales. Soit E un ensemble fermé du cercle unité et μ une mesure à support dans E. Soit J_μ la fonction singulière associée à μ, à savoir

$$J_\mu(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)\right\} \qquad (|z|<1).$$

On pose $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}^2(\mathbb{D}) \ominus J_\mu \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, où $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ désigne l'espace de Hardy usuel. On note $P_{\mathcal{H}_0}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}_0$ et $\alpha : z \mapsto z$. On définit alors l'opérateur T_μ sur $\mathcal{H}_0$ par

$$T_\mu(f) = P_{\mathcal{H}_0}(\alpha f) \qquad (f \in \mathcal{H}_0). \tag{24}$$

D'après [15, proposition 5.1, p. 117], on a $\operatorname{Sp} T_\mu = \operatorname{Supp} \mu \subset E$.

Si on remplace la condition “pour tout $\varepsilon > 0$” dans la propriété $P(s,t,E)$ par une condition à ε fixé, alors la propriété $P(0,t,\{1\})$ n'est vérifiée pour aucun réel $t \geq 0$. En effet, soient $\varepsilon_0 > 0$, $\mu = 2\pi\varepsilon_0^2\,\delta_1$ (où δ_1 est la mesure de

Dirac en 1) et $T_1 = T_\mu$ l'opérateur défini en (24). Alors T_1 est un opérateur non unitaire tel que $\operatorname{Sp} T_1 = \{1\}$ et

$$\|T_1^{-n}\| = O(e^{4\varepsilon_0\sqrt{n}}) \quad (n \to +\infty)$$

(voir [20] pour plus de détails). Le théorème 6.4 de [6] nous montre alors que $T_1^{-n} = O(n^t)\,(n \to +\infty)$ n'est satisfait pour aucun réel $t \geq 0$.

Nous allons maintenant montrer que l'hypothèse de dénombrabilité de E dans le théorème 5.2 est essentielle. Pour cela, on a besoin du lemme suivant :

LEMME 5.3. *Tout fermé non dénombrable et de mesure nulle du cercle unité contient un ensemble parfait qui vérifie la condition de Carleson* (C).

Démonstration. Soit S un fermé non dénombrable et de mesure nulle du cercle unité. Sans perte de géneralité, on peut supposer que $1 \notin S$. On écrit alors $S = \{e^{it} : t \in E\}$, où E est un fermé de $\mathbb{R}$ inclu dans $]0, 2\pi[$, et on se ramène ainsi à la droite réelle. Soit P la partie parfaite de E. On pose

$$P_0 = \{x \in P : \exists\varepsilon > 0 \text{ tel que }]x-\varepsilon, x[\, \cap P = \emptyset \text{ ou }]x, x+\varepsilon[\, \cap P = \emptyset\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des points de P qui sont limites d'un seul côté d'une suite de points de P. Montrons dans un premier temps que P_0 est au plus dénombrable. On pose pour cela

$$Q_n = \{x \in P_0 :]x-1/n, x[\, \cap P = \emptyset \text{ ou }]x, x+1/n[\, \cap P = \emptyset\} \quad (n \geq 1).$$

Il est clair que $P_0 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q_n$ et que chaque Q_n est fini. Par conséquent, P_0 est au plus dénombrable.

Soient a_0 et b_0 deux points de $P \setminus P_0$ tels que $a_0 < b_0$ et $|a_0 - b_0| \leq 1$; on pose $I_0 = [a_0, b_0]$. À la première étape, on retire de I_0 un intervalle ouvert $J_1^{(1)}$ dont les extrémités sont dans $P \setminus P_0$, de sorte qu'il reste deux intervalles fermés $I_1^{(1)}$ et $I_2^{(1)}$ qui soient non vides, non réduits à un singleton et de longueur inférieure à $\frac{1}{3}(b_0 - a_0)$ (un tel choix est possible car P_0 est au plus dénombrable). On note F_1 l'ensemble constitué des deux intervalles fermés $I_1^{(1)}$ et $I_2^{(1)}$. Le fait que les extrémités de ces deux intervalles soient dans $P \setminus P_0$ permet de réitérer le procédé sur chacun d'eux.

Ainsi, à l'issu de la $n^{\text{ième}}$ étape, on obtient un ensemble fermé F_n constitué de 2^n intervalles fermés de longueur inférieure à $3^{-n}(b_0 - a_0)$, en ayant retiré de nouveau 2^{n-1} intervalles ouverts $J_k^{(n)}$ $(1 \leq k \leq 2^{n-1})$ à extrémités dans $P \setminus P_0$. On pose alors

$$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n.$$

F est clairement un ensemble parfait contenu dans P. Il reste à vérifier que F satisfait la condition de Carleson (C). On a $I_0 \setminus F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_k^{(n)}$.

Comme F est de mesure nulle, il satisfait la condition de Carleson si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} |J_k^{(n)}| \log \frac{1}{|J_k^{(n)}|} < +\infty. \tag{25}$$

Or chaque intervalle $J_k^{(n)}$ est de longueur inférieure à $3^{-(n-1)}(b_0 - a_0)$. Comme la fonction $x \mapsto x \log x^{-1}$ est croissante sur $[0, e^{-1}]$, pour n assez grand, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} |J_k^{(n)}| \log \frac{1}{|J_k^{(n)}|} &\leq 2^{n-1} \frac{b_0 - a_0}{3^{n-1}} \log \frac{3^{n-1}}{b_0 - a_0} \\ &\leq (b_0 - a_0)((n-1)\log 3 - \log(b_0 - a_0))\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

et par conséquent (25) a bien lieu. ∎

Proposition 5.4. *Soit E un ensemble fermé non dénombrable du cercle unité. Alors la propriété $P(0, t, \{1\})$ n'est vérifiée pour aucun réel $t \geq 0$.*

Démonstration. Soit E un ensemble fermé non dénombrable du cercle unité. D'après le lemme précédent, E contient un ensemble parfait F qui vérifie la condition de Carleson. Soit alors μ une mesure continue à support inclu dans F et T_μ l'opérateur défini en (24). T_μ est une contraction dont le spectre est inclu dans F, et on montre en utilisant le lemme 2 de [2] que

$$\|T_\mu^{-n}\| = O(e^{\varepsilon\sqrt{n}}) \quad (n \to +\infty) \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Maintenant on conclut par des arguments bien connus (voir [9]) que $\lim_{n\to+\infty} \|T_\mu^{-n}\| = +\infty$, et donc que T_μ n'est pas unitaire. Puis on déduit du théorème 6.4 de [6] que $T_\mu^{-n} = O(n^t)$ $(n \to +\infty)$ n'est satisfait pour aucun réel $t \geq 0$. ∎

Références

[1] H. Alexander, B. A. Taylor and D. L. Williams, *The interpolating sets for $\mathcal{A}^\infty$*, J. Math. Anal. Appl. 36 (1971), 556–566.

[2] A. Atzmon, *Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces*, Acta Math. 144 (1980), 27–63.

[3] C. Bennett and J. E. Gilbert, *Homogeneous algebras on the circle. I. Ideals of analytic functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 22 (1972), no. 3, 1–19.

[4] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5*, Masson, Paris, 1981.

[5] L. Carleson, *Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle*, Acta Math. 87 (1952), 325–345.

[6] J. Esterle, *Uniqueness, strong forms of uniqueness and negative powers of contractions*, dans : Banach Center Publ. 30, Inst. Math. Polish Acad. Sci., Warszawa, 1994, 127–145.

[7] J. Esterle, E. Strouse and F. Zouakia, *Theorems of Katznelson–Tzafriri type for contractions*, J. Funct. Anal. 94 (1990), 273–287.

[8] —, —, —, *Closed ideals of A^+ and the Cantor set*, J. Reine Angew. Math. 449 (1994), 65–79.

[9] J. Esterle, M. Zarrabi and M. Rajoelina, *On contractions with spectrum contained in the Cantor set*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 117 (1995), 339–343.

[10] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.

[11] J.-P. Kahane, *Idéaux primaires fermés dans certaines algèbres de Banach de fonctions analytiques*, dans : L'analyse harmonique dans le domaine complexe (Actes Table Ronde Internat. CNRS, Montpellier, 1972), Lecture Notes in Math. 336, Springer, 1973, 5–14.

[12] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Wiley, New York, 1968.

[13] B. I. Korenblum, *Closed ideals of the ring A^n*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 6 (1972), 38–53 (in Russian); English transl.: Functional Anal. Appl. 6 (1972), 203–214.

[14] A. L. Matheson, *Closed ideals in rings of analytic functions satisfying a Lipschitz condition*, in: Lecture Notes in Math. 604, Springer, Berlin, 1977, 67–72.

[15] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967.

[16] W. Rudin, *The closed ideals in an algebra of analytic functions*, Canad. J. Math. 9 (1957), 426–434.

[17] B. A. Taylor and D. L. Williams, *Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values*, ibid. 22 (1970), 1266–1283.

[18] —, —, *Zeros of Lipschitz functions analytic in the unit disc*, Michigan Math. J. 18 (1971), 129–139.

[19] M. Zarrabi, *Synthèse spectrale dans certaines algèbres de Beurling sur le cercle unité*, Bull. Soc. Math. France 118 (1990), 241–249.

[20] —, *Contractions à spectre dénombrable et propriétés d'unicité des fermés dénombrables du cercle*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), 251–263.

Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, France
E-mail: Cyril.Agrafeuil@math.u-bordeaux1.fr

Received May 14, 2003
Revised version June 1, 2004 (5206)