

Division dans l’anneau des séries formelles à croissance contrôlée. Applications

par

AUGUSTIN MOUZE (Lille)

Abstract. We consider subrings A of the ring of formal power series. They are defined by growth conditions on coefficients such as, for instance, Gevrey conditions. We prove a Weierstrass–Hironaka division theorem for such subrings. Moreover, given an ideal \mathcal{I} of A and a series f in A we prove the existence in A of a unique remainder r modulo \mathcal{I} . As a consequence, we get a new proof of the noetherianity of A .

Introduction. Dans toute la suite, $M = \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de réels positifs qui vérifie les propriétés

- (H₁) $M_0 = 1$ et $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est logarithmiquement convexe,
 (H₂) $\exists C > 0$ tel que $M_{n+1} \leq C^{n+1} M_n$.

La condition (H₁) équivaut à la croissance de la suite $\{M_{n+1}/M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et entraîne l’inégalité $M_j M_k \leq M_{j+k}$ pour tous j, k entiers.

On note aussi, dans la suite, pour tout entier fixé k , M_{+k} la suite $\{M_{n+k}\}_{n \in \mathbb{N}}$, M_{-k} la suite $\{M_{n-k}\}_{n \in \mathbb{N}, n \geq k}$ et $M^{(k)}$ la suite $\{M_{kn}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On désigne alors par $\mathbb{K}[[X]]$ l’anneau des séries formelles en s variables à coefficients dans le corps \mathbb{K} . Pour tout multi-indice J de \mathbb{N}^s , on note $X^J = X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}$ et $|J| = j_1 + \dots + j_s$. Soit $r = (r_1, \dots, r_s)$ un poly-rayon de \mathbb{R}_+^{*s} . On note

$$\mathbb{K}[[X]](M, r) = \left\{ f \in \mathbb{K}[[X]] : f = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} f_J X^J, \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s \\ |J|=j}} \frac{|f_J|}{M_j} r^J < \infty \right\}$$

et

$$\mathbb{K}[[X]](M) = \bigcup_r \mathbb{K}[[X]](M, r).$$

On dit que l’anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ est un anneau de séries formelles à *croissance contrôlée*. C’est une limite inductive d’espaces de Banach. Si $M = 1$, c’est-

2000 *Mathematics Subject Classification*: 13F25, 13J15, 16P40, 32A05.

à-dire si $M_n = 1$ pour tout entier n , alors $\mathbb{K}[[X]](1)$ n'est autre que $\mathbb{K}\{X\}$, l'anneau des séries convergentes.

Afin d'étudier les propriétés de $\mathbb{K}[[X]](M)$, on se propose d'établir, dans cet anneau, un théorème de division du type Weierstrass par plusieurs séries. Une version du théorème de préparation de Weierstrass et de division par une seule série a déjà été donnée par J. Chaumat et A.-M. Chollet [3]. On retrouve leur résultat ici. Il s'agit des théorèmes 3.1 et 3.2. Dans le même article, les auteurs montrent que, sous l'hypothèse (H_1) , la condition (H_2) est nécessaire et suffisante pour que l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ soit noethérien. On notera que les énoncés font appel à une notion de p -régularité plus restrictive que la notion de régularité d'ordre p classique dans $\mathbb{K}[[X]]$ et $\mathbb{K}\{X\}$. On sait [3], en effet, que la division dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ par une série régulière d'ordre p met, en général, en évidence une perte de régularité sur la croissance des coefficients du quotient et du reste dans cette division. Ce phénomène a été noté également par M. A. Zurro [8] dans le cadre de la division par plusieurs séries formelles, au sens d'Hironaka [1]; en effet, dans [8], on trouve des énoncés avec "perte de régularité" concernant les anneaux à croissance Gevrey ($M_n = n!^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

0. Présentation des principaux résultats. Dans ce papier, on établit tout d'abord un théorème de division au sens d'Hironaka dans $\mathbb{K}[[X]](M)$.

0.1. NOTATIONS. Dans toute la suite, pour tout $f \in \mathbb{K}[[X]]$, on note f_J l'élément de \mathbb{K} défini par la formule $f(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} f_J X^J$. On définit alors l'ensemble d'exposants

$$\text{Exp}_X(f) = \{J \in \mathbb{N}^s : f_J \neq 0\}.$$

Soient p multi-indices de \mathbb{N}^s , E_1, \dots, E_p . On note

$$(0.1.1) \quad \Delta = \bigcup_{i=1}^p (E_i + \mathbb{N}^s).$$

On choisit alors une partition $\Delta = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_p$ de Δ telle que, pour tout $i = 1, \dots, p$, $\Delta_i \subset E_i + \mathbb{N}^s$. Par exemple, on pose $\Delta_1 = E_1 + \mathbb{N}^s$, $\Delta_2 = (E_2 + \mathbb{N}^s) - \Delta_1$, \dots , $\Delta_i = (E_i + \mathbb{N}^s) - (\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_{i-1})$. Dans toute la suite, on dira que $\mathbb{N}^s = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$ est la *partition de \mathbb{N}^s associée aux E_i , $i = 1, \dots, p$* .

Avec ces notations, on a le résultat suivant, prouvé en 2.4.

0.2. THÉORÈME (de L -division). Soient f_1, \dots, f_p dans $\mathbb{K}[[X]](M)$. Soient L une forme linéaire sur \mathbb{R}^s à coefficients strictement positifs et E_1, \dots, E_p des multi-indices de \mathbb{N}^s tels que, si on note $f_i = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} (f_i)_J X^J$, on ait

- (i) $(f_i)_J = 0$ pour tout $J \in \mathbb{N}^s$, $|J| < |E_i|$,
- (ii) $(f_i)_{E_i} \neq 0$,
- (iii) $(f_i)_J = 0$ pour tout $J \in \mathbb{N}^s$, $J \neq E_i$ et $L(J) \leq L(E_i)$.

Alors, pour tout élément g de $\mathbb{K}[[X]](M)$, il existe des uniques séries $g_1, \dots, \dots, g_p, h$ de $\mathbb{K}[[X]](M)$ telles que l'on ait

$$g = \sum_{i=1}^p f_i g_i + h,$$

$$\text{Exp}_X(g_i(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} h_B X^B \quad \text{avec } h_B = 0 \text{ pour } B \in \Delta,$$

où $\mathbb{N}^s = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$ est la partition de \mathbb{N}^s associée aux E_i , $1 \leq i \leq p$. De plus, $(g_1, \dots, g_p; h)$ est donné par un opérateur linéaire continu.

Les conditions (i)–(iii) généralisent la notion de p -régularité de [3]. Elles ne sont pas restrictives. On pourra s'en convaincre à la lecture du paragraphe 2.

Pour établir ce théorème, on adapte une preuve, donnée par J. Briançon, d'un théorème de division dans $\mathbb{K}\{X\}$, par perturbation d'un épimorphisme [2].

On applique ensuite ce théorème au problème de division par un idéal. On considère un idéal de $\mathbb{K}[[X]](M)$. Peut-on associer, à toute série de $\mathbb{K}[[X]](M)$, un reste unique, dans $\mathbb{K}[[X]](M)$, modulo cet idéal? On apporte une réponse affirmative à ce problème. Pour cela, on construit une famille génératrice de l'idéal en s'inspirant des bases de Groebner d'un idéal polynômial [4]. On a alors l'énoncé suivant qui sera précisé et prouvé dans le paragraphe 4.

0.3. THÉORÈME. Soient f_1, \dots, f_p des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note \mathcal{I}_M l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]](M)$. Il existe alors une famille génératrice $G = (g_1, \dots, g_k)$ pour \mathcal{I}_M telle que, pour tout $i = 1, \dots, k$, g_i appartienne à $\mathbb{K}[[X]](M)$, et telle que, pour tout g dans $\mathbb{K}[[X]](M)$, on puisse écrire $g = \sum_{i=1}^k h_i g_i + h_0$ avec, pour tout $i = 0, \dots, k$, h_i dans $\mathbb{K}[[X]](M)$. En outre, g appartient à \mathcal{I} si et seulement si $h_0 = 0$.

On en déduit alors une nouvelle preuve de la noethérianité de $\mathbb{K}[[X]](M)$. C'est le corollaire 4.9. On obtient également, comme conséquence, le théorème 0.4 suivant, que l'on retrouve en 4.11.

0.4. THÉOREME. Soient f_1, \dots, f_p des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note \mathcal{I} l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]]$ et \mathcal{I}_M l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]](M)$. Alors $\mathcal{I}_M = \mathcal{I} \cap \mathbb{K}[[X]](M)$.

On notera que ce résultat a déjà été obtenu par l'auteur comme corollaire du théorème d'approximation d'Artin dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ (cf. [6]).

On trouvera dans le paragraphe 4 des exemples illustrant ces théorèmes.

1. Une méthode de division. Ce paragraphe est constitué de lemmes techniques qui développent une méthode de division inspirée de [2]. Dans un premier temps, le lecteur pourra se contenter de la proposition 1.6 pour aborder les preuves des principaux résultats développées dans les sections suivantes.

Dans la suite, \mathcal{A} , munie de la norme $\|\cdot\|$, désignera une algèbre de Banach commutative unitaire. On a, en particulier, pour a et b dans \mathcal{A} , $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$.

On considère alors $\mathcal{A}[[X]]$, l'ensemble des séries formelles, d'indéterminées $X = (X_1, \dots, X_s)$, à coefficients dans \mathcal{A} . Soit $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_s) \in (\mathbb{R}_+^*)^s$ un poly-rayon. On pose

$$\|f\|_{\varrho}^{(M)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathbb{N}^s, |J|=j} \frac{\|f_J\|}{M_j} \varrho^J.$$

On note alors

$$\mathcal{A}[[X]](M, \varrho) = \{f \in \mathcal{A}[[X]] : \|f\|_{\varrho}^{(M)} < \infty\}.$$

On vérifie aisément que $\|\cdot\|_{\varrho}^{(M)}$ est une norme sur $\mathcal{A}[[X]](M, \varrho)$ et que l'espace $\mathcal{A}[[X]](M, \varrho)$ muni de cette norme est une algèbre de Banach. On pose

$$\mathcal{A}[[X]](M) = \bigcup_{\varrho} \mathcal{A}[[X]](M, \varrho).$$

1.1. NOTATIONS. On note aussi

$$(1.1.1) \quad (\mathcal{A}[[X]](M, \varrho))^{E_i} = \{f \in \mathcal{A}[[X]] : \text{Exp}_X(f(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i \text{ et } \|f\|_{\varrho}^{(M+|E_i|)} < \infty\},$$

$$(1.1.2) \quad R_{\Delta}(M, \varrho) = \{f \in \mathcal{A}[[X]](M, \varrho) : f_B = 0 \text{ pour tout } B \in \Delta\}.$$

On considère alors l'espace produit

$$H_{\Delta}(M, \varrho) = \prod_{i=1}^p (\mathcal{A}[[X]](M, \varrho))^{E_i} \times R_{\Delta}(M, \varrho)$$

muni de la norme

$$\|(g_1, \dots, g_p; h)\|_{\varrho}^{\Delta(M)} = \sum_{i=1}^p \varrho^{E_i} \|g_i\|_{\varrho}^{(M+|E_i|)} + \|h\|_{\varrho}^{(M)}.$$

On vérifie facilement que l'espace $H_\Delta(M, \varrho)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\varrho^{\Delta(M)}$ est un espace de Banach.

1.2. LEMME. *Étant donnés p multi-indices E_i , $1 \leq i \leq p$, on leur associe l'application ϕ_1 définie par*

$$(1.2.1) \quad \begin{aligned} \phi_1 : H_\Delta(M, \varrho) &\rightarrow \mathcal{A}[[X]](M, \varrho), \\ (g_1, \dots, g_p; h) &\mapsto \phi_1(g_1, \dots, g_p; h) = \sum_{i=1}^p g_i X^{E_i} + h. \end{aligned}$$

Pour tout multi-rayon ϱ , ϕ_1 est alors une application linéaire bijective de $H_\Delta(M, \varrho)$ sur $\mathcal{A}[[X]](M, \varrho)$ telle que

$$\|\phi_1(g_1, \dots, g_p; h)\|_\varrho^{(M)} = \|(g_1, \dots, g_p; h)\|_\varrho^{\Delta(M)}.$$

Preuve. Les vérifications sont faciles, compte tenu du choix des normes. ■

1.3. Définitions et remarques. Soit L une forme linéaire sur \mathbb{R}^s à coefficients strictement positifs.

(1.3.1) Tout d'abord, on remarque que, pour tout $B \in \mathbb{N}^s$, il existe un nombre réel positif δ_B tel que $A \in \mathbb{N}^s$ et $L(A) - L(B) > 0$ implique $L(A) - L(B) \geq \delta_B$.

(1.3.2) On applique alors cette remarque aux multi-indices E_i . Il existe donc, pour tout $i = 1, \dots, p$, des réels strictement positifs δ_i tels que $L(A) - L(E_i) > 0$ implique $L(A) - L(E_i) \geq \delta_i$.

(1.3.3) Ensuite, soit $\tau > 0$ un réel. On notera $\tilde{\tau}$ le poly-rayon (τ, \dots, τ) associé de \mathbb{R}_+^{*s} . Soient E_i , $i = 1, \dots, p$, des multi-indices de \mathbb{N}^s . Dans la suite, on note u_i et v_i des séries arbitraires de $\mathcal{A}[[X]](M, C^{|E_i|}\tilde{\tau})$, où C est la constante de (H₂), de la forme

$$u_i = \sum_{b=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b \\ L(B) > L(E_i)}} u_{iB} X^B, \quad v_i = \sum_{b=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} v_{iB} X^B.$$

On remarque alors que, pour tout $i = 1, \dots, p$, u_i et v_i sont telles que, pour tout A de $\text{Exp}_X(u_i)$, ou pour tout A de $\text{Exp}_X(v_i)$, $|A| \geq |E_i|$.

On construit maintenant, à l'aide de séries u_i et v_i , $i = 1, \dots, p$, vérifiant l'écriture (1.3.3), une application linéaire ϕ_2 qui sera une perturbation de ϕ_1 en ce sens que $\phi_1 + \phi_2$ sera encore une application linéaire bijective de $H_\Delta(M, \varrho)$ sur $\mathcal{A}[[X]](M, \varrho)$.

1.4. LEMME. *Soit $0 < \eta < 1$; on note $r = (\tau\eta^{l^1}, \dots, \tau\eta^{l^s})$. Soient E_i , u_i et v_i , pour $i = 1, \dots, p$, comme dans (1.3.3). L'application linéaire ϕ_2 ,*

$$(1.4.1) \quad \begin{aligned} \phi_2 : H_\Delta(M, r) &\rightarrow \mathcal{A}[[X]](M, r), \\ (g_1, \dots, g_p; h) &\mapsto \phi_2(g_1, \dots, g_p; h) = \sum_{i=1}^p (u_i + v_i)g_i, \end{aligned}$$

est bien définie et vérifie, pour tout réel η , $0 < \eta < 1$,

$$\|\phi_2\| \leq \sup_{i=1, \dots, p} \{ \tau^{-|E_i|} (\eta^{\delta_i} \|u_i\|_{\tilde{\tau}}^{(M-|E_i|)} + \eta^{-L(E_i)} \|v_i\|_{\tilde{\tau}}^{(M-|E_i|)}) \}.$$

Preuve.

1.4.1. Première étape. Pour vérifier que $\sum_{i=1}^p (u_i + v_i)g_i$ appartient bien à $\mathcal{A}[[X]](M, r)$, il suffit donc de s'assurer que $\|\sum_{i=1}^p (u_i + v_i)g_i\|_r^{(M)} < \infty$. Il suffit d'abord de le vérifier pour un terme du type $u_i g_i$. On a, par définition,

$$(1.4.1.1) \quad \|u_i g_i\|_r^{(M)} = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} \frac{\|\sum_{K+L=B} u_{iK} g_{iL}\|}{M_b} r^B.$$

On obtient alors, en utilisant, d'une part, le fait qu'on travaille dans des algèbres de Banach, et, d'autre part, la convexité logarithmique de la suite $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$$(1.4.1.2) \quad \|u_i g_i\|_r^{(M)} \leq \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} \sum_{K+L=B} \frac{\|u_{iK}\|}{M_{k-|E_i|}} \cdot \frac{\|g_{iL}\|}{M_{l+|E_i|}} r^{K+L}.$$

Le membre de droite de l'inégalité (1.4.1.2) est bien défini puisque, d'après (1.3.3), $u_{iK} = 0$ pour $|K| = k < |E_i|$. De plus, par hypothèse $(g_1, \dots, g_p; h)$ appartient à $H_\Delta(M, r)$; cela implique que, pour tout $i = 1, \dots, p$, on a

$$(1.4.1.3) \quad \|g_i\|_r^{(M+|E_i|)} < \infty.$$

En outre, par hypothèse, pour tout $i = 1, \dots, p$, on a

$$u_i \in \mathcal{A}[[X]](M, C^{|E_i|} \tilde{\tau}),$$

ce qui signifie, pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$(1.4.1.4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{K \in \mathbb{N}^s \\ |K|=k}} \frac{\|u_{iK}\|}{M_k} C^{|E_i|k} \tilde{\tau}^k < \infty.$$

Or, en utilisant $|E_i|$ fois l'hypothèse (H₂), on obtient, pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$(1.4.1.5) \quad \begin{aligned} M_k &\leq C^k M_{k-1} \leq C^k C^{k-1} M_{k-2} \leq \dots \\ &\leq C^{-(|E_i|-1)|E_i|/2} C^{|E_i|k} M_{k-|E_i|}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant à nouveau (1.3.3), et en minorant $C^{|E_i|k}/M_k$ par $C^{(|E_i|-1)|E_i|/2}/M_{k-|E_i|}$ dans l'inégalité (1.4.1.4), on obtient

$$(1.4.1.6) \quad C^{(|E_i|-1)|E_i|/2} \sum_{k=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{K \in \mathbb{N}^s \\ |K|=k}} \frac{\|u_{iK}\|}{M_{k-|E_i|}} \tilde{\tau}^K < \infty,$$

ce qui donne exactement, en remarquant que $r \leq \tilde{\tau}$,

$$(1.4.1.7) \quad \|u_i\|_r^{(M-|E_i|)} < \infty.$$

Dans (1.4.1.2) on reconnaît un produit de séries ; on a alors

$$(1.4.1.8) \quad \|u_i g_i\|_r^{(M)} \leq \left(\sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} \frac{\|u_{iB}\|}{M_{b-|E_i|}} r^B \right) \left(\sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} \frac{\|g_{iB}\|}{M_{b+|E_i|}} r^B \right) \\ \leq \|u_i\|_r^{(M-|E_i|)} \|g_i\|_r^{(M+|E_i|)}.$$

De là, en utilisant (1.4.1.3) et (1.4.1.7), on conclut que, pour tout $i = 1, \dots, p$, on a

$$(1.4.1.9) \quad \|u_i g_i\|_r^{(M)} < \infty,$$

et, de la même manière, en utilisant à nouveau (1.3.3),

$$(1.4.1.10) \quad \|v_i\|_r^{(M-|E_i|)} < \infty,$$

$$(1.4.1.11) \quad \|v_i g_i\|_r^{(M)} \leq \|v_i\|_r^{(M-|E_i|)} \|g_i\|_r^{(M+|E_i|)} < \infty.$$

Ceci nous donne bien $\|\sum_{i=1}^p (u_i + v_i) g_i\|_r^{(M)} < \infty$.

1.4.2. Seconde étape. On estime la norme de ϕ_2 . On a, par définition,

$$(1.4.2.1) \quad \|\phi_2(g_1, \dots, g_p; h)\|_r^{(M)} = \left\| \sum_{i=1}^p (u_i + v_i) g_i \right\|_r^{(M)}.$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité triangulaire et le fait qu'on se trouve dans des algèbres de Banach, on obtient, d'après (1.4.1.8) et (1.4.1.11),

$$(1.4.2.2) \quad \|\phi_2(g_1, \dots, g_p, h)\|_r^{(M)} \\ \leq \sum_{i=1}^p (\|u_i\|_r^{(M-|E_i|)} \|g_i\|_r^{(M+|E_i|)} + \|v_i\|_r^{(M-|E_i|)} \|g_i\|_r^{(M+|E_i|)}) \\ \leq \sum_{i=1}^p r^{E_i} \|g_i\|_r^{(M+|E_i|)} (\|u_i\|_r^{(M-|E_i|)} r^{-E_i} + \|v_i\|_r^{(M-|E_i|)} r^{-E_i}).$$

Or, on a, d'après (1.3.2) et la définition de r ,

$$(1.4.2.3) \quad \|u_i\|_r^{(M-|E_i|)} r^{-E_i} = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ L(B) > L(E_i) \\ |B|=b}} \frac{\|u_i B\|}{M_{b-|E_i|}} \tau^{b-|E_i|} \eta^{L(B-E_i)} \\ \leq \tau^{-|E_i|} \eta^{\delta_i} \|u_i\|_{\tilde{\tau}}^{(M-|E_i|)}.$$

De même, on a, puisque $0 < \eta < 1$,

$$(1.4.2.4) \quad \|v_i\|_r^{(M-|E_i|)} r^{-E_i} \leq \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} \frac{\|v_i B\|}{M_{b-|E_i|}} \tau^{b-|E_i|} \eta^{L(B-E_i)} \\ \leq \tau^{-E_i} \eta^{-L(E_i)} \|v_i\|_{\tilde{\tau}}^{(M-|E_i|)}.$$

On obtient alors le résultat escompté en remarquant

$$(1.4.2.5) \quad \sum_{i=1}^p r^{E_i} \|g_i\|_r^{(M+|E_i|)} \leq \|(g_1, \dots, g_p, h)\|_r^{\Delta(M)}. \blacksquare$$

1.5. LEMME DE PERTURBATION. *Si on a*

$$(1.5.1) \quad \eta^{\delta_i} \|u_i\|_{\tilde{\tau}}^{(M-|E_i|)} < \tau^{|E_i|}/2,$$

et

$$(1.5.2) \quad \|v_i\|_{\tilde{\tau}}^{(M-|E_i|)} < \frac{1}{2} \tau^{|E_i|} \eta^{L(E_i)},$$

alors l'application $\phi_1 + \phi_2$ est un isomorphisme entre les deux espaces de Banach $H_{\Delta}(M, r)$ et $\mathcal{A}[[X]](M, r)$.

Preuve. Pour tout $\varrho \in \mathbb{R}_+^{*s}$, on a donc trouvé, d'après le lemme 1.2, une isométrie bijective ϕ_1 entre les deux espaces de Banach $H_{\Delta}(M, \varrho)$ et $\mathcal{A}[[X]](M, \varrho)$. On peut donc écrire

$$(1.5.3) \quad \phi_1 + \phi_2 = \phi_1(\text{Id} + \phi_1^{-1} \phi_2).$$

Ainsi, si $\|\phi_2\| < 1$, l'application $\phi_1 + \phi_2$ sera inversible. Pour tout η , $0 < \eta < 1$, on note $r = (\tau\eta^{l_1}, \dots, \tau\eta^{l_s})$. Si on a (1.5.1) et (1.5.2), alors, d'après la proposition 1.4, on conclut $\|\phi_2\| < 1$. ■

On obtient alors, comme conséquence des lemmes 1.2, 1.4 et 1.5, un théorème de division dans les séries formelles à coefficients dans des algèbres de Banach commutatives et unitaires.

1.6. PROPOSITION (de L -division dans $\mathcal{A}[[X]](M)$). *Soient \mathcal{A} une algèbre de Banach commutative unitaire et $\tau_1 > 0$. Soient f_1, \dots, f_p des éléments*

de $\mathcal{A}[[X]](M, \tilde{\tau}_1)$ et soient E_1, \dots, E_p des multi-indices de \mathbb{N}^s tels que, pour tout $i = 1, \dots, p$, on ait

- (i) $(f_i)_B = 0$ pour tout $B \in \mathbb{N}^s$, $|B| < |E_i|$,
- (ii) $(f_i)_{E_i} = 1 + a_i$,

avec 1 l'élément unité de l'algèbre \mathcal{A} et a_i un élément de \mathcal{A} . Soit L une forme linéaire à coefficients strictement positifs de \mathbb{R}^s . Alors on écrit, pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$f_i(X) = X^{E_i} + u_i(X) + v_i(X)$$

avec

$$u_i(X) = \sum_{j=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{|J|=j \\ L(J) > L(E_i)}} (f_i)_J X^J,$$

$$v_i(X) = \sum_{j=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{|J|=j \\ L(J) \leq L(E_i) \\ J \neq E_i}} (f_i)_J X^J + a_i X^{E_i}.$$

On a les conclusions suivantes.

- (1) Il existe τ_2 , $0 < \tau_2 \leq \tau_1$, tel que, pour tout $0 < \tau \leq \tau_2$, il existe $\eta(\tau)$, $0 < \eta(\tau) < 1$, tel que, pour tout $i = 1, \dots, p$, on a

$$\eta(\tau)^{\delta_i} \|u_i\|_{\tilde{\tau}}^{(M-|E_i|)} < \tau^{|E_i|}/2.$$

- (2) Si, de plus, on a

$$\|v_i\|_{\tilde{\tau}}^{(M-|E_i|)} < \frac{1}{2} \tau^{|E_i|} \eta(\tau)^{L(E_i)},$$

alors, il existe un poly-rayon μ de \mathbb{R}_+^{*s} strictement inférieur à $\tilde{\tau}$, tel que, pour tout élément g de $\mathcal{A}[[X]](M, \tilde{\tau})$, il existe des séries g_1, \dots, g_p, h de $\mathcal{A}[[X]](M, \mu)$ telles que l'on ait

$$(1.6.1) \quad g = \sum_{i=1}^p f_i g_i + h$$

avec

$$(1.6.2) \quad \text{Exp}_X(g_i(X) X^{E_i}) \subset \Delta_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$(1.6.3) \quad h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} h_B X^B \quad \text{avec } h_B = 0 \text{ pour } B \in \Delta,$$

où $\mathbb{N}^s = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$ est la partition de \mathbb{N}^s associée aux E_i , $1 \leq i \leq p$. De plus, $(g_1, \dots, g_p; h)$ est donné par un opérateur linéaire continu.

Preuve. Par hypothèse, pour tout $i = 1, \dots, p$, f_i appartient à $\mathcal{A}[[X]](M, \tilde{\tau}_1)$, et donc en utilisant alors l'hypothèse (H₂) sur la suite $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, et en procédant comme dans (1.4.1.5), on obtient, pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$(1.6.4) \quad \|f_i\|_{\tilde{\tau}_1/C^{|E_i|}}^{(M-|E_i|)} < \infty.$$

On note $e = \min_{i=1, \dots, p} (1/C^{|E_i|})$. En posant alors $\tau_2 = e\tau_1$, on obtient, pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$(1.6.5) \quad \|u_i\|_{\tilde{\tau}_2}^{(M-|E_i|)} < \infty \quad \text{et} \quad \|v_i\|_{\tilde{\tau}_2}^{(M-|E_i|)} < \infty.$$

Ainsi, pour tout $\tau \leq \tau_2$, on a

$$(1.6.6) \quad \|u_i\|_{\tilde{\tau}}^{(M-|E_i|)} \leq \|u_i\|_{\tilde{\tau}_2}^{(M-|E_i|)}.$$

Pour tout $\tau \leq \tau_2$, on peut choisir $\eta(\tau) < 1$, assez petit, pour que l'on ait

$$(1.6.7) \quad \eta(\tau)^{\delta_i} \|u_i\|_{\tilde{\tau}_2}^{(M-|E_i|)} < \tau^{|E_i|}/2.$$

Cela donne, en utilisant (1.6.6),

$$(1.6.8) \quad \eta(\tau)^{\delta_i} \|u_i\|_{\tilde{\tau}}^{(M-|E_i|)} < \tau^{|E_i|}/2.$$

On obtient donc le (1) de la proposition.

De plus, pour avoir le (2) de la proposition, il suffit de remarquer d'abord que (1.6.8) est exactement la condition (1.5.1). Si on a, dans le même temps,

$$(1.6.9) \quad \|v_i\|_{\tilde{\tau}}^{(M-|E_i|)} < \frac{1}{2} \tau^{|E_i|} \eta(\tau)^{L(E_i)},$$

la condition (1.5.2) est réalisée. On se trouve alors sous les hypothèses du lemme 1.5 et l'application

$$\phi_1 + \phi_2 : H_{\Delta}(M, r) \rightarrow \mathcal{A}[[X]](M, r),$$

$$(g_1, \dots, g_p; h) \mapsto (\phi_1 + \phi_2)(g_1, \dots, g_p; h) = \sum_{i=1}^p g_i Y^{E_i} + h + \sum_{i=1}^p (u_i + v_i) g_i,$$

avec $r = (\tau\eta^{l_1}, \dots, \tau\eta^{l_s})$, est une application linéaire bijective. Alors, pour tout élément g de $\mathcal{A}[[X]](M, \tilde{\tau})$, il existe un unique $p + 1$ -uplet

$$(g_1, \dots, g_p; h) \in H_{\Delta}(M, r)$$

tel que

$$g = \sum_{i=1}^p (X^{E_i} + u_i + v_i) g_i + h,$$

$$h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} h_B X^B \quad \text{avec } h_B = 0 \text{ pour } B \in \Delta.$$

En remarquant que, pour tout $i = 1, \dots, p$, $X^{E_i} + u_i + v_i = f_i$, on obtient exactement $g = \sum_{i=1}^p f_i g_i + h$. On a alors, pour tout $i = 1, \dots, p$, $\|g_i\|_r^{(M+|E_i|)} < \infty$ et $\|h\|_r^{(M)} < \infty$. En utilisant l'estimation de (1.4.1.5), on peut affirmer que, pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$\|g_i\|_{r/C^{|E_i|}}^{(M)} < \infty,$$

ce qui donne le résultat avec $\mu = re$. ■

REMARQUE. Si pour tout $i = 1, \dots, p$, v_i est identiquement nul, la condition (1.5.2) disparaît. La condition (1.5.1) est toujours réalisable. La division a lieu.

2. Division dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée. On peut maintenant appliquer la proposition 1.6 pour obtenir des théorèmes de division avec estimations dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée.

2.1. Définitions et notations. Soient f_1, \dots, f_p des éléments de $\mathbb{K}[[Y]][[X]]$. Soient L une forme linéaire à coefficients strictement positifs de \mathbb{R}^s et E_1, \dots, E_p des multi-indices de \mathbb{N}^s . On dira que la famille f_i , $1 \leq i \leq p$, est $(E_1, \dots, E_p; L)$ -régulière dans $\mathbb{K}[[Y]][[X]]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $(f_i)_B(Y) = 0$ pour tout $B \in \mathbb{N}^s$, $|B| < |E_i|$,
- (ii) $(f_i)_{E_i}(0) \neq 0$,
- (iii) $(f_i)_B(0) = 0$ pour tout $B \in \mathbb{N}^s$, $B \neq E_i$ et $L(B) \leq L(E_i)$.

Il est facile de vérifier que, si on se donne des séries formelles f_i , $1 \leq i \leq p$, de $q+s$ variables, on peut toujours trouver une partition X, Y sur l'ensemble des variables, des multi-indices E_1, \dots, E_p et une forme linéaire L tels que la famille (f_1, \dots, f_p) soit $(E_1, \dots, E_p; L)$ -régulière dans $\mathbb{K}[[Y]][[X]]$. On donne un exemple. On considère $f_1(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 X_2^2 + X_1 X_2^3 + X_1^3 X_2 X_3 + X_1^7$ et $f_2(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 X_2 + X_1^3 X_3 + X_1^2 X_2^2 + X_1^4$. On pose $E_1 = (2, 2)$ et $E_2 = (2, 1)$. Soit L la forme linéaire de \mathbb{R}^2 telle que $L(i_1, i_2) = i_1 + 2i_2$. On vérifie facilement que la famille (f_1, f_2) est $(E_1, E_2; L)$ -régulière dans $\mathbb{K}[[X_3]][[X_1, X_2]]$. En revanche, elle ne sera jamais régulière dans $\mathbb{K}[[X_2, X_3]][[X_1]]$.

Soit $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs vérifiant les conditions (H₁) et (H₂). Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Dans la suite, on prendra pour \mathcal{A} l'algèbre de Banach des séries formelles $\mathbb{K}[[Y]](N, \alpha)$, avec $Y = (Y_1, \dots, Y_q)$, munie de la norme $\|\cdot\|_\alpha^{(N)}$, si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ est un poly-rayon de \mathbb{R}_+^{*q} . On a donc, en suivant les notations du paragraphe 1.1, pour tout $f \in \mathcal{A}[[X]]$,

$$\|f\|_{(N,\alpha)(\varrho)}^{(M)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathbb{N}^s, |J|=j} \frac{\|f_J\|_{\alpha}^{(N)}}{M_j} \varrho^J,$$

et

$$(\mathbb{K}[[Y]](N, \alpha))[[X]](M, \varrho) = \{f \in (\mathbb{K}[[Y]](N, \alpha))[[X]] : \|f\|_{(N,\alpha)(\varrho)}^{(M)} < \infty\}.$$

L'espace $(\mathbb{K}[[Y]](N, \alpha))[[X]](M, \varrho)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{(N,\alpha)(\varrho)}^{(M)}$ est une algèbre de Banach.

2.2. THÉORÈME (de L -division). *Soient f_1, \dots, f_p des éléments de $(\mathbb{K}[[Y]](N, \tilde{\nu}_1))[[X]](M, \tilde{\tau}_1)$. Soient L une forme linéaire à coefficients strictement positifs de \mathbb{R}^s et E_1, \dots, E_p des multi-indices de \mathbb{N}^s tels que la famille (f_1, \dots, f_p) soit $(E_1, \dots, E_p; L)$ -régulière dans $\mathbb{K}[[Y]][[X]]$. Alors il existe τ_2 , $0 < \tau_2 \leq \tau_1$, tel que, pour tout $0 < \tau \leq \tau_2$ et pour tout $\nu \leq \nu_1$, il existe un poly-rayon μ de \mathbb{R}_+^{*s} , $\mu < \tilde{\tau}$, tel que, pour tout élément g de $(\mathbb{K}[[Y]](N, \tilde{\nu}))[[X]](M, \tilde{\tau})$, il existe des uniques séries g_1, \dots, g_p, h de $(\mathbb{K}[[Y]](N, \tilde{\nu}))[[X]](M, \mu)$ telles que l'on ait*

$$(2.2.1) \quad g = \sum_{i=1}^p f_i g_i + h,$$

$$(2.2.2) \quad \text{Exp}_X(g_i(Y, X)X^{E_i}) \subset \Delta_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$(2.2.3) \quad h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} h_B X^B \quad \text{avec } h_B = 0 \text{ pour } B \in \Delta,$$

où $\mathbb{N}^s = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$ est la partition de \mathbb{N}^s associée aux E_i , $1 \leq i \leq p$. De plus, $(g_1, \dots, g_p; h)$ est donné par un opérateur linéaire continu.

Preuve. On reprend la démarche de la preuve de la proposition 1.6. On peut évidemment supposer $(f_i)_{E_i}(0) = 1$. On a alors $(f_i)_{E_i}(Y) = 1 + a_i(Y)$ avec $a_i(0) = 0$. On écrit donc, d'après les conditions (i)–(iii),

$$f_i(Y, X) - X^{E_i} = u_i(Y, X) + v_i(Y, X)$$

avec

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} u_i(Y, X) &= \sum_{b=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ L(B) > L(E_i) \\ |B|=b}} (f_i)_B(Y) X^B, \\ v_i(Y, X) &= \sum_{b=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ B \neq E_i \\ L(B) \leq L(E_i) \\ |B|=b}} (f_i)_B(Y) X^B + a_i(Y) X^{E_i}, \quad v_i(0, X) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, f_i appartient à $(\mathbb{K}[[Y]](N, \tilde{\nu}_1))[[X]](M, \tilde{\tau}_1)$ pour tout $i = 1, \dots, p$. En utilisant alors l'hypothèse (H₂) sur la suite $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, et en procédant comme dans (1.4.1.5), on obtient, pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$(2.2.5) \quad \|f_i\|_{(N, \tilde{\nu}_1)(\tilde{\tau}_1/C^{|E_i|})}^{(M-|E_i|)} < \infty.$$

En notant toujours $e = \min_{i=1, \dots, p}(1/C^{|E_i|})$, on pose $\tau_2 = e\tau_1$. On a donc, pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$(2.2.6) \quad \|u_i\|_{(N, \tilde{\nu}_1)(\tilde{\tau}_2)}^{(M-|E_i|)} < \infty \quad \text{et} \quad \|v_i\|_{(N, \tilde{\nu}_1)(\tilde{\tau}_2)}^{(M-|E_i|)} < \infty.$$

Et donc, pour tout $\nu \leq \nu_1$ et pour tout $\tau \leq \tau_2$, on a

$$(2.2.7) \quad \|u_i\|_{(N, \tilde{\nu})(\tilde{\tau})}^{(M-|E_i|)} = \sum_{b=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ L(B) > L(E_i) \\ |B|=b}} \frac{\|(f_i)_B\|_{\tilde{\nu}}^{(N)}}{M_{b-|E_i|}} \tau^b \leq \|u_i\|_{(N, \tilde{\nu}_1)(\tilde{\tau}_2)}^{(M-|E_i|)}.$$

On a aussi, pour tout coefficient $(f_i)_B$ tel que $(f_i)_B(0) = 0$,

$$(2.2.8) \quad \begin{aligned} \|(f_i)_B\|_{\tilde{\nu}}^{(N)} &= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\substack{A \in \mathbb{N}^q \\ |A|=a}} \frac{\|(f_i)_{A,B}\|}{N_a} \nu^a = \nu \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\substack{A \in \mathbb{N}^q \\ |A|=a}} \frac{\|(f_i)_{A,B}\|}{N_a} \nu^{a-1} \\ &\leq \nu \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\substack{A \in \mathbb{N}^q \\ |A|=a}} \frac{\|(f_i)_{A,B}\|}{N_a} \nu_1^{a-1} \leq \frac{\nu}{\nu_1} \|(f_i)_B\|_{\tilde{\nu}_1}^{(N)} \end{aligned}$$

Et donc, pour tout $\nu \leq \nu_1$ et pour tout $\tau \leq \tau_2$, on a

$$(2.2.9) \quad \begin{aligned} \|v_i\|_{(N, \tilde{\nu})(\tilde{\tau})}^{(M-|E_i|)} &= \sum_{b=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ L(B) \leq L(E_i) \\ |B|=b}} \frac{\|(f_i)_B\|_{\tilde{\nu}}^{(N)}}{M_{b-|E_i|}} \tau^b \\ &\leq \sum_{b=|E_i|}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ L(B) \leq L(E_i) \\ |B|=b}} \frac{\nu}{\nu_1} \cdot \frac{\|(f_i)_B\|_{\tilde{\nu}_1}^{(N)}}{M_{b-|E_i|}} (\tau_2)^b \\ &\leq \frac{\nu}{\nu_1} \|v_i\|_{(N, \tilde{\nu}_1)(\tilde{\tau}_2)}^{(M-|E_i|)}. \end{aligned}$$

Pour tout $\tau \leq \tau_2$, on choisit $\eta(\tau) < 1$, assez petit pour que l'on ait

$$(2.2.10) \quad \eta(\tau)^{\delta_i} \|u_i\|_{(N, \tilde{\nu}_1)(\tilde{\tau}_2)}^{(M-|E_i|)} < \tau^{|E_i|}/2.$$

Cela donne, en utilisant (2.2.7),

$$(2.2.11) \quad \eta(\tau)^{\delta_i} < \frac{1}{2} \tau^{|E_i|} (\|u_i\|_{(N, \tilde{\nu})(\tilde{\tau})}^{(M-|E_i|)})^{-1} \quad \text{pour tout } \nu \leq \nu_1.$$

On choisit ensuite $\nu = \nu(\tau, \eta(\tau))$ inférieur à ν_1 , assez petit pour que l'on ait

$$(2.2.12) \quad \frac{\nu}{\nu_1} \|v_i\|_{(N, \tilde{\nu}_1)(\tilde{\tau}_2)}^{(M - |E_i|)} < \frac{1}{2} \tau^{|E_i|} \eta(\tau)^{L(E_i)}.$$

Cela donne, en utilisant (2.2.9),

$$(2.2.13) \quad \|v_i\|_{(N, \tilde{\nu})(\tilde{\tau})}^{(M - |E_i|)} < \frac{1}{2} \tau^{|E_i|} \eta(\tau)^{L(E_i)}.$$

Les conditions (1) et (2) de la proposition générale de L -division 1.6 sont données respectivement par (2.2.11) et (2.2.13). Il existe donc un poly-rayon $\mu < \tilde{\tau}$ tel que les conclusions de cette proposition soient vérifiées. De plus, si $(g_1, \dots, g_p; h)$ et $(g'_1, \dots, g'_p; h')$ sont deux $p + 1$ -uplets vérifiant (2.2.1)–(2.2.3), alors on a, pour tout $i = 1, \dots, p$, $g'_i = g_i$ et $h' = h$. Il suffit de se référer à la version correspondante du théorème de division formelle dans [1]. ■

2.3. REMARQUES. (a) Dans le cas où $M_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse (i) du théorème 2.2 est superflue. Le lecteur s'en convaincra en reprenant la démonstration de la proposition 1.4 et du théorème 2.2. On notera l'analogie avec la preuve du théorème de Briançon [2].

(b) On déduit aisément du théorème 2.2 un théorème de division dans $(\mathbb{K}[[Y]](N))[[X]](M)$. Dans la suite, si $q = 0$, c'est-à-dire si les séries formelles sont à coefficients dans \mathbb{K} , on dira du théorème 2.2 qu'il est sans paramètres. On a alors l'énoncé suivant, annoncé en 0.2.

2.4. THÉORÈME. *Soient f_1, \dots, f_p dans $\mathbb{K}[[X]](M)$. Soient L sur \mathbb{R}^s une forme linéaire à coefficients strictement positifs et E_1, \dots, E_p des multi-indices de \mathbb{N}^s tels que la famille (f_1, \dots, f_p) soit $(E_1, \dots, E_p; L)$ -régulière dans $\mathbb{K}[[X]]$. Alors, pour tout élément g de $\mathbb{K}[[X]](M)$, il existe des uniques séries g_1, \dots, g_p, h de $\mathbb{K}[[X]](M)$ telles que l'on ait*

$$g = \sum_{i=1}^p f_i g_i + h,$$

$$\text{Exp}_X(g_i(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} h_B X^B \quad \text{avec } h_B = 0 \text{ pour } B \in \Delta,$$

où $\mathbb{N}^s = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$ est la partition de \mathbb{N}^s associée aux E_i , $1 \leq i \leq p$. De plus, $(g_1, \dots, g_p; h)$ est donné par un opérateur linéaire continu.

De plus, cette division est toujours possible. Il est facile de vérifier qu'il existe toujours une forme linéaire L et des multi-indices E_1, \dots, E_p tels que (f_1, \dots, f_p) soit $(E_1, \dots, E_p; L)$ -régulière.

APPLICATIONS

3. La préparation et la division de Weierstrass. On retrouve, comme conséquence du théorème 2.4, une version des théorèmes de division et de préparation de Weierstrass dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ (cf. [3]). Pour cela, on rappelle une notion de p -régularité introduite par J. Chaumat et A.-M. Chollet [3].

Soit f un élément de $\mathbb{K}[[X]]$,

$$f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s \\ |J|=j}} f_J X^J,$$

et p un entier. On dira que f est p -régulière par rapport à la variable X_s si

$$f_J = 0 \quad \text{pour tout multi-indice } J \text{ tel que } |J| < p \quad \text{et} \quad f_{(0, \dots, 0, p)} \neq 0.$$

Ainsi, pour tout élément f de $\mathbb{K}[[X]]$ non identiquement nul, il existe p tel que, après un éventuel changement de variable linéaire, f soit p -régulière par rapport à la variable X_s . On note

$$\text{ord}(f) = \min(j : f_J \neq 0).$$

3.1. THÉORÈME (Division de Weierstrass [3]). *Soit $f \in \mathbb{K}[[X]](M)$ une série formelle, p -régulière par rapport à la variable X_s . Alors, pour tout $g \in \mathbb{K}[[X]](M)$, on peut écrire*

$$g(X_1, \dots, X_s) = q(X_1, \dots, X_s) f(X_1, \dots, X_s) + \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X_1, \dots, X_{s-1}) X_s^k$$

avec $q \in \mathbb{K}[[X]](M)$, $r_k \in \mathbb{K}[[X]](M)$, $k = 0, \dots, p-1$, uniques.

Cette proposition n'est autre que le théorème 2.4 (voir remarque 2.3(b)). En effet, on considère une forme linéaire L à coefficients strictement positifs et indépendants sur \mathbb{Z} telle que $L(0, \dots, 0, p) < L(J)$ pour tout multi-indice J , $J \neq (0, \dots, 0, p)$, tel que $f_J \neq 0$. La série f est alors $((0, \dots, 0, p); L)$ -régulière dans $\mathbb{K}[[X]]$.

3.2. THÉORÈME (Préparation de Weierstrass [3]). *Soit $f \in \mathbb{K}[[X]](M)$ une série formelle, p -régulière par rapport à la variable X_s . Il existe alors des uniques séries formelles $U \in \mathbb{K}[[X]](M)$ inversible et $r_0, \dots, r_{p-1} \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_{s-1}]](M)$ telles que*

$$f(X_1, \dots, X_s) = U(X_1, \dots, X_s) \left(X_s^p - \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X_1, \dots, X_{s-1}) X_s^k \right).$$

En outre, on a, pour tout $k = 0, \dots, p-1$, $\text{ord}(r_k(X_1, \dots, X_{s-1})) \geq p - k$.

3.3. PROPOSITION. Soit $f \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_{s-1}]](M)[X_s]$ une série formelle polynômiale et régulière d'ordre p en X_s . Alors, pour tout $g \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_{s-1}]](M)[X_s]$, on peut écrire

$$g(X_1, \dots, X_s) = q(X_1, \dots, X_s)f(X_1, \dots, X_s) + \sum_{k=0}^{p-1} r_k(X_1, \dots, X_{s-1})X_s^k$$

avec $q \in \mathbb{K}[[X]](M)$, $r_k \in \mathbb{K}[[X]](M)$, $k = 0, \dots, p-1$, uniques.

Preuve. D'après la remarque 2.3(a), si la série $f(X)$ appartient à $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_{s-1}]](M)[X_s]$, l'anneau des polynômes en X_s à coefficients dans $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_{s-1}]](M)$, l'hypothèse de p -régularité dans les théorèmes 3.1 et 3.2 est superflue. Il suffit d'avoir la régularité d'ordre p de f , c'est-à-dire $f(0, \dots, 0, X_s) = X_s^p c(X_s)$, avec $c(0) \neq 0$. ■

3.4. COROLLAIRE. L'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ est un anneau hensélien.

Preuve. C'est une application directe de la proposition 3.3, en suivant une démonstration classique [5]. ■

3.5. Un exemple. Pour illustrer le théorème 2.4 et plus particulièrement l'importance du choix de la variable par rapport à laquelle on va effectuer la division, on donne un exemple.

Soit $M_n = n!$. Considérons la série formelle $g(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n} X^n Y^n$, que nous allons diviser par $f(X, Y) = X + Y^2$. Si on effectue cette division par rapport à X , les hypothèses du théorème 2.4 sont vérifiées, $\Delta = (1, 0) + \mathbb{N}^2$ et on obtient

$$g(X, Y) = f(X, Y)q_1(X, Y) + r_1(X, Y)$$

avec

$$q_1(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k-1} M_{2(n+k)} X^n Y^{n+3k-2}$$

$$r_1(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n M_{2n} Y^{3n}.$$

Il est aisé de vérifier que g , q_1 et r_1 appartiennent à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$.

En revanche, si on effectue cette division par rapport à Y^2 , on a $\Delta = (0, 2) + \mathbb{N}^2$ et on obtient

$$g(X, Y) = f(X, Y)q_2(X, Y) + r_2(X, Y)$$

avec

$$q_2(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k-1} M_{2n+4k} X^{n+3k-1} Y^n,$$

$$r_2(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (M_{4n} X^{3n} + M_{4n+2} X^{3n+1} Y).$$

Il est aisé de vérifier que q_2 et r_2 appartiennent à $\mathbb{K}[[X, Y]](M^{(2)})$ mais n'appartiennent pas à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. Le choix de la variable, par rapport à laquelle on effectue la division, est donc fondamental.

4. Division par un idéal. Dans toute la suite, on se place dans l'anneau des séries formelles à coefficients dans \mathbb{K} et on suppose que

(**) L est une forme linéaire dont les coefficients sont strictement positifs et indépendants sur \mathbb{Z} .

4.1. NOTATIONS. Soient A et B deux multi-indices de \mathbb{N}^s . On dira que A est L -inférieur à B , et on notera $A \leq_L B$, si et seulement si $L(A) \leq L(B)$. Il est intéressant de remarquer que la condition (**) sur la forme linéaire L donne alors un ordre total sur \mathbb{N}^s .

Pour tout élément f de $\mathbb{K}[[X]]$, on définit aussi l'exposant *privilegié* de f pour la direction L , ou L -ordre de f , le multi-indice $E = \text{ord}_L(f)$ tel que

$$f_E \neq 0 \quad \text{et} \quad f_A = 0 \quad \text{pour tout } A \in \mathbb{N}^s \text{ avec } L(A) < L(E).$$

On a donc aussi

$$\text{ord}_L(f) = \min_L (J \in \mathbb{N}^s : J \in \text{Exp}_X(f)).$$

4.1.1. THÉORÈME (de L -division formelle [1]). *Soient f_1, \dots, f_p des éléments de $\mathbb{K}[[X]]$. Pour tout $i = 1, \dots, p$ on note E_i l'exposant privilegié dans la direction L de f_i . Alors, pour tout $g \in \mathbb{K}[[X]]$, il existe des séries g_1, \dots, g_p, h de $\mathbb{K}[[X]]$ telles que*

- (i) $g = \sum_{i=1}^p f_i g_i + h$,
- (ii) $\text{Exp}_X(g_i(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i, i = 1, \dots, p$,
- (iii) $h = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{B \in \mathbb{N}^s, |B|=b} h_B X^B$ avec $h_B = 0$ pour $B \in \Delta$,

où $\mathbb{N}^s = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^s - \Delta)$ est la partition de \mathbb{N}^s associée aux $E_i, 1 \leq i \leq p$. De plus, $(g_1, \dots, g_p; h)$ est donné par un opérateur linéaire continu. En outre, si $(g'_1, \dots, g'_p; h')$ est un $p + 1$ -uplet satisfaisant (i)–(iii), alors on a, pour tout $i = 1, \dots, p, g'_i = g_i$ et $h = h'$.

Preuve. La démonstration de ce théorème peut être lue dans [1]. On peut, comme pour la proposition 1.6, en donner une preuve par perturbation d'un épimorphisme. On reprend les notations du paragraphe 1.1. On note alors

$$(\mathbb{K}[[X]])^{E_i} = \{f \in \mathbb{K}[[X]] : \text{Exp}_X(f(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i\},$$

$$R_\Delta = \left\{ f \in \mathbb{K}[[X]] : f(X) = \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}^s \\ |B|=b}} f_B X^B \text{ avec } f_B = 0 \text{ pour tout } B \in \Delta \right\}.$$

On considère alors l'espace produit

$$H_\Delta = \prod_{i=1}^p (\mathbb{K}[[X]])^{E_i} \times R_\Delta$$

que l'on munit de la valeur absolue $|\cdot|^\Delta$ définie par

$$|(g_1, \dots, g_p, h)|^\Delta = \sup_{i=1, \dots, p} (e^{-L(E_i) - L(\text{ord}_L(g_i))}, e^{-L(\text{ord}_L(h))}).$$

On conclut alors comme dans [7]. L'unicité annoncée est élémentaire compte tenu des conditions (ii) et (iii). ■

On a facilement le résultat suivant.

4.1.2. LEMME. *Soient f et g deux séries formelles non nulles. Alors, on a*

- (i) $\text{ord}_L(fg) = \text{ord}_L(f) + \text{ord}_L(g)$ et
- (ii) $\text{ord}_L(f + g) \geq_L \min_L(\text{ord}_L(f), \text{ord}_L(g))$ si $f + g \neq 0$,

avec égalité dans (ii) si $\text{ord}_L(f) \neq \text{ord}_L(g)$.

4.2. Notion de base standard. Étant donné un idéal \mathcal{I} de $\mathbb{K}[[X]]$, on note $E_L(\mathcal{I})$ l'ensemble des exposants privilégiés pour la direction L des éléments de \mathcal{I} . On vérifie facilement que $A \in E_L(\mathcal{I})$ implique $A + \mathbb{N}^s \subset E_L(\mathcal{I})$.

On a aussi les résultats suivants.

4.2.1. LEMME. *Si $h = \sum_{J \in \mathbb{N}^s, J \notin E_L(\mathcal{I})} h_J X^J$ appartient à \mathcal{I} , alors h est identiquement nul.*

On appelle *base standard* de \mathcal{I} dans la direction L une famille (g_1, \dots, g_k) de \mathcal{I} telle que $E_L(\mathcal{I}) = \bigcup_{i=1}^k (E_i + \mathbb{N}^s)$, où on note $E_i = \text{ord}_L(g_i)$ pour tout $i = 1, \dots, k$.

On appelle *frontière distinguée* de $E_L(\mathcal{I})$ la plus petite partie $F_L(\mathcal{I})$ telle que $E_L(\mathcal{I}) = \bigcup_{E \in F_L(\mathcal{I})} (E + \mathbb{N}^s)$. De manière évidente, $F_L(\mathcal{I})$ est une partie finie.

4.2.2. LEMME. *Soit (g_1, \dots, g_k) une base standard de \mathcal{I} dans la direction L . Si on note, pour tout $i = 1, \dots, k$, E_i l'exposant privilégié de g_i dans la direction L , alors \mathcal{I} est engendré par l'ensemble des $(g_j)_{E_j \in F_L(\mathcal{I})}$.*

On appelle alors l'ensemble $(g_j)_{E_j \in F_L(\mathcal{I})}$ *base standard minimale* de \mathcal{I} dans la direction L .

Preuve. Soit g une série formelle appartenant à l'idéal \mathcal{I} . On effectue, d'après le théorème 4.1.1, la L -division formelle de g par l'ensemble des

$(g_j)_{E_j \in F_L(\mathcal{I})}$. On obtient l'existence de séries formelles h_j et r telles que

$$\text{Exp}_X(h_j(X)X^{E_j}) \subset \Delta_j, \quad \text{Exp}_X(r(X)) \subset \mathbb{N}^s - \Delta$$

et

$$g = \sum_{j: E_j \in F_L(\mathcal{I})} g_j h_j + r.$$

Par hypothèse, on a donc $r = g - \sum_{j: E_j \in F_L(\mathcal{I})} g_j h_j \in \mathcal{I}$, et le lemme 4.2.1 nous assure donc que $r = 0$. Ceci achève la preuve du lemme. ■

Étant donné un idéal \mathcal{I} de $\mathbb{K}[[X]]$ engendré par p éléments (f_1, \dots, f_p) de $\mathbb{K}[[X]](M)$, on se propose de construire une base standard minimale (g_1, \dots, g_k) de \mathcal{I} dans la direction L telle que, pour tout $i = 1, \dots, k$, g_i appartienne à $\mathbb{K}[[X]](M)$. On s'inspire de la construction des bases de Groebner pour les idéaux de polynômes donnée dans [4].

4.3. Définitions et notations. Soient f et g deux séries formelles non identiquement nulles. On note

$$\begin{aligned} f_{\text{ord}_L(f)} &= \text{FC}(f) && \text{(le premier coefficient de } f), \\ X^{\text{ord}_L(f)} &= \text{FM}(f) && \text{(le premier monôme de } f), \\ \text{FC}(f) \cdot \text{FM}(f) &= \text{FT}(f) && \text{(le premier terme de } f). \end{aligned}$$

Si $\text{ord}_L(f) = \alpha$ et $\text{ord}_L(g) = \beta$, on pose $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ avec $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ pour tout $i = 1, \dots, s$. On appelle alors X^γ le *plus petit commun multiple* de $\text{FM}(f)$ et $\text{FM}(g)$ et on note $X^\gamma = \text{PPCM}(\text{FM}(f), \text{FM}(g))$. On appelle S -série de f et g la combinaison

$$S(f, g) = \frac{X^\gamma}{\text{FT}(f)} f - \frac{X^\gamma}{\text{FT}(g)} g.$$

Cette combinaison est celle qui fait disparaître $\text{FT}(f)$ et $\text{FT}(g)$. Dans l'autre sens, on va voir dans le lemme suivant que, si on a une combinaison de séries dont les premiers termes s'annulent entre eux, celle-ci peut s'écrire comme combinaison de S -séries.

4.4. LEMME. Soient g_1, \dots, g_t , t séries formelles. On note $\alpha(1), \dots, \alpha(t)$ t multi-indices tels que $\alpha(i) + \text{ord}_L(g_i) = \mu \in \mathbb{N}^s$. Soient c_1, \dots, c_t des constantes telles que, si on pose $f = \sum_{i=1}^t c_i X^{\alpha(i)} g_i$, $\text{ord}_L(f)$ est L -strictement supérieur à μ . Il existe alors des constantes $c_{j,k}$ telles que l'on ait

$$f = \sum_{j,k} c_{j,k} X^{\mu - \gamma_{j,k}} S(g_j, g_k),$$

où $X^{\gamma_{j,k}} = \text{PPCM}(\text{FM}(g_j), \text{FM}(g_k))$. En outre, pour tout couple d'indices (j, k) , la série $X^{\mu - \gamma_{j,k}} S(g_j, g_k)$ a un L -ordre L -strictement supérieur à μ .

Preuve. On pose $d_i = \text{FC}(g_i)$. Pour tout $i = 1, \dots, t$, $\text{ord}_L(c_i X^{\alpha(i)} g_i) = \mu$ et $\text{ord}_L(\sum_{i=1}^t c_i X^{\alpha(i)} g_i) >_L \mu$. Cela implique alors

$$(4.4.1) \quad \sum_{i=1}^t c_i d_i = 0.$$

On pose $p_i = X^{\alpha(i)} g_i / d_i$. On remarque que l'on a $\text{FC}(p_i) = 1$ et aussi

$$(4.4.2) \quad \begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^t c_i X^{\alpha(i)} g_i = \sum_{i=1}^t c_i d_i p_i \\ &= c_1 d_1 (p_1 - p_2) + (c_1 d_1 + c_2 d_2) (p_2 - p_3) + \dots \\ &\quad + (c_1 d_1 + \dots + c_{t-1} d_{t-1}) (p_{t-1} - p_t) + (c_1 d_1 + \dots + c_t d_t) p_t. \end{aligned}$$

On pose $\text{FT}(g_i) = d_i X^{\beta(i)}$. Alors, par hypothèse, pour tout $i = 1, \dots, t$, on a $\alpha(i) + \beta(i) = \mu$. Ainsi, pour tout $i = 1, \dots, t$, $\text{FM}(g_i) = X^{\beta(i)}$ divise X^μ . Par construction, on peut affirmer que, pour tout j, k avec $j \neq k$, $X^{\gamma_{j,k}} = \text{PPCM}(\text{FM}(g_j), \text{FM}(g_k))$ divise X^μ . Ainsi, $X^{\mu-\gamma_{j,k}}$ est un monôme et on a

$$(4.4.3) \quad \begin{aligned} X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k) &= X^{\mu-\gamma_{j,k}} \left(\frac{X^{\gamma_{j,k}}}{\text{FT}(g_j)} g_j - \frac{X^{\gamma_{j,k}}}{\text{FT}(g_k)} g_k \right) \\ &= \frac{X^\mu}{d_j X^{\beta(j)}} g_j - \frac{X^\mu}{d_k X^{\beta(k)}} g_k \\ &= \frac{X^{\alpha(j)}}{d_j} g_j - \frac{X^{\alpha(k)}}{d_k} g_k = p_j - p_k. \end{aligned}$$

En utilisant (4.4.1) et (4.4.2), f peut être mise sous la forme

$$(4.4.4) \quad \begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^t c_i X^{\alpha(i)} g_i \\ &= c_1 d_1 X^{\mu-\gamma_{1,2}} S(g_1, g_2) + (c_1 d_1 + c_2 d_2) X^{\mu-\gamma_{2,3}} S(g_2, g_3) + \dots \\ &\quad + (c_1 d_1 + \dots + c_{t-1} d_{t-1}) X^{\mu-\gamma_{t-1,t}} S(g_{t-1}, g_t). \end{aligned}$$

En outre, par hypothèse pour tout $i = 1, \dots, t$, le L -ordre de p_i est exactement égal à μ et le premier coefficient vaut 1 ; ainsi, on a $\text{ord}_L(p_j - p_k) >_L \mu$. L'égalité (4.4.3) nous permet alors d'affirmer que $\text{ord}_L(X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k)) >_L \mu$. ■

Le critère suivant, analogue à celui de détermination des bases de Groebner pour des idéaux de polynômes [4], va permettre de vérifier si une famille de \mathcal{I} est une base standard.

4.5. LEMME. *Soit \mathcal{I} un idéal de $\mathbb{K}[[X]]$. Soit L une forme linéaire vérifiant (**). Une famille $G = (g_1, \dots, g_t)$ est une base standard pour \mathcal{I} dans*

la direction L si et seulement si, pour tout couple d'indices (i, j) avec $i \neq j$, le reste de la L -division formelle de $S(g_i, g_j)$ par G est nul.

Preuve. Le sens direct est élémentaire. En effet, $S(g_i, g_j)$, pour tout couple d'indices (i, j) , appartient à \mathcal{I} . Puisque $G = (g_1, \dots, g_t)$ est une base standard pour \mathcal{I} dans la direction L , le lemme 4.2.1 permet alors d'affirmer que le reste de la L -division formelle de $S(g_i, g_j)$ par G est nul. Pour établir la réciproque, considérons une série formelle $f \in \mathcal{I}$ non nulle. Il existe donc des séries $(h_1, \dots, h_t) \in \mathbb{K}[[X]]$ telles que l'on ait

$$(4.5.1) \quad f = \sum_{i=1}^t h_i g_i.$$

Soit $m_h(i) = \text{ord}_L(h_i g_i)$. On définit $\mu_h = \min_L(m_h(1), \dots, m_h(t))$. On a clairement

$$(4.5.2) \quad \text{ord}_L(f) \geq_L \mu_h.$$

On considère l'ensemble des écritures possibles de f sous la forme (4.5.1). Comme l'ordre considéré est total, on choisit une expression de la forme (4.5.1),

$$f = \sum_{i=1}^t H_i g_i,$$

telle que μ_H soit maximale, c'est-à-dire $\mu_H \geq_L \mu_h$ pour tout ensemble $h = (h_1, \dots, h_t)$ tel que f s'écrive sous la forme (4.5.1). Pour alléger les notations, on pose $\mu = \mu_H$. Nous allons montrer que $\text{ord}_L(f) = \mu$.

On suppose

$$(4.5.3) \quad \text{ord}_L(f) >_L \mu.$$

On isole dans l'expression (4.5.1) choisie pour f les termes d'ordre μ . On peut donc écrire, en notant $\mu = \min_L(m(1), \dots, m(t))$,

$$(4.5.4) \quad \begin{aligned} f &= \sum_{m(i)=\mu} H_i g_i + \sum_{m(i)>_L \mu} H_i g_i \\ &= \sum_{m(i)=\mu} \text{FT}(H_i) g_i + \sum_{m(i)=\mu} (H_i - \text{FT}(H_i)) g_i + \sum_{m(i)>_L \mu} H_i g_i. \end{aligned}$$

Les monômes qui apparaissent dans la seconde et la troisième somme ont tous un L -ordre L -strictement supérieur à μ . L'hypothèse $\text{ord}_L(f) >_L \mu$ nous assure que la première somme a aussi un L -ordre L -strictement supérieur à μ . On pose $\text{FT}(H_i) = c_i X^{\alpha(i)}$. On a donc

$$\sum_{m(i)=\mu} \text{FT}(H_i) g_i = \sum_{m(i)=\mu} c_i X^{\alpha(i)} g_i.$$

Les hypothèses du lemme 4.4 sont vérifiées ; cela implique donc l'existence de constantes $c_{j,k}$ telles que l'on ait

$$(4.5.5) \quad \sum_{m(i)=\mu} \text{FT}(H_i)g_i = \sum_{j,k} c_{j,k} X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k)$$

et

$$(4.5.6) \quad \text{ord}_L(X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k)) >_L \mu,$$

où $X^{\gamma_{j,k}} = \text{PPCM}(\text{FM}(g_j), \text{FM}(g_k))$. Puisque, par hypothèse, le reste de la L -division formelle de $S(g_j, g_k)$ par G est nul, on peut écrire

$$(4.5.7) \quad S(g_j, g_k) = \sum_{i=1}^t a_{ijk} g_i,$$

où $a_{ijk} \in \mathbb{K}[[X]]$ et $\text{ord}_L(a_{ijk} g_i) \geq_L \text{ord}_L(S(g_j, g_k))$ pour tout i, j, k . En effet, pour tout $i = 1, \dots, p$, $\text{ord}_L(a_{ijk} g_i) \subset \Delta_i$ avec $\Delta_i \cap \Delta_l = \emptyset$ pour tout $l \neq i$.

Ainsi, l'égalité (4.5.7) donne

$$(4.5.8) \quad \text{ord}_L(S(g_j, g_k)) = \min_i(\text{ord}_L(a_{ijk} g_i))$$

et

$$(4.5.9) \quad X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k) = \sum_{i=1}^t b_{ijk} g_i,$$

où $b_{ijk} = a_{ijk} X^{\mu-\gamma_{j,k}}$. De plus, (4.5.8) et (4.5.6) impliquent

$$(4.5.10) \quad \text{ord}_L(b_{ijk} g_i) \geq_L \text{ord}_L(X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k)) >_L \mu.$$

En outre, en utilisant (4.5.5) et (4.5.9), on obtient

$$(4.5.11) \quad \begin{aligned} \sum_{m(i)=\mu} \text{FT}(H_i)g_i &= \sum_{j,k} c_{j,k} X^{\mu-\gamma_{j,k}} S(g_j, g_k) \\ &= \sum_{j,k} c_{j,k} \left(\sum_i b_{ijk} g_i \right) = \sum_i \left(\sum_{j,k} c_{j,k} b_{ijk} \right) g_i. \end{aligned}$$

On pose $\sum_{j,k} c_{j,k} b_{ijk} = \tilde{H}_i$. L'inégalité (4.5.10) implique alors, pour tout i ,

$$(4.5.12) \quad \text{ord}_L(\tilde{H}_i g_i) >_L \mu.$$

On remplace dans (4.5.3) $\sum_{m(i)=\mu} \text{FT}(H_i)g_i$ par $\sum_i \tilde{H}_i g_i$ pour obtenir

$$(4.5.13) \quad f = \sum_i \tilde{H}_i g_i + \sum_{m(i)=\mu} (H_i - \text{FT}(H_i))g_i + \sum_{m(i)>_L \mu} H_i g_i.$$

On a donc trouvé une expression de f du type (4.5.1) où tous les termes ont un L -ordre L -strictement supérieur à μ . Ceci est impossible par maximalité de μ . L'hypothèse $\text{ord}_L(f) >_L \mu$ est donc absurde. On conclut

aisément avec (4.5.2) que $\text{ord}_L(f) = \mu$. On a donc bien $\text{FM}(f) = X^\mu$ avec $\mu = \min_L(m(1), \dots, m(t))$. Ainsi μ appartient à $E_L(\mathcal{I})$ et G est une base standard de \mathcal{I} pour la direction L . ■

On considère l'ordre naturel défini, pour $I = (i_1, \dots, i_s)$ et $J = (j_1, \dots, j_s)$, par

$I \leq_{\text{nat}} J$ équivaut à

$I = J$, ou $|I| < |J|$, ou

$|I| = |J|$ et $\exists k$ tel que $i_l = j_l$ pour $l = 1, \dots, k-1$, et $i_k > j_k$.

Soient I, J des multi-indices de \mathbb{N}^s . Si $I \leq_{\text{nat}} J$ et $I \neq J$, on écrira $I <_{\text{nat}} J$. On peut considérer pour cet ordre l'exposant privilégié d'un élément f de $\mathbb{K}[[X]]$. De plus, on montre aisément que, étant donné un entier k , il existe une forme linéaire L vérifiant (**) qui préserve l'ordre naturel jusqu'à l'entier k , c'est-à-dire telle que, pour tous multi-indices $I, J \in \mathbb{N}^s$ satisfaisant $|I| \leq k$ et $|J| \leq k$, on ait

$$I <_{\text{nat}} J \Rightarrow L(I) < L(J).$$

4.6. PROPOSITION. *Soient f_1, \dots, f_p des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note \mathcal{I} l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]]$. Il existe alors une forme linéaire L vérifiant (**) et une base standard minimale $G = (g_1, \dots, g_k)$ pour \mathcal{I} dans la direction L telle que, pour tout $i = 1, \dots, k$, g_i appartient à $\mathbb{K}[[X]](M)$.*

Preuve. La preuve de cette proposition donne en plus une construction explicite de cette base standard.

On pose $G_0 = (f_1, \dots, f_p)$. Soit alors, pour tout $i = 1, \dots, p$, $E_i^{(0)}$ l'exposant privilégié, pour l'ordre naturel, associé à f_i . Soit k_0 un entier tel que $k_0 > \max_{i=1, \dots, p} |E_i^{(0)}|$. Soit L_0 une forme linéaire vérifiant (**) qui préserve l'ordre naturel jusqu'à l'entier k_0 . Les multi-indices $E_i^{(0)}$ sont aussi les exposants privilégiés dans la direction L_0 des séries f_i . On peut s'assurer que G_0 est $(E_1^{(0)}, \dots, E_p^{(0)}; L_0)$ -régulière dans $\mathbb{K}[[X]]$. On se trouve dans les conditions du théorème 2.4. Pour chaque couple d'indices (i, j) avec $i \neq j$, on ajoute alors à G_0 l'ensemble des restes non nuls de la L_0 -division des séries $S(f_i, f_j)$ par G_0 . On appelle G_1 l'ensemble ainsi construit. Si $G_1 = G_0$, d'après le lemme 4.5, G_0 est une base standard de \mathcal{I} dans la direction L_0 . Sinon, on note $r_{i,j}^{(1)}$ le reste de la L_0 -division de $S(f_i, f_j)$ par G_0 et $E_{i,j}^{(1)}$ l'exposant privilégié de $r_{i,j}^{(1)}$ pour l'ordre naturel. Clairement $r_{i,j}^{(1)}$ appartient à l'idéal \mathcal{I} .

Si $\max_{i,j} |E_{i,j}^{(1)}| < k_0$, ces multi-indices sont aussi les exposants privilégiés dans la direction L_0 . Sinon, soit $k_1 > \max_{i,j} |E_{i,j}^{(1)}|$; alors on peut trouver L_1 une forme linéaire qui préserve l'ordre naturel usuel jusqu'à

l'entier k_1 . Alors, L_1 est un "raffinement" de L_0 en ce sens que les restes issus de la L_1 -division des S -séries de G_0 coïncident avec les restes issus de la L_0 -division des S -séries de G_0 , puisque les exposants privilégiés dans la direction L_1 de G_0 sont les mêmes que ceux dans la direction L_0 .

On réitère alors le processus ; c'est-à-dire, pour chaque couple d'indices (i, j) , avec $i \neq j$, on ajoute à G_1 l'ensemble des restes non nuls de la division des séries $S(f_i, f_j)$ par G_1 . On appelle G_2 l'ensemble ainsi construit. Si $G_2 = G_1$, d'après le lemme 4.5, G_1 est une base standard de \mathcal{I} dans la direction L_1 . Sinon, on recommence. L'algorithme s'arrête lorsque l'on trouve $i \in \mathbb{N}$ tel que $G_{i+1} = G_i$; alors, G_i est une base standard pour \mathcal{I} dans la direction L_i . En outre, toutes les séries qui composent les ensembles G_k sont issus de restes de la L_i -division d'une série de $\mathbb{K}[[X]](M)$ par des séries de $\mathbb{K}[[X]](M)$, ce sont donc aussi, d'après le théorème 2.4, des séries qui appartiennent à $\mathbb{K}[[X]](M)$.

Pour achever la preuve, il reste à montrer que l'algorithme comporte un nombre fini d'itérations, c'est-à-dire qu'il existe bien un entier i tel que pour tout entier $k \geq i$, $G_k = G_i$. Pour cela, on considère l'idéal $\langle \text{FT}(G_k) \rangle$ engendré dans $\mathbb{K}[X]$ par l'ensemble des $\text{FT}(h)$ pour tout $h \in G_k$. Si $G_{i+1} \neq G_i$, on peut affirmer que $\langle \text{FT}(G_i) \rangle$ est strictement plus petit que $\langle \text{FT}(G_{i+1}) \rangle$. En effet, par hypothèse, au moins un reste non nul r a été ajouté à G_i . Comme r est un reste de division par l'idéal engendré par G_i , $\text{FT}(r)$ n'est divisible par aucun des $\text{FT}(h)$, $h \in G_i$. On a donc une suite croissante d'idéaux monômiaux dans l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$ qui est noethérien ; elle est donc stationnaire à partir d'un certain rang. Ceci achève la démonstration.

On a donc obtenu une base standard de \mathcal{I} dans la direction de la forme linéaire $L = L_i$. Pour avoir une base standard minimale, il suffit d'appliquer le lemme 4.2.2, c'est-à-dire de ne garder que les éléments de G_i dont les exposants privilégiés dans la direction L_i appartiennent à la frontière distinguée de \mathcal{I} dans la direction L_i . ■

4.7. Étude d'un exemple. On considère l'idéal \mathcal{I} sur $\mathbb{K}[[X, Y]]$ engendré par

$$f_1(X, Y) = X^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n \quad \text{et} \quad f_2(X, Y) = X + Y.$$

On a donc clairement $f_i \in \mathbb{K}[[X, Y]](M)$ pour $i = 1, 2$. Nous allons construire une base standard minimale de \mathcal{I} suivant un ordre proche de l'ordre naturel. Pour cela, on applique l'algorithme donné dans la proposition 4.6.

On a $G_0 = (f_1, f_2)$, $E_1^{(0)} = (2, 0)$, $E_2^{(0)} = (1, 0)$. En choisissant alors $L_0(i_1, i_2) = i_1 + \sqrt{2}i_2$, L_0 vérifie bien (**) et les exposants privilégiés de f_1 et f_2 dans la direction de L_0 sont respectivement $E_1^{(0)}$ et $E_2^{(0)}$. En outre,

on a

$$(4.7.1) \quad S(f_1, f_2)(X, Y) = Y^3 - XY + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n.$$

On effectue alors la L_0 -division de $S(f_1, f_2)$ par G_0 . On obtient

$$(4.7.2) \quad \begin{aligned} S(f_1, f_2)(X, Y) &= -(X + Y)Y + \left(Y^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n \right) \\ &= -Y f_1(X, Y) + Y^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $f_3(X, Y) = Y^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n$, on a

$$(4.7.3) \quad G_1 = (f_1(X, Y), f_2(X, Y), f_3(X, Y)),$$

et, suivant l'ordre naturel, les exposants privilégiés de f_1 , f_2 et f_3 sont respectivement $E_1^{(1)} = (2, 0)$, $E_2^{(1)} = (1, 0)$, $E_3^{(1)} = (0, 2)$. Ils coïncident bien avec les exposants privilégiés dans la direction de L_0 . Ainsi, on pose $L_1 = L_0$. En outre, on a

$$(4.7.4) \quad S(f_1, f_2)(X, Y) = Y^3 - XY + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n,$$

$$(4.7.5) \quad \begin{aligned} S(f_1, f_3)(X, Y) &= Y^5 - X^2 Y^3 \\ &\quad + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^{n+2} - X^2 Y^3 - \sum_{n=4}^{\infty} M_n X^2 Y^n, \end{aligned}$$

$$(4.7.6) \quad S(f_2, f_3)(X, Y) = Y^3 - XY^3 - \sum_{n=4}^{\infty} M_n XY^n.$$

On effectue alors la L_1 -division des S -séries $S(f_i, f_j)$, pour $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, par G_1 . On obtient

$$(4.7.7) \quad S(f_1, f_2)(X, Y) = -Y f_1(X, Y) + f_3(X, Y).$$

$$(4.7.8) \quad \begin{aligned} S(f_1, f_3)(X, Y) &= - \left(Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n \right) f_1(X, Y) \\ &\quad + \left(Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n \right) f_3(X, Y). \end{aligned}$$

$$(4.7.9) \quad S(f_2, f_3)(X, Y) = - \left(Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n \right) f_2(X, Y) + Y f_3(X, Y).$$

L'ensemble des restes de ces divisions sont nuls, ainsi, d'après la preuve de la proposition 4.6, $G_1 = (f_1, f_2, f_3)$ est une base standard de \mathcal{I} suivant la

direction L_1 . On remarque alors que, pour $i = 1, 2, 3$, f_i appartient bien à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. Enfin, à partir de G_1 , on a facilement une base standard minimale de \mathcal{I} , en remarquant que

$$(4.7.10) \quad (E_1 + \mathbb{N}^2) \cup (E_2 + \mathbb{N}^2) \cup (E_3 + \mathbb{N}^2) = (E_2 + \mathbb{N}^2) \cup (E_3 + \mathbb{N}^2).$$

Ainsi, $(f_2(X, Y), f_3(X, Y)) = (X + Y, Y^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n)$ est une base standard minimale de \mathcal{I} suivant la direction L_1 . On vérifie d'ailleurs que

$$(4.7.11) \quad X^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n = \left(Y^2 + Y^3 + \sum_{n=4}^{\infty} M_n Y^n \right) + (X - Y)(X + Y).$$

On a alors le théorème, annoncé en 0.3, de division par un idéal pour des séries appartenant à des classes de séries formelles à croissance contrôlée et son corollaire 4.9.

4.8. THÉORÈME. *Soient f_1, \dots, f_p des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note \mathcal{I} l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]]$. Il existe alors une forme linéaire L vérifiant (**) et une base standard $G = (g_1, \dots, g_k)$ pour \mathcal{I} dans la direction L telle que, pour tout $i = 1, \dots, k$, g_i appartienne $\mathbb{K}[[X]](M)$, et telle que, pour tout g dans $\mathbb{K}[[X]](M)$, on puisse écrire $g = \sum_{i=1}^k h_i g_i + h_0$ avec h_i dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ pour tout $i = 0, \dots, k$. En outre, g appartient à \mathcal{I} si et seulement si $h_0 = 0$.*

Preuve. C'est une conséquence du théorème 2.4 et de la proposition 4.6. On note que, d'après la définition de la base standard et l'allure du reste après division (voir (1.4.1)), si g appartient à \mathcal{I} , nécessairement on a $h_0 = 0$. Ceci n'est pas toujours vérifié si G n'est pas une base standard pour \mathcal{I} dans la direction L (voir (4.10.4)). ■

4.9. COROLLAIRE. *Soit \mathcal{I} un idéal de $\mathbb{K}[[X]](M)$. Il existe alors une forme linéaire L vérifiant (**) et une base standard minimale $(g^E)_{E \in F_L(\mathcal{I})}$ de \mathcal{I} , telles que l'on ait*

$$(4.9.1) \quad \mathcal{I} \text{ est engendré par } (g^E)_{E \in F_L(\mathcal{I})},$$

$$(4.9.2) \quad \text{tout élément } g \in \mathbb{K}[[X]](M) \text{ est équivalent modulo } \mathcal{I} \text{ à un unique élément } h \text{ de } \mathbb{K}[[X]](M) \text{ de la forme } h = \sum_{J \notin E_L(\mathcal{I})} h_J X^J.$$

L'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$ est donc noethérien.

Preuve. Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème 4.8 et du lemme 4.2.2. En utilisant le fait que la frontière distinguée $F_L(\mathcal{I})$ de l'ensemble $E_L(\mathcal{I})$ des exposants privilégiés de \mathcal{I} dans la direction L est une partie finie de \mathbb{N}^s , on retrouve alors la noethérianité de l'anneau $\mathbb{K}[[X]](M)$. ■

On donne dans la suite un exemple de l'importance du choix de la famille génératrice de l'idéal lors de la division par cet idéal.

4.10. Étude d'un exemple. On considère l'idéal \mathcal{I} sur $\mathbb{K}[[X, Y]]$ engendré par

$$f_1(X, Y) = X^2 + Y^3 \quad \text{et} \quad f_2(X, Y) = X^5.$$

Soit $M_n = n!$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels tels que

$$u_0 = 0, \quad u_p = 0 \quad \text{pour tout entier } p \neq 0 \text{ [6]} \quad \text{et} \quad u_{6n} = M_{6n}.$$

On pose $g(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} X^n Y^n$. On a donc clairement $g \in \mathbb{K}[[X, Y]](M)$. En outre, on vérifie que l'on a

$$(4.10.1) \quad g(X, Y) = (X^2 + Y^3) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k-1} u_{2n+6k} X^{n+5k-2} Y^n \right) \\ + X^5 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_{6k} X^{5(k-1)} \right).$$

On a donc écrit g sous la forme

$$(4.10.2) \quad g(X, Y) = q_1(X, Y) f_1(X, Y) + q_2(X, Y) f_2(X, Y),$$

ainsi $g \in \mathcal{I}$. Mais, $q_1(X, Y)$ s'écrit

$$(4.10.3) \quad q_1(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} u_{6k} X^{5k-2} \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k-1} u_{2n+6k} X^{n+5k-2} Y^n \\ = q_1^{(1)}(X, Y) + q_1^{(2)}(X, Y).$$

Il est clair que la série $q_1^{(1)}(X, Y)$ n'appartient pas à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. Par conséquent, puisque les séries $q_1^{(1)}(X, Y)$ et $q_1^{(2)}(X, Y)$ ont un support disjoint, on déduit de (4.10.3) que la série $q_1(X, Y)$ n'appartient pas à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. On vérifie de même que la série $q_2(X, Y)$ n'appartient pas, non plus, à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. Ainsi, pour $i = 1, 2$, q_i n'appartient pas à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$.

Cependant, si on applique directement le théorème 2.4, avec une forme linéaire L qui associe aux séries $f_1(X, Y)$ et $f_2(X, Y)$ les mêmes exposants privilégiés que ceux donnés par l'ordre naturel (on peut prendre $L(i_1, i_2) = i_1 + \sqrt{2} i_2$), on trouve

$$(4.10.4) \quad g(X, Y) = (X^2 + Y^3) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k-1} u_{2n+4k} X^n Y^{n+5k-3} \right) \\ + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (u_{4k} Y^{5k} + u_{4k+2} X Y^{5k+1}).$$

Ainsi, on vérifie, en utilisant l'hypothèse (H_2) sur la suite $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que le

quotient et le reste appartiennent bien à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. Cependant, bien que g appartienne à \mathcal{I} , le reste de cette division n'est pas nul.

Le problème se pose donc de construire un système fini de générateurs (g_i) de l'idéal \mathcal{I} appartenant à $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$ tel que l'on puisse écrire, pour tout $u \in \mathcal{I}$,

$$(4.10.5) \quad u(X, Y) = \sum_i h_i^{(u)} g_i,$$

avec $h_i^{(u)} \in \mathbb{K}[[X, Y]](M)$ pour tout i .

Selon le schéma de la preuve de la proposition 4.6, on construit alors une base standard minimale de \mathcal{I} dans la direction L . On obtient

$$(4.10.6) \quad (g_1(X, Y), g_2(X, Y), g_3(X, Y)) = (X^2 + Y^3, XY^6, Y^9).$$

Et par rapport à cette nouvelle base, on applique le théorème 2.4 pour obtenir

$$(4.10.7) \quad g(X, Y) = (X^2 + Y^3) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k-1} u_{2n+4k} X^n Y^{n+5k-3} \right) \\ + XY^6 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_{4k+2} Y^{5(k-1)} \right) \\ + Y^9 \left(\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k u_{4k} Y^{5k-9} \right).$$

Cette fois, on a bien écrit g sous la forme (4.10.5) avec $h_i^{(g)} \in \mathbb{K}[[X, Y]](M)$.

4.11. Relations de division. Soient f_1, \dots, f_p des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note \mathcal{I} l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]]$. Le théorème 4.8 assure qu'il existe g_1, \dots, g_k , dans $\mathbb{K}[[X]](M)$, des générateurs de \mathcal{I} tels que, pour toute série g de $\mathbb{K}[[X]](M)$ appartenant à \mathcal{I} , la division de g par $G = (g_1, \dots, g_k)$ donne

$$g = \sum_{i=1}^k h_i g_i$$

avec $h_i \in \mathbb{K}[[X]](M)$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Il est alors naturel de se poser la question suivante : peut-on écrire g sous la forme $g = \sum_{i=1}^p \tilde{h}_i f_i$ avec $\tilde{h}_i \in \mathbb{K}[[X]](M)$ pour tout $i = 1, \dots, p$? La division 2.4 appliquée directement à g ne donne pas forcément un reste nul (voir 4.10). En fait, en utilisant à nouveau la construction de la proposition 4.6, on a une réponse affirmative à la question.

THÉORÈME (Relations dans $\mathbb{K}[[X]](M)$). Soient f_1, \dots, f_p des éléments de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On note \mathcal{I} l'idéal engendré par ces éléments sur $\mathbb{K}[[X]]$. Alors, pour toute série g de $\mathbb{K}[[X]](M)$ appartenant à \mathcal{I} , on peut écrire

$g = \sum_{i=1}^p q_i f_i$ avec q_i dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ pour tout $i = 1, \dots, p$. Si on note \mathcal{I}_M l'idéal engendré par f_1, \dots, f_p sur $\mathbb{K}[[X]](M)$, on a donc

$$\mathcal{I}_M = \mathcal{I} \cap \mathbb{K}[[X]](M).$$

Preuve. C'est une conséquence directe de la construction opérée dans la preuve de la proposition 4.6. En effet, le théorème 4.8 assure qu'il existe une direction L et une base standard g_1, \dots, g_k de \mathcal{I} dans cette direction telles que

$$(4.11.1) \quad g = \sum_{i=1}^k h_i g_i$$

avec $h_i \in \mathbb{K}[[X]](M)$ pour tout $i = 1, \dots, k$. On regarde alors comment cette base standard est construite. A la première étape, on ajoute, pour une forme linéaire L bien choisie, les restes $r_{i,j}$ non nuls de la L -division des S -séries $S(f_i, f_j)$, pour $i, j = 1, \dots, p$, $i \neq j$, par (f_1, \dots, f_p) . On a donc

$$(4.11.2) \quad S(f_i, f_j) = \sum_{k=1}^p q_k^{(i,j)} f_k + r_{i,j}$$

avec, pour tout $i, j = 1, \dots, p$, $i \neq j$, et pour tout $k = 1, \dots, p$, $q_k^{(i,j)}$ et $r_{i,j}$ des séries de $\mathbb{K}[[X]](M)$. Or, par construction, on a

$$(4.11.3) \quad S(f_i, f_j) = \frac{X^{\gamma_{i,j}}}{\text{FT}(f_i)} f_i - \frac{X^{\gamma_{i,j}}}{\text{FT}(f_j)} f_j.$$

On peut donc écrire, pour tout $i, j = 1, \dots, p$, $i \neq j$,

$$(4.11.4) \quad r_{i,j} = \sum_{k=1}^p \tilde{q}_k^{(i,j)} f_k$$

avec, pour tout $i, j = 1, \dots, p$, $i \neq j$, et pour tout $k = 1, \dots, p$, $\tilde{q}_k^{(i,j)}$ des séries de $\mathbb{K}[[X]](M)$. On réitère ce processus à chaque étape de construction de la base standard pour conclure que, pour tout $i = 1, \dots, k$, on peut écrire

$$(4.11.5) \quad g_i = \sum_{l=1}^p \tilde{h}_l f_l$$

avec h_i dans $\mathbb{K}[[X]](M)$ pour tout $i = 1, \dots, p$. On utilise alors (4.11.1) pour obtenir le résultat escompté. ■

4.12. *Retour à l'exemple précédent.* On considère l'idéal \mathcal{I} sur $\mathbb{K}[[X, Y]]$ engendré par

$$f_1(X, Y) = X^2 + Y^3 \quad \text{et} \quad f_2(X, Y) = X^5.$$

On reprend la série $g(X, Y)$. On sait qu'elle appartient à l'idéal \mathcal{I} . On veut donc écrire $g(X, Y) = h_1(X, Y)f_1(X, Y) + h_2(X, Y)f_2(X, Y)$ avec $h_1(X, Y)$

et $h_2(X, Y)$ des séries de $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$. La base standard minimale de \mathcal{I} construite dans (4.10.6) est $(X^2 + Y^3, XY^6, Y^9)$. En effet, la première étape de la construction donne

$$(4.12.1) \quad S(f_1, f_2) = X^3Y^3 = X^3(X^2 + Y^3) - X^5.$$

La division de $S(f_1, f_2)$ par (f_1, f_2) donne

$$(4.12.2) \quad X^3(X^2 + Y^3) - X^5 = XY^3(X^2 + Y^3) - XY^6.$$

On ajoute alors à $(f_1(X, Y), f_2(X, Y))$ le reste non nul de cette division, c'est-à-dire XY^6 . On obtient l'ensemble

$$(4.12.3) \quad E_1 = (X^2 + Y^3, X^5, XY^6)$$

avec

$$(4.12.4) \quad XY^6 = (-X^3 + XY^3)(X^2 + Y^3) + X^5.$$

De même, à E_1 on ajoute les restes non nuls de la division des S -séries de E_1 par E_1 . On obtient simplement

$$(4.12.5) \quad S(X^2 + Y^3, XY^6) = Y^6(X^2 + Y^3) - X(XY^6) = Y^9.$$

Ainsi, on a, en regroupant (4.12.4) et (4.12.5),

$$(4.12.6) \quad Y^9 = (Y^6 + X^4 - X^2Y^3)(X^2 + Y^3) - (X)X^5.$$

Finalement, en remplaçant dans (4.10.8) XY^6 par son expression issue de (4.12.4) et Y^9 par son expression issue de (4.12.6), on obtient

$$(4.12.7) \quad g(X, Y) \\ = (X^2 + Y^3) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k-1} u_{2n+4k} X^n Y^{n+5k-3} \right) \\ + ((-X^3 + XY^3)(X^2 + Y^3) + X^5) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_{4k+2} Y^{5(k-1)} \right) \\ + ((Y^6 + X^4 - X^2Y^3)(X^2 + Y^3) - (X)X^5) \left(\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k u_{4k} Y^{5k-9} \right).$$

On voit que l'on peut écrire $g(X, Y) = (X^2 + Y^3)h_1(X, Y) + X^5h_2(X, Y)$ avec $h_1(X, Y)$ et $h_2(X, Y)$ des séries de $\mathbb{K}[[X, Y]](M)$.

Références

- [1] J. M. Aroca, H. Hironaka and J. L. Vicente, *The theory of the maximal contact*, Memorias de Matematica del Instituto "Jorge Juan", 29 Madrid, 1975.
- [2] J. Briançon, *Weierstrass préparé à la Hironaka*, Singularités à Cargèse, Astérisque 7-8 (1973), 67-73.

- [3] J. Chaumat et A.-M. Chollet, *Caractérisation des anneaux noethériens de séries formelles à croissance contrôlée. Application à la synthèse spectrale*, Publ. Mat. 41 (1997), 545–561.
- [4] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer, 1992.
- [5] H. Grauert und R. Remmert, *Analytische Stellenalgebren*, Grundlehren Math. Wiss. 176, Springer, Berlin, 1971.
- [6] A. Mouze, *Un théorème d'Artin pour des anneaux de séries formelles à croissance contrôlée*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330 (2000), 15–20.
- [7] J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergeb. Math. Genzgeb. 71, Springer, Berlin, 1972.
- [8] M. A. Zurro, *On the rings of formal solutions of polynomial differential equations*, in: Banach Center Publ. 44, Inst. Math., Polish Acad. Sci., Warszawa, 1998, 277–292.

CNRS-UMR 8524
Mathématiques, bâtiment M2
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail: mouze@agat.univ-lille1.fr

Received February 7, 2000
Revised version October 18, 2000

(4471)