ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
115.3 (2015)

Équidistribution vers le courant de Green

par FRÉDÉRIC PROTIN (Toulouse)

Abstract. We establish an equidistribution result for the pull-back of a $(1,1)$-closed positive current in $\mathbb{C}^2$ by a proper polynomial map of small topological degree. We also study convergence at infinity on good compactifications of $\mathbb{C}^2$. We make use of a lemma that enables us to control the blow-up of some integrals in the neighborhood of a big logarithmic singularity of a plurisubharmonic function. Finally, we discuss the importance of the properness hypothesis, and we give some results in the case where this hypothesis is omitted.

Introduction. Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ un endomorphisme polynomial. On s'intéresse à la convergence des tirés en arrière d'un $(1,1)$-courant positif fermé par les itérés de f. Le cas des applications de Hénon est bien connu : les tirés en arrière normalisés d'une droite générique de $\mathbb{C}^2$ par un tel automorphisme convergent, au sens faible des courants, vers un courant invariant T_f canoniquement associé à f (le courant de Green de f [S99]). On étudie ici les endomorphismes propres non nécessairement inversibles de $\mathbb{C}^2$, de petit degré topologique, c'est-à-dire ceux dont le second degré dynamique $\lambda_2(f)$ est strictement inférieur au premier degré dynamique $\lambda_1(f)$, dont la dynamique est conjecturalement proche de celle des applications de Hénon. Rappelons que le *premier degré dynamique* de f est défini par

$$\lambda_1(f) := \lim_{n\to\infty} [\max(\deg P_n, \deg Q_n)]^{1/n}$$

où on a écrit $f^n = (P_n, Q_n)$ en coordonnées euclidiennes de $\mathbb{C}^2$, tandis que le *deuxième degré dynamique* de f est

$$\lambda_2(f) := \text{degré topologique de } f = \operatorname{card}\{f^{-1}(p) : p \in \mathbb{C}^2 \text{ générique}\}$$

Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME A. *Soit f un endomorphisme polynomial propre de $\mathbb{C}^2$ tel que $1 \le \lambda_2(f) < \lambda_1(f)$. Pour tout $(1,1)$-courant positif fermé S sur $\mathbb{C}^2$*

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 37F10; Secondary 32U40.
Key words and phrases: complex dynamics, Green's current, Lelong number.

de masse projective finie, la suite $\lambda_1(f)^{-n} f^{n*} S$ *converge au sens faible des courants dans* $\mathbb{C}^2$ *vers* cT_f*, où* c *est une constante* ≥ 0.

Le courant T_f est indépendant de S et vérifie $f^* T_f = \lambda_1(f) T_f$.

Pour prouver le théorème, il faut se placer préalablement sur une bonne compactification de $\mathbb{C}^2$, dans laquelle l'extension méromorphe de f est *algébriquement stable* : dans ce cas, la dynamique de f est compatible avec l'action linéaire f^* induite en cohomologie, et la construction de T_f résulte alors des travaux de nombreux auteurs (voir [S99], [DG09]). L'existence d'une bonne compactification dans ce contexte résulte des travaux récents de Favre–Jonsson [FJ11].

Signalons un résultat d'équidistribution valable en dimension $k \geq 2$. Soit S un $(1,1)$-courant positif fermé sur $\mathbb{P}^k$. Il est montré dans [DS95] que la suite de courants $\lambda_1(f)^{-n} f^{n*} S$ converge vers le courant de Green si f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ et si le potentiel de S n'est pas identiquement égal à $-\infty$ sur un ensemble pluripolaire ne dépendant que de f. Des énoncés plus précis sont obtenus lorsque $k = 2$ dans [FJ03] et dans [DS08].

Après des préliminaires dynamiques, nous établissons dans une seconde partie un lemme qui permet de contrôler l'explosion de certaines intégrales de fonctions plurisousharmoniques près d'une singularité logarithmique. Nous prouvons le Théorème A dans une troisième partie. Nous raffinons ensuite ce résultat en précisant la convergence à l'infini. Nous examinons dans une dernière partie les raisons de la nécessité de l'hypothèse de propreté, et nous établissons que les points de $\mathbb{C}^2$ où la propreté de f fait défaut sont périodiques.

1. Préliminaires dynamiques. Soit $f : (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (P(z_1, z_2), Q(z_1, z_2)) \in \mathbb{C}^2$ un endomorphisme polynomial *dominant*, i.e. dont le jacobien Jf n'est pas identiquement nul. On note $\lambda_2(f)$ son *degré topologique*, c'est-à-dire le nombre de préimages d'un point générique. Son *premier degré dynamique* est

$$\lambda_1(f) = \lim_{n\to\infty} [\deg(f^n)]^{1/n}$$

où $\deg(f) := \max(\deg P, \deg Q)$.

Dans tout cet article on suppose que f est *propre* et de petit degré topologique, i.e.

$$\lambda := \lambda_1(f) > \lambda_2(f).$$

Dans ce contexte, les travaux récents de Favre–Jonsson [FJ11] et Diller–Dujardin–Guedj [DDG10] garantissent l'existence de bons courants invariants comme nous le rappelons à présent.

1.1. Bonne compactification. Il est naturel d'étendre f en un endomorphisme rationnel d'une compactification $X = \mathbb{C}^2 \cup D_\infty$ de $\mathbb{C}^2$ pour en faciliter l'étude dynamique. L'idée sous-jacente, mise en avant dès les travaux fondateurs de Fornæss–Sibony [FS95], est que la dynamique à l'infini va gouverner l'ensemble de la dynamique de f, à condition de savoir construire une compactification X qui soit compatible avec la dynamique : l'application f induit par tirer en arrière une action linéaire f^* sur $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ et on souhaite que cette action commute avec l'itération afin que

$$(\dagger) \qquad (f^n)^* = (f^*)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

C'est un problème difficile de garantir l'existence d'une "bonne compactification" dans laquelle (†) est satisfaite. Ce problème a été résolu par Favre et Jonsson [FJ11] qui précisent de plus la dynamique à l'infini. Nous résumons une partie de leurs résultats ici (voir [FJ11, Théorème D]). Notons que le cas des produits croisés n'intervient pas ici car nous supposons que $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$.

Théorème 1.1 ([FJ11]). *Il existe une compactification lisse $X = \mathbb{C}^2 \cup D_\infty$ de $\mathbb{C}^2$ telle que :*

- *f contracte chaque composante irréductible de D_∞ sur un point fixe attractif $I_\infty^- \notin I_f$, quitte à remplacer f par un itéré f^l.*
- *$\lambda^{-n} \log^+ \|f^n\|$ converge dans $\mathbb{C}^2$ vers une fonction $G_f \in \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^2) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{C}^2)$ telle que $(G_f > 0)$ est le bassin d'attraction $\mathbf{B}_\infty$ du point I_∞^-.*
- *La croissance de f^n sur le complémentaire de $\mathbf{B}_\infty$ est contrôlée par l'estimation suivante. Soit une constante γ telle que $\lambda_2 < \gamma < \lambda$. Il existe alors une constante $C_\gamma > 0$ telle que pour tout n et tout $p \in {}^c\mathbf{B}_\infty$ on ait*
$$\log^+ \|f^n(p)\| \leq \gamma^n(\log^+\|p\| + C_\gamma).$$

L'estimation de croissance peut se reformuler ainsi (voir aussi la preuve de [G03, Théorème 2.7]) :

$$(1) \qquad \forall x \in X \setminus I_f, \quad \mathrm{dist}(f^n(x), I_f) \geq [\mathrm{const} \cdot \mathrm{dist}(x, I_f)]^{\gamma^n}.$$

On a noté ici $I_f = I_f^+$ (resp. I_f^-) l'ensemble d'indétermination de f (resp. de f^{-1}). Ce sont des ensembles finis définis par

$$I_f^\pm := \{p \in X : \dim f^\pm(p) > 0\}.$$

Le fait que f contracte le diviseur à l'infini (nous remplaçons implicitement f par un itéré f^l dans ce qui suit) assure que $I_f = I_{f^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'hypothèse de propreté garantit de plus que $I_f^- = I_\infty^-$.

1.2. Courants de Green et mesure invariante canonique. Dans toute la suite nous supposons avoir fixé une bonne compactification $X = \mathbb{C}^2 \cup D_\infty$. Quitte à changer f en f^l (ce que l'on supposera implicitement dans la suite), l'action linéaire induite en cohomologie est compatible avec la dynamique. Il résulte des travaux de Diller–Favre [DF01] qu'il existe des classes nef uniques (à constante multiplicative près) $\alpha^{\pm} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ telles que

$$f^*\alpha^+ = \lambda\alpha^+, \quad f_*\alpha^- = \lambda\alpha^-, \quad \alpha^+ \cdot \alpha^- = 1.$$

Diller–Dujardin–Guedj [DDG10] ont montré qu'il existe deux courants invariants canoniques T_f, T_f^-, les courants de Green, tels que si θ est une $(1,1)$-forme réelle lisse fermée sur X alors

$$\frac{1}{\lambda^n}(f^n)^*\theta \to c_{\{\theta\}} T_f \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda^n}(f^n)_*\theta \to c^-_{\{\theta\}} T_f^-$$

où $c_{\{\theta\}} = \{\theta\} \cdot \alpha^-$ et $c^-_{\{\theta\}} = \{\theta\} \cdot \alpha^+$ ne dépendent que de la classe de cohomologie de θ.

Il est en général difficile de définir le produit extérieur de deux courants positifs fermés. Dans notre cas il s'avère que T_f^- est à potentiels localement bornés sur $X \setminus I^-_\infty$ (conséquence de [DDG10, Lemme 3.2] ; voir preuve du Théorème 3.1 ci-dessous). On peut donc définir $\mu_f = T_f \wedge T_f^-$ en suivant [D93]. On obtient ainsi une mesure de probabilité suite à la normalisation $\alpha^+ \cdot \alpha^- = 1$.

Le bon contrôle des potentiels des courants de Green nous permet d'établir le résultat suivant qui nous sera utile pour normaliser les potentiels. Rappelons qu'une fonction $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite *quasi-plurisousharmonique* (*quasi-PSH*) si elle est semi-continue supérieurement et si $dd^c\phi \geq -\omega$ pour une forme lisse ω. Le courant $\omega + dd^c\phi$ est donc positif.

Lemme 1.2. *Toute fonction quasi-plurisousharmonique est intégrable par rapport à la mesure μ_f.*

Preuve. Soit $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction quasi-psh, avec $dd^c\phi \geq -\omega$ pour une forme lisse ω. Ici $d = \partial + \overline{\partial}$ et $d^c = (2i\pi)^{-1}(\partial - \overline{\partial})$.

Soit $\theta^- \in \alpha^- = \{T_f^-\}$ une forme lisse cohomologue à T_f^-. Le courant T_f^- se décompose alors en $T_f^- = \theta^- + dd^c(g^-)$ avec $g^- \in \mathcal{C}^0(X \setminus I^-_\infty)$. On ne perd rien en supposant que $g^- \geq 0$ sur le support de T_f, qui ne rencontre pas I^-_∞. Par Stokes, et en se rappelant que $dd^c(\phi) \geq -\omega$, on a

$$\begin{aligned} \int_X (-\phi)\, d\mu_f &= \int_X (-\phi)\theta^- \wedge T_f + \int_X g^-(-dd^c(\phi)) \wedge T_f \\ &\leq \int_X (-\phi)\theta^- \wedge T_f + \int_X g^-\omega \wedge T_f. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est finie puisque g^- est majorée. Estimons l'avant-dernière. Fixons une $(1,1)$-forme lisse $\omega' = \theta^- - dd^c(\xi)$ telle que $\omega' \equiv 0$ au voisinage de I_f. Soit θ^+ une forme lisse représentant α^+. Le courant T_f

se décompose en $T_f = \theta^+ + dd^c(g^+)$ avec $g^+ \in \mathcal{C}^0(X \setminus I_f)$. Comme g^+ est continue sur $X \setminus I_f$, on ne perd rien à supposer que $g^+ \geq 0$ sur le support de ω'. Comme ξ est lisse, on suppose également que $\xi \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned}\int_X (-\phi)\theta^- \wedge T_f &= \int_X (-\phi)\omega' \wedge T_f + \int_X (-\phi) dd^c(\xi) \wedge T_f \\ &= \int_X (-\phi)\omega' \wedge \theta^+ + \int_X g^+ \omega' \wedge (-dd^c(\phi)) + \int_X \xi(-dd^c(\phi)) \wedge T_f \\ &\leq \int_X (-\phi)\omega' \wedge \theta^+ + \int_X g^+\ \omega' \wedge \omega + \int_X \xi\ \omega \wedge T_f < \infty. \ \blacksquare\end{aligned}$$

2. Lemme d'intégrabilité. Nous établissons ici un lemme local qui permet de contrôler l'explosion de certaines intégrales de fonctions plurisousharmoniques près d'une grosse singularité logarithmique. Ici et dans toute la suite, $\|z\| = \max(|z_1|, |z_2|)$ désigne la norme max, et $\mathbb{D}^2$ le polydisque unité de $\mathbb{C}^2$. On note aussi $\nu(S, x)$ le nombre de Lelong du courant S au point x.

Lemme 2.1. *Soit v une fonction psh définie sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}^2}$. On suppose que $\nu(v, z) \leq 1$ pour $z \neq 0$. Alors il existe deux constantes $C, D > 0$ telles que, pour tout $0 < r < 1$,*

$$\int_{\{r<\|z\|<1\}} e^{-v}\, dV \leq \frac{C}{r^D}.$$

Preuve. Si v est une fonction comme dans l'énoncé, nous noterons dorénavant $R := dd^c(v)$. L'idée est d'éclater $\mathbb{D}^2$ à l'origine puis de relever v sur la variété éclatée. La fonction v ainsi relevée se scinde alors en la somme du potentiel du courant porté par le diviseur exceptionnel de l'éclatement, dont la singularité est maîtrisée, et d'une fonction psh moins singulière que l'originale. Par des éclatements successifs, on désingularise à l'envie la fonction v, ce qui nous place en situation de contrôler l'explosion de l'intégrale e^{-v} près de la singularité. En fait, nous considérerons directement la modification $\pi : \widetilde{\mathbb{D}^2} \to \mathbb{D}^2$ composée par les éclatements de points successifs.

Désingularisation. Rappelons la définition de l'éclatement $\pi : \widetilde{\mathbb{D}^2} \to \mathbb{D}^2$ de $\mathbb{D}^2$ au-dessus du point $(z_1, z_2) = (0, 0)$. Le relèvement $\widetilde{\mathbb{D}^2}$ s'écrit $\{(z_1, z_2) : [\zeta_1, \zeta_2] \in \mathbb{D}^2 \times \mathbb{P}^1, z_1\zeta_2 = z_2\zeta_1\}$. La variété $\widetilde{\mathbb{D}^2}$ est alors recouverte par les deux cartes $\{\zeta_1 \neq 0\}$, $\{\zeta_2 \neq 0\}$.

D'après le Lemme 2.3 ci-dessous, en utilisant les mêmes notations et en prenant $\epsilon = 1/2$, il existe une modification propre $\pi : \widetilde{\mathbb{D}^2} \to \mathbb{D}^2$, composée d'éclatements au-dessus de l'origine, telle que $\pi^*R = S + R'$, avec $\nu(R', x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{D}^2 \setminus \pi^{-1}(0)$, et $\nu(R', x) \leq 3/2$ pour $x \in \pi^{-1}(0)$.

Relèvement de l'intégrale. Intéressons-nous maintenant à l'écriture locale de $v \circ \pi$ au voisinage d'un point p. Distinguons deux cas suivant que p est un point du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ de multiplicité 1 ou 2. Notons E_i les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(0)$.

Premier cas. Avec les notations du Lemme 2.3, p appartient à un unique E_j. On peut alors trouver un système de coordonnées locales (s_1, s_2) centré en p tel que $E_j = (s_1 = 0)$ localement. Notons que

$$\log \|\pi(s_1, s_2)\| = c \log |s_1| + O(1) \quad \text{et} \quad |J\pi| = O(1)$$

pour un $c > 0$. De plus, près de p, le courant S a un potentiel $w = a_j \log |s_1|$, $a_j \geq 0$, et R' a un potentiel local v' avec des nombres de Lelong $\leq 3/2$, d'après le Lemme 2.3.

Deuxième cas. Le point p appartient à exactement deux E_j. Appelons-les E_{j_1} et E_{j_2}. On peut alors choisir un système de coordonnées locales (s_1, s_2) telles que l'on ait localement $E_{j_1} = (s_1 = 0)$ et $E_{j_2} = (s_2 = 0)$. Alors

$$\log \|\pi(s_1, s_2)\| = c_1 \log |s_1| + c_2 \log |s_2| + O(1) \quad \text{et} \quad |J\pi| = O(1)$$

avec $c_1, c_2 > 0$. De plus, près de p, le courant S a un potentiel local $w = a_{j_1} \log |s_1| + a_{j_2} \log |s_2|$, $a_{j_1}, a_{j_2} \geq 0$, et R' a un potentiel local v' dont les nombres de Lelong sont $\leq 3/2$, d'après le Lemme 2.3.

Si $r_0 > 0$ est fixé assez petit, pour tout $0 < r < r_0$ on peut recouvrir $\pi^{-1}\{r < \|z\| < r_0\}$ par un nombre fini K d'ouverts U_k de la forme $U_k = \{r/d_k < |s_1| < 1, |s_2| < 1\}$, $d_k > 0$, et un nombre fini K' d'ouverts $U'_k = \{r/d_{k,1} < |s_1| < 1, r/d_{k,2} < |s_2| < 1\}$, $d_{k,1}, d_{k,2} > 0$. De plus, $|J_\pi| \leq 1$ dans U_k. Le théorème de changement de variables donne alors

$$\begin{aligned} I = \int\limits_{\{r<\|z\|<r_0\}} e^{-v}\, dV &= \int\limits_{\pi^{-1}\{r<\|z\|<r_0\}} e^{-v\circ\pi} |J\pi|\, dV \\ &\leq \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{U_k} e^{-v\circ\pi}\, dV + \sum_{k=1}^{K'} \int\limits_{U'_k} e^{-v\circ\pi}\, dV. \end{aligned}$$

Majoration de l'intégrale. Prenons $q = 5/4 > 1$ et $p = 5$; on a pour tout $k > 0$, d'après l'inégalité de Hölder,

$$I_k := \int\limits_{U_k} e^{-v\circ\pi}\, dV \leq \underbrace{\Big(\int\limits_{U_k} |s_1|^{-p\cdot a_k}\, dV\Big)^{1/p}}_{J_{1,k}} \cdot \underbrace{\Big(\int\limits_{U_k} e^{-q\cdot v'}\, dV\Big)^{1/q}}_{J_{2,k}} \tag{2}$$

avec $a_k \geq 0$. Il est facile de majorer $J_{1,k}$ en passant en coordonnées polaires : on trouve l'existence de $C_k > 0$ tel que

$$J_{1,k} \leq C_k / r^{a_k}.$$

Quant à l'intégrale $J_{2,k}$, elle est finie d'après le Lemme 2.2 ci-dessous (théorème d'intégrabilité de Skoda), pourvu que ϵ soit choisi assez petit pour que $\epsilon q \leq 1$. On a donc, en fin de compte, majoré chaque intégrale I_k par un terme de la forme K/r^a, avec $a = \max(a_1, \ldots, a_K) > 0$.

Considérons maintenant le second cas. On raisonne comme précédemment. Choisissons encore $q = 5/4 > 1$ et $p = 5$. On trouve

$$I'_k = \int\limits_{U'_k} e^{-v \circ \pi}\, dV \leq \Big(\int\limits_{U'_k} |s_1|^{-p \cdot a_k} |s_2|^{-p \cdot b_k}\, dV \Big)^{1/p} \cdot \Big(\int\limits_{U'_k} e^{-q \cdot v'}\, dV \Big)^{1/q}$$

avec $a_k, b_k > 0$. On vérifie comme précédemment l'existence de constantes C'_k, D_k telles que $I'_k \leq C'_k / r^{D_k}$.

Conclusion. En résumé, l'intégrale I est majorée par une somme de termes de la forme $K/r^{K'}$, $K, K' > 0$. Ainsi, il existe des constantes $K, D > 0$ telles que l'on ait la majoration

$$I \leq K/r^D. \ \blacksquare$$

Le lemme suivant énonce un résultat fondamental de Skoda [Sk72] :

LEMME 2.2. *Soit $v : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction psh définie sur le polydisque unité. On suppose que le nombre de Lelong de v en l'origine O de $\mathbb{D}^2$ vérifie $\nu(v, O) < 2$. Alors il existe un voisinage $U \subset \mathbb{D}^2$ de O tel que*

$$\int\limits_U e^{-v}\, dV < \infty.$$

Le Théorème 7.1 et le Corollaire 7.2 de [FJ05] impliquent le lemme de désingularisation ci-dessous. Il a été démontré dans [BM05] dans un cas particulier (voir également [G05]).

LEMME 2.3. *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une composition $\pi : \widetilde{\mathbb{D}^2} \to \mathbb{D}^2$ d'éclatements au-dessus de l'origine tels que l'on ait la décomposition $\pi^* R = S + R'_1 + R'_2 = S + R'$, avec :*

- *$S = \sum_{j=1}^N a_j [E_j]$, où $a_j \geq 0$, et les E_j sont les composantes irréductibles des diviseurs exceptionnels.*
- *$R'_1 = \sum_{i=1}^M b_i [D_i]$, où $b_i \geq 0$, et les D_i sont des courbes localement irréductibles dans $\widetilde{\mathbb{D}^2}$. Ces courbes peuvent avoir des points singuliers, mais elles sont lisses à leur intersection avec $\pi^{-1}(0)$.*
- *La courbe $\bigcup_i E_i \cup \bigcup_i D_i$ est à croisements normaux simples le long de $\pi^{-1}(0)$; autrement dit, $\pi^{-1}(0)$ s'écrit en coordonnées locales au voisinage de chacun de ses points $(s_1 = 0)$ ou bien $(s_1 s_2 = 0)$.*
- *Le courant R'_2 a des nombres de Lelong $< \epsilon$ en tout point de $\pi^{-1}(0)$.*

3. Convergence des courants. Dans toute la suite de l'article nous supposons avoir fixé une bonne compactification X de $\mathbb{C}^2$ ainsi que des classes invariantes α^+, α^- telles que $\alpha^+ \cdot \alpha^- = 1$.

Nous présentons ici la preuve du théorème principal dans le cas où les singularités logarithmiques du courant à l'infini sont sous contrôle. Cela permettra au lecteur de se faire une idée de la stratégie de la preuve dans un cas un peu plus simple.

3.1. Convergence dans un cas simple. Soit S un $(1,1)$-courant positif fermé sur X. On note

$$c_{\{S\}} := \{S\} \cdot \alpha^- = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} f^{n*}\{S\} \cdot \alpha^-.$$

Puisque α^- est nef, on a $c_{\{S\}} \geq 0$. Observons que $\lambda^{-n} f^{n*}\{S\} \to c_{\{S\}}\alpha^+$ en cohomologie (c'est une conséquence du Lemme 3.2 ci-dessous). La convergence au niveau des courants est assurée par le résultat suivant (rappelons que l'on note $\nu(S,x)$ le nombre de Lelong du courant S au point $x \in X$) :

Théorème 3.1. *La suite $\lambda^{-n} f^{n*} S$ converge vers $c_{\{S\}} T_f$ si et seulement si S n'a pas de singularité logarithmique au point I_∞^-, i.e. $\nu(S, I_\infty^-) = 0$.*

Preuve. Remplacement de f par un itéré. Soit $N \geq 1$ tel que le diviseur à l'infini soit contracté par f^N sur I_∞^-. Montrons qu'il suffit de prouver le théorème pour f^N à la place de f. Supposons qu'avec les hypothèses du théorème, la suite $\lambda^{-Nn} f^{Nn*} S$ converge vers $c_{\{S\}} T_f$ pour tout $(1,1)$-courant positif fermé S. Observons que pour chaque $i < N$, les suites

$$\frac{1}{\lambda^{Nn+i}} (f^{Nn+i})^* S = \frac{1}{\lambda^{Nn}} f^{Nn*} \left(\frac{1}{\lambda^i} f^{i*} S \right)$$

convergent aussi vers $c_{\{S\}} T_f$. Cela revient à dire que la suite $\lambda^{-n} f^{n*} S$ converge vers $c_{\{S\}} T_f$. Nous pouvons donc considérer sans perte de généralité que f contracte le diviseur à l'infini.

Condition nécessaire. Supposons que $\nu(S, I_\infty^-) \neq 0$. Rappelons que si f est holomorphe en z, alors

$$\nu(f^* S, z) \geq \nu(S, f(z)). \tag{3}$$

Notons $D_1, \dots, D_k$ les composantes irréductibles du diviseur à l'infini (rappelons que $\{D_1\}, \dots, \{D_k\}$ est une base de $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ [GH94]). D'après (3), il existe $a_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, tels que $\lambda^{-1} f^* S - a_1[D_1] - \cdots - a_k[D_k] \geq 0$. Montrons que la suite $\lambda^{-n} f^{n*}(a_1[D_1] + \cdots + a_k[D_k])$ converge au sens des courants vers un courant positif non nul $a_{1,\infty}[D_1] + \cdots + a_{k,\infty}[D_k]$.

En effet, la suite $\lambda^{-n} f^{n*}(a_1\{D_1\} + \cdots + a_k\{D_k\})$ converge dans $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ vers une classe $a_{1,\infty}\{D_1\} + \cdots + a_{k,\infty}\{D_k\}$ d'après le Lemme 3.2 ci-dessous. De plus, le fait que chaque a_i soit > 0 implique que les $a_{i,\infty}$ soient non tous nuls. Toute sous-suite convergente de

$$\lambda^{-n} f^{n*} \left(a_1[D_1] + \cdots + a_k[D_k]\right)$$

converge en cohomologie vers $a_{1,\infty}[D_1] + \cdots + a_{k,\infty}[D_k]$, donc au sens des courants.

Il en résulte que tout point d'accumulation S_∞ de la suite $(\lambda^{-n} f^{n*} S)$ vérifie

$$S_\infty - a_{1,\infty}[D_1] - \cdots - a_{k,\infty}[D_k] \geq 0.$$

La suite $(\lambda^{-n} f^{n*} S)$ ne saurait donc converger vers T_f, ce courant ne chargeant pas d'hypersurfaces ([S99, Théorème 1.8.1] pour $X = \mathbb{P}^n$, [G02] pour X Kählérienne).

Condition suffisante. Supposons à présent que $\nu(S, I_\infty^-) = 0$. On note $S_n := \lambda^{-n} f^{n*} S$. Choisissons maintenant deux formes lisses η et β telles que $S = \eta + \beta + dd^c(u)$, avec $\eta \in \mathbb{R}^+ \alpha^+$ et $\beta \cdot \eta = 0$. Le Théorème 2.1 de [DDG10] montre que $\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} f^{n*} \eta = c_{\{S\}} T_f$. De plus, le Théorème 1.5 de [DDG10] implique $\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} f^{n*} \beta = 0$. Notons $u_n := \lambda^{-n} u \circ f^n$. Pour terminer la preuve du Théorème 3.1, il suffit de montrer $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ dans $L^1(X)$. Observons d'abord que la famille (u_n) est relativement compacte dans $L^1(X)$. En effet, la suite (u_n) est bornée dans $L^1(X)$ d'après [G04, Lemme 1.3]. Comme cette suite est majorée par 0, elle est relativement compacte dans $L^1(X)$ (conséquence de [GZ05, Proposition 1.6]).

Notre démarche consiste à montrer, par des estimations de volumes, en suivant une méthode initiée par Bedford–Smillie [BS91] et Fornæss–Sibony [FS92] et systématisée par de nombreux auteurs depuis, que le volume de l'ensemble $\{u_n < -\epsilon\}$ tend vers 0 lorsque n croît, pour tout $\epsilon > 0$; il en résultera alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ dans $L^1(X)$, car la suite (u_n) est relativement compacte dans $L^1(X)$. L'application de ces estimations de volume passe par l'étude de l'intégrabilité des fonctions e^{-Au_n}.

Estimées de volume. Supposons que l'on trouve un borélien $B \subset X \setminus I_f$ tel que $\mathrm{Vol}(\{u_n < -\epsilon\} \cap B)$ ne tende pas vers 0 quand n croît. Quitte à rétrécir légèrement B, on peut supposer que $\overline{B} \cap I_f = \emptyset$. Quitte à extraire de (u_n) une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathrm{Vol}(\{u_n < -\epsilon\} \cap B) \geq \delta > 0$ pour n grand. On a alors les estimations suivantes [G03] : il existe $C_\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_\epsilon^{\lambda^n} \leq \mathrm{Vol}(f^n(\{u_n < -\epsilon\} \cap B)) \leq \mathrm{Vol}(\{u < -\epsilon\lambda^n\} \cap f^n(B)). \tag{4}$$

Il va s'agir maintenant de contredire l'inégalité (4) pour prouver le Théorème 3.1 par l'absurde.

Conclusion. Si $g : U \to V$ est une application holomorphe propre de degré local d_g en $z \in U$, on a, d'après [D93],

$$\forall z \in \mathbb{C}^2, \quad \nu(g^* S, z) \leq d_g \cdot \nu(S, g(z)). \tag{5}$$

Il découle de (5) et de la linéarité de $\nu(\cdot, z)$ que

$$\forall z \in \mathbb{C}^2, \quad \nu(S_n, z) \leq (\lambda_2(f)/\lambda)^n \cdot \nu(S, f^n(z)) \leq C \cdot (\lambda_2(f)/\lambda)^n.$$

Il s'ensuit que les nombres de Lelong du courant S_n tendent uniformément vers 0 sur $\mathbb{C}^2$. C'est ici que nous utilisons principalement l'hypothèse que f est propre et de petit degré topologique (voir la Section 4 pour des commentaires supplémentaires). Quitte à remplacer S par S_N, on peut donc supposer que $\nu(S, z)$ est arbitrairement petit pour tout z dans $\mathbb{C}^2$. On supposera dorénavant que $\nu(u, z) \leq 1/A$ pour tout $z \in X \setminus I_f$, où $A \gg 1$ est fixé arbitrairement grand.

D'après le résultat de "croissance lente" (1), il existe $\gamma < \lambda$ et $0 < r < 1$ tels que pour tout $n > 0$,

$$\begin{aligned} C_\epsilon^{\lambda^n} &\leq \mathrm{Vol}(\{u < -\epsilon\lambda^n\} \cap f^n(B)) \leq \mathrm{Vol}(\{u < -\epsilon\lambda^n\} \cap X \setminus \mathbf{B}(I_f, r^{\gamma^n})) \\ &\leq e^{-A\epsilon\lambda^n} \cdot \int_{X \setminus \mathbf{B}(I_f, r^{\gamma^n})} e^{-Au}\, dV \end{aligned}$$

où $\mathbf{B}(I_f, r)$ désigne l'union finie des boules de rayon r centrées en chaque point de I_f.

Le théorème d'intégrabilité de Skoda assure que l'intégrale de e^{-Au} converge sur un voisinage de $z \in \mathbb{C}^2$ assez petit, puisque $A\nu(u, z) \leq 1$. Nous sommes ici près des points d'indétermination en lesquels le nombre de Lelong de Au peut être *a priori* arbitrairement grand. Le Lemme 2.1 appliqué à $v = Au$ nous donne toutefois un contrôle de la croissance de l'intégrale sur une couronne centrée en I_f qui pourvoit à nos besoins. Suite à ce lemme et à (4), il vient l'existence de constantes $K_A, K'_A > 0$ telles que

$$C_\epsilon^{\lambda^n} \leq e^{-A\epsilon\lambda^n} \frac{K_A}{r^{K'_A \cdot \gamma^n}}.$$

Passons aux logarithmes :

$$\lambda^n \log C_\epsilon \leq -A\epsilon\lambda^n - K'_A \gamma^n \log r + \log K_A.$$

Divisons par λ^n et passons à la limite $n \to \infty$; on obtient, comme $\gamma < \lambda$,

$$\log C_\epsilon \leq -A\epsilon,$$

ce qui est contradictoire lorsque $A \gg 1$. ∎

Lemme 3.2. *Dans les conditions du Théorème* 3.3, *la suite* $S_n := \lambda^{-n} f^{n*} S$ *converge en cohomologie lorsque* $n \to \infty$. *De plus,* $\lim_{n\to\infty}\{S_n\} \in \mathbb{R}^+\alpha^+$.

Preuve. Notons que $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ est engendré par les classes de cohomologie $\{D_1\}, \ldots, \{D_k\}$ des composantes irréductibles du diviseur à l'infini. Il est montré dans [DF01] que l'opérateur f^* agissant sur les classes de cohomologie a une unique valeur propre égale à son rayon spectral $\rho(f^*) = \lambda_1(f)$; il existe donc une base de $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ pour laquelle la matrice de f^* s'écrit

$$M := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

avec $\rho(M') < \lambda$. D'autre part, le théorème de Householder stipule que pour tout $\epsilon > 0$ et toute matrice A il existe une norme matricielle sous-multiplicative $\|\cdot\|$ vérifiant l'inégalité $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$. Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Ainsi pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$, la suite de vecteurs $\lambda^{-n} M^n v$ converge. Il est d'autre part montré dans [DF01] que le sous-espace propre de f^* associé à la valeur propre λ est engendré par α^+. Le premier vecteur de la base dans laquelle f^* se représente par la matrice M est donc proportionnel à α^+. Ainsi $\lim_{n\to\infty}\{S_n\} = c\alpha^+$, $c \in \mathbb{R}$. Montrons que $c \geq 0$. La classe α^- est nef d'après [DDG10, Théorème 1 et Proposition 1.10]). Ainsi $c\alpha^+ \cdot \alpha^- = \{S\} \cdot \alpha^- \geq 0$. Donc $c \geq 0$. ∎

3.2. Preuve du Théorème A. Nous rappelons l'énoncé du théorème. Le reste de cette section est consacré à sa preuve.

Théorème 3.3. *Soit f un endomorphisme polynomial propre de $\mathbb{C}^2$ tel que $1 \leq \lambda_2(f) < \lambda_1(f)$. Pour tout $(1,1)$-courant positif fermé S sur une compactification X de $\mathbb{C}^2$, la suite $S_n := \lambda_1(f)^{-n} f^{n*} S$ converge au sens faible des courants dans $\mathbb{C}^2$ vers un courant cT_f, où $c \geq 0$.*

Preuve. Nous noterons $\lambda := \lambda_1(f)$. Quitte à remplacer f par un itéré comme dans la preuve du Théorème 3.1, on suppose que le diviseur à l'infini D_∞ est contracté sur un point I_∞^-. Si D_i, $i = 1, \ldots, N$, sont les composantes irréductibles de D_∞, on note $[D_\infty] = \sum_{i=1}^N [D_i]$. On décompose le courant $S_n := \lambda^{-n} f^{n*} S = R_n + \tau_n$ avec R_n qui ne charge pas le diviseur à l'infini et τ_n qui a son support sur celui-ci. On a $S_{n+p} = \lambda^{-p} f^{p*} R_n + \lambda^{-p} f^{p*} \tau_n$. Observons qu'il existe des courants $\sigma_n \geq 0$ fermés portés par l'infini tels que

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{\lambda} f^* \tau_n + \sigma_n \geq \frac{1}{\lambda} f^* \tau_n, \qquad R_{n+1} = \frac{1}{\lambda} f^* R_n - \sigma_n \leq \frac{1}{\lambda} f^* R_n. \tag{6}$$

La série $\sum_{i=0}^\infty \nu(R_i, I_\infty^-)$ est convergente. D'après (3), on a

$$\sigma_n \geq \lambda^{-1} \nu(R_n, I_\infty^-) [D_\infty],$$

donc
$$S_1 \geq \lambda^{-1} f^* R_0 = R_1 + \sigma_0 \geq R_1 + \lambda^{-1}\nu(R_0, I_\infty^-)[D_\infty].$$
Itérons cette inégalité ; on obtient, pour tout p,
$$S_p \geq R_p + \frac{1}{\lambda}\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \nu(R_i, I_\infty^-)\frac{1}{\lambda^{p-1-i}} f^{p-1-i*}[D_\infty]\Big).$$
Soit α^- une classe nef $\lambda^{-1} f_*$-invariante normalisée par $\alpha^+ \cdot \alpha^- = 1$. Soit $\kappa := \lambda^{-1}\{D_\infty\} \cdot \alpha^-$. Notons que $\kappa > 0$. En effet le Lemme 3.2 montre que la suite $\lambda^{-n} f^{n*}\{D_\infty\}$ converge dans $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ vers $k\alpha^+$, $k \geq 0$. Un examen de la preuve du Lemme 3.2 montre qu'ici $k > 0$. Il vient $\{D_\infty\} \cdot \alpha^- = k\{T_f\} \cdot \alpha^- > 0$, d'où
$$\{S_p\} \cdot \alpha^- = \{S\} \cdot \alpha^- \geq \kappa\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \nu(R_i, I_\infty^-)\Big).$$
Il en résulte que la somme $\sum_{i=0}^{p-1} \nu(R_i, I_\infty^-)$ converge lorsque $p \to \infty$. En particulier, $\lim_{n\to\infty} \nu(R_n, I_\infty^-) = 0$.

Action en cohomologie. Posons $b_n := \{\tau_n\} \cdot \alpha^-$. Il résulte de (6) que
$$b_{n+1} = \lambda^{-1}\{f^*\tau_n\} \cdot \alpha^- + \{\sigma_n\} \cdot \alpha^- = b_n + \{\sigma_n\} \cdot \alpha^- \geq b_n,$$
la dernière inégalité venant de ce que $\sigma_n \geq 0$ et α^- est nef. Il est montré dans [DF01] que $\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} f^{n*}\{S\} = a_s\alpha^+$ en cohomologie, où $a_s := \{S\} \cdot \alpha^-$. Notons $b_s := \lim_{n\to\infty} b_n$ et $c_n := \{R_n\} \cdot \alpha^-$. La suite $c_n = a_s - b_n$ est décroissante ; notons c_∞ sa limite. On a $a_s = b_s + c_\infty$. Notre but est de montrer que R_n tend vers $c_\infty T_f$.

R_n converge vers $c_\infty T_f$ au sens des courants. Fixons un entier n_0. Rappelons la décomposition $S_n = c_n\eta_n + \beta_n + dd^c u_n$ avec η_n et β_n deux formes lisses dont les classes sont respectivement égales et orthogonales à α^+, et $\sup_X u_n = 0$. Il résulte de [DDG10, Théorème 1.5] que $\lim_{p\to\infty} \lambda^{-p} f^{p*}\eta_{n_0} = T_f$. De plus, le même théorème implique $\lim_{p\to\infty} \lambda^{-p} f^{p*}\beta_{n_0} = 0$. Quitte à extraire encore, d'après la relative compacité de la famille de fonctions $(\lambda^{-p} u_{n_0} \circ f^p)_{p\geq 0}$, il existe une fonction $v_{n_0} \in L^1(X)$ valeur d'adhérence de cette famille, vérifiant $\sup_X v_{n_0} = 0$, telle que dans $\mathbb{C}^2$,

$$R_\infty = c_{n_0} T_f + dd^c(v_{n_0}). \tag{7}$$

Il nous reste à montrer que $\lim_{n_0\to\infty} v_{n_0} \equiv 0$. Soit $B \subset X \setminus I_f$ un borélien.

Distinguons deux cas. Quitte à rétrécir B, on peut supposer que $\overline{B} \cap I_f \neq 0$. Quitte à réduire B encore, nous allons distinguer deux cas, suivant que B est relativement compact dans le bassin d'attraction $\mathbf{B}_\infty$ de I_∞^-, ou bien dans l'intérieur $\mathcal{K}$ du complémentaire ${}^c\mathbf{B}_\infty$. En effet, soit v_∞ un point d'accumulation de la famille (v_n). Nous allons montrer que

$v_n|_B \to 0$. Il en résulte $v_n|_{\mathbf{B}_\infty} \to 0$ et $v_n|_{\mathcal{K}} \to 0$. Ainsi v_∞ est nul sur $\mathbf{B}_\infty$ et sur $\mathcal{K}$. Par semi-continuité supérieure, $v_\infty = 0$ sur X. On en déduit $v_n \to 0$ sur X. Notons que $\mathbf{B}_\infty$ et $\mathcal{K}$ sont invariants par f et f^{-1}.

Premier cas. Supposons que $B \subset\subset \mathbf{B}_\infty$. Il est montré dans [G04] que si $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que $\mathrm{Vol}(f^n(\Omega)) \geq C_0^{-\lambda^n/\mathrm{Vol}(\Omega)}$. Soit maintenant $\Omega_{\epsilon,n,p} := B \cap \{\lambda^{-p} u_n \circ f^p < -\epsilon\}$.

On obtient alors, d'après (4), pour tout $A > 0$ tel que $A \leq 1/\nu(u_{n_0}, I_\infty^-)$, l'existence d'une constante $C_A > 0$ telle que, pour tout $p > 0$,

$$C_0^{-\lambda^p/\mathrm{Vol}(\Omega_{\epsilon,n_0,p})} \leq \Big(\int_{f^p(B)} e^{-Au_{n_0}}\, dV \Big) e^{-A\epsilon\lambda^p} \leq C_A e^{-A\epsilon\lambda^p}$$

où la dernière inégalité résulte d'une version uniforme du théorème d'intégrabilité de Skoda [Z01]. En prenant le logarithme, en divisant par λ^p et en faisant $p \to \infty$ on obtient

$$\mathrm{Vol}(\{v_{n_0} < -\epsilon\} \cap B) \leq \frac{1}{A\epsilon} \tag{8}$$

pour tout $A \leq 1/\nu(R_{n_0}, I_\infty^-)$. Puisque $\lim_{m\to\infty} \nu(u_m, I_\infty^-) = 0$, on peut choisir A arbitrairement grand dans (8), quitte à augmenter n_0. Ainsi, $\lim_{m\to\infty} v_m = 0$ dans $L^1(X)$. On obtient finalement $\lim_{m\to\infty} R_m = c_\infty T_f$ sur le bassin d'attraction de I_∞^-.

Second cas. Observons que la preuve donnée dans le Théorème 3.1 montre que $\lim_{n\to 0} \lambda^{-n} u_{n_0} \circ f^n = v_{n_0} = 0$ dans $L^1(\mathcal{K})$, puisque nous n'avons pas utilisé dans ce cas l'hypothèse $\nu(S, I_\infty^-) = 0$. ∎

4. Remarques conclusives

4.1. Le cas de $\mathbb{P}^2$. Nous supposons ici que $X = \mathbb{P}^2$. La Proposition 4.34 de [G10] implique que la droite de l'infini est contractée par f sur un point fixe I_∞^-. Ce point n'est pas dans l'ensemble d'indétermination I_f puisque nous supposons que f est algébriquement stable. Comme f n'est pas inversible en I_∞^-, ce point est superattractif. Le Théorème 3.1 montre en particulier que les courbes algébriques dont les tirés en arrière par f^n normalisés ne convergent pas au sens des courants vers le courant de Green sont celles qui passent par le point I_∞^-. Il est connu depuis [RS97], [S99] que si $L \in \mathbb{P}^2$ est une droite projective "générique" de $\mathbb{P}^2$, i.e. choisie hors d'un ensemble pluripolaire, alors $\lambda^{-n} f^{n*}[L]$ tend vers T_f lorsque n croît. Il est conjecturé que l'ensemble $\mathcal{E}_f$ des droites exceptionnelles (celles pour lesquelles la convergence n'a pas lieu) est un ensemble algébrique (ou bien une réunion dénombrable d'ensembles algébriques) ; cela a été démontré dans le cas où $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ est holomorphe par Favre et Jonsson [FJ03] (voir aussi [DS08]). Notre résultat de convergence permet de justifier cette attente dans le contexte "petit degré topologique".

Corollaire 4.1. *Soit f un endomorphisme polynomial propre de $\mathbb{C}^2$ de petit degré topologique, tel que l'extension $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ soit algébriquement stable. L'ensemble $\mathcal{E}_f$ des droites projectives "exceptionnelles", celles pour lesquelles $\lambda^{-n} f^{n*}[L]$ ne tend pas vers T_f, coïncide avec le pinceau des droites issues de I^-_∞. Plus généralement, les tirés en arrière normalisés de toute courbe algébrique $\mathcal{C}$ qui ne passe pas par I^-_∞ convergent au sens des courants vers* $\deg \mathcal{C} \cdot T_f$.

4.2. Convergence à l'infini. Nous précisons à présent la convergence à l'infini.

Théorème 4.2. *Soit S un* $(1,1)$*-courant positif fermé sur une compactification X de $\mathbb{C}^2$, et $f : X \to X$ un endomorphisme polynomial algébriquement stable propre de $\mathbb{C}^2$ remplissant les mêmes conditions que celles du Théorème* 3.1. *Alors*

$$S_n := \frac{1}{\lambda^n} f^{n*} S \to \alpha T_f + \sum_{i=1}^{k} a_i [D_i], \qquad \alpha \geq 0,\ a_i \geq 0 \ \textit{pour}\ i = 1, \ldots, k,$$

où $D_1, \ldots, D_k$ sont les composantes irréductibles du diviseur à l'infini.

Preuve. Considérons un point d'accumulation S_∞ de la suite S_n. D'après le Théorème A, il existe une constante $\alpha \geq 0$ indépendante de la séquence choisie telle que la restriction de S_∞ à $\mathbb{C}^2$ vaille αT_f. D'après le théorème de Siu [D93], on a $S_\infty = \alpha T_f + \sum_{i=1}^{k} a_i [D_k]$, $a_i \geq 0$.

D'autre part, le Lemme 3.2 nous dit que la suite des classes $\{S_n\}$ converge vers $c\{T_f\} = c\alpha^+$, $c \geq 0$. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \{D_i\} = (c - \alpha)\{T_f\}. \tag{9}$$

Puisque $\{D_1\}, \ldots, \{D_k\}$ est une base de $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ [GH94], l'équation (9) implique que les a_i, $i = 1, \ldots, k$, ne dépendent pas de la suite extraite. ∎

On déduit immédiatement de ce théorème le corollaire suivant :

Corollaire 4.3. *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme polynomial algébriquement stable de petit degré topologique. Alors un* $(1,1)$*-courant positif fermé S invariant par $\lambda^{-1} f^*$ s'écrit $S = \alpha T_f + \beta [L_\infty]$, $\alpha, \beta \geq 0$.*

4.3. Propreté et nombres de Lelong. Nous avons utilisé à deux reprises l'hypothèse de propreté de l'endomorphisme polynomial f de $\mathbb{C}^2$ dans cet article. Dans la démonstration du Théorème 4.2, nous avons fait appel à une mesure de probabilité invariante par f qui intègre les fonctions quasi-psh dont l'existence, lorsque f est propre, est attestée par le Lemme 1.2.

Si l'on peut raisonnablement espérer se passer de cette normalisation confortable, on utilise l'hypothèse de propreté de f de façon plus fondamentale pour montrer que les nombres de Lelong des courants S_n tendent vers 0 en chaque point de $\mathbb{C}^2$ (cf. formule (5)). Lorsque f n'est pas propre, le Théorème 3.1 peut être mis en défaut. Un exemple de ce phénomène est donné par certains endomorphismes monomiaux. Un endomorphisme polynomial monomial de $\mathbb{C}^2$ est de la forme

$$f_{\mathbf{A}} : (X,Y) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (X^a Y^b, X^c Y^d) \in \mathbb{C}^2$$

naturellement associée à la matrice $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(2,\mathbb{N})$. Si $a \geq 1$ et $c \geq 1$, la droite $(X=0)$ est contractée sur l'origine : f_A n'est pas propre. L'application $\mathbf{A} \mapsto f_{\mathbf{A}} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ ainsi définie est un morphisme de semi-groupe, $f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}} = f_{\mathbf{AB}}$. L'extension d'un endomorphisme monomial à $\mathbb{P}^2$ est "mauvaise", dans le sens où elle n'est en général pas algébriquement stable ; en revanche, son extension à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est bien algébriquement stable. On vérifie que $\lambda := \lambda_1(f_{\mathbf{A}}) = \rho(\mathbf{A})$ et $\lambda_2(f_{\mathbf{A}}) = |\det \mathbf{A}|$ [F03]. Le théorème de Frobenius assure qu'il est toujours possible de construire un courant positif invariant par $\lambda^{-1}(f_{\mathbf{A}})^*$ de la forme $a[X=0] + b[Y=0]$, $a, b \geq 0$. Ce courant est différent de $T_{f_{\mathbf{A}}}$, ce dernier ne chargeant pas les courbes.

Exemple 4.4. Soit $f := (X^{1+d}Y^{1+d}, X)$. On a

$$\lambda = \frac{1+d+\sqrt{(1+d)(d+5)}}{2} > \lambda_2(f) = 1+d.$$

On est dans un contexte de petit degré topologique. On vérifie que le courant

$$S := \frac{1+d+\sqrt{(1+d)(d+5)}}{2}[X=0] + (d+1)[Y=0]$$

est invariant par $\lambda^{-1} f^*$.

On trouve dans [FG01] une description de tous les courants invariants dans le cas des applications birationnelles algébriquement stables sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. En général, si f est un endomorphisme polynomial algébriquement stable sur $\mathbb{P}^2$ de premier degré dynamique $\lambda := \lambda_1(f)$, et S est un $(1,1)$-courant positif fermé sur $\mathbb{P}^2$ de masse 1, l'obstruction à la convergence de $S_n := \lambda^{-n} f^{n*} S$ vers le courant de Green est l'existence de points de $\mathbb{C}^2$ en lesquels le nombre de Lelong de S_n ne tend pas vers 0. En effet, la preuve du Théorème A implique que si tous les nombres de Lelong de S_n sur $\mathbb{C}^2$ tendent vers 0, alors S_n tend vers cT_f sur $\mathbb{C}^2$ (avec $c \geq 0$). Remarquons que de tels points sur lesquelles une courbe est contractée sont périodiques.

Proposition 4.5. *Soient $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ un endomorphisme polynomial de petit degré topologique, et S un courant positif fermé sur $\mathbb{C}^2$, de masse projective finie. Si $p \in \mathbb{C}^2$ est un point tel que $\nu(S_n, p)$, avec S_n comme ci-dessous, ne tend pas vers 0 lorsque n croît, alors p est prépériodique pour f.*

Si de plus une courbe $\mathcal{C}$ est contractée par f sur p, alors p est périodique pour f.

Preuve. On commence par traiter le cas d'un point p sur lequel une courbe $\mathcal{C}$ est contractée par f et tel que $\nu(S_n, p)$ ne tend pas vers zéro. Écrivons $S_n = R_n + T_n$, où R_n ne charge pas l'ensemble analytique $\bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{C})$, tandis que T_n a son support dans cet ensemble. Il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \nu(R_n, p) = 0$. Ceci admis, si p n'était pas périodique, on aurait $\{f^{-n}(p)\} \cap \{p\} = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$. Dans ce cas, on aurait $\nu(S_n, p) = \nu(S_n - T_n, p) = \nu(R_n, p)$ pour tout $n \geq 1$, parce que le support de T_n ne rencontrerait pas p, ce qui est absurde.

Montrons alors que $\nu(R_n, p)$ tend vers 0 lorsque n croît. Il existe une suite de réels positifs (ν_i), définis par $\lambda^{-i} f^{i*} S|_{\mathcal{C}} = \nu_i[\mathcal{C}]$, telle que

$$T_1 \geq \nu_1[\mathcal{C}], \quad T_2 \geq \nu_2[\mathcal{C}] + \nu_1 \frac{1}{\lambda} f^*[\mathcal{C}], \quad \ldots, \quad T_n \geq \sum_{i=0}^{n-1} \nu_{n-i} \frac{1}{\lambda^i} f^{i*}[\mathcal{C}].$$

Comme les courants $S_n \geq T_n$ sont de masse bornée, on déduit l'existence de constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1 \geq \|S_n\| \geq \|T_n\| \geq C_2 \sum_{i=1}^{n} \nu_k$$

pour tout n. Puisque $\nu_i \geq \nu(R_i, p)$ d'après (3), il s'ensuit $\lim_{n\to\infty} \nu(R_n, p) = 0$.

Traitons à présent le cas d'un point $p \in \mathbb{C}^2$ pour lequel on sait uniquement que $\nu(S_n, p)$ ne tend pas vers zéro. Rappelons le fait suivant [F99, Corollaire 4] : si $g : U \to V$ est une application holomorphe, il existe $C_g > 0$ tel que l'on ait

$$(10) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^2, \quad \nu(g^* S, z) \leq C_g \cdot \nu(S, g(z)).$$

D'après (5), $\lim_{n\to\infty} \nu(S_n, p) = 0$ si f est propre en tous les points $f^n(p)$. Il existe donc un entier $N \geq 0$ tel que f contracte une courbe sur $f^N(p)$. D'autre part, d'après (10), $\nu(S_n, f^N(p))$ ne tend pas vers 0 avec n. Il résulte du cas traité ci-dessus que $f^N(p)$ est périodique. ∎

Remerciements. Nous remercions le referee pour sa lecture attentive et ses suggestions, ainsi que V. Guedj pour ses indications sans lesquelles la rédaction de cet article n'aurait pas été possible.

Références

[BS91] E. Bedford and J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^2$*: currents, equilibrium measure and hyperbolicity*, Invent. Math. 103 (1991), 69–99.

[BT82] E. Bedford and B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. 149 (1982), 1–40.

[BM05] M. Blel et S. K. Mimouni, *Singularités et intégrabilité des fonctions plurisous-harmoniques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), 319–351.

[CG04] D. Coman and V. Guedj, *Invariant currents and dynamical Lelong numbers*, J. Geom. Anal. 14 (2004), 199–213.

[D93] J.-P. Demailly, *Monge–Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory*, dans : Complex Analysis and Geometry, Univ. Ser. Math., Plenum, New York, 1993, 115–193.

[DDG10] J. Diller, R. Dujardin and V. Guedj, *Dynamics of meromorphic maps with small topological degree I: from cohomology to currents*, Indiana Univ. Math. J. 59 (2010), 521–561.

[DF01] J. Diller and C. Favre, *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*, Amer. J. Math. 123 (2001), 1135–1169.

[DG09] J. Diller and V. Guedj, *Regularity of dynamical Green's functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), 4783–4805.

[DS95] T.-C. Dinh and N. Sibony, *Complex dynamics in higher dimension II*, dans : Modern Methods in Complex Analysis, Ann. of Math. Stud. 137, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995, 135–182.

[DS08] T.-C. Dinh and N. Sibony, *Equidistribution towards the Green current for holomorphic maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 41 (2008), 307–336.

[F99] C. Favre, *Note on pull-back and Lelong number of currents*, Bull. Soc. Math. France 127 (1999), 445–458.

[F03] C. Favre, *Les applications monomiales en deux dimensions*, Michigan Math. J. 51 (2003), 467–475.

[FG01] C. Favre and V. Guedj, *Dynamique des applications rationnelles des espaces multiprojectifs*, Indiana Univ. Math. J. 50 (2001), 881–934.

[FJ03] C. Favre and M. Jonsson, *Brolin's theorem for curves in two complex dimensions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 53 (2003), 1461–1501.

[FJ05] C. Favre and M. Jonsson, *Valuative analysis of planar plurisubharmonic functions*, Invent. Math. 162 (2005), 271–311.

[FJ11] C. Favre and M. Jonsson, *Dynamical compactifications of* $\mathbb{C}^2$, Ann. of Math. 173 (2011), 211–248.

[FS92] J. E. Fornæss and N. Sibony, *Complex Hénon mappings in* $\mathbb{C}^2$ *and Fatou–Bieberbach domains*, Duke Math. J. 65 (1992), 345–380.

[FS95] J. E. Fornæss and N. Sibony, *Complex dynamics in higher dimension. II*, dans : Modern Methods in Complex Analysis (Princeton, NJ, 1992), Ann. of Math. Stud. 137, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995, 135–182.

[GH94] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Classics Lib., Wiley, New York, 1994.

[G02] V. Guedj, *Dynamics of polynomial mappings of* $\mathbb{C}^2$, Amer. J. Math. 124 (2002), 75–106.

[G03] V. Guedj, *Equidistribution towards the Green current*, Bull. Soc. Math. France 131 (2003), 359–372.

[G04] V. Guedj, *Decay of volumes under iteration of meromorphic mappings*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54 (2004), 2369–2386.

[G05] V. Guedj, *Desingularization of quasiplurisubharmonic functions*, Int. J. Math. 16 (2005), 555–560.

[G10] V. Guedj, *Propriétés ergodiques des applications rationnelles*, dans : Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux, Panor. Synthèses 30, Soc. Math. France, Paris, 2010, 97–202.

[GZ05] V. Guedj and A. Zeriahi, *Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds*, J. Geom. Anal. 15 (2005), 607–639.

[RS97] A. Russakovskii and B. Shiffman, *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics*, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), 897–932.
[S99] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de* $\mathbb{P}^k$, dans : Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997), Panor. Synthèses 8, Soc. Math. France, Paris, 1999, 97–185.
[Siu74] Y. T. Siu, *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math. 27 (1974), 53–156.
[Sk72] H. Skoda, *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. France 100 (1972), 353–408.
[Z01] A. Zeriahi, *Volume and capacity of sublevel sets of a Lelong class of plurisubharmonic functions*, Indiana Univ. Math. J. 50 (2001), 671–703.

Frédéric Protin
INSA Toulouse, Département GMM
135 Avenue de Rangueil
31400 Toulouse, France
E-mail: fredprotin@yahoo.fr

Received 23.4.2015
and in final form 1.8.2015 (3700)