CONSTRUCTIVE APPROXIMATION OF FUNCTIONS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 107
INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
WARSZAWA 2015

APPROXIMATION POLYNÔMIALE DANS DES CLASSES DE JETS

MOULAY TAÏB BELGHITI et BOUTAYEB EL AMMARI

EECOMAS Lab, ENSA, Université Ibn Tofail
14000 Kénitra, Maroc
E-mail : belghititaib@yahoo.fr, elammari@hotmail.fr

LAURENT P. GENDRE

Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse CEDEX 09, France
E-mail : lgendre@math.univ-toulouse.fr

En l'honneur du Professeur W. Pleśniak pour son 70ième anniversaire

Abstract. In this paper we obtain results on approximation, in the multidimensional complex case, of functions from $\mathcal{A}^\infty(K)$ by complex polynomials. In particular, we generalize the results of Pawłucki and Pleśniak (1986) for the real case and of Siciak (1993) in the case of one complex variable. Furthermore, we extend the results of Baouendi and Goulaouic (1971) who obtained the order of approximation in the case of Gevrey classes over real compacts with smooth analytic boundary and we present the orders of approximation of certain intermediate classes of holomorphic ultradifferentiable jets $\mathcal{H}_M(K)$. In addition to the property (HCP), a crucial role will be played by a new geometrical criterion over the compact (property (ŁS)).

Résumé. Dans cette note nous obtenons des résultats d'approximation, dans le cas complexe multidimensionnel, des fonctions de $\mathcal{A}^\infty(K)$ par des polynômes complexes. Nous généralisons en particulier des travaux de Pawłucki et Pleśniak (1986) obtenus dans le cas réel et celui de Siciak (1993) dans le cas d'une variable complexe. Par ailleurs nous étendons les résultats de Baouendi et Goulaouic (1971) qui obtiennent le degré d'approximation dans le cas des classes de Gevrey sur des compacts réels à bord analytique lisse; et nous exhibons les degrés d'approximation de certaines classes intermédiaires des jets ultradifferentiables holomorphes : $\mathcal{H}_M(K)$. En plus de la propriété (HCP), un rôle crucial sera joué par un nouveau critère géométrique sur le compact (la propriété (ŁS)).

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 32E30 ; Secondary 32A25, 32U15.
Key words and phrases: Approximation polynômiale, jets de Whitney $\overline{\partial}$-plats, fonction extrémale.
The paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

DOI: 10.4064/bc107-0-4

1. Introduction. La première partie de ce travail concerne l'approximation polynômiale des jets de Whitney de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\overline{\partial}$-plats sur un compact de $\mathbb{C}^N$. Lorsque K est un compact 1-régulier au sens de Whitney, ces jets s'identifient aux fonctions holomorphes à l'intérieur de K et dont toutes les dérivées se prolongent continûment au bord ∂K du compact K. Notre travail s'applique au cas de compacts vérifiant les propriétés (HCP) et (ŁS) : celles ci imposent que l'annulation de la fonction de Green V_K soit contrôlée inférieurement et supérieurement par des puissances de $\operatorname{dist}(., K)$. Dans ce cadre, un de nos principaux résultats stipule qu'un jet f du type évoqué vérifie la propriété d'approximation suivante : pour tout entier positif k, on a :

$$\lim_{n\to\infty} n^k E_n(f,K) = 0, \tag{1}$$

où $E_n(f,K)$ désigne la distance de f à l'espace des polynômes de $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_N]$ de degré inférieur ou égal à n, au sens de la convergence uniforme sur K. Dans le cas d'approximation de jets $\mathcal{C}^\infty$ sur des compacts de $\mathbb{R}^N$ par des polynômes de $\mathbb{R}[z_1,\ldots,z_N]$, il est connu (Pawłucki et Pleśniak) qu'une telle propriété d'approximation s'obtient assez facilement en appliquant le théorème de Jackson à une extension de f sur un pavé contenant K. La difficulté du cas complexe tient au fait qu'un jet $\overline{\partial}$-plat sur K ne s'étend pas holomorphiquement à un polydisque contenant K; on ne peut donc pas recourir à la version correspondante du théorème de Jackson.

Dans le même esprit, nous considérons le cas des jets $\overline{\partial}$-plats appartenant à certaines classes de Carleman, englobant des cas classiques comme les classes de Gevrey. Dans ce contexte la propriété d'approximation (1) doit être remplacée par

$$\lim_{n\to\infty} e^{C\overline{\omega}(n)} E_n(f,K) = 0, \tag{2}$$

où C est une constante (dépendant de f), et où $\overline{\omega}$ est un poids associé à la classe considérée, par exemple $\overline{\omega}(t) = t^{1/(1+\alpha)}$ pour la classe de Gevrey $\{j!^{1+\alpha}\}$, $\alpha > 0$. C'est exactement la vitesse de convergence que l'on peut espérer dans cette situation.

Une partie essentielle de la preuve de ces résultats peut être replacée dans le contexte suivant. Dans [CC2], J. Chaumat et A. M. Chollet ont établi des formules de représentation intégrales pour les jets $\overline{\partial}$-plats sur des compacts s-H convexes de $\mathbb{C}^N$ (la s-H convexité de K traduit l'existence de bases de voisinages de Stein ayant une certaine uniformité géométrique : c'est le cas pour les compacts (HCP) et (ŁS)). Ces representations sont de la forme

$$F^\alpha(z) = \int_{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K} \bar{\partial}\widetilde{f}(\zeta)\wedge D_z^\alpha H(z,\zeta) \qquad (z\in K \text{ et } \alpha\in\mathbb{N}^{2N}), \tag{3}$$

où $\mathcal{V}(K) = \left\{\zeta\in\mathbb{C}^N : \operatorname{dist}(\zeta,K) < 1\right\}$ et $\widetilde{f}$ est une extension asymptotiquement holomorphe de type Whitney du jet $F = (F^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}$ de $\mathcal{A}^\infty(K)$, à support dans $\mathcal{V}(K)$.

En introduisant dans (3) des fonctions de troncature nulles au voisinage de K, *J. Chaumat et A. M. Chollet* en ont déduit des propriétés d'approximation du jet, au sens de la topologie de l'espace des jets considérés, par des fonction holomorphes au voisinage de K.

Une idée clef de notre travail est que l'on peut obtenir la propriété d'approximation polynômiale décrite ci-dessus en remplaçant, dans une représentation intégrale comme (3), le noyau $H(z,.)$ par une approximation polynômiale appropriée de celui-ci, elle même basée sur des travaux de *A. Zeriahi* : le choix du degré des approximants doit être lié à certaine estimations, reliant les lignes de niveau de la fonction de Green V_K et certains ouverts intervenant dans la construction de noyaux de Chaumat–Chollet (le cas ultradifferentiable prend en compte également le poids $\overline{\omega}$). De là, il faut encore majorer convenablement les noyaux intégraux en compensant leur singularité par la platitude de $\overline{\partial} f$.

2. Compacts (HCP) et (ŁS) de $\mathbb{C}^N$. Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$. On associe à K la classe de Lelong

$$L_K(\mathbb{C}^N) := \left\{u \in PSH(\mathbb{C}^N) : (\exists c \in \mathbb{R})\ (\forall z \in \mathbb{C}^N)\ u(z) \leqslant c + \log(1+|z|) \text{ et } u|_K \leqslant 0\right\}.$$

La fonction extrémale de Siciak–Zaharjuta est définie comme suit :

$$V_K(z) := \sup\left\{u(z) : u \in L_K(\mathbb{C}^N)\right\}, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^N.$$

Si K est non-pluripolaire alors d'après Bedford et Taylor, la régularisée supérieure de V_K :

$$V_K^\star(z) := \limsup_{\zeta \to z} V_K(\zeta)$$

vérifie $(dd^c(V_K^\star))^N = 0$ sur $\mathbb{C}^N \setminus \widehat{K}$ où

$$\widehat{K} := \{z \in \mathbb{C}^N : |P(z)| \leqslant \|P\|_K \ \ \forall P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]\}$$

est l'enveloppe polynômiale de K.

Suivant W. Pawłucki et W. Pleśniak [PP], on dit qu'un compact K de $\mathbb{C}^N$ vérifie la propriété (HCP) (*H*ölder *C*ontinuity *P*roperty), s'il existe des constantes $\delta_0, C, \kappa > 0$ telles que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}^N,\ d(z,K) \leqslant \delta_0) \quad V_K(z) \leqslant Cd(z,K)^\kappa,$$

$$\text{où } d(z,K) := \inf\{\|z-\xi\| : \xi \in K\}, \quad \|z\| := \sqrt{\sum_{j=1}^N |z_j|^2},$$

pour tout $z := (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Dans leur article il est démontré que si un compact est à pointe polynômiale (UPC) alors il est (HCP). On y trouve des exemples de ce type de compacts. De plus dans [K] M. Kosek a exhibé des exemples plus complexes, de type Julia, vérifiant (HCP); et dans [P1], Pierzchała donne des exemples très riches de tels compacts. Si un compact K vérifie la condition (HCP), alors K est L-régulier, i.e. la fonction V_K est continue et K vérifie les inégalités de Markov :

$$|D_z^\alpha P(z)| \leqslant C\,(\deg(P))^{r|\alpha|}\,\|P\|_K\,,$$

pour tout $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$, et $z \in K$, où C et r sont des constantes positives dépendant du compact K.

On dit qu'un compact K de $\mathbb{C}^N$ vérifie la propriété (ŁS), s'il existe des constantes $\delta_0, C, \beta > 0$ telles que

$$(\forall z \in \mathbb{C}^N,\ d(z,K) \leqslant \delta_0) \quad V_K(z) \geqslant Cd(z,K)^\beta.$$

Cette propriété a été annoncée par [B1], [B2] et [G], avec des exemples comme, les compacts convexes, les polyèdres polynômiaux, les segments etc. Des exemples non triviaux ont été donnés par Białas-Cież et Kosek dans [CK], où ces auteurs exhibent certains ensembles de Cantor vérifiant (ŁS).

Si V_K est semi-algébrique et continue alors K vérifie (ŁS) : c'est exactement l'inégalité de Łojasiewicz pour une fonction semi-algébrique continue, des exemples sont donc à chercher dans le cadre des structures o-minimales; on trouve de tels exemples dans [P2]; d'autres exemples de compacts issus de la dynamique complexe et vérifiant la condition (ŁS) sont présentés par F. Protin [Po]. Récemment dans [CE], en dimension 1, il a été prouvé que si un compact vérifie les propriétés (HCP) et (ŁS) alors ce compact vérifie la propriété de Jackson. Et réciproquement les compacts ayant la propriété de Jackson vérifient (ŁS). Cette approche montre la nécessité de la propriété (ŁS). Enfin notons, d'après un résultat de Pierzchała dans [P1], que tout compact vérifiant (ŁS) est polynomialement convexe.

Nous terminons cette partie par donner la définition des compacts s-H convexe de $\mathbb{C}^N$.

Nous dirons qu'un compact K de $\mathbb{C}^N$ est s-H convexe, s'il existe deux constantes réelles $s \geqslant 1$ et A dans $]0,1]$ telles que, pour tout ε dans $]0,1]$, il existe un ouvert pseudo-convexe U_ε de $\mathbb{C}^N$ vérifiant :

$$\left\{z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < A\varepsilon^s\right\} \subset U_\varepsilon \subset \left\{z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < \varepsilon\right\}. \tag{4}$$

Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$, on pose $\mathcal{V}(K) := \{z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < 1\}$. La proposition 3, page 212, de [CC2] affirme que si K est s-H convexe et si $\rho > 0$, alors il existe des constantes B et C telles que $0 < B < 1 < C$ ne dépendant que du compact K, de ρ, de s et de N et des fonctions $w_i(z,\zeta)$ $i = 1,\dots,N$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $O(B,s) := \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^N \times (\mathcal{V}(K) \setminus K) : d(z,K) < B.d(\zeta,K)^s\}$ et holomorphes en z dans $O(B,s,\zeta) := \{z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < B.d(\zeta,K)^s\}$ pour tout $\zeta \in V(K) \setminus K$ vérifiant pour tout $(z,\zeta) \in O(B,s)$:

$$\Re e \sum_{i=1}^{i=N} w_i(z,\zeta)(z_i - \zeta_i) \geqslant \frac{1}{2}\,; \tag{5}$$

$\forall l \in \mathbb{N}^{2N}$, $|l| \leqslant 2$, $\forall k \in \mathbb{N}^{2N}$, $\forall i \in \{1,\dots,N\}$,

$$\left|D_\zeta^l D_z^k w_i(z,\zeta)\right| \leqslant |k|!\, C^{|k|+1} d(\zeta,K)^{-(1+|l|)(Ns+\rho)-|k|s}. \tag{6}$$

Enfin, si un compact K de $\mathbb{C}^N$ vérifie les propriétés (HCP) et (ŁS), alors il est s-H convexe pour un certain $s \geqslant 1$.

3. Approximation polynômiale dans l'espace $\mathcal{A}^\infty(K)$ des jets de Whitney $\mathcal{C}^\infty$ et $\overline{\partial}$-plats sur un compact K de $\mathbb{C}^N$. $\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ désigne l'ensemble des entiers positifs non nuls et $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^{2N}$, un jet de Whitney d'ordre infini sur K est une famille $(F^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}}$ formée de fonctions F^α continues sur K et à valeurs complexes, $J^\infty(K)$ est l'espace de tels jets.

Pour tout $F = (F^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{2N}} \in J^\infty(K)$, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, et $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$, on pose :

$$(R_x^{\alpha,m}F)(y) := F^\alpha(y) - \sum_{|\beta|\leqslant m} F^{\alpha+\beta}(x)\,\frac{(y-x)^\beta}{\beta!}\,, \quad x, y \in K. \tag{7}$$

Le sous-espace $\mathcal{E}^\infty(K)$ de $J^\infty(K)$ formé des jets F tels que

$$(R_x^{\alpha,m}F)(y) = \underset{|x-y|\to 0}{\mathrm{o}}(|x-y|^m) \ \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^{2N},\ x, y \in K,$$

est appelé espace des jets de classe $\mathcal{C}^\infty$ au sens de Whitney. Le théorème de Whitney affirme que, $\mathcal{E}^\infty(K)$ est l'ensemble des jets F pour lesquels il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{2N}$ à support compact, telle que $F^\alpha = D^\alpha f$ sur K. Une telle fonction f est une extension de Whitney du jet F, de sorte que pour l'opérateur,

$$\begin{aligned} J_K^\infty : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N) &\longrightarrow J^\infty(K),\\ f &\longmapsto (D^\alpha f|_K)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{2N}}, \end{aligned}$$

on a $J_K^\infty(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N)) = \mathcal{E}^\infty(K)$. C'est un espace de Frechet, lorsqu'il est muni de sa topologie naturelle associée à la famille des semi-normes $(\|.\|_K^m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ définies par :

$$|F|_K^m := \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^{2N}\\ |\alpha|\leqslant m}} \|F^\alpha\|_K$$

$$\text{et} \quad \|F\|_K^m := |F|_K^m + \sup_{\substack{(x,y)\in K\times K \text{ et } x\neq y\\ \alpha\in\mathbb{N}_0^{2N} \text{ et } |\alpha|\leqslant m}} \left|\frac{R_y^{\alpha,m-|\alpha|}F(x)}{(y-x)^{m-|\alpha|}}\right|, \tag{8}$$

pour tout $F \in \mathcal{E}^\infty(K)$ et $m \in \mathbb{N}_0$, où $\|f\|_K := \sup_K |f|$ est la norme uniforme sur le compact K, avec f une fonction continue de K à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Les opérateurs de décalage sont définis sur $J^\infty(K)$ comme ci-après :

$$\begin{aligned} \widetilde{D}^\beta : J^\infty(K) &\longrightarrow J^\infty(K),\\ (F^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{2N}} &\longmapsto (F^{\beta+\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{2N}} \quad (\forall\beta\in\mathbb{N}_0^{2N}). \end{aligned}$$

Avec $\mathbb{C}^N \equiv \mathbb{R}^{2N}$, définissons les opérateurs de décalage partiel :

$$\widetilde{D}_j := \widetilde{D}^{\alpha(j)} \quad \text{où} \quad \alpha(j) = (\delta_{j,1}, \dots, \delta_{j,2N}) \quad (\delta_{j,k} \text{ symbole de Kronecker}),$$

ainsi que les opérateurs complexes associés comme ci-après :

$$\widetilde{D}'_j := \frac{\widetilde{D}_j - i\widetilde{D}_{j+N}}{2} \quad \text{et} \quad \widetilde{D}''_j := \frac{\widetilde{D}_j + i\widetilde{D}_{j+N}}{2}\,, \quad \text{pour tout} \quad j \in \{1, \dots, N\}\,.$$

On nomme les opérateurs $\widetilde{D}'_j$ et $\widetilde{D}''_j$ respectivement, opérateur de décalage holomorphe et anti-holomorphe. Il devient donc naturel de considérer les opérateurs composés suivants :

$$\widetilde{D}'^\alpha := \widetilde{D}'^{\alpha_1}_1 \circ \dots \circ \widetilde{D}'^{\alpha_N}_N \quad \text{et} \quad \widetilde{D}''^\alpha := \widetilde{D}''^{\alpha_1}_1 \circ \dots \circ \widetilde{D}''^{\alpha_N}_N, \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

On définit le sous-espace $\mathcal{A}^\infty(K)$ de $\mathcal{E}^\infty(K)$, des jets $\overline{\partial}$-plats sur K par

$$\mathcal{A}^\infty(K) := \left\{F \in \mathcal{E}^\infty(K) : \widetilde{D}^\alpha(\widetilde{D}''_j F) = 0,\ \text{pour tout } j \in \{1, \dots, N\} \text{ et } \alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}\right\}.$$

Si $F \in \mathcal{A}^\infty(K)$ alors il existe une extension f de Whitney du jet F telle que la $(0,1)$-forme $\overline{\partial} f$ vérifie la propriété, d'annulation à tout ordre, suivante : Pour tout $t > 0$, il existe une constante $c(t) > 0$, telle que

$$\left|\overline{\partial} f(\zeta)\right| \leqslant c(t) d(\zeta, K)^t, \quad \text{pour tout} \quad \zeta \in \mathbb{C}^N. \tag{9}$$

Cf. le début dans la preuve du théorème 18, page 145, de [CC1] on peut aussi voir la proposition 1, page 209, de [CC2].

Le degré d'approximation d'ordre $n \in \mathbb{N}_0$ d'une fonction continue f sur K est la quantité $E_n(f, K) := \inf_{P \in \mathbb{C}_n[z_1,\ldots,z_N]} \|f - P\|_K$, où $\mathbb{C}_n[z_1, \ldots, z_N]$ est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Théorème 1. *Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant simultanément les propriétés* (HCP) *et* (ŁS) *et F un jet de $J^\infty(K)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *F appartient à $\mathcal{A}^\infty(K)$.*
2. *Il existe une suite $(\mathbf{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes complexes de $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ telle que $\deg(\mathbf{P}_n) \leqslant n$ pour tout n et que pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante strictement positive $C(m, k)$ et que*

$$\|F - \Pi_n\|_K^m \leqslant C(m, k) \, \frac{1}{n^k}\,, \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

où $\Pi_n := J_K^\infty(\mathbf{P}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $K \subset \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^N + i\mathbb{R}^N = \mathbb{C}^N$, le théorème est dû à Pawłucki et Pleśniak dans [PP], voir aussi [Pl]. Dans le cas réel, comme l'ont fait remarquer Pawłucki et Pleśniak, étant donné $f \in \mathcal{C}^\infty(K)$, on peut construire une extension $\widetilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de f sur un pavé Δ contenant K de sorte que l'on puisse utiliser une version multidimensionnelle du théorème de Jackson en remarquant que $E_n(f, K) \leqslant E_n(\widetilde{f}, \Delta)$. (Le jet qu'on considère suivant cette généralisation est : $F := \big((D^\alpha \widetilde{f}/K)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}\big)$). La difficulté dans le cas complexe réside dans le fait qu'étant donné $f \in \mathcal{A}^\infty(K)$, on ne peut pas en général, prolonger holomorphiquement f à un polydisque contenant K.

3.1. Preuve du Théorème 1. La preuve de la partie directe s'articule en deux points. Le premier est la construction d'une suite de polynômes $(\mathbf{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que pour chaque entier k et pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$, la suite $(F^\alpha - D_z^\alpha \mathbf{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme uniforme $\|.\|_K$ avec une vitesse de convergence de l'ordre de $\frac{C(K,F,|\alpha|)}{n^k}$, pour une certaine constante $C(K, F, |\alpha|)$ dépendant de $|\alpha|$, du compact K et du jet F. Le deuxième point est d'estimer pour chaque α la composante α-ième du jet des restes de Taylor associé au jet $(F^\gamma - D_z^\gamma \mathbf{P}_n)_{\gamma\in\mathbb{N}^{2N}}$, ce qui donne l'estimation de $F - \Pi_n$ pour les semi-normes $\|.\|_K^m$ introduites en (8).

3.1.1. *Approximation des composantes F^α.* Les conditions (HCP) et (ŁS) assurent que le compact K est s-H convexe pour un certain $s \geqslant 1$; et comme $F \in \mathcal{A}^\infty(K)$, alors le théorème 18 de [CC1], nous donne la représentation intégrale suivante

$$F^\alpha(z) = \int_{\zeta\in\mathcal{V}(K)} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge D_z^\alpha H(z, \zeta), \quad z \in K, \tag{11}$$

où f est une extension de Whitney du jet F, dont le support est compact contenu dans $\mathcal{V}(K)$, et vérifiant l'estimation (9), et

$$H(z,\zeta) = -\frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N}\,\omega'_{\overline{\zeta}}\Big(\frac{w(z,\zeta)}{\phi(z,\zeta)}\Big)\wedge\omega(\zeta) = \sum_{j=1}^{N} H_j(z,\zeta)\bigwedge_{k\neq j} d\overline{\zeta}_k\wedge\omega(\zeta),$$

avec $w := (w_1,\dots,w_N)$, $\omega(\zeta) := d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_N$, et $\phi(z,\zeta) = \sum_{j=1}^N w_j(z,\zeta)(z_j-\zeta_j)$. Les relations (5) et (6) assurent qu'il existe un entier positif non nul q et un réel $c>0$, tels que pour tout $\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K$ et $j:1,\dots,N$, on ait $|H_j(z,\zeta)|\leqslant\frac{c}{d(\zeta,K)^q}$ pour $z\in O(B,s,\zeta)$.

Nous obtenons une approximation polynômiale de F^α, en remplaçant dans (11) $D_z^\alpha H(z,\zeta)$ par un approximant polynômial convenable. Avec la décomposition

$$\overline{\partial} f(\zeta)\wedge D_z^\alpha H(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_j}(\zeta)D_z^\alpha H_j(z,\zeta)\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta),$$

on peut alors écrire $F^\alpha(z) = \sum_{j=1}^N F_j^\alpha(z)$, $z\in K$, où

$$F_j^\alpha(z) := \int_{\mathcal{V}(K)}(-1)^{j-1}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_j}(\zeta)D_z^\alpha H_j(z,\zeta)\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta),\quad z\in K; \tag{12}$$

puis pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$P_{n.d_n,j}(z) := \int_{L_{A,n}}(-1)^{j-1}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_j}(\zeta)\mathbf{L}_{n.d_n}\left(H_j(.,\zeta)\right)(z).\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta),\quad z\in K, \tag{13}$$

$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite croissante d'entiers, quelconque pour le moment, $\mathbf{L}_{nd_n}$ est l'opérateur d'interpolation polynômial de Lagrange associé à un système de

$$m_{n.d_n}\Big(:=\binom{N+n.d_n}{n.d_n}\Big)$$

points extrémaux de Fekete–Leja du compact K, et $L_{A,n} := \{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K : R(\zeta)\geqslant 1+\frac{A}{n}\}$ avec $A>0$, où $R(\zeta) := \sup\{\lambda>1 : \mathcal{U}_\lambda\subset O(B,s,\zeta)\}$ est la fonction jauge de la fonction extrémale V_K associée au couple (B,s), et où $\mathcal{U}_\lambda$ est l'ensemble défini par $\mathcal{U}_\lambda = \{z\in\mathcal{V}(K)\setminus K : V_K(z)<\log(\lambda)\}$. On pose $P_{n.d_n}(z) = \sum_{j=1}^N P_{n.d_n,j}(z)$, $z\in K$. On a alors

$$\begin{aligned}\left|F_j^\alpha(z) - D_z^\alpha P_{n.d_n,j}(z)\right| &\leqslant \int_{\mathcal{V}(K)\setminus L_{A,n}}\left|\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_j}(\zeta)\right|\left|D_z^\alpha H_j(z,\zeta)\right|\left|\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta)\right| \\ &+ \int_{L_{A,n}}\left|\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_j}(\zeta)\right|\left|D_z^\alpha H_j(z,\zeta) - D_z^\alpha\mathbf{L}_{n.d_n}(H_j(.,\zeta))(z)\right|\left|\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta)\right|.\end{aligned} \tag{14}$$

Nous devons estimer $|D_z^\alpha H_j(z,\zeta) - D_z^\alpha\mathbf{L}_{n.d_n}(H_j(.,\zeta))(z)|$. A cette fin nous avons grâce à l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned}&\left|D_z^\alpha\mathbf{L}_{(n+1).d_{n+1}}(H_j(.,\zeta))(z) - D_z^\alpha\mathbf{L}_{n.d_n}(H_j(.,\zeta))(z)\right| \\ &\qquad\leqslant (C_1(n+1)d_{n+1})^{r|\alpha|}\left\|\mathbf{L}_{(n+1).d_{n+1}}(H_j(.,\zeta))(\cdot) - \mathbf{L}_{n.d_n}(H_j(.,\zeta))(\cdot)\right\|_K,\end{aligned} \tag{15}$$

C_1 et r sont les constantes de l'inégalité de Markov associées au compact K.

Si κ désigne la constante positive qui vérifie — via la propriété (HCP) — l'estimation $R(\zeta)\leqslant 1+C'd(\zeta,K)^\kappa$, $\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K$ (C' est une constante positive), alors par une adaptation de la méthode développée par A. Zeriahi dans [Z], pp. 86–96, il existe un entier positif M tel que pour tout δ arbitrairement fixé dans $]\frac{1}{2},1[$, pour toute suite croissante d'entiers positifs (d_n), pour tout $\zeta \in \mathcal{V}(K)\setminus K$ et pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on ait :

$$\|\mathbf{L}_{n.d_n}(H_j(.,\zeta)) - H_j(.,\zeta)\|_K \leqslant C_{N,M}.(nd_n)^N \\ \frac{2^n(1+N+M)^n}{R(\zeta)^{n.d_n((2\delta-1)-3(N+M)/n)}} \times \frac{1}{(R(\zeta)^{\delta.d_n}-1)^{2(N+M)}} \times \frac{1}{(R(\zeta)-1)^{q/\kappa}}, \quad (16)$$

pour une certaine constante $C_{N,M}>0$ dépendant de N et M. Comme $R(\zeta)\to 1$ quand $\zeta\to\partial K$, les singularités des deux dernières fractions (quand on s'approche de la frontière de K), seront éliminées par un bon choix des domaines de niveau $L_{A,n}$, pour n entier assez grand. Avec le choix de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $d_n := k_0.n$ (où k_0 est un entier supérieur ou égal à 2), et par un choix convenable du réel A (intervenant dans la définition des zones de niveaux $L_{A,n}$), on déduit de l'estimation précédente, l'existence de deux réels $\widetilde{C}>0$ et $\tilde{\eta}\in]0,1[$, dépendant de A,k_0,δ,N,M, tels que pour tout n assez grand, on ait :

$$\|\mathbf{L}_{n.d_n}(H_j(.,\zeta))(.) - H_j(.,\zeta)\|_K \leqslant \widetilde{C}\tilde{\eta}^n. \quad (17)$$

Ce qui donne pour ces entiers n,

$$\left\|D_z^\alpha \mathbf{L}_{(n+1).d_{n+1}}(H_j(.,\zeta))(.) - D_z^\alpha \mathbf{L}_{n.d_n}(H_j(.,\zeta))(.)\right\|_K \leqslant C_{|\alpha|}\eta^n. \quad (18)$$

pour un certain $\eta\in]\tilde{\eta},1[$ et où l'on peut choisir $C_{|\alpha|} = 2\mathbf{C}\widetilde{C}k_0^{r.|\alpha|}$. On déduit alors que :

$$D_z^\alpha(H_j)(z,\zeta) = \sum_{n=1}^{+\infty}\big(D_z^\alpha \mathbf{L}_{(n+1).d_{n+1}}(H_j(.,\zeta))(z) - D_z^\alpha \mathbf{L}_{n.d_n}(H_j(.,\zeta))(z)\big) \\ + D_z^\alpha \mathbf{L}_{d_1}(H_j(.,\zeta))(z).$$

A partir de (14) on obtient

$$\left|F_j^\alpha(z) - D_z^\alpha P_{n.d_n,j}(z)\right| \\ \leqslant C(f,\alpha).\eta^n + \int_{\mathcal{V}(K)\setminus L_{A,n}} \left|\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_j}(\zeta)\right| |D_z^\alpha H_j(z,\zeta)|\left|\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta)\right|. \quad (19)$$

Comme dans le lemme 2 et la relation (25) de [CC2], ou dans le lemme 15 et la relation (14.3) de [CC1], il existe une constante $E>0$ telle que pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^{2N}$, on a :

$$|D_z^\alpha H_j(z,\zeta)| \leqslant E^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!\,d(\zeta,K)^{-(Ns+\rho)(2N-2)-1-|\alpha|.s}.$$

Par la condition (ŁS), la jauge vérifie $R(\zeta)\geqslant 1+cd(\zeta,K)^\beta$, pour tout $\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K$, et donc $\mathcal{V}(K)\setminus L_{A,n}\subseteq\{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K : d(\zeta,K)\leqslant\left(\frac{A}{c.n}\right)^{1/\beta}\}$, de sorte qu'en utilisant l'estimation (9), on a pour tout entier p

$$\int_{\mathcal{V}(K)\setminus L_{A,n}} \left|\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_j}(\zeta)\right| |D_z^\alpha H_j(z,\zeta)|\left|\omega(\overline{\zeta})\wedge\omega(\zeta)\right| \\ \leqslant C'.c(p).E^{|\alpha|+1}(|\alpha|)!\left(\frac{A}{c.n}\right)^{(p-(N.s+\rho)(2N-2)-1-|\alpha|.s)/\beta}. \quad (20)$$

Avec le choix $p > (N.s+\rho)(2N-2)+1+|\alpha|\,s+2k\beta$ et pour un $\eta\in]0,1[$ convenablement choisi, il existe une constante $C(|\alpha|\,,f,K)>0$ vérifiant

$$\|F^\alpha - D_z^\alpha P_{n.d_n}\|_K \leqslant \frac{C(|\alpha|\,,f,K)}{n^{2k}}\,.$$

Suivant une astuce due à W. Pleśniak, pour tout $j\in\mathbb{N}$, on pose $I_j := \{n\in\mathbb{N} : jd_j \leqslant n < (j+1)d_{j+1}\}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, l'ensemble $\{j\in\mathbb{N} : n\in I_j\}$ n'est pas vide; pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout j de cet ensemble, on pose $\mathbf{P}_n := P_{j.d_j}$. Avec le choix $d_n := k_0.n$, on déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\deg(\mathbf{P}_n)\leqslant n$ et que :

$$\|F^\alpha - D_z^\alpha \mathbf{P}_n\|_K \leqslant \frac{\widetilde{C}(|\alpha|\,,f,K)}{n^{k}}\,,$$

pour une certaine constante $\widetilde{C}(|\alpha|\,,f,K)>0$ dépendant de $|\alpha|\,,f$ et de K.

3.1.2. *Estimation des restes du jet d'incertitude.* Pour tout $\alpha\in\mathbb{N}_0^{2N}$, $n\in\mathbb{N}$ et $z\in K$, on pose $e_{n.d_n}^\alpha(z) := F^\alpha(z) - D_z^\alpha P_{n.d_n}(z)$. Le jet ainsi défini $\left(e_{n.d_n}^\alpha\right)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{2N}}$ sera appelé jet d'incertitude à l'ordre $n.d_n$ sur K.

On va montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}_0$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{N}_0^{2N}$, il existe une constante $C(k,m,|\alpha|\,,K)>0$ telle que

$$\frac{\left|R_\xi^{\alpha,m-|\alpha|} e_{n.d_n}(z)\right|}{|\xi - z|^{m-|\alpha|}} \leqslant \frac{C(k,m,|\alpha|\,,K)}{n^k}\,, \tag{21}$$

pour tout $\xi, z\in K$ tels que $\xi\neq z$ et pour tout n entier assez grand.

On peut écrire $e_{n.d_n}^\alpha(z) = I_{n.d_n}^\alpha(z) + J_{n.d_n}^\alpha(z)$, où :

$$I_{n.d_n}^\alpha(z) = \int_{L_{A,n}} \overline{\partial} f(\zeta)\wedge D_z^\alpha\left(H(z,\zeta) - \mathbf{L}_{n.d_n}(H(.,\zeta))(z)\right),$$

$$\text{et}\quad J_{n.d_n}^\alpha(z) = \int_{\mathcal{V}(K)\setminus L_{A,n}} \overline{\partial} f(\zeta)\wedge D_z^\alpha\left(H(z,\zeta)\right).$$

Comme $\overline{\partial} f$ vérifie (9), alors avec les notations (légèrement modifiées) de la preuve de la proposition 4, pages 213–215, de [CC2], pour tout $\alpha\in\mathbb{N}_0^{2N}$, les coefficients de la forme a^α définie par :

$$a^\alpha(z,\zeta) := \begin{cases} \overline{\partial} f(\zeta)\wedge D_z^\alpha H(z,\zeta), & \text{si } \zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K\\ 0, & \text{si } \zeta\in K,\end{cases}$$

sont des fonctions continues sur $O(B,s)\cup(K\times K)$. Pour tout $m\in\mathbb{N}_0$, $\alpha\in\mathbb{N}_0^{2N}$, $\zeta\in\mathcal{V}(K)$ et $\xi,z\in K$, on pose :

$$R_\xi^{\alpha,m}\mathbb{A}(z,\zeta) = a^\alpha(z,\zeta) - \sum_{|\beta|\leqslant m}\frac{(z-\xi)^\beta}{\beta!}\,a^{\alpha+\beta}(\xi,\zeta).$$

D'autre part on a $|D_z^\alpha H_j(z,\zeta)| \leqslant E^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!\,d(\zeta,K)^{-(Ns+\rho)(2N-2)-1-|\alpha|.s}$, pour une certaine constante strictement positive E (cf. le lemme 2 et la relation (25) de [CC2] ou le lemme 15 et la relation (14.3) de [CC1]). Faisant le choix

$$p > (m+1+|\alpha|)s + (Ns+\rho)(2N-2)+1$$

de (9), et en utilisant l'inclusion $\mathcal{V}(K) \setminus L_{A,n} \subseteq \{\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K : d(\zeta, K) \leqslant \big(\frac{A}{c.n}\big)^{1/\beta}\}$, qui résulte de $R(\zeta) \geqslant 1 + cd(\zeta, K)^\beta$ par la propriété (ŁS); on déduit de la preuve de la proposition 4 de [CC2] que :

$$\begin{aligned}\left|R_\xi^{\alpha,m} J_{n.d_n}(z)\right| &\leqslant \int_{\mathcal{V}(K)\setminus L_{A,n}} \left|R_\xi^{\alpha,m} \mathbb{A}(z,\zeta)\right| \\ &\leqslant C^{m+1+|\alpha|}\,|\alpha|!\,|\xi - z|^{m+1}\,c(p)\Big(\frac{A}{c.n}\Big)^{[p-(m+1+|\alpha|)s-(Ns+\rho)(2N-2)-1]/\beta},\end{aligned}$$

pour tout $\xi, z \in K$ et $n \in \mathbb{N}$.

En choisissant de nouveau $p > 2k\beta + (m + 1 + |\alpha|)s + (Ns + \rho)(2N - 2) + 1$, pour $m \in \mathbb{N}_0$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ tel que $|\alpha| \leqslant m$, pour tout $\xi \neq z$ dans K et $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\frac{\left|R_\xi^{\alpha,m-|\alpha|} J_{n.d_n}(z)\right|}{|\xi - z|^{m-|\alpha|}} \leqslant \widetilde{C}_1(k, m, |\alpha|, K)\,|\xi - z|\,\frac{1}{n^{2k}} \leqslant C_1(k, m, |\alpha|, K)\,\frac{1}{n^{2k}}\,,$$

où $\widetilde{C}_1(k, m, |\alpha|, K)$ et $C_1(k, m, |\alpha|, K)$ sont des constantes strictement positives dépendant de $k, m, |\alpha|$ et K.

D'autre part, comme ci-dessus, les coefficients de la forme b^α définie par :

$$b^\alpha(z,\zeta) := \begin{cases} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge D_z^\alpha\left(H(z,\zeta) - \mathbf{L}_{n.d_n}(H(.,\zeta))(z)\right), & \text{si } \zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K, \\ 0, & \text{si } \zeta \in K, \end{cases}$$

sont des fonctions continues sur $O(B, s) \cup (K \times K)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$, $\zeta \in \mathcal{V}(K)$ et $\xi, z \in K$, on pose :

$$R_\xi^{\alpha,m}\mathbb{B}(z,\zeta) = b^\alpha(z,\zeta) - \sum_{|\beta|\leqslant m} \frac{(z-\xi)^\beta}{\beta!}\, b^{\alpha+\beta}(\xi,\zeta).$$

Il existe $\eta \in]0, 1[$, $C = C(\alpha, \eta, A) > 0$ vérifiant

$$\left\|D_z^\alpha\left(H_j(z,\zeta) - \mathbf{L}_{n.d_n}(H_j)(z,\zeta)\right)\right\|_K \leqslant C\eta^n \leqslant C\eta^n\,|\alpha|!\,d(\zeta, K)^{-|\alpha|.s}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\zeta \in L_{A,n}$ et $\xi, z \in K$ (la seconde inégalité est évidente). Avec le choix de p un entier tel que $p < (m + 1 + |\alpha|)s$, en utilisant la relation (9) et le fait que $L_{A,n} \subseteq \{\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K : d(\zeta, K) \geqslant \big(\frac{A}{c.n}\big)^{1/\kappa}\}$, qui résulte par la propriété (HCP) de $R(\zeta) \leqslant 1 + cd(\zeta, K)^\kappa$, $\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K$; on déduit de la preuve de la proposition 4 de [CC2] que :

$$\begin{aligned}&\int_{L_{A,n}} \left|R_\xi^{\alpha,m}\mathbb{B}(z,\zeta)\right| \\ &\leqslant C'^{m+1+|\alpha|}\,|\alpha|!\,|\xi - z|^{m+1}\,c(p)\Big(\frac{A}{c}\Big)^{[p-(m+1+|\alpha|)s]/\kappa} \lambda_{2N}(\mathcal{V}(K))n^{[(m+1+|\alpha|)s-p]/\kappa}\eta^n.\end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned}&\left|R_\xi^{\alpha,m} I_{n.d_n}(z)\right| \leqslant \int_{L_{A,n}} \left|R_\xi^{\alpha,m}\mathbb{B}(z,\zeta)\right| \\ &\leqslant C'^{m+1+|\alpha|}\,|\alpha|!\,|\xi - z|^{m+1}\,c(p)\Big(\frac{A}{c}\Big)^{[p-(m+1+|\alpha|)s]/\kappa} \lambda_{2N}(\mathcal{V}(K))n^{[(m+1+|\alpha|)s-p]/\kappa}\eta^n,\end{aligned}$$

pour tout $\xi, z \in K$.

Vu que les exponentielles de bases < 1 sont absorbées par les puissances on obtient :

$$\frac{\left|R_\xi^{\alpha,m-|\alpha|} I_{n.d_n}(z)\right|}{|\xi - z|^{m-|\alpha|}} \leqslant \widetilde{C_2}(k,m,|\alpha|\,,K)\,|\xi - z|\,\frac{1}{n^{2k}} \leqslant C_2(k,m,|\alpha|\,,K)\,\frac{1}{n^{2k}}\,,$$

où $\widetilde{C}_2(k,m,|\alpha|\,,K)$ et $C_2(k,m,|\alpha|\,,K)$ sont des constantes strictement positives dépendant de $k,m,|\alpha|$ et K.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ tel que $|\alpha| \leqslant m$, pour tout $\xi \neq z$ dans K, on a :

$$\frac{\left|R_\xi^{\alpha,m-|\alpha|} e_{n.d_n}(z)\right|}{|\xi - z|^{m-|\alpha|}} \leqslant \frac{C(k,m,|\alpha|\,,K)}{n^{2k}}\,,$$

où $C(k,m,|\alpha|\,,K)$ est une constante strictement positive dépendant de $k,m,|\alpha|$ et K. Par le même argument de W. Pleśniak : pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $I_j := \{n \in \mathbb{N} : jd_j \leqslant n < (j+1)d_{j+1}\}$, pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{j \in \mathbb{N} : n \in I_j\}$ n'est pas vide, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout j de cet ensemble, comme dans la fin de la partie 3.1.1 de cette preuve, on a : $\mathbf{P}_n := P_{j.d_j}$ et avec le choix $d_n = k_0.n$ (où k_0 est un entier positif non nul fixé), on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(\mathbf{P}_n) \leqslant n$ et que : $\mathbf{e}_n^\alpha = e_{j.d_j}^\alpha = F^\alpha(z) - D_z^\alpha \mathbf{P}_n(z)$, et donc :

$$\frac{\left|R_\xi^{\alpha,m-|\alpha|} \mathbf{e}_n(z)\right|}{|\xi - z|^{m-|\alpha|}} \leqslant \frac{\widetilde{C}(k,m,\alpha,K)}{n^k}\,.$$

3.1.3. *La réciproque.* La réciproque est une simple adaptation à $\mathbb{C}^N$ du résultat contenu dans [Pl].

4. Approximation polynômiale dans l'espace $\mathcal{H}_M(K)$ des jets de Whitney $\mathcal{C}^\infty$ et $\overline{\partial}$-plats de classe $\{M\}$ sur un compact K de $\mathbb{C}^N$. Nous allons nous intéresser aux classes intermédiaires entre $\mathcal{O}(K)$ et $\mathcal{A}^\infty(K)$.

Considérons l'espace des germes des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\{+\infty\})$: un élément de cet espace est déterminé par la donnée d'un réel $t_0 > 0$ et d'une fonction $m \in \mathcal{C}^\infty(]t_0, +\infty[)$. Nous allons imposer à la fonction m de vérifier les conditions suivantes :

$$(\forall t > t_0)\ m(t) > 0,\ m'(t) > 0 \text{ et } m''(t) > 0. \tag{22}$$

$$\lim_{t\to+\infty} m'(t) = +\infty. \tag{23}$$

$$(\exists \delta > 0)\ (\forall t > t_0) \quad m''(t) \leqslant \delta. \tag{24}$$

Soient K un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}^N$ ($\mathbb{C}^N \equiv \mathbb{R}^{2N}$) et m une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\{+\infty\})$ vérifiant les conditions citées ci-dessus. On pose $M := e^m$.

Définition 1. $\mathcal{H}_M(K)$ est l'ensemble des jets $F = (F^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}$ de $J^\infty(K)$, vérifiant les deux conditions suivantes :

1. F est $\overline{\partial}$-plat (i.e. $\widetilde{D}^\alpha\left(\overline{\partial}(F)\right) = 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$).
2. Il existe deux constantes C et ρ strictement positives vérifiant :
   (a) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ tel que $|\alpha| > t_0$, on a $\|F^\alpha\|_K \leqslant C\rho^{|\alpha|} M(|\alpha|)$,
   (b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ tel que $|\alpha| > t_0$, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $\xi, z \in K$, on a $\left|\left(R_\xi^{\alpha,j} F\right)(z)\right| \leqslant C\rho^{|\alpha|+j+1}\frac{M(|\alpha|+j+1)}{(j+1)!}\,|z - \xi|^{j+1}$.

Remarque 1. De la définition du reste d'un jet donné par la relation (7), on déduit qu'on peut poser par convention $\left(R_\xi^{\alpha,-1}F\right)(z) = F^\alpha(z)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ et $\xi, z \in K$. Avec cette convention on remarque qu'on peut unir le (a) et (b) de 2. de la definition précédente en la seule condition (b) et ce pour tout $j \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

La classe analytique correspond à $M(t) = t^t$, i.e. $m(t) = t\log(t)$. Nous allons considérer des classes qui contiennent strictement la classe analytique et donc supposer que $m(t) = t\log(t) + t\mu(t)$ avec μ une fonction strictement croissante qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, de plus on suppose que μ appartient à un corps de Hardy. Avec ces hypothèses $\mathcal{H}_M(K)$ est une $\mathbb{C}$-algébre commutative stable par différentiation, et on a les inclusions évidentes :

$$\mathcal{O}(K) \subset \mathcal{H}_M(K) \subset \mathcal{A}^\infty(K),$$

où $\mathcal{O}(K) := \lim.\operatorname{ind}_{U\supset K,\, U \text{ ouvert}}\mathcal{O}(U)$ est l'espace des germes des fonctions holomorphes sur le compact K.

Pour $M(t) = t^{t(1+1/k)}$ ($k > 0$ réel), la classe $\mathcal{H}_M(K)$ correspond à la classe de Gevrey d'ordre k, notée G_k, cas central et fondamental dans les applications.

On définit les fonctions poids $\overline{\Omega}$ et $\overline{\omega}$ associées à la fonction $M(t) := e^{m(t)}$ comme ci-après,

$$\overline{\Omega}(x) := \inf_{t>t_0}\left(x^{-t}M(t)\right), \quad \text{et} \quad \overline{\omega}(x) := \log\Big(\frac{1}{\overline{\Omega}(x)}\Big), \quad \text{pour tout} \quad x \gg 0. \tag{25}$$

Donnons $\overline{\Omega}(x)$ pour des valeurs particulières de $M(t)$.

$M(t) = t^{t(1+1/k)}$ $(k > 0)$, $\quad\overline{\Omega}(x) = e^{-x^{k/(k+1)}}$, $\overline{\omega}(x) = x^{k/(k+1)}$,
la classe de Gevrey G_k d'ordre k.
$M(t) = e^{at^2}$ $(a > 0)$, $\quad\overline{\Omega}(x) = e^{-(\log(x))^2/(4a)}$, $\overline{\omega}(x) = \frac{(\log(x))^2}{4a}$.
$M(t) = t^t e^{t\log(\log(t))}$, $\quad\overline{\Omega}(x) = e^{-x/\log(x)}$, $\overline{\omega}(x) = \frac{x}{\log(x)}$.
$M(t) = t^{2t}e^{t\log(\log(t))}$, $\quad\overline{\Omega}(x) = e^{-\sqrt{x/\log(x)}}$, $\overline{\omega}(x) = \sqrt{\frac{x}{\log(x)}}$.

On dit qu'un compact K est 1-*régulier*, si K est connexe par arcs et pour tout x, y dans K, il existe un chemin rectifiable $\sigma_{x,y}$ dans K joignant x à y tel que $|\sigma_{x,y}| \leqslant C\,|x-y|$, où $|\sigma_{x,y}|$ est la longueur du chemin $\sigma_{x,y}$ et $C > 0$ une constante de $\mathbb{R}$. Si K est 1-*régulier* les semi-normes $|F|_K^m := \max_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{2N},\ |\alpha|\leqslant m}\|F^\alpha\|_K$ et $\|F\|_K^m$ sont équivalentes et définissent par conséquent la même topologie d'espace de Fréchet sur $\mathcal{E}^\infty(K)$.

Théorème 2. *Soit K un compact 1-régulier de $\mathbb{C}^N$ vérifiant simultanément les conditions* (HCP) *et* (ŁS). *Pour tout jet F appartenant à $\mathcal{H}_M(K)$, il existe des constantes réelles $C_1, C_2 > 0$, et une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_N]$ telles que $\deg(P_n) \leqslant n$, pour n entier assez grand, et que*

$$\left\|F^{(0,\dots,0)} - P_n\right\|_K \leqslant C_1 e^{-C_2\overline{\omega}(n)}, \tag{26}$$

où $(0,\dots,0)$ est dans $\mathbb{N}_0^{2N}$.

Réciproquement, si $\widetilde{F}$ est une fonction continue dans K à valeurs dans $\mathbb{C}$ et s'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_N]$ telle que $\deg(P_n) \leqslant n$ pour n entier assez grand vérifiant (26)*, alors il existe un jet F dans $\mathcal{H}_M(K)$ telle que $F^{(0,\dots,0)} = \widetilde{F}$.*

Les exemples précédents présentent une liste non exhaustive de degrés d'approximations $\overline{\Omega}(x)$, que nous donnons, dans ce théorème, en termes de $e^{-C.\overline{\omega}(n)}$.

4.1. Preuve du Théorème 2

4.1.1. *Formalisme à poids.* Soit μ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui croit strictement vers $+\infty$ avec la variable sur $]t_0, +\infty[$ ($t_0 \gg 0$), et qui appartient à un corps de Hardy. On pose $m(t) := t\log(t) + t\mu(t) = t\overline{\mu}(t)$ (où $\overline{\mu}(t) := \log(t) + \mu(t)$) et $M(t) := e^{m(t)}$ pour tout $t > t_0$. Lorsque les propriétés du compact K n'interviennent pas, la classe $\mathcal{H}_M(K)$ se note simplement par $\{M\}$. L'ordre de la classe $\{M\}$ est l'élément k de $[0, +\infty]$ défini par $k := \lim_{t\to+\infty} \frac{\log(t)}{\mu(t)}$ (cette limite existe puisque μ appartient à un corps de Hardy).

La fonction poids $\overline{\Omega}$ associée à M est définie en (25). Pour $\tilde{x} \gg 0$ fixé, le minimum sur $]t_0, +\infty[$ de $t \mapsto e^{-t\log(\tilde{x})+m(t)}$ est atteint en une unique valeur de t telle que $m'(t) = \log(\tilde{x})$, car m' est strictement croissante et tend vers $+\infty$. Donc pour tout $t > t_0$, si l'on pose $\tilde{x} = e^{m'(t)}$, $\tilde{u} = t^2\overline{\mu}'(t)$, $\overline{\gamma}(\tilde{u}) = t\overline{\mu}'(t) + \overline{\mu}(t)$ et $\overline{\Gamma}(\tilde{u}) = e^{-\overline{\gamma}(\tilde{u})}$, on aura

$$\begin{cases} \tilde{u} = \overline{\omega}(\tilde{x}) \\ \overline{\gamma}(\tilde{u}) = \log(\tilde{x}). \end{cases} \tag{27}$$

On déduit que les fonctions $\overline{\Omega}(\tilde{x})$ et $\overline{\omega}(\tilde{x})$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$; la première décroit strictement vers 0 et la seconde croit strictement vers $+\infty$ quand $\tilde{x}$ tend vers $+\infty$; de même les fonctions $\overline{\gamma}(\tilde{u})$ et $\overline{\Gamma}(\tilde{u})$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$; la première croit strictement $+\infty$ et la seconde décroit strictement vers 0 quand $\tilde{u}$ tend vers $+\infty$.

De manière analogue on définit la fonction Ω comme suit

$$\Omega(x) := \inf_{t>t_0}\Big(x^{-t}\,\frac{M(t)}{t^t}\Big), \quad \text{et} \quad \omega(x) := \log\Big(\frac{1}{\Omega(x)}\Big), \quad \text{pour tout} \quad x \gg 0. \tag{28}$$

Un calcul aisé utilisant la définition de Ω, montre que pour tout $\nu > 0$, $q > 0$, il existe $\tilde{c} > 0$, $\tilde{q} > 0$ tel que pour tout $x \gg 0$ on ait : $x^\nu\Omega(qx) \leqslant \tilde{c}\Omega(\tilde{q}x)$ (Propriété d'absorption des puissances par Ω).

Pour $x \gg 0$ fixé, le minimum sur $]t_0, +\infty[$ de $t \mapsto e^{-t\log(x)+t\mu(t)}$ est atteint en une unique valeur de t telle que $\mu(t) + t\mu'(t) = \log(x)$. Pour $t > t_0$, on pose $x := e^{t\mu'(t)+\mu(t)}$, $u = t^2\mu'(t)$, $\gamma(u) = t\mu'(t) + \mu(t)$ et $\Gamma(u) = e^{-\gamma(u)}$, on a alors

$$\begin{cases} u = \omega(x) \\ \gamma(u) = \log(x). \end{cases} \tag{29}$$

Il en résulte que les fonctions $\Omega(x)$ et $\omega(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. La première décroit strictement vers 0 et la seconde croit strictement vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$; de même les fonctions $\gamma(u)$ et $\Gamma(u)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, la première croit strictement $+\infty$ et la seconde décroit strictement vers 0 quand u tend vers $+\infty$.

Pour tout $t > t_0$, si x et $\tilde{x}$ sont définis comme ci-dessus, alors on a aisément, $\tilde{x} = e.t.x$, $x\omega'(x) = \tilde{x}\overline{\omega}'(\tilde{x}) = t$, et $\overline{\omega}(\tilde{x}) - \tilde{x}\overline{\omega}'(\tilde{x}) = \omega(x)$.

Une étude directe des fonctions $u \mapsto \frac{\gamma(u)}{u^a}$ $(= \frac{\log(x)}{\omega(x)^a})$ et $\tilde{u} \mapsto \frac{\overline{\gamma}(\tilde{u})}{\tilde{u}^a}$ $(= \frac{\log(\tilde{x})}{\overline{\omega}(\tilde{x})^a})$, montre que pour tout $a > \frac{1}{2}$, il existe deux constantes $c_a > 0$ et $c'_a > 0$, telles que pour tout $u \gg 0$, $\tilde{u} \gg 0$, on ait $\gamma(u) \leqslant c_a u^a$ et $\overline{\gamma}(\tilde{u}) \leqslant c'_a\tilde{u}^a$. Nous déduisons en particulier, $\limsup_{u\to\infty}(\frac{e^{\overline{\gamma}(u)}}{u})^{1/u^a} < +\infty$. D'autre part, des identités précédentes, on déduit que, pour tout $x \gg 0$, $\Gamma(\omega(x)) = \frac{1}{x}$; et que la fonction $x \mapsto \frac{\overline{\omega}(x)}{x}$ décroit strictement vers 0 quand x tend vers $+\infty$; puis en remarquant que les fonctions inverses $\omega^{\langle -1\rangle}$ et $\overline{\omega}^{\langle -1\rangle}$ vérifient, pour tout $u \gg 0$, $\omega^{\langle -1\rangle}(u) = e^{\gamma(u)}$ et $\overline{\omega}^{\langle -1\rangle}(u) = e^{\overline{\gamma}(u)}$, on déduit que la fonction $u \mapsto \frac{e^{\overline{\gamma}(u)}}{u}$ croit strictement vers $+\infty$ avec la variable u.

4.1.2. *Le corps différentiel K_Θ.* Un corps de Hardy, intéressant, est défini comme suit : Si Θ est l'ensemble des monômes $\theta_\alpha(t) := t^{\alpha_0}(L_1(t))^{\alpha_1}\dots(L_q(t))^{\alpha_q}$ pour $t \gg 0$, où $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$ et L_p est le logaritme p-fois itéré. Le corps différentiel K_Θ est formé des fonctions analytiques $f(t) := a.\theta_\alpha(t) \times (1 + F(\theta_{\alpha^1}(t), \dots, \theta_{\alpha^s}(t)))$ pour $t \gg 0$, où $a \in \mathbb{R}$, $\theta_\alpha \in \Theta$ et les $\theta_{\alpha^i} \in \Theta$ tels que $\theta_{\alpha^i}(t) \underset{t\infty}{\to} 0$ pour $i = 1, \dots, s$ et F est une série entière convergente à coefficients réels et de s variables réelles avec $F(0) = 0$. Le corps différentiel K_Θ est un corps de Hardy.

D'après les propriétés précédentes, on remarque qu'on peut choisir $\gamma = \mu$ dans les cas suivants : (i) La classe est d'ordre k réel > 0. (ii) $k = \infty$ et μ est un élément du corps differentiel K_Θ. Il s'ensuit alors que dans ces deux cas on a, $\Gamma(u) = u\overline{\Gamma}(u)$ pour tout $u \gg 0$ et $\Gamma(\overline{\omega}(\tilde{x})) = \frac{\overline{\omega}(\tilde{x})}{\tilde{x}}$ pour tout $\tilde{x} \gg 0$.

4.1.3. *Estimation de $\int_{(\mathcal{V}(K)\setminus K)\setminus L_n} \left|\varphi(\zeta)\wedge\widetilde{N}(z,\zeta)\right|$.* Soient M une fonction définie comme dans la partie 1. ci-dessus; les fonctions Ω et $\overline{\omega}$ associées à M sont définies respectivement en (28) et (25); et soit K un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant la condition (ŁS), d'exposant β (introduit dans la définition de (ŁS)) et soit $C_l > 0$ tel que $R(\zeta) \geqslant 1 + C_l d(\zeta, K)^{r\beta}$; φ une $(0,1)$-forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\mathcal{V}(K)}$, telle qu'il existe $C' > 0$ et $C'' > 0$ vérifiant :

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant C'\Omega\Big(\frac{1}{C''d(\zeta,K)}\Big), \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K. \tag{30}$$

Enfin, soit $\widetilde{N}(z,\zeta) := \sum_{J=(1\leqslant j_1<\ldots<j_{N-1}\leqslant N)} \widetilde{N}_J(z,\zeta) d\overline{\zeta}_J \wedge d\zeta$ (avec $d\zeta := d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_N$ et $d\overline{\zeta}_J := d\overline{\zeta}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta}_{j_{N-1}}$), un noyau défini sur $O(B,r)$ ($B > 0$ et $r > 0$), tel que $\widetilde{N}(z,\cdot)$ soit une $(N, N-1)$ forme à coefficients intégrables dans $\mathcal{V}(K)$, telle qu'il existe $C_{\widetilde{N}} > 0$ et $\varrho > 0$, vérifiant $\left|\widetilde{N}(z,\zeta)\right| \leqslant C_{\widetilde{N}}\, d(\zeta,K)^{-\varrho}$ pour $\zeta \in \mathcal{V}(K)\setminus K$ et $z \in O(B, r, \zeta)$. La propriété d'absorption des puissances par Ω, assure l'existence de $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ telles que

$$\left|\varphi(\zeta) \wedge \widetilde{N}(z,\zeta)\right| \leqslant C_1\Omega\Big(\frac{1}{C_2\, d(\zeta,K)}\Big), \quad \zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K.$$

Soit $R := R_{B,r}$ la jauge de V_K associée au couple (B, r) (définie comme dans la preuve du Théorème 1). Pour tout $T > 0$ et $\epsilon \in]0, 1[$ avec $\eta := \frac{\epsilon}{r\beta}$, $\sigma := \frac{TC_2^\epsilon}{C_l}$, on pose $\widetilde{R} = \widetilde{R}_{\sigma,\eta} := 1 + \sigma(R-1)^\eta$; et soit enfin $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers positifs. On définit les zones de niveaux

$$L_n := \Big\{\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K : \widetilde{R}(\zeta) \geqslant 1 + T\Big(\frac{\overline{\omega}\,(nd_n)}{nd_n}\Big)^\epsilon\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 1. *Si la classe $\{M\}$ est d'ordre k tel que k réel strictement positif ou $k = \infty$ avec μ est un élément du corps differentiel K_Θ, alors il existe des constantes $E > 0, F > 0$ tel que pour tout n entier assez grand et pour tout $z \in K$*

$$\int_{\zeta\in(\mathcal{V}(K)\setminus K)\setminus L_n} \left|\varphi(\zeta) \wedge \widetilde{N}(z,\zeta)\right| \leqslant Ee^{-F\overline{\omega}(nd_n)}. \tag{31}$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in K$, on note,

$$I_n(z) := \int_{\zeta \in (\mathcal{V}(K)\setminus K)\setminus L_n} \varphi(\zeta) \wedge \widetilde{N}(z,\zeta)$$

$$\text{et} \quad U_n := \Big\{\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K : d(\zeta, K) < \frac{\overline{\omega}(nd_n)}{C_2.n.d_n}\Big\}.$$

Par la condition (ŁS), il est clair que $(\mathcal{V}(K) \setminus K) \setminus L_n \subset U_n \subset \mathcal{V}(K) \setminus K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour un certain réel F de $]0,1]$, pour tout n assez grand et $\zeta \in U_n$, on a :

$$\big|\varphi(\zeta) \wedge \widetilde{N}(z,\zeta)\big| \leqslant C_1\Big(\Omega\Big(\frac{1}{C_2 d(\zeta,K)}\Big)\Big)^F \leqslant C_1\Big(\Omega\Big(\frac{n.d_n}{\overline{\omega}(nd_n)}\Big)\Big)^F = C_1 e^{-F\omega n.d_n/\overline{\omega}(nd_n)}.$$

Il s'ensuit que $\big|\varphi(\zeta) \wedge \widetilde{N}(z,\zeta)\big| \leqslant C_1 e^{-F\Gamma^{\langle -1\rangle}\overline{\omega}(nd_n)/(n.d_n)} = C_1 e^{-F\overline{\omega}(nd_n)}$.

D'où $\sup_{z\in K} |I_n(z)| \leqslant \lambda_{2N}(\mathcal{V}(K)) \sup_{\zeta \in U_n} \big|\varphi(\zeta) \wedge \widetilde{N}(z,\zeta)\big| \leqslant E e^{-F\overline{\omega}(nd_n)}$, avec

$$E := \lambda_{2N}(\mathcal{V}(K))C_1.$$

Ce qui achève la preuve de la Proposition. ∎

4.1.4. *Estimation de* $\|h(.,\zeta) - L_{nd_n}(h(.,\zeta))\|_K$. Soient M une fonction, Ω et $\overline{\omega}$, les fonctions associées à M et qui sont définies comme dans la partie 1. ci-dessus; K un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant la condition (HCP). Nous considérons une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante d'entiers naturels qui vérifie :

$$\limsup_{n\to+\infty} (nd_n)^{1/n} < +\infty, \qquad \limsup_{n\to+\infty} \Big(\frac{nd_n}{\overline{\omega}(nd_n)}\Big)^{1/n} < +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 1.$$

Une telle suite existe, en effet d'après les propriétés sur les poids, cités dans la partie 1, la suite définie par $d_n := k_0.\mathrm{Ent}(\delta_n)$, où $\delta_n = \frac{e^{\overline{\gamma}(n)}}{n}$ ($\mathrm{Ent}(x)$ est la partie entière de x pour tout $x \in \mathbb{R}$), vérifie ces propriétés; de plus notons qu'on a $\frac{\overline{\omega}(n\delta_n)}{n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $B > 0$, $r \geqslant 1$ $R(= R_{B,r})$ est la jauge de V_K associée au couple (B, r), pour tout $\sigma > 0$, $\eta > 0$ on pose $\widetilde{R}(= \widetilde{R}_{\sigma,\eta}) := 1 + \sigma(R-1)^\eta$, et pour tout $T > 0$ et $\epsilon \in]0,1[$ on pose $L_n := \big\{\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K : \widetilde{R}(\zeta) \geqslant 1 + T\big(\frac{\overline{\omega}(nd_n)}{nd_n}\big)^\epsilon\big\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2. *Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant la condition* (HCP) *et soient $h(z,\zeta)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $O(B,r)$, et telle que $h(.,\zeta)$ est holomorphe sur $O(B,r,\zeta)$ ($B > 0$, $r \geqslant 1$), pour tout $\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K$, et qu'il existe $C > 0$ et un entier $q \geqslant 2$ tel que $|h(z,\zeta)| \leqslant \frac{C}{d(\zeta,K)^q}$ pour tout $(z,\zeta) \in O(B,r)$. Alors, pour tout $T, \sigma, \eta > 0$ et $\epsilon \in]0,1[$, il existe $E > 0$ et $F > 0$, et un entier positif n_0 tels que : $\|h(.,\zeta) - \mathbf{L}_{nd_n}(h(.,\zeta))\|_K \leqslant Ee^{-F.\overline{\omega}(nd_n)}$ pour tout $n \geqslant n_0$ et $\zeta \in L_n$; où $L_n = L_n(T,\epsilon,B,r,\sigma,\eta)$ est la zone de niveau définie comme ci dessus et $\mathbf{L}_{nd_n}$ est l'opérateur de Lagrange associé à un système de $\binom{N+nd_n}{nd_n}$ points de Fekete–Leja sur K, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Par la propriété (HCP), on considère les constantes $C' > 0$ et $\kappa > 0$ telles que $R(\zeta) \leqslant 1 + C'd(\zeta,K)^\kappa, \zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K$. Avec une variante adaptée de la méthode développée par A. Zeriahi citée pécédemment, il existe un entier positif M et pour $\delta \in]\frac{1}{2}, 1[$

arbitrairement fixé, on a pour tout $\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K$:

$$\|h(.,\zeta) - \mathbf{L}_{n.d_n}(h(.,\zeta))\|_K \leqslant C.(nd_n)^N \frac{2^n(1+N+M)^n}{R(\zeta)^{n.d_n((2\delta-1)-3(N+M)/n)}} \times \frac{1}{(R(\zeta)^{\delta.d_n}-1)^{2(N+M)}} \times \frac{1}{(R(\zeta)-1)^{q/\kappa}}.$$

Maintenant avec le choix des zones L_n et des propriétés de la suite $(d_n)_n$, on montre de manière analogue à celle de la première partie de la preuve du Théorème 1, l'existence de $E>0$ et $F>0$ tels que pour tout n assez grand et $\zeta \in L_n$, on ait :

$$\|h(.,\zeta) - \mathbf{L}_{nd_n}(h(.,\zeta))\|_K \leqslant E e^{-F.\overline{\omega}(nd_n)}. \ \blacksquare$$

4.1.5. *Preuve de la partie directe du Théorème 2.* Les propriétés (HCP) et (ŁS) montrent que le compact K est s-H convexe, pour un certain réel $s \geqslant 1$. On considère alors le noyau de Chaumat–Chollet $H(z,\zeta) := \frac{\omega'_\zeta(w(z,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N}$; et soit f une extension de type Dynkin du jet F de $\mathcal{H}_M(K)$ (i.e. f est une extension de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact contenu dans $\mathcal{V}(K)$ et telle que $\bar\partial f$ vérifie l'estimation (30)). On a :

$$F^{(0,\dots,0)}(z) = -\frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N}\int_{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K} \bar\partial f(\zeta)\wedge H(z,\zeta), \quad \text{pour tout } z \in K.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, définissons le polynôme $\widetilde{P}_{n.d_n}$ par

$$\widetilde{P}_{n.d_n}(z) := -\frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N}\int_{\zeta\in L_n} \bar\partial f(\zeta)\wedge \mathbf{L}_{nd_n}\left(H(.,\zeta)\right)(z), \quad z\in\mathbb{C}^N,$$

où L_n et $\mathbf{L}_{nd_n}$ sont définies comme dans les parties 2. et 3. précédentes. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\left\|F^{(0,\dots,0)} - \widetilde{P}_{nd_n}\right\|_K \\
&\leqslant \frac{(N-1)!}{(2\pi)^N}\int_{\zeta\in L_n}\sup_{z\in K}\left|\frac{\bar\partial f(\zeta)\wedge\omega'_\zeta(z,\zeta)\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N} - \mathbf{L}_{nd_n}\Big(\frac{\bar\partial f(\zeta)\wedge\omega'_\zeta(\cdot,\zeta)\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}\Big)(z)\right| \\
&\qquad + \frac{(N-1)!}{(2\pi)^N}\sup_{z\in K}\bigg(\int_{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus L_n}\left|\frac{\bar\partial f(\zeta)\wedge\omega'_\zeta(z,\zeta)\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N}\right|\bigg).
\end{aligned}$$

Selon les propositions 1 et 2, il existe $E>0$, $F>0$ tel que pour tout n assez grand, on ait $\left\|F^{(0,\dots,0)} - \widetilde{P}_{nd_n}\right\|_K \leqslant E e^{-F\overline{\omega}(nd_n)}$. Ensuite avec une astuce due à W. Pleśniak, on pose pour tout k assez grand et $n \in I_k$, $P_n = \widetilde{P}_{kd_k}$, où

$$I_k := \big\{n\in\mathbb{N} : (k-1)d_{k-1} < n \leqslant kd_k\big\}.$$

Ceci montre que pour n assez grand, on a :

$$\left\|F^{(0,\dots,0)} - P_n\right\|_K = \left\|F^{(0,\dots,0)} - \widetilde{P}_{kd_k}\right\|_K \leqslant E e^{-F\overline{\omega}(kd_k)} \leqslant E e^{-F\overline{\omega}(n)}.$$

4.1.6. *Preuve de la partie réciproque du Théorème 2.* Soit f une fonction continue sur le compact K et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_N]^{\mathbb{N}}$ vérifiant l'estimation (26) du Théorème 2. De la propriété (HCP) on dispose de $\delta_0, \kappa, C > 0$ telles que pour tout $z\in\mathbb{C}^N$, $d(z,K)\leqslant\delta_0 \Longrightarrow V_K(z)\leqslant Cd(z,K)^\kappa$. Pour $k\in\mathbb{N}$ assez grand, t_k désigne le réel tel que $k = e^{t_k\overline{\mu}'(t_k)+\overline{\mu}(t_k)}$, on pose $s_k := e^{t_k\mu'(t_k)+\mu(t_k)}$. D'après le formalisme décrit dans la partie 1, on a $k = et_ks_k$, $s_k\omega'(s_k) = k\overline{\omega}'(k) = t_k$, et $\overline{\omega}(k) - k\overline{\omega}'(k) = \omega(s_k)$.

Considérons les ensembles :

$$K_n := \left\{z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < \left(\tfrac{\Gamma(n)}{C}\right)^{1/\kappa}\right\} \quad \text{et} \quad I_n := \left\{k \in \mathbb{N} : n-1 \leqslant \omega(s_k) < n\right\}.$$

Remarquons que $\operatorname{card}(I_n) \leqslant \omega^{\langle -1\rangle}(n) - \omega^{\langle -1\rangle}(n-1)$, pour tout assez grand. Soit n dans $\mathbb{N}$ assez grand fixé et k dans I_n, considérons le polynôme suivant : $Q_{n,k} = P_k - P_{k-1}$. Pour ces k, on a $\deg(Q_{n,k}) \leqslant k$. L'inégalité de Bernstein–Walsh s'écrit $|Q_{n,k}(z)| \leqslant \|Q_{n,k}\|_K \, e^{k\, V_K(z)}$, pour tout n assez grand fixé, k dans I_n et $z \in K_n$. Ceci donne en vertu des identités $\Gamma(\omega(s_k)) = \frac{1}{s_k} = e\overline{\omega}'(k)$ (cf. le formalisme de la partie 1.), que $\|Q_{n,k}\|_{K_n} \leqslant \|Q_{n,k}\|_K \, e^{k\Gamma(n)}$ et donc

$$\|Q_{n,k}\|_{K_n} \leqslant C_1 e^{-C_2\overline{\omega}(k-1)+k\Gamma(n)} \leqslant C_1 e^{-C_2\overline{\omega}(k-1)+k\Gamma(n)} \leqslant C_1 e^{-C_2\overline{\omega}(k-1)+ke\overline{\omega}'(k)}.$$

Par suite, on a $\|Q_{n,k}\|_{K_n} \leqslant C_2 e^{-C_3\overline{\omega}(s_k)} \leqslant C_2 e^{-C_3\, n}$, où $C_2, C_3 > 0$ sont des constantes convenables. Pour tout n entier assez grand, on considère le polynôme H_n défini par $H_n := \sum_{k\in I_n} Q_{n,k}$; on conviendra que H_n est le polynôme nul, si $I_n = \emptyset$. On a l'estimation suivante : $\|H_n\|_{K_n} \leqslant C_2 \operatorname{card}(I_n)\, e^{-C_3\, n}$, pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand. Pour $\theta \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ fixé, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ $\operatorname{card}(I_n) \leqslant Ce^{n^\theta}$. Il s'ensuit que pour une certaine constante $C_4 > 0$, $\|H_n\|_{K_n} \leqslant C_3\, e^{-C_4\, n}$, pour tout n assez grand. Quitte à faire un décalage d'indice, nous pouvons écrire : $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z)$, pour tout $z \in K$. La fonction f est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur K et holomorphe sur l'interieur de K. Reste maintenant à montrer que le jet $(D_z^\alpha f)_{\alpha\in\mathbb{N}^N}$ est dans $\mathcal{H}_M(K)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $z \in K$, on a : le polydisque $\Delta\big(z, \frac{1}{2\sqrt{N}}\big(\frac{\Gamma(n)}{C}\big)^{1/\kappa}\big)$ est contenu dans K_n, de sorte que par les inégalités de Cauchy, on obtient $\|D_z^\alpha H_n\|_K \leqslant E^{|\alpha|}\alpha!\, \rho^n e^{|\alpha|/(\kappa\gamma(n))}$ (où $\rho \in]0,1[$ et $E > 0$ sont des constantes), pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Soit $\rho_1 \in]\rho, 1[$, alors : $\|D^\alpha H_n\|_K \leqslant E^{|\alpha|}\big(\frac{\rho}{\rho_1}\big)^n e^{n\log(\rho_1)+\gamma(n)\frac{|\alpha|}{\kappa}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Posons la fonction $h_{|\alpha|}(\tau) := \tau\log(\rho_1) + \frac{|\alpha|}{\kappa}\gamma(\tau)$ $(\forall \tau > 0)$. Comme $\lim_{\tau\to+\infty} h_{|\alpha|}(\tau) = -\infty$, il existe donc un maximum de $h_{|\alpha|}$ atteint en $\tau_{|\alpha|} > 0$; en particulier $h'_{|\alpha|}(\tau_{|\alpha|}) = 0$; ce qui donne : $\log(\rho_1) + \frac{|\alpha|}{\kappa}\,\gamma'(\tau_{|\alpha|}) = 0$. Par conséquent, $h_{|\alpha|}(\tau_{|\alpha|}) = \frac{-|\alpha|\gamma'(\tau_{|\alpha|})}{\kappa} + \frac{|\alpha|}{\kappa}\,\gamma(\tau_{|\alpha|})$ et donc

$$\sup_{\tau>0} h_{|\alpha|}(\tau) = \frac{|\alpha|}{\kappa}\left[\gamma(\tau_{|\alpha|}) - \tau_{|\alpha|}\gamma'(\tau_{|\alpha|})\right] = \frac{|\alpha|}{\kappa}\,\mu\Big(\frac{|\alpha|}{-\kappa\log(\rho_1)}\Big).$$

Les classes $\mu(|\alpha|)$ et $\frac{|\alpha|}{\kappa}\,\mu\big(\frac{|\alpha|}{-\kappa\log(\rho_1)}\big)$ sont les mêmes. La démonstration est achevée. ∎

4.2. Dans la proposition suivante, on donne un contrôle de régularité d'un jet $F = (F^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}$ de $\mathcal{A}^\infty(K)$, pour un compact s-H convexe, connaissant un comportement asymptotique des (c_t) de l'estimation (9) de $\overline{\partial} f$ d'une extension de Whitney f du jet F en fonction de la classe $\{M\}$.

Convenons d'abord de noter $h_{\sigma,\delta}$ la fonction définie par $h_{\sigma,\delta}(t) = h(\sigma.t + \delta)$, pour toute fonction h d'une variable réelle et $\sigma > 0$, $\delta \geqslant 0$.

PROPOSITION 3. *Soit K un compact s-H convexe de $\mathbb{C}^N$ et $F = (F^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}$ un jet de $\mathcal{A}^\infty(K)$ et f une extension de Whitney de F vérifiant l'estimation* (9). *On suppose qu'il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que pour tout $t \geqslant t_0$, on ait $c_t \leqslant a.b^t\,\frac{M(t)}{t^t}$, alors le jet F appartient à la classe $\mathcal{H}_{M_{s,r}}(K)$ donnée dans la définition* 1, *où s est la constante de s-H convexité du compact K et $r := (Ns+\rho)(2N-2)+1$.*

Preuve. Comme $\overline{\partial} f$ vérifie (9), alors avec les notations (légèrement modifiées) de la preuve de la proposition 4 (pages 213–215) de [CC2], pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$, les coefficients de la forme a^α définie par :

$$a^\alpha(z,\zeta) := \begin{cases} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge D_z^\alpha H(z,\zeta), & \text{si} \quad \zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K, \\ 0, & \text{si} \quad \zeta \in K, \end{cases}$$

sont des fonctions continues sur $O(B,s) \cup (K \times K)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$, $\zeta \in \mathcal{V}(K)$ et $\xi, z \in K$, on pose :

$$R_\xi^{\alpha,j} \mathbb{A}(z,\zeta) = a^\alpha(z,\zeta) - \sum_{|\beta| \leqslant j} \frac{(z-\xi)^\beta}{\beta!}\, a^{\alpha+\beta}(\xi,\zeta).$$

Pour unifier les deux conditions de la définition 1, on convient de poser $R_\xi^{\alpha,-1}\mathbb{A}(z,\zeta) = a^\alpha(z,\zeta)$. Soient $j \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$, $\xi, z \in K$ et $\zeta \in \mathcal{V}(K)$, comme dans la preuve de la proposition 4 de [CC2], en distinguant les cas ($\zeta \in \mathcal{V}(K)\setminus K$ tel que $|z-\zeta| < \frac{B}{2}\, d(\zeta,K)^s$) et ($\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K$ tel que $|z-\zeta| \geqslant \frac{B}{2}\, d(\zeta,K)^s$), il existe $B_1, B_2 > 0$ tels que pour $t := (|\alpha|+j+1).s+r \geqslant t_0$ s'il on dispose d'une constante $c_{(|\alpha|+j+1).s+r} > 0$ vérifiant (9), on trouve

$$\left|R_\xi^{\alpha,j}\mathbb{A}(z,\zeta)\right| \leqslant B_1 B_2^{|\alpha|+j+1}\, |\alpha|!\, c_{(|\alpha|+j+1).s+r}\, |z-\xi|^{j+1},$$

en adoptant la convention précédente, cette estimation reste vraie pour $j=-1$. Pour $\zeta \in K$, on a $a^\alpha(z,\zeta) = 0$ et $R_\xi^{\alpha,j}\mathbb{A}(z,\zeta) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ (puisque $\overline{\partial} f(\zeta) = 0$); ce qui montre que l'estimation précédente est triviale pour tout $j \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. En intégrant par rapport à $\zeta \in \mathcal{V}(K)$ (suivant la mesure de Lebesgue), il existe $C > 0$ tel que

$$\left|R_\xi^{\alpha,j} F(z)\right| \leqslant C.B_1.B_2^{|\alpha|+j+1}\, |\alpha|!\, c_{(|\alpha|+j+1).s+r}\, |z-\xi|^{j+1}.$$

La condition asymptotique sur les c_t et le fait $\frac{|\alpha|!\,(j+1)!}{((|\alpha|+j+1).s+r)^{(|\alpha|+j+1).s+r}} \leqslant 1$, donnent :

$$\left|R_\xi^{\alpha,j} F(z)\right| \leqslant \widetilde{B_1}.\widetilde{B_2}^{|\alpha|+j+1}\, \frac{M_{s,r}(|\alpha|+j+1)}{(j+1)!}\, |z-\xi|^{j+1}.$$

Pour certaines constantes strictement positives $\widetilde{B_1}$ et $\widetilde{B_2}$. Ceci montre que le jet F appartient $\mathcal{H}_{M_{s,r}}(K)$. ∎

Soient $M := e^m$ une fonction définie comme dans le début de cette section; les fonctions Ω et $\overline{\Omega}$ associées à M sont définies respectivement en (28) et (25).

Soit $F = (F^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}}$ un jet de $\mathcal{A}^\infty(K)$, f une extension de Whitney de F vérifiant l'estimation (9). S'il existe $a > 0$ et $b > 0$ pour tout $t \geqslant t_0$, on ait $c(t) \leqslant a.b^t \frac{M(t)}{t^t}$, alors l'estimation (9) entraîne immédiatement (par passage à l'inf sur $t \geqslant t_0$), l'estimation suivante de type Dynkin

$$\left|\overline{\partial} f(\zeta)\right| \leqslant a.\Omega\Big(\frac{1}{b.d(\zeta,K)}\Big), \quad \text{pour tout} \quad \zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K. \tag{32}$$

Pour tout $\sigma > 0$, $\delta \geqslant 0$, les fonctions $\Omega_{\sigma,\delta}$ et $\overline{\Omega}_{\sigma,\delta}$ désignent les poids associés à la fonction $M_{\sigma,\delta}$. Un calcul aisé montre qu'il existe une constante strictement positive c telle que pour tout $x \gg 0$ on ait :

$$\left(\Omega(x)\right)^{1/\sigma} \leqslant \Omega_{\sigma,\delta}(x) \leqslant \left(\Omega(c.x)\right)^{1/\sigma},$$

$$\text{et} \quad \left(\overline{\Omega}(\sigma.x)\right)^{1/\sigma} \leqslant \overline{\Omega}_{\sigma,\delta}(x) \leqslant \left(\overline{\Omega}(c.\sigma.x)\right)^{1/\sigma}.$$

Ce qui donne en particulier pour $\sigma = s$ et $\delta = r := (Ns+\rho)(2N-2)+1$,

$$\left|\overline{\partial} f(\zeta)\right| \leqslant a.\Big(\Omega_{s,r}\Big(\frac{1}{b.d(\zeta,K)}\Big)\Big)^{s}, \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathcal{V}(K)\setminus K. \tag{33}$$

$\Omega_{s,r}$ est associée à la fonction $M_{s,r}$ définissant la classe $\mathcal{H}_{M_{s,r}}(K)$ qui contient le jet F. L'estimation précédente nous permet d'appliquer le schéma d'approximation précédent pour des compacts qui ne sont pas forcément Whitney 1-réguliers.

Théorème 3. *Soient K un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant simultanément les conditions* (HCP) *et* (ŁS)*, F un jet appartenant à $\mathcal{A}^\infty(K)$ et f une extension de Whitney de F vérifiant l'estimation* (9) *et telles qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tel que pour tout $t \geqslant t_0$, on ait $c_t \leqslant a.b^t\frac{M(t)}{t^t}$. Alors il existe des constantes réelles $s, r \geqslant 1$, $C_1, C_2 > 0$, et une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_N]$ telles que* $\deg(P_n) \leqslant n$*, pour n entier assez grand, et que*

$$\left\|F^{(0,\ldots,0)} - P_n\right\|_K \leqslant C_1 e^{-C_2\overline{\omega}_{s,r}(n)}, \tag{34}$$

où $(0,\ldots,0)$ *est dans* $\mathbb{N}^{2N}$.

Réciproquement, si $\widetilde{F}$ est une fonction continue dans K à valeurs dans $\mathbb{C}$ et s'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_N]$ telle que $\deg(P_n) \leqslant n$ *pour n entier assez grand vérifiant* (34)*, alors il existe un jet F dans $\mathcal{H}_{M_{s,r}}(K)$ telle que $F^{(0,\ldots,0)} = \widetilde{F}$.*

Preuve. Le compact K vérifie simultanément les propriétés (HCP) et (ŁS), il est alors s-H convexe. On pose $r := (Ns+\rho)(2N-2)+1$ (la constante ρ est introduite à la fin de la section 2, après la définition de la s-H convexité). D'après la proposition 3, le jet F appartient à la classe $\mathcal{H}_{M_{s,r}}(K)$. Par la condition assymptotique sur les c_t, on déduit que l'extension f de type Dynkin du jet F vérifie l'estimation (33), de sorte qu'on peut appliquer le schéma de la preuve du Théorème 2 sur l'espace $\mathcal{H}_{M_{s,r}}(K)$, avec un prix de perte de régularité, passant de la classe $\{M\}$ à une classe plus grande $\{M_{s,r}\}$ (cf. la proposition 3) de poids $\overline{\Omega}_{s,r}$ et dont "la taille" se mesure en fonction du paramètre s de s-H convexité du compact K. ■

Remerciements. Les auteurs tiennent à remercier les referees pour leurs remarques et suggestions.

M. T. Belghiti est supporté par le Centre Marocain de Recherches Polytechniques et d'Innovation (CMRPI).

Références

[BG] S. Baouendi, C. Goulaouic, *Approximation polynômiale de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 21 (1971), N° 4, 149–173.

[B1] M. T. Belghiti, *Critères geométriques pour la meilleur approximation polynômiale dans les classes de Carleman*, Congrès International d'Algèbre et Geométrie organisé par le Ragad, Septembre 2004, Kénitra, Maroc.

[B2] M. T. Belghiti, *Eléments pour une théorie constructive des fonctions lisses*, Thèse de Doctorat d'Etat es-Sciences déposée pour soutenance décembre 2004, Université Ibn Tofaïl, Kénitra.

[BGE] M. T. Belghiti, P. L. Gendre, B. El Ammari, *Approximation quantitative des fonctions ultradifférentiables holomorphes*, preprint, 2014.

[BA] B. Berndtsson, M. Andersson, *Henkin–Ramirez formulas with weight factors*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 32 (1982), N° 3, 91–110.

[CE] L. Białas-Cież, R. Eggink, *Jackson's inequality in the complex plane and the Łojasiewicz–Siciak inequality of Green's function*, preprint, http://fr.arxiv.org/abs/1311.3399.

[CK] L. Białas-Cież, M. Kosek, *Iterated function systems and Łojasiewicz–Siciak condition of Green's function*, Potential Anal. 34 (2011), 207–221.

[CC1] J. Chaumat, A.-M. Chollet, *Représentation intégrale de certaines classes de jets de Whitney*, in: The Madison Symposium on Complex Analysis (Madison, 1991), Contemp. Math. 137, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1992, 133–153.

[CC2] J. Chaumat, A.-M. Chollet, *Noyaux pour résoudre l'équation $\bar{\partial}$ dans des classes ultradifférentiables sur des compacts irréguliers de $\mathbb{C}^n$*, in: Several Complex Variables (Stockholm, 1987/1988), Math. Notes 38, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ 1993, 205–226.

[G] L. Gendre, *Inégalité de Markov singulières et approximation des fonctions holomorphes de la classe M*, Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 2005.

[K] M. Kosek, *Hölder continuity property of filled-in Julia sets in $\mathbb{C}^n$*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 2029–2032.

[PP] W. Pawłucki, W. Pleśniak, *Markov's inequality and $\mathcal{C}^\infty$ functions on sets with polynomial cusps*, Math. Ann. 275 (1986), 467–480.

[P1] R. Pierzchała, *Markov's inequality in the o-minimal structure of convergent power series*, Adv. Geom. 12 (2012), 647–664.

[P2] R. Pierzchała, *An estimate for the Siciak extremal function—subanalytic and o-minimal geometry approach*, J. Math. Anal. Appl. 430 (2015), 755–776.

[Pl] W. Pleśniak, *Markov's inequality and the existence of an extension operator for $\mathcal{C}^\infty$ functions*, J. Approx. Theory 61 (1990), 106–117.

[Po] M. C. Protin, *Condition* ŁS *pour les ensembles de Julia dans $\mathbb{C}^N$*, préprint.

[S1] J. Siciak, *Extremal plurisubharmonic function in $\mathbb{C}^n$*, Ann. Polon. Math. 39 (1981), 175–211.

[S2] J. Siciak, *Rapid polynomial approximation on compact sets in $\mathbb{C}^N$*, Univ. Iagel. Acta Math. 30 (1993), 145–154.

[Z] A. Zeriahi, *Meilleure approximation polynômiale et croissance des fonctions entières sur certaines variétés algébriques affines*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 37 (1987), N° 2, 79–104.