Annexe [1]).

W. Sierpiński, *Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles de points*, **1 - 6.**

Le résultat fondamental consiste en ce que l'*on peut, sans se servir des nombres transfinis, énumérer (effectivement) les points de tout ensemble clairsemé.*

La méthode de la démonstration repose sur l'élimination des nombres transfinis du raisonnement classique de Cantor-Bendixson. Cette méthode a suggéré à M. C. Kuratowski l'idée générale de l'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques [*Une méthode de l'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques*, Fund. Math. 3 (1922), pp. 76-108], qui embrasse [l. c., pp. 93-95] en particulier le raisonnement en question de M. Sierpiński.

Le résultat subsiste pour chaque espace métrique à base dénombrable effectivement donnée [cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matem. III, Warszawa-Lwów 1933, p. 115]. Il se laisse généraliser également à la somme d'une classe quelconque F *monotone* (c. à d. telle que de chaque couple d'ensembles appartenant à F l'un est contenu dans l'autre) d'ensembles clairsemés [W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles clairsemés*, Fund. Math. 3 (1922), pp. 46-49].

---

[1]) Les remarques qui suivent ont été recueillies et rédigées par M-lle S. Braun et M. E. Szpilrajn en collaboration avec M. C. Kuratowski.

W. Sierpiński, *Sur un ensemble ponctiforme connexe*, **7-10.**

La Note contient:

(1) une démonstration de *l'existence d'une décomposition du plan en deux parties totalement imparfaites* (c. à d. ne contenant aucun ensemble parfait),

(2) une simple démonstration de la *connexité du complémentaire de tout ensemble totalement imparfait sur le plan*,

d'où il résulte

(3) *l'existence d'un ensemble plan ponctiforme connexe*

et, de plus,

(4) *l'existence d'une décomposition du plan en deux ensembles ponctiformes connexes.*

Le théorème (1), qui remonte à M. F. Bernstein, subsiste (et se démontre d'une façon analogue) pour chaque espace indénombrable complet et séparable. Pour les généralisations de (1) appartenant à la Théorie générale des Ensembles, voir C. Kuratowski et W. Sierpiński, *Sur un problème de M. Fréchet concernant les dimensions des ensembles linéaires*, Fund. Math. 8 (1926), p. 193, et C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 267. L'importance de la décomposition considérée est due au fait que les ensembles obtenus sont non mesurables L, ne possèdent pas la propriété de Baire, etc. [Cf. cette *Annexe*, p. 232].

Dans l'énoncé (2), on peut remplacer „totalement imparfaits" par „*ponctiformes*". La démonstration exige alors certaines modifications [W. Sierpiński, *Sur les ensembles connexes et non connexes*, Fund. Math. 2 (1921), pp. 94-95; cf. aussi B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921), p. 236, th. XLII].

Quant à (3), MM. C. Kuratowski et W. Sierpiński [*Les fonctions de classe I et les ensembles ponctiformes connexes*, Fund. Math. 3 (1922), p. 308)] ont donné un exemple effectif d'un ensemble ponctiforme connexe: c'est notamment l'image de la fonction

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi(x-r_n)/2^n],$$

$\{r_n\}$ étant la suite des nombres rationnels et $\varphi(x)$ la fonction définie par les égalités:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sin(1/x) & \text{pour} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{pour} \quad x=0.\end{cases}$$

Le résultat (3) peut être précisé comme il suit: *il existe un ensemble plan connexe ne contenant aucun sous-ensemble connexe borné*. Voir S. Mazurkiewicz, *Sur l'existence d'un ensemble plan connexe ne contenant aucun sous-ensemble connexe borné*, Fund. Math. 2 (1921), pp. 96-103; l'existence d'un ensemble de ce genre qui est en outre biconnexe a été établie par MM. B. Knaster et C. Kuratowski [*Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921), p. 244, exemple (α_2)]. Ces démonstrations d'existence ne sont pas effectives; un exemple effectif est dû à M. G. Poprougénko [*Sur un ensemble connexe plan ne contenant aucune partie connexe bornée*, Fund. Math. 15 (1930), pp. 329-336].

Au sujet de (4), on a envisagé la classe borelienne des ensembles ponctiformes en question. M. S. Mazurkiewicz [*Sur la décomposition des domaines en deux sous-ensembles ponctiformes*, Fund. Math. 3 (1922), pp. 65-75] a établi l'existence d'une décomposition du plan en deux ensembles ponctiformes connexes dont l'un est un $F_{\sigma\delta}$ et l'autre $G_{\delta\sigma}$ et il a démontré que ces classes ne peuvent pas être remplacées par F_σ et G_δ; ensuite MM. C. Kuratowski et W. Sierpiński [l. c., Fund. Math. 3 (1922), p. 309] ont démontré qu'il existe une décomposition en question de la forme $(F_\sigma+G_\delta)+(F_\sigma\cdot G_\delta)$, mais qu'il n'en existe aucune de la forme $(F_\sigma+G_\delta)+(F_\sigma+G_\delta)$.

La généralisation suivante de (4) est due à M. G. T. Whyburn [*On the existence of totally imperfect and punctiform connected subsets in a given continuum*, Amer. Journ. of Math. 54 (1932), p. 148]: *chaque continu sans points de division locale se compose de deux ensembles connexes totalement imparfaits.*

W. Sierpiński, ***Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi*, 11 - 16.**

Le théorème reste vrai pour tous les *espaces métrisables, denses en soi et dénombrables* [cf. M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Paris 1928, p. 102].

Pour démontrer le théorème ainsi généralisé, il suffit:

1° de l'établir pour les ensembles linéaires (en simplifiant convenablement la démonstration de M. Sierpiński),

2° de s'appuyer sur le fait que chaque ensemble métrisable dénombrable (plus généralement: séparable de dimension 0) est homéomorphe à un ensemble linéaire[1]).

[1]) Voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 124.

S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables,* **17-27.**

M. A. Mostowski [*Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik*, Fund. Math. 29 (1937), pp. 34-53, en particulier pp. 48 et 51] a utilisé récemment les résultats de ce Mémoire dans une application de l'interprétation topologique (due à M. M. H. Stone) de la métamathématique.

S. Mazurkiewicz, *Un théorème sur les continus indécomposables,* **35-39; Z. Janiszewski et C. Kuratowski,** *Sur les continus indécomposables,* **210-222.**

Le résultat cité p. 35, renvoi 2, se trouve démontré p. 212, th. II.

La solution du problème posé p. 219, donnée par M. S. Mazurkiewicz dans l'ouvrage [1] cité plus loin, est la suivante: *la famille des composants d'un continu indécomposable est de puissance* $\mathfrak{c}$.

Pour d'autres propriétés générales des continus indécomposables, traitées dans des ouvrages publiés à partir de 1920, voir:

P. Alexandroff: *Über kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven*, Math. Ann. 96 (1927), pp. 512-554, en particulier pp. 535-540.

M. Charpentier: [1] *Sur les courbes fermées et leurs bouts premiers*, C. R. 196 (1933), pp. 1195-1197; [2] *Sur quelques propriétés des courbes de M. Birkhoff*, C. R. 198 (1934), pp. 701-703; [3] *Sur quelques propriétés des courbes de M. Birkhoff*, Bull. Soc. Math. de France 62 (1934), pp. 193-224; [4] *Sur les courbes fermées analogues aux courbes de M. Birkhoff*, Journ. de math. (9) 14 (1935), pp. 1-48.

D. van Dantzig: *Über topologisch homogene Kontinua*, Fund. Math. 15 (1930), pp. 102-125, en particulier pp. 107-109.

S. Eilenberg: *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. 26 (1936), pp. 61-112, en particulier pp. 81-83 et 87 (corollaire 24).

B. Knaster: [1] *Un continu dont tout sous-continu est indécomposable*, Fund. Math. 3 (1922), pp. 247-286; [2] *Sur les coupures singulières du plan*, Fund. Math. 7 (1925), pp. 264-289,

en particulier pp. 274-284; [3] *Přehled teorie nerozložitelných kontinuí* (*Rapport sur la théorie des continus indécomposables*, en tchèque), Časopis Mat. Fys. 62 (1933), pp. 310-337.

B. Knaster et C. Kuratowski: *Sur les continus non-bornés*, Fund. Math. 5 (1924), pp. 23-58, surtout § 3, pp. 36-51.

C. Kuratowski: [1] *Théorie des continus irréductibles entre deux points I*, Fund. Math. 3 (1922), pp. 200-230, en part. § 4, pp. 209-213; [2] *Sur les coupures irréductibles du plan*, ibid. 6 (1924), pp. 130-145, en part. pp. 137-139; [3] *Théorie des continus irréductibles entre deux points II*, ibid. 10 (1927), pp. 225-275, en part. pp. 233-236, 239, 243, 245-248; [4] *Sur un problème de choix concernant les continus indécomposables*, Ann. Soc. Pol. de Math. 6 (1927), pp. 126-127; [5] *Sur la structure des frontières communes à deux régions*, Fund. Math. 12 (1928), pp. 20-42, en part. pp. 23 et 36-39; [6] *Über geschlossene Kurven und unzerlegbare Kontinua*, Math. Ann. 98 (1928), pp. 339-405; [7] *Sur une condition qui caractérise les continus indécomposables*, Fund. Math. 14 (1929), pp. 116-117; [8] *Sur un problème topologique concernant les systèmes „strictement transfinis"*, ibid. 19 (1932), pp. 252-256, en part. pp. 253-255.

S. Mazurkiewicz: [1] *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math. 10 (1927), pp. 305-310; [2] *Sur les points accessibles des continus indécomposables*, ibid. 14 (1929), pp. 107-115; [3] *Un théoreme sur l'accessibilité des continus indécomposables*, ibid. 14 (1929), pp. 271-276; [4] *Sur les continus absolument indécomposables*, ibid. 16 (1930), pp. 151-159; [5] *Sur l'existence des continus indécomposables*, ibid. 25 (1935), pp. 327-328.

P. M. Swingle: *Two types of connected sets*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), pp. 254-258.

P. Urysohn: [1] *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes*, Fund. Math. 8 (1926), pp. 225-356, en part. pp. 225-256; [2] *Une propriété des continus de M. Knaster*, ibid. 10 (1927), pp. 175-176; [3] *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes II*, Verh. Kon. Akad. Amsterdam 13 (1928), pp. 6-172, en particulier pp. 15-16.

L. Vietoris: *Stetige Mengen*, Monatshefte f. Mathem. u. Phys. 31 (1921), pp. 173-204, en particulier pp. 195-204.

G. T. Whyburn: *A generalized notion of accessibility*, Fund. Math. 14 (1929), pp. 311-326, en particulier pp. 318-319.

W. A. Wilson: [1] *On the structure of a continuum limited and irreducible between two points*, Amer. Journal of Math. 48 (1926), pp. 147-168, en particulier 155-162; [2] *On bounded regular frontiers in the plane*, Bull. Amer. Math. Soc. 34 (1928), pp. 81-90.

C. Kuratowski, ***Une définition topologique de la ligne de Jordan,*** **40-43; W. Sierpiński,** ***Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne,*** **44-60; S. Mazurkiewicz,** ***Sur les lignes de Jordan,*** **166-209.**

Le terme *ligne de Jordan* n'est plus employé actuellement, pour éviter toute confusion avec le terme *„courbe de Jordan“* *(arc simple* et *courbe simple fermée)*; on appelle à présent *continu péanien* toute image continue de l'intervalle fermé *(stetiges Streckenbild)*.

Pour des conditions analogues à celle de M. Kuratowski, p. 41, voir H. Hahn, *Über die Komponenten offener Mengen*, Fund. Math. 2 (1921), pp. 189-192, où la notion d'ensemble connexe est employée au lieu de celle de semi-continu.

Les Mémoires de MM. Sierpiński et Mazurkiewicz contiennent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un continu soit une image continue de l'intervalle fermé (c. à d. qu'il soit un continu péanien). Devenues désormais classiques, ces conditions sont connues sous le nom de *condition* (*S*) *de M. Sierpiński* et de *connexité locale de MM. Mazurkiewicz et Hahn.* A l'heure actuelle, on déduit facilement la suffisance de ces conditions des deux théorèmes suivants:

1) chaque espace compact est une image continue du discontinu de Cantor [voir p. ex. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig 1935, p. 197, V];

2) chaque couple de points d'un espace connexe, localement connexe et compact se laisse unir par un arc [cf. H. Hahn, *Über stetige Streckenbilder*, Atti Congr. Internaz. Matem. Bologna 1928, 2, p. 217].

Pour l'extension de ce dernier théorème, dû à M. S. Mazurkiewicz (cf. ce volume, p. 201, th. IX) et à M. R. L. Moore, aux espaces complets, voir C. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fund. Math. 15 (1930), pp. 301-309, surtout pp. 306-309; K. Menger, *Zur Begründung einer axiomatischen Theorie* *der Dimension*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 36 (1929), pp. 193-218 (en part. p. 212); N. Aronszajn, *Über die Bogenverknüpfung in topologischen Räumen*, Fund. Math. 15 (1930), pp. 228-247.

Pour une simple démonstration de la suffisance des conditions considérées, voir aussi G. T. Whyburn, *On the construction of simple arcs*, Amer. Journ. of Math. 54 (1932), p. 536.

La condition (S) a été étudiée particulièrement par M. R. L. Moore [*Concerning connectedness im kleinen and a related property*, Fund. Math. 3 (1922), p. 232-237] et par M. G. T. Whyburn [*A note on spaces having the S property*, Amer. Journ. of Math. 54 (1932), pp. 536-538].

Pour une analyse plus détaillée des notions de connexité locale, de distance relative et d'oscillation (pp. 166-179), voir N. Aronszajn, *Einige Bemerkungen über den Begriff des lokalen Zusammenhanges*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 37 (1930), pp. 241-252 et G. T. Whyburn, *A certain transformation on metric spaces*, Amer. Journ. of Math. 54 (1932), pp. 367-376.

Le th. IV, p. 176, a été généralisé par M. C. Zarankiewicz [*Sur les points de division dans les ensembles connexes*, Fund. Math. 9 (1927), p. 124-171, en particulier pp. 132-134] comme il suit: *tout point de second genre d'un continu est situé sur un continu de convergence.*

Pour une généralisation du th. X, p. 205, voir C. Kuratowski, *Théorie des continus irréductibles entre deux points I*, Fund. Math. 3 (1922), p. 221.

Les Mémoires de M. W. Sierpiński et M. S. Mazurkiewicz ont servi comme point de départ à des nombreux travaux publiés dans Fund. Math. et ailleurs. Pour des indications bibliographiques plus détaillées sur ce sujet, voir K. Menger, *Kurventheorie*, Leipzig 1933.

S. Mazurkiewicz, ***Sur un ensemble G_δ ponctiforme qui n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire*****, 61-81.**

Un simple exemple d'un G_δ jouissant de ces propriétés a été trouvé par MM. Kuratowski et Sierpiński; il est cité dans cette *Annexe*, p. 226.

Cependant les lemmes suivants présentent un intérêt par eux-mêmes:

(1) *dans un espace compact, toute coupure entre deux points contient une coupure irréductible entre ces points* (par suite de l'*inductivité* de la notion de coupure entre a et b; cf. p. 63, th. I);

(2) *étant donnée sur le plan (ou,* comme on voit aisément, *dans un espace localement connexe arbitraire) une coupure (fermée) C entre a et b, si A désigne la région déterminée par C qui contient a et si B désigne la région déterminée par $\bar{A}$ qui contient b, la frontière de B est une coupure irréductible entre a et b* (p. 65).

L'hypothèse de l'auteur (p. 81) que tout ensemble frontière est homéomorphe à un ensemble non-dense a été démontrée pour l'espace euclidien à n dimensions par M. W. Sierpiński [*Sur une propriété des ensembles frontières*, Fund. Math. 3 (1922), pp. 7-13].

W. Wilkosz, *Sugli insiemi non misurabili L*, **82-92.**

En remplaçant dans les théorèmes du § 3 l'hypothèse: „S'il existe un ensemble non mesurable L ...“ par la suivante: „S'il existe une décomposition de la droite en deux ensembles totalement imparfaits ...“, on obtient des propositions faciles à démontrer.

Quant à l'existence d'une telle décomposition, voir ce volume pp. 8 et 226.

H. Steinhaus, *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive*, **93-104.**

Soit $D(E)$ l'ensemble de toutes les distances entre les points d'un ensemble linéaire E. Voici l'énoncé et une courte démonstration du théorème principal de cet ouvrage (Th. VIII):

(1) *E étant un ensemble mesurable L de mesure $m(E)>0$, il existe un $\delta>0$ tel que l'ensemble $D(E)$ contient l'intervalle $\langle 0, \delta \rangle$.*

Soit $\varepsilon>0$ un nombre n'appartenant pas à $D(E)$. Etant donné un ensemble linéaire Z, désignons par Z^* l'image de translation $x'=x+\varepsilon$ de l'ensemble Z et par I un intervalle arbitraire de longueur ε.

On a $E \cdot E^*=0$ et par conséquent $(EI)^* \subset I^*-E$, d'où il résulte successivement:

$$m(EI)^* \leqslant m(I^*-E)=m(I^*)-m(EI^*)=\varepsilon-m(EI^*),$$

$$m(EI)+m(EI^*) \leqslant \varepsilon, \qquad m[E(I+I^*)]/m(I+I^*) \leqslant 1/2.$$

Il est ainsi établi que l'on a $m(EJ)/m(J) \leqslant 1/2$ pour chaque intervalle J de longueur $2\varepsilon > 0$ où ε non $\epsilon D(E)$.

Si l'ensemble $D(E)$ ne contenait aucun intervalle $\langle 0, \delta \rangle$, il existerait une suite décroissante $\varepsilon_n \to 0$ où ε non $\epsilon D(E)$ et, d'après ce qui précède, il n'existerait aucun point de densité de l'ensemble E, de sorte qu'on aurait $m(E) = 0$.

Le théorème (1) a été généralisé par M. S. Ruziewicz [*Contribution à l'étude des ensembles des distances de points*, Fund. Math. 7 (1925), pp. 141-143] comme il suit:

(2) *E étant un ensemble mesurable L et $m(E) > 0$, il existe pour chaque système $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de nombres positifs et pour chaque nombre $d > 0$ suffisamment petit, un système $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ de points de E tels que l'on a $x_{i+1} - x_i = k_i d$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Il résulte de (2) que si la moyenne arithmétique d'aucun couple de nombres de E n'appartient à E, on a $m_i(E) = 0$.

M. W. Sierpiński [*Sur l'ensemble des distances entre les points d'un ensemble*, Fund. Math. 7 (1925), pp. 144-148] a démontré plusieurs théorèmes concernant les rapports entre les propriétés des ensembles E et $D(E)$, telles que la mesurabilité B, la mesurabilité L, etc.

W. Sierpiński, ***Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel*****, 105-111.**

Les principaux résultats sont les suivants:

(1) *Il existe une base de Hamel $\mathfrak{B}$ de mesure nulle* (p. 107).

(2) *Toute base de Hamel est de mesure intérieure nulle* (p. 107).

(3) *Il existe une base de Hamel $\mathfrak{B}'$ non mesurable L* [c'est notamment la base définie par M. Burstin (p. 108, renvoi 1), possédant des points communs avec chaque ensemble parfait].

(4) *Aucune base de Hamel n'est un ensemble analytique* (p. 111).

Remarquons à propos de (1) qu'il résulte aisément de la définition de la base $\mathfrak{B}$ qu'elle est un ensemble *non-dense*, donc — à plus forte raison — de I-e catégorie. Une série d'autres théorèmes sur les rapports entre la base de Hamel et la notion de catégorie a été démontrée par M. W. Sierpiński [*La base de M. Hamel et la propriété de Baire*, Publ. Math. de l'Univ. Belgrade, 4 (1935), pp. 221-224], à savoir:

(5) *Si* $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, *il existe une base de Hamel jouissant de la propriété* (S) (c. à d. ne possédant aucun sous-ensemble indénombrable de mesure nulle), *donc toujours de I-e catégorie* (c. à d. de I-e catégorie sur chaque ensemble parfait).

(6) *Si* $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, *il existe une base de Hamel qui est un ensemble de Lusin* (c. à d. ne possédant aucun sous-ensemble indénombrable de I-e catégorie), *donc jouissant de la propriété* (C) (c. à d. se laissant couvrir par une série d'intervalles de longueurs données d'avance).

(7) *Le complémentaire d'une base de Hamel quelconque est partout de II-e catégorie* — proposition analogue à (2) au point de vue de l'analogie entre mesure et catégorie.

(8) *Il existe une base de Hamel ne jouissant pas de la propriété de Baire* (notamment la base précitée de M. Burstin).

Le th. (2) a été généralisé par M. S. Ruziewicz [*Sur une propriété de la base hamelienne*, Fund. Math. 26 (1936), pp. 56-58] comme il suit:

(9) *Pour chaque base de Hamel* $\mathfrak{B}$, *la somme de toute suite d'ensembles superposables avec* $\mathfrak{B}$ *est de mesure intérieure nulle.*

Le th. (9) est lié au problème de l'extension de la mesure lebesguienne [voir E. Szpilrajn, *Sur l'extension de la mesure lebesguienne*, Fund. Math. 25 (1935), pp. 551-558 et W. Sierpiński, *Remarque sur les translations d'ensembles*, Fund. Math. 26 (1936), pp. 59-61].

Il est à remarquer au sujet de (2) et (7) qu'on peut, d'autre part, établir le théorème suivant:

(10) *Il existe une base de Hamel contenant un ensemble parfait.*

C'est une conséquence facile d'un résultat de M. J. von Neumann [*Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen*, Math. Ann. 99 (1928), pp. 134-141] où il a construit un ensemble N contenant un ensemble parfait, composé de nombres algébriquement indépendants. Tel est notamment l'ensemble des valeurs de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{2^{Enx}} / 2^{2^{n^2}}\right) \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

Les nombres qui appartiennent à l'ensemble X étant linéairement indépendants, il est évident que X est contenu dans une base de Hamel.

La démonstration de (4) est basée sur le corollaire II, p. 110. Ce dernier peut être établi immédiatement à l'aide de la méthode symbolique de MM. C. Kuratowski et A. Tarski [1]). Soit notamment $r_1, r_2, \ldots$ la suite des nombres rationnels et désignons par $R_n(E)$ l'ensemble des nombres de la forme $r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n$, où les coefficients r_k sont des nombres rationnels ($k = 1, 2, \ldots, n$) et $x_k \in E$. On a alors l'équivalence

$$x \in R_n(E) \equiv \sum_{(l_1,\ldots,l_n)} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)} \Big\{ [x = r_{l_1}x_1 + r_{l_2}x_2 + \ldots + r_{l_n}x_n] \prod_{k=1}^{\infty} (x_k \in E) \Big\}$$

dont il résulte que si l'ensemble E est analytique, l'ensemble $R_1(E) + R_2(E) + \ldots$ l'est également.

Pour de nombreuses applications de la base de Hamel voir: cette *Annexe*, p. 239; A. Łomnicki, *Sur les fonctions multipériodiques uniformes d'une variable réelle* (en polonais), C. R. Soc. Sci. de Varsovie 11 (1918), p. 809-846, en particulier p. 833; S. Ruziewicz, *Une application de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ à la décomposition de la droite en ensembles superposables non mesurables*, Fund. Math. 5 (1924), pp. 92-95; W. Sierpiński, *Sur une fonction non mesurable, partout presque symétrique*, Acta Scient. Mathem. Szeged 8 (1936), pp. 1-6 en part. p. 5; M. Souslin (rédigé par C. Kuratowski), *Sur un corps non dénombrable de nombres réels*, Fund. Math. 4 (1923), pp. 311-315, en particulier p. 314, renvoi 3.

W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, 112-115.

L'auteur démontre l'existence d'*un ensemble plan S non mesurable L superficiellement et qui a au plus deux points communs avec toute droite.*

---

[1]) Cette méthode se trouve développée dans le travail de M. Kuratowski: *Evaluation de la classe borelienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*, Fund. Math. 17 (1930), pp. 249-272; cf. aussi C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 168.

Soit $s(x,y)$ la fonction caractéristique de l'ensemble S. On peut supposer que S est contenu dans $\mathcal{I}^2$, c. à d. dans le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Le résultat en question peut être précisé davantage comme il suit:

Il existe un ensemble plan T non mesurable L superficiellement, ne jouissant pas de la propriété de Baire [1]) *et qui a au plus deux points communs avec chaque droite.*

Désignons par $t(x,y)$ la fonction caractéristique de T.

Pour obtenir l'ensemble T, il suffit de former la suite (1), p. 112, de tous les ensembles plans fermés de mesure >0 et de tous les ensembles plans G_δ de II-e catégorie (dans le plan). En choisissant les points q_α, il faut s'appuyer sur le fait que, H étant un G_δ plan de II-e catégorie, il existe, pour chaque droite, une droite parallèle D sur laquelle l'ensemble HD est de II-e catégorie [2]).

Voici quelques applications des ensembles S et T:

I. Discussion du principe de Cavalieri et du théorème de Fubini. M. E. Landau a demandé si, dans le principe de Cavalieri, il est nécessaire de supposer la mesurabilité des volumes. L'existence de l'ensemble S permet de démontrer facilement que cette hypothèse est essentielle.

Soit, en effet, Q l'ensemble de tous les points (x,y,z) de l'espace pour lesquels $(x,y) \epsilon S$ et $0 \leqslant z \leqslant 1$. L'ensemble Q est non mesurable (dans l'espace) et cependant tout plan $x=c$ le coupe suivant un ensemble de mesure nulle.

On démontre de la même façon que l'hypothèse de la mesurabilité est essentielle aussi dans le théorème de Fubini.

---

[1]) „au sens large"; cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 49.

[2]) C'est une conséquence du théorème: *Si, pour tout nombre a, à l'exception d'un ensemble de nombres de I-e catégorie, la droite $x=a$ rencontre l'ensemble plan Z jouissant de la propriété de Baire, dans un ensemble de points, de I-e catégorie (sur cette droite), l'ensemble Z est de I-e catégorie (sur le plan).*

Ce théorème est une généralisation immédiate d'un théorème de M. C. Kuratowski (*Topologie I*, p. 143) concernant les images des fonctions.

Il résulte directement des proprietés de l'ensemble S que

$$\int_0^1\int_0^1 s(x,y)\,dx\,dy = 0 = \int_0^1\int_0^1 s(x,y)\,dy\,dx$$

(les intégrales étant considérées au sens de Riemann ou au sens de Lebesgue), tandis que la fonction $s(x,y)$ n'est pas mesurable L dans le carré $\mathcal{J}^2$. [Voir à ce sujet: W. Sierpiński, *Sur les rapports entre l'existence des intégrales...*, ce volume, p. 147; C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin 1927, p. 705; S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, Monogr. Matem. II, Warszawa-Lwów 1933, p. 75; S. Saks, *Theory of the Integral*, Monogr. Matem. VII, Warszawa-Lwów 1937, p. 81; M. Kondô, *Sur l'hypothèse de M. B. Knaster dans la théorie des ensembles de points*, Journ. Hokkaido Univ. 6 (1937), pp. 1-20, en particulier p. 20].

II. Discussion du théorème de Lebesgue sur les fonctions de deux variables. Il existe une série de théorèmes qui rentrent dans le schéma suivant:

Si une fonction $f(x,y)$ est continue par rapport à x (pour chaque y fixé) et possède une propriété donnée (a) par rapport à y (pour chaque x fixé), cette fonction possède une certaine propriété (b) par rapport au couple des variables (x,y).

Ce théorème est vrai en particulier dans les cas où:

1) (a) désigne la mesurabilité B de classe α et (b) celle de classe $\alpha+1$ (c'est le théorème de M. H. Lebesgue[1]);

2) (a) et (b) désignent la mesurabilité B;

3) (a) et (b) désignent la mesurabilité L;

4) (a) et (b) désignent la propriété de Baire[2];

et pour certaines autres propriétés[3]).

---

1) Cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 180.

2) „au sens large"; C. Kuratowski, l. c., p. 194.

3) E. Szpilrajn, *Sur une classe de fonction de M. Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles*, Fund. Math. 24 (1934), p. 30, et *Sur les ensembles et les fonctions absolument mesurables* (en polonais), C. R. Soc. Sci. de Varsovie 30 (1937), p. 52.

Or, dans tous ces théorèmes *la continuité par rapport à x ne peut pas être remplacée même par la semi-continuité*: la fonction $t(x,y)$ est semi-continue par rapport à chacune des variables, non mesurable L par rapport à (x,y) et ne jouit pas de la propriété de Baire par rapport à (x,y). [Cf. W. Sierpiński, *Funkcje przedstawialne analitycznie*, Lwów 1925, p. 68 et C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 180].

Il est encore à remarquer que:

1° l'on peut donner un exemple effectif d'une fonction semi-continue supérieurement par rapport à x et y séparément, mais non mesurable B par rapport au couple (x,y): telle est notamment la fonction caractéristique d'un ensemble non borelien situé sur un segment non parallèle à aucun des axes de coordonnées [cf. p. ex. C. Kuratowski, l. c., p. 189];

2° toute fonction semi-continue supérieurement par rapport à x et inférieurement par rapport à y est de classe 1 par rapport à (x,y) [S. Kempisty, *Sur les fonctions semi-continues par rapport à chacune de deux variables*, Fund. Math. 14 (1929), p. 237].

III. Extension de la mesure lebesguienne. Soit $\mathbf{K}$ une famille d'ensembles plans, invariante par rapport à l'addition dénombrable, passage au complémentaire et isométrie, contenant tous les rectangles et un ensemble non mesurable L. Soit $\mu(K)$ où $K \epsilon \mathbf{K}$ une fonction non négative d'ensemble, satisfaisant aux conditions connues de M. Lebesgue, c. à d. une fonction complètement additive, prenant des valeurs égales pour les ensembles superposables et égale à 1 pour le carré $\mathcal{J}^2$. Nous dirons alors que μ est une *extension parfaite de la mesure lebesguienne* [voir E. Szpilrajn, *Sur l'extension de la mesure...*, Fund. Math. 25 (1935), pp. 551-558].

Voici l'exemple d'une telle extension.

Soit $\mathbf{S}$ la famille des ensembles plans dont chacun admet un ensemble au plus dénombrable des points communs avec toute droite. Désignons par $\mathbf{K}$ la classe de tous les ensembles plans K de la forme

$$(*) \qquad K = M + S_1 - S_2,$$

où $S_1, S_2 \epsilon \mathbf{S}$ et M est un ensemble mesurable L. Posons $\mu(K) = m(M)$ pour chaque ensemble K de la forme $(*)$, m désignant la mesure lebesguienne superficielle.

On voit facilement que le nombre μ ne dépend que de l'ensemble K et que la fonction ainsi définie constitue une extension parfaite de la mesure lebesguienne [E. Szpilrajn, l. c., pp. 553-554]; en particulier c'est l'ensemble S qui est un élément non mesurable L de la famille $\mathbf{S}$.

W. Sierpiński, *Sur l'équation fonctionelle* $f(x+y)=f(x)+f(y)$. **116-122; S. Banach,** *Sur l'équation fonctionelle* $f(x+y)=f(x)+f(y)$. **123-124.**

M. G. Hamel [*Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung* $f(x+y)=f(x)+f(y)$, Math. Ann. 60 (1905), p. 459] a démontré (à l'aide de l'ainsi dite „base de Hamel") l'existence d'une fonction satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$(*)\qquad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

et qui n'est pas de la forme Ax.

M. S. Banach et M. W. Sierpiński donnent les démonstrations du théorème suivant (démontré auparavant par M. Fréchet, cf. p. 116, renvoi 1):

(1) *Chaque fonction mesurable* L, *satisfaisant à l'équation* (*) *est continue* (donc, d'après Cauchy, de la forme Ax).

Il résulte de ce théorème que la fonction définie par M. Hamel est non mesurable L.

Le théorème (1) a été généralisé par M. W. Sierpiński [*Sur une propriété des fonctions de M. Hamel*, Fund. Math. 5 (1924), pp. 334-336] comme il suit:

(2) *Chaque fonction* f *satisfaisant à l'équation* (*) *et majorée par une fonction* $\varphi(x)$ *mesurable* L *est continue.*

Un théorème de M. W. Sierpiński, [*Sur les fonctions convexes mesurables*, ce volume, p. 127] présente une généralisation du théorème (1) dans un autre sens.

M. S. Kaczmarz a démontré un théorème analogue à (1) pour une autre équation [*Sur l'équation fonctionnelle* $f(x)+f(x+y)=\varphi(y)\cdot f(x+\frac{1}{2}y)$, Fund. Math. 6 (1924), pp. 122-129].

M. M. Kac a donné récemment (à l'aide du domaine des nombres complexes) une démonstration plus courte du théorème (1); sa méthode permet de démontrer les théorèmes analogues à (1) pour une série de diverses équations fonctionnelles [*Une remarque sur les équations fonctionnelles*, Comment. Math. Helvet. 9 (1936-7), pp. 170-171].

On peut remplacer dans les th. (1) et (2) *la mesurabilité L* par *la propriété de Baire* (au sens large)[1]; quant au th. (1), voir W. Sierpiński, l. c. Fund. Math. 5, p. 336. Les théorèmes ainsi modifiés peuvent être énoncés pour les fonctions dont les arguments et les valeurs appartiennent à des divers types d'espaces. Une fonction („opération") $f(x)$ dont les arguments parcourent un espace X de type (G) [voir S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monogr. Matem. I, Warszawa-Lwów 1932, p. 21] et dont les valeurs appartiennent à un autre espace Y du même type, est dite *additive*, lorsqu'elle satisfait à l'équation $(*)$. Elle s'appelle *linéaire*, lorsque'elle est à la fois additive et continue.

M. S. Banach démontre dans son livre [l. c., p. 23] le théorème suivant sur les fonctions qui transforment un *espace X de type* (G) en sous-ensembles d'un autre espace du même type:

(i) *Toute fonction f continue sur un résiduel de X*[2]) *et additive est linéaire.*

Pour les *espaces vectoriels normés* on a le théorème suivant [S. Banach, ibid., p. 54]:

(ii) *Pour qu'une fonction additive $f(x)$ définie dans un espace X soit linéaire, il faut et il suffit qu'il existe un nombre M tel que l'on ait $|f(x)| \leqslant M|x|$ pour tout $x \in X$.*

Pour les *espaces de type* (B), on a le théorème suivant [S. Banach, ibid., p. 78]:

---

[1]) Pour la définition de cette propriété voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 49.

[2]) Un sous-ensemble E d'un espace X s'appelle *résiduel* de X, lorsque $X-E$ est un ensemble de I-e catégorie dans X. La classe des fonctions définies sur X dont chacune est continue sur un résiduel de X (c. à d. „continues en négligeant les ensembles de I-e catégorie") embrasse toutes les fonctions mesurables B. Dans le cas où l'espace des valeurs est séparable, cette classe coïncide avec celle des fonctions qui jouissent de la propriété de Baire (au sens large). Cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 192.

(iii) *Soient f et φ deux fonctions définies dans un espace X, dont la première est additive et la seconde continue sur un résiduel de X; soit $|f(x)| \leqslant |\varphi(x)|$ pour chaque $x \epsilon X$. Alors f est une fonction linéaire.*

W. Sierpiński, *Sur les fonctions convexes mesurables,* **125-128.**

L'auteur définit la *convexité* d'une fonction réelle $f(x)$ dans l'intervalle $\langle a, b \rangle$ par la condition suivante:

$$(1)\qquad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \text{pour} \quad a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b.$$

Il existe une autre définition de la convexité, à savoir celle par la condition:

$$(2)\qquad f\left(\frac{px_1+qx_2}{p+q}\right) \leqslant \frac{pf(x_1)+qf(x_2)}{p+q} \quad \text{pour} \quad a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b \text{ et } p, q > 0.$$

Ces définitions ne sont pas équivalentes en toute généralité et le problème de leur équivalence est lié avec le sujet de l'ouvrage en question.

La condition (2) entraîne directement la condition (1). D'autre part, on démontre que, dans le domaine des fonctions *continues*, la condition (1) entraîne la condition (2) [J. L. W. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes,* Acta Math. 30 (1906), p. 180; cf. aussi G. Polyà und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I,* 1925, Aufg. 74, pp. 53 et 209].

On montre aussi que les fonctions satisfaisant à la condition (2) sont *continues à l'intérieur de l'intervalle* $\langle a, b \rangle$. En effet, chaque fonction satisfaisant à la condition (2) est bornée, car l'inégalité (2) entraîne la suivante:

$$f\left(\frac{p_1 a_1 + p_2 b_2}{p+q}\right) \leqslant \operatorname{Max}\,[f(a_1), f(b_2)].$$

Par conséquent, le théorème 1, p. 126, entraîne la continuité de f en chaque point intérieur de l'intervalle $\langle a, b \rangle$.

Les conditions (1) et (2) ne sont pas équivalentes, car il existe des fonctions non mesurables L et satisfaisant à la condition (1), notamment des solutions discontinues de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$; cf. cette *Annexe*, p. 239.

Un livre consacré spécialement aux fonctions convexes: W. Fenchel, *Konvexe Funktionen*, est annoncé par la collection Ergebnisse der Mathematik.

Dans le domaine des fonctions de deux variables, le rôle analogue à celui des fonctions convexes revient aux *fonctions sousharmoniques*. A ce propos, voir p. ex. T. Radó, *Subharmonic functions*, Ergebnisse der Mathematik 5, Heft 1, Berlin 1937.

Le théorème de M. E. Borel sur les fonctions mesurables, cité au renvoi, p. 127, est une conséquence immédiate du théorème suivant: $\{E_n\}$ *étant une suite descendante d'ensembles mesurables de mesure finie, on a* $\lim\limits_n m(E_n)=m(E_1\cdot E_2\cdot\ldots)$ [1].

C. Kuratowski, *Sur la notion d'ensemble fini*, **129-131.**

Pour d'autres définitions de la notion d'ensemble fini, voir A. Tarski, *Sur les ensembles finis*, Fund. Math. 6 (1924), pp. 45-95.

W. Sierpiński, *Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire*, **132-141.**

Les suites transfinies de nombres réels ont été traitées par M. P. Dienes [*Sur les suites transfinies de nombres réels*, C. R. 179 (1923), pp. 67-69]. Les suites de type Ω, considérées par M. Sierpiński, constituent un cas particulier des suites que M. Dienes appelle „transdénombrables". En particulier, M. Dienes généralise la proposition énoncée p. 133.

La notion de convergence transfinie de nombres réels a été utilisée par M. W. Sierpiński dans la définition de l'*itération d'ordre transfini* d'une fonction [*Sur les itérations d'ordre transfini*, Bull. Acad. Roumaine 18 (1935/36), pp. 1-5] et dans la construction d'une fonction qui admet les itérations de tout ordre $\leqslant\Omega$, différentes deux à deux.

Plusieurs problèmes de convergence transfinie ont été traités par M. H. Malchair dans les ouvrages: [1] *Sur les suites et séries transfinies*, Bull. Soc. Roy. des Sc. de Liège

[1]) Voir p. ex. S. Saks, *Theory of the Integral*, Monogr. Matem. VII (1937), p. 16, th. (9.1).

1932, pp. 47-50; [2] *Sur les suites et séries transfinies de fonctions non décroissantes*, ibid. 1932, pp. 75-77; [3] *Un théorème sur les suites transfinies de fonctions*, ibid. 1932, pp. 1-4; [4] *Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire*, Mém. Soc. Roy. de Liège (3) 18 (1932), pp. 3-7; [5] *Quelques nouvelles considérations relatives aux suites et séries transfinies*, Bull. Soc. Roy. Sc. de Liège 1934, pp. 133-140; [6] *Quelques propriétés des suites et des séries transfinies*, C. R. Soc. Sc. de Varsovie 27 (1934), pp. 51-56; [7] *Sur les suites transfinies absolument convergentes*, Bull. Soc. Roy. Sc. de Liège 1934, pp. 222-231.

Le th. 1, p. 133, qui concerne les fonctions *continues*, a été généralisé par M. Malchair [3] aux *suites de fonctions dont tous les points de discontinuité appartiennent au même ensemble dénombrable*. M. Malchair [6, pp. 51-52; 5, p. 133] a défini aussi la convergence uniforme d'une suite (de type $\leqslant \Omega$) de fonctions $\{f_\xi\}$ et démontré qu'elle équivaut à l'existence d'un nombre transfini μ tel que $f_\xi = f_\eta$ pour $\xi > \eta > \mu$.

Quant aux *séries* transfinies (pp. 134-135), M. Malchair a démontré [6, p. 53; 5, pp. 136-137] que

1⁰ la somme de chaque série transfinie (de type $\leqslant \Omega$) uniformément convergente de fonctions mesurables B de classe $\leqslant \alpha$ est également mesurable B de classe $\leqslant \alpha$;

2⁰ il existe une fonction de classe 2, somme d'une série transfinie de fonctions semi-continues supérieurement.

Le problème posé à la fin de **2**, p. 135, a été résolu par M. M. Lavrentieff [*Sur la représentation des fonctions mesurables B par les séries transfinies de polynômes*, Fund. Math. 5 (1924), pp. 123-129], en démontrant le théorème: *Pour qu'une fonction soit mesurable B de classe* $\leqslant \alpha$, *il faut et il suffit qu'elle soit représentable par une série de type* ω^α *de polynômes*.

M. Malchair a établi [4, p. 4; 5, pp. 134-135] pour la semi-continuité (inférieure et supérieure) un théorème analogue à celui de **5**, p. 138.

Le résultat énoncé dans **8**, p. 141, peut être précisé davantage: on peut donner un exemple effectif d'une suite transfinie de type Ω de fonctions mesurables B de classes croissantes (au sens de la classification de Baire). C'est une conséquence du fait que les constituantes d'un ensemble „criblé" au moyen de l'ainsi dit *crible de Lebesgue* sont des ensembles boreliens de classes croissantes [N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur les classes de constituantes d'un complémentaire analytique*, C. R. 189 (1929), pp. 794-796; N. Lusin, *Sur une famille des complémentaires analytiques*, Fund. Math. 17 (1931), pp. 4-7; *Sur les classes de constituantes des complémentaires analytiques*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa (2), 2 (1933), pp. 13-16; *Sur les ensembles analytiques nuls*, Fund. Math. 25 (1935), pp. 122-125.

W. Sierpiński, ***Sur le rapport entre l'existence des intégrales...,*** **142-147.**

A ce sujet voir aussi cette *Annexe*, pp. 236-237.

M. G. Fichtenholz [*Sur une fonction de deux variables sans l'intégrale double*, Fund. Math. 6 (1924), pp. 30-36] a construit *une fonction mesurable* $f(x,y)$ *qui admet les intégrales lebesguiennes*:

$$(*)\qquad \int_E\int_F f(x,y)\,dx\,dy = \int_F\int_E f(x,y)\,dy\,dx$$

pour chaque couple d'ensembles mesurables E et F situés sur l'intervalle $\mathcal{J}=\langle 0,1\rangle$, mais qui n'est pas sommable dans le carré $\mathcal{J}^2$.

M. A. Zygmund a donné un simple exemple d'une fonction f non sommable, satisfaisant à la condition (plus faible que (*)):

$$(\overset{*}{*})\qquad \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$$

[voir S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, p. 75]. Voici cet exemple:

Soit $\{Q_n\}$ une suite de carrés situés dans le carré $\mathcal{J}^2$, n'empiétant pas les uns sur les autres et dont les diagonales sont situées sur la diagonale de $\mathcal{J}^2$. Chaque carré Q_n est subdivisé en quatre. On pose: $f(x,y)=1/m(Q_n)$ dans l'intérieur d'un couple des carrés opposés, obtenus par la subdivision de Q_n, $f(x,y)=-1/m(Q_n)$ dans l'intérieur de l'autre couple et $f(x,y)=0$ partout ailleurs.

M. Saks a observé [l. c., p. 75] que l'on peut construire facilement une fonction mesurable satisfaisant à la condition $(\overset{*}{*})$, mais qui n'est sommable dans aucun rectangle situé dans $\mathcal{J}^2$.

S. Ruziewicz, ***Sur les fonctions qui ont la même dérivée et dont la différence n'est pas constante.*** **148-151.**

Le même résultat est établi dans le livre de M. S. Saks [*Théorie de l'intégrale*, p. 124; *Theory of the integral*, p. 204] de la façon suivante:

F étant un ensemble fermé quelconque de mesure nulle, situé dans l'intervalle $\mathcal{J}=\langle 0,1\rangle$, on montre d'abord qu'il existe une fonction croissante $f(x)$ telle qu'on ait

$$f'(x)=+\infty \quad \text{pour } x\epsilon F \qquad \text{et} \qquad f'(x)<+\infty \quad \text{pour } x\epsilon\mathcal{J}-F.$$

On sait d'autre part que, pour chaque ensemble fermé indénombrable $F\subset\mathcal{J}$, il existe une fonction $\varphi(x)$ non décroissante et non constante dans $\mathcal{J}$, mais constante dans chaque intervalle contigu à F.

Ceci établi, soit F un ensemble fermé indénombrable de mesure nulle; on voit que toutes les fonctions de la forme $f(x)+\theta\varphi(x)$ (où $0\leqslant\theta\leqslant 1$) possèdent partout une dérivée (finie ou infinie) égale à $f'(x)$.

W. Sierpiński, ***Sur un problème de M. Lebesgue.*** **152-158.**

Une petite inexactitude qui s'était glissée dans la démonstration, p. 154, est corrigée dans la présente édition.

L'auteur fait usage, pp. 155-157, de l'ensemble indénombrable dont tous les sous-ensembles non-denses sont au plus dénombrables. Cet ensemble, nommé actuellement *ensemble de Lusin*, intervient dès lors dans un grand nombre de travaux. En particulier, M. W. Sierpiński a consacré à cet ensemble le chapitre II de son livre *Hypothèse du continu*, Monogr. Matem. IV, Warszawa-Lwów 1935, pp. 36-75 (cf. aussi pp. 25-27 et 29-30); voir également cette *Annexe*, pp. 234 et 251.

W. Sierpiński, ***Démonstration d'un théorème de M. Baire sur les fonctions représentables analytiquement,*** **159-165.**

Ce théorème de Baire (p. 163) subsiste pour les fonctions dont l'argument parcourt un espace métrique quelconque X et dont les valeurs appartiennent à un espace métrique quelconque Y.

Le théorème en question peut s'énoncer alors comme il suit:

(1) *Chaque fonction représentable analytiquement*[1] *sur* X *est continue sur un résiduel de* X[2].

On l'établit, en montrant d'abord que

(i) *f étant une limite de fonctions continues, définies sur X, l'ensemble D des points de discontinuité de f est de I-e catégorie (dans X).*

$\delta(E)$ désignant le diamètre d'un ensemble E, considérons l'ensemble des points de X dans lesquels l'oscillation de f dépasse un nombre donné c, c. à d. l'ensemble des $x \epsilon X$ tels que $\delta[f(G)] \geqslant c$ pour chaque ensemble ouvert G contenu dans X et contenant x. Soit $Z(c)$ cet ensemble.

Vu l'égalité $D = Z(1) + Z(1/2) + Z(1/3) + \ldots$, il suffit de montrer que l'ensemble $Z(c)$ est de I-e catégorie pour chaque $c > 0$.

Soit donc c fixe. Posons: $Z = Z(c)$, $f(x) = \lim f_i(x)$ et

$$A_k = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[|f_n(x) - f_k(x)| \leqslant c/4 \text{ pour } n > k],$$

où $|a-b|$ désigne la distance entre deux points a et b.

Les fonctions f_i étant continues, les ensembles A_k sont fermés. On a évidemment $X = A_1 + A_2 + \ldots$, d'où $Z = ZA_1 + ZA_2 + \ldots$ La frontière de A_k étant non-dense, reste à montrer que Z ne contient aucun point intérieur de A_k. Soient donc: x un point intérieur de A_k, G un sous-ensemble ouvert de A_k contenant x et tel que $\delta[f_k(G)] < c/4$. Soient enfin x' et x'' deux points de G. Par conséquent:

$$|f(x') - f_k(x')| \leqslant c/4, \quad |f(x'') - f_k(x'')| \leqslant c/4, \quad |f_k(x') - f_k(x'')| \leqslant c/4,$$

d'où $|f(x') - f(x'')| \leqslant 3c/4$, ce qui donne $\delta[f(G)] \leqslant 3c/4$ et x non ϵZ.

La démonstration qui précède est due à M. C. Kuratowski [cf. aussi C. Kuratowski, *Sur les fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. 5 (1924), pp. 75-86 et S. Banach, *Théorème sur les ensembles de première catégorie*, Fund. Math. 16 (1930), pp. 395-398].

---

[1]) Pour la définition de la classe des fonctions représentables analytiquement et son rapport à celle des fonctions mesurables B, voir C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 187.

[2]) c. à d. „continue, en négligeant les ensembles de I-e catégorie"; cf. cette *Annexe*, p. 240.

On conclut de (i) que

(ii) *La limite d'une suite de fonctions dont chacune est continue sur un résiduel de X est aussi continue sur un résiduel de X.*

Le théorème (1) résulte directement de (ii).

Ajoutons qu'on a encore le théorème suivant [voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 191]:

(2) *Chaque fonction mesurable B jouit de la propriété de Baire.*

Dans le cas où l'espace Y des valeurs de la fonction est *séparable*, ce théorème embrasse le théorème (1), car la propriété de Baire équivaut alors à la „continuité, en négligeant les ensembles de I-e catégorie"[1]). Quant au cas général, on ignore jusqu'à présent si chaque fonction mesurable B de classe 1 (c. à d. telle que l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x)\epsilon G]$ est un F_σ pour chaque ensemble ouvert G de valeurs $f(x)\epsilon Y$) est continue sur un résiduel de X [cf. C. Kuratowski, *Quelques problèmes concernant les espaces métriques non séparables*, Fund. Math. 25 (1935), pp. 534-545, en particulier p. 545].

Au sujet du problème de M. H. Lebesgue, cité p. 164, il est à remarquer que l'on peut donner des exemples effectifs des fonctions réelles non mesurables B et jouissant de la propriété de Baire au sens restreint. Telles sont en particulier les fonctions caractéristiques des ensembles analytiques non boreliens [cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, pp. 242 et 249].

Les problèmes concernant les superpositions des fonctions représentables analytiquement (p. 164) ont été traités d'une façon détaillée par M. A. Lindenbaum [*Sur les superpositions des fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. 23 (1934), pp. 24-37 et *Corrections...* ibid. p. 304].

S. Mazurkiewicz, ***Sur les lignes de Jordan,*** **166-209.**

Voir cette *Annexe*, pp. 230-231.

Z. Janiszewski et C. Kuratowski, ***Sur les continus indécomposables,*** **210-222.**

Voir cette *Annexe*, pp. 228-230.

---

[1]) cf. cette *Annexe*, p. 240, renvoi 1.

PROBLÈMES, 223-224.

1) La solution est due à M. C. Kuratowski [*Solution d'un problème concernant les images continues d'ensembles de points*, Fund. Math. 2 (1921), pp. 151-160]: *il existe deux ensembles P et Q dont chacun est une image continue et biunivoque de l'autre, sans qu'ils soient homéomorphes.*

M. Kuratowski en donne trois exemples suivants:

1° L'ensemble P se compose de tous les nombres $3n+2$ et de tous les nombres intérieurs aux intervalles $\langle 3n, 3n+1\rangle$ où $n=0,1,2,...$; Q s'obtient de P, en y remplaçant 2 par 1.

2° L'ensemble P est formé de la droite $y=0$, des droites $x=n$ où $n=0,1,2,...$ et des circonférences de rayon $1/3$ et de centre $(-n, \pm 1/3)$ où $n=1,2,...$; Q s'obtient de P, en y remplaçant la moitié négative de l'axe des y par la circonférence de rayon $1/3$ et de centre $(0,-1/3)$. Dans cet exemple, P et Q sont des ensembles *connexes* et *fermés* („continus non bornés").

3° L'ensemble P se compose de 0 et des nombres de la forme $1/m+1/n$ où m et n sont des entiers assujettis aux conditions: $n>m>1$, le quotient $mn/(m+n)$ n'est pas un nombre naturel. L'ensemble Q se compose de 0 et des nombres n et $1/n$ où $n=1,2,3,...$ Ici P et Q sont des ensembles *clairsemés*.

2) La solution positive pour les continus péaniens (c. à d. localement connexes) a été donnée par M. S. Mazurkiewicz [*Sur les continus homogènes*, Fund. Math. 5 (1924), pp. 137-146].

La réponse positive complète a été signalée par M. Z. Waraszkiewicz [*Sur les courbes planes topologiquement homogènes*, C. R. 204 (1937), pp. 1388-1390].

3) Ce problème, connu actuellement sous le nom du *problème de Souslin*, reste ouvert.

M. G. Kurepa lui a consacré une série de recherches [*Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse, Publications Math. de l'Univ. de Belgrade, 1935, pp. 2-4, 124-125, 134; *L'hypothèse de ramification*, C. R. 202 (1936), p. 187; *Le problème de Souslin et les espaces abstraits*, C. R. 203 (1936), p. 1051 et C. R. 204 (1937), p. 327].

4) *La réponse est positive*; voir N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur une décomposition du continu*, C. R. 175 (1922), pp. 375-379, où un exemple effectif de la décomposition en question est donné à l'aide de l'ainsi dit *crible de Lebesgue* [Cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 170].

Il est d'ailleurs à remarquer que la réponse au problème résulte immédiatement 1° d'un théorème général de MM. Lusin et Sierpiński d'après lequel *chaque ensemble analytique, de même que son complémentaire, est une somme de $\aleph_1$ ensembles boreliens disjoints*, 2° de l'*existence d'un ensemble analytique non borelien* [Cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, pp. 264 et 242].

5) La solution est due à M. W. Sierpiński, qui a démontré *l'existence d'un ensemble de puissance $\aleph_1$ jouissant de la propriété demandée* [voir plus loin, propositions (1) et (2)]. La question de l'existence d'un ensemble *de puissance* $\mathfrak{c}$ jouissant de la propriété (ii) paraît difficile à résoudre [cf. plus loin, proposition (3)].

On a considéré dans une série de travaux les propriétés suivantes (en apparence de plus en plus restrictives) des sous-ensembles E de l'intervalle $\mathcal{J}$ (intervalle fermé $\langle 0,1\rangle$):

(i) *Chaque fonction réelle croissante et continue transforme E en un ensemble de mesure lebesguienne nulle*;

(ii) *Chaque image homéomorphe linéaire de E est de mesure lebesguienne nulle*;

(iii) *Chaque image linéaire de E obtenue par une homéomorphie généralisée* (c. à d. par une fonction biunivoque, mesurable B sur E et dont la fonction inverse est aussi mesurable B) *est de mesure lebesguienne nulle*;

(iv) *Chaque image linéaire de E obtenue par une fonction biunivoque inverse à une fonction mesurable B est de mesure lebesguienne nulle.*

Appelons *mesure* dans $\mathcal{J}$ toute fonction μ d'ensemble borelien situé dans $\mathcal{J}$ qui est non négative, finie, complètement additive et nulle pour les ensembles composés d'un point. Si $\mu(B)=0$ pour un ensemble borelien B, convenons de poser également $\mu(N)=0$ pour chaque $N \subset B$. Considérons la propriété suivante d'un ensemble $E \subset \mathfrak{I}$:

(v) *Chaque mesure dans $\mathfrak{I}$ s'annule pour E.*

MM. N. Lusin et W. Sierpiński [*Sur quelques propriétés des ensembles* (*A*), Bull. de l'Acad. Pol., Cl. des Sc. Math. et Nat. (A), 1918, pp. 35-48] ont établi la proposition suivante:

(1) *Il existe un ensemble $E \subset \mathfrak{I}$ de puissance $\aleph_1$, jouissant de la propriété* (i).

Soit notamment $C \subset \mathfrak{I}$ un complémentaire analytique non borelien; l'ensemble Q, obtenu par le choix d'un point quelconque de chaque constituante de C, jouit alors de la propriété (i).

M. W. Sierpiński a démontré ensuite que le même ensemble Q jouit de la propriété (ii) [*Sur un ensemble non dénombrable dont tout homéomorphe est de mesure nulle*, Fund. Math. 7 (1925), pp. 188-190] et de la propriété (iii) [*Sur une extension de la notion d'homéomorphie*, Fund. Math. 22 (1934), pp. 270-275, en particulier p. 274].

Enfin MM. W. Sierpiński et E. Szpilrajn ont démontré que l'ensemble Q jouit également des propriétés (iv) et (v). [*Remarque sur le problème de la mesure*, Fund. Math. 26 (1936), pp. 256-261].

Or, il s'est montré que

(2) *Les propriétés* (i)-(v) *sont équivalentes.*

L'implication (v)$\to$(iv) résulte de l'invariance de la propriété (v) envers les transformations par fonctions biunivoques, inverses aux fonctions mesurables B [W. Sierpiński et E. Szpilrajn, l. c., p. 260]. Les implications (iv)$\to$(iii)$\to$(ii)$\to$(i) sont évidentes. Reste à démontrer que (i)$\to$(v). Soit μ une mesure dans $\mathfrak{I}$. Posons $f(x)=x+\mu(\langle 0,x\rangle)$ pour chaque $x \in \mathfrak{I}$. La fonction f étant croissante et continue, chaque ensemble E jouissant de la propriété (i) est transformé en un ensemble de mesure lebesguienne nulle. Il en résulte facilement que $\mu(E)=0$ [cf. E. Szpilrajn, *Sur les ensembles et les fonctions absolument mesurables* (en polonais), C. R. Soc. Sc. de Varsovie 30 (1937), pp. 39-68, en particulier p. 59].

Notons que dans la démonstration de l'existence d'un ensemble jouissant des propriétés (i)-(v), la suite transfinie des constituantes d'un complémentaire analytique peut être remplacée par une suite transfinie quelconque d'ensembles boreliens, *m*-convergente au sens de M. F. Hausdorff, en particulier par la suite des constituantes d'un ensemble analytique non borelien [voir W. Sierpiński et E. Szpilrajn, l. c., p. 257; F. Hausdorff, *Summen von* $\aleph_1$ *Mengen*, Fund. Math. 26 (1936), pp. 241-255, en particulier p. 242].

Quant au problème ouvert de l'existence d'un ensemble de puissance $\mathfrak{c}$ et jouissant des propriétés (i)-(v), remarquons qu'elle entraînerait la solution pour les ensembles de puissance $\mathfrak{c}$ de l'ainsi dit „problème généralisé de la mesure". Plus précisément:

(3) *S'il existe un ensemble linéaire de puissance* $\mathfrak{n}$ *jouissant de la propriété* (i), *chaque ensemble* X *de puissance* $\mathfrak{n}$ *jouit de la propriété suivante: il n'existe, en dehors de la fonction identiquement nulle, aucune fonction d'ensemble qui soit finie, non négative et complètement additive dans la famille de tous les sous-ensembles de* X.

Cette proposition est une conséquence facile de la proposition (2) [W. Sierpiński et E. Szpilrajn, l. c., p. 259].

Remarquons enfin que parmi les démonstrations d'existence, citées plus haut, plusieurs ont été précédées historiquement par des démonstrations fondées sur l'hypothèse du continu. Ainsi M. N. Lavrentieff [*Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes*, Fund. Math. 6 (1924), pp. 149-160, en particulier pp. 154-155] a déduit de l'hypothèse du continu l'existence d'un ensemble indénombrable jouissant de la propriété (ii); M. G. Poprougénko [voir E. Szpilrajn, *Remarques sur les fonctions complètement additives d'ensembles...*, Fund. Math. 22 (1934), pp. 302-311, en particulier p. 311] a obtenu un résultat analogue concernant la propriété (v). Les deux auteurs se sont servi notamment de l'*ensemble de Lusin* (pour la définition, voir cette *Annexe*, p. 245), dont l'existence n'est démontrée jusqu'à présent qu'à l'aide de l'hypothèse du continu. Or, si $E \subset \mathfrak{I}$ est un ensemble de Lusin, on a, en outre, la proposition suivante [cf. W. Sierpiński, *Sur un ensemble non dénombrable dont toute image continue est de* *mesure nulle*, Fund. Math. 11 (1928), pp. 302-304 et *Hypothèse du continu*, pp. 39 et 49]:

(vi) *Chaque image linéaire et continue de E est de mesure lebesguienne nulle.*

Sans avoir recours à l'hypothèse du continu, on ne sait pas démontrer jusqu'à présent l'existence d'un ensemble E indénombrable et jouissant de la propriété (vi).

M. W. Sierpiński a remarqué récemment que l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'un ensemble linéaire E qui jouit des propriétés (i)-(v) sans avoir la propriété (vi). Soit notamment $Z \subset \mathcal{J}$ un ensemble à propriété (v) et N l'ensemble des nombres irrationnels appartenant à $\mathcal{J}$. D'après l'hypothèse du continu, il existe une fonction biunivoque φ qui transforme N en Z; soit I l'image de cette fonction. L'ensemble I étant de dimension 0, il existe un ensemble $E \subset \mathcal{J}$ homéomorphe à I. D'après les théorèmes IV et V de la note citée de MM. Sierpiński et Szpilrajn, l'ensemble E jouit de la propriété (v). D'autre part N est une image continue de I, donc de E, d'où il résulte que l'ensemble E ne jouit pas de la propriété (vi).

6) Les deux premières questions restent ouvertes et paraissent difficiles à résoudre; cf. à ce sujet F. Hausdorff, *Summen von* $\aleph_1$ *Mengen*, Fund. Math. 26 (1936), pp. 242-243 et 249-250.

La réponse à la troisième question est positive. Tout ensemble analytique étant une somme de $\aleph_1$ ensembles boreliens [voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 264], chaque complémentaire analytique est un produit de $\aleph_1$ ensembles boreliens. Par conséquent, tout complémentaire analytique non borelien est l'exemple d'un produit de $\aleph_1$ ensembles boreliens qui n'est pas un ensemble analytique.

7) Le problème reste ouvert; voir W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, p. 103.

8) *La solution est positive.* Elle a été donnée d'une façon effective par M. Souslin [*Sur un corps non dénombrable de nombres réels*, rédigé d'après un mémoire posthume par C. Kuratowski, Fund. Math. 4 (1923), pp. 311-315].

Il est à remarquer que 1⁰ le corps défini par M. Souslin est un F_σ (et par conséquent contient un ensemble parfait), 2⁰ chaque corps satisfaisant au problème est de mesure intérieure nulle, 3⁰ il existe un corps satisfaisant au problème et qui possède des points communs avec chaque ensemble parfait, donc un corps non mesurable L [l. c., pp. 314-315].

Un autre exemple du corps satisfaisant au problème est dû à M. J. von Neumann. C'est notamment le plus petit corps contenant un ensemble indénombrable de nombres algébriquement indépendants [voir cette *Annexe*, p. 234].

MM. S. Ruziewicz et W. Sierpiński [*Sur un ensemble parfait qui a avec toute translation au plus un point commun*, Fund. Math. 19 (1932), pp. 17-21] ont démontré à l'aide du corps défini par Souslin qu'il existe deux ensembles parfaits tels que toute translation de l'un admet au plus un point commun avec toute translation de l'autre.

9) D'après un résultat de M. N. Lusin, la puissance $\mathfrak{n}$ d'aucun complémentaire analytique (situé dans un espace séparable et complet quelconque) ne peut satisfaire à l'inégalité $\aleph_1 < \mathfrak{n} < \mathfrak{c}$ [cf. p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, pp. 264 et 265, renvoi 1].

Le problème suivant, *non résolu jusqu'à présent*, semble appartenir aux questions fondamentales de la Théorie des Ensembles de points:

Un complémentaire analytique indénombrable est-il nécessairement de puissance $\mathfrak{c}$?

Ce problème se rattache intimement au suivant:

Un complémentaire analytique indénombrable contient-il nécessairement un ensemble parfait?

Jusqu'à présent, on ne sait pas établir (sans l'hypothèse du continu) l'existence d'un complémentaire analytique de puissance $\aleph_1$, pas plus que l'existence d'un ensemble de puissance $\aleph_1$ qui n'est pas un complémentaire analytique. M. W. Sierpiński a tiré quelques conséquences de l'hypothèse que chaque ensemble de puissance $\aleph_1$ est un complémentaire analytique [W. Sierpiński, *Sur une hypothèse de*

M. Lusin, Fund. Math. 25 (1935), pp. 132-135; N. Lusin, *Sur les ensembles analytiques nuls*, Fund. Math. 25 (1935), pp. 109-131, en particulier pp. 126-131].

10) La première partie du problème comporte une *solution positive*: M. Z. Zalcwasser a remarqué que la fonction caractéristique d'un ensemble linéaire F_σ qui, en même temps que son complémentaire, est de mesure positive dans tout intervalle satisfait au problème. Cette solution a été signalée dans Fund. Math. 4 (1923), p. 369, et énoncée d'une façon explicite dans Fund. Math. 16 (1930), p. 28. [Cf. à ce propos L. Kantorovitch, *Sur les suites des fonctions presque partout continues*, Fund. Math. 16 (1930), pp. 25-28].

La seconde partie du problème paraît difficile à résoudre. D'après un résultat de M. C. Kuratowski [*Sur les fonctions représentables analytiquement et les ensembles de première catégorie*, Fund. Math. 5 (1924), pp. 75-86, en particulier p. 83], chaque fonction (réelle d'une variable réelle) jouissant de la propriété de Baire (au sens large) est limite de fonctions ponctuellement discontinues. Or, le problème de définir effectivement une fonction (ou un ensemble) dépourvu de la propriété de Baire est analogue à celui de construire effectivement une fonction non mesurable L.