Sur la totalisation des dérivées des fonctions continues de plusieurs variables indépendantes.

Par

H. Looman (Utrecht).

M. Arnaud Denjoy a résolu le problème de trouver les fonctions primitives $f(x)$ de la fonction dérivée la plus générale $\varphi(x)$; le procédé de calcul, permettant de remonter de $\varphi(x)$, connue en tout point d'un intervalle $a < x < b$ (sauf peut être sur un ensemble de mesure nulle), à la variation $f(b) - f(a)$ de f sur (a, b), a reçu le nom de *totalisation* [1]).

Je me propose de définir un procédé analogue dans le cas de plusieurs variables indépendantes. Les dérivées partielles qui donnent lieu à une telle généralisation sont évidemment $\dfrac{\partial^n f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$. Pour ne pas supposer l'existence de dérivées partielles d'ordre $< n$, je prends pour définition dans le cas $n = 2$,

$$s(x, y) = \lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to 0}} \frac{f(x+u, y+v) + f(x, y) - f(x+u, y) - f(x, y+v)}{uv}.$$

On peut d'ailleurs considérer d'autres définitions (n^0 10). Aucune de ces définitions n'est équivalente à celle de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

[1]) A. Denjoy: Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1916, p. 127—222 et 1917, p. 181—236.

Ce mémoire est précédé par deux autres:

Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues, *Journ. de Math.* 1915, p. 105—240.

Mémoire sur les fonctions dérivées sommables. *Bull. de la Soc. Math. de France*, 1915, p. 161—248.

Pour notre but il est essentiel de rechercher, si la variation de $f(x, y)$ sur un rectangle $r\{a<x<b, c<y<d\}$ c. à d. le nombre

$$\Delta(f, r)=f(b, d)+f(a, c)-f(a, d)-f(b, c)$$

est déterminée par la connaissance de la dérivée (avec une de ses définitions) dans r (11—16).

Il se trouve que pour une fonction continue $f(x, y)$ l'existence de $s(x, y)$ dans r entraîne l'existence d'une dérivée par rapport à x, $p(x, y)$, finie en tout point de r, et continue en y (mais non pas nécessairement par rapport à x), si $f(x, c)$ est dérivable par rapport à x; énoncé analogue pour $q(x, y)$, si $q(a, y)$ existe (12, 13).

L'objet principal de ce travail est de montrer que $\Delta(f, r)$ peut être calculé par une *infinité dénombrable* d'opérations au plus, sous la seule condition que $s(x, y)$ existe en tout point et est connu, sauf peut être sur un ensemble de mesure nulle (17).

Le procédé s'applique sous des conditions plus générales.

Pour la totalisation des dérivées des fonctions d'une seule variable, la distinction d'ensembles fermés (non denses) en ensembles fermés *dénombrables* et *non dénombrables* est d'une grande importance; les ensembles *parfaits non denses* jouent un rôle fondamental dans le calcul totalisant.

Dans le cas de 2 variables indépendantes, il faut distinguer, au lieu d'ensembles fermés dénombrables et non dénombrables, les ensembles fermés que j'appelle *de seconde sorte* et *de première sorte* (3—7).

L'ensemble parfait (dans le cas d'une seule variable) est remplacé par *l'ensemble de première sorte en lui-même*.

Je n'énonce les définitions et théorèmes que pour le cas de 2 variables indépendantes, puisque l'extension à plusieurs variables est immédiate.

Définitions. Ensembles. Théorèmes préliminaires.

1. Nous entendons par *rectangle* un rectangle à côtés parallèles aux axes, donc un ensemble $a<x<b, c<y<d$ [1]). Les sommets (a, c), (b, c), (b, d), (a, d) seront désignés resp. par 1er, 2^{me}, 3^{me}, 4^{me} sommets et les côtés

[1]) Parfois nous remplacerons les signes $<$ par $\leqslant$.

$$
\begin{aligned}
y = c,\ a < x < b, &\quad \text{ou} \quad i_c(a, b)\\
x = b,\ c < y < d, &\quad \text{ou} \quad i_b(c, d)\\
y = d,\ a < x < b, &\quad \text{ou} \quad i_d(a, d)\\
x = a,\ c < y < d, &\quad \text{ou} \quad i_a(c, d)
\end{aligned}
$$

par 1er, 2me, 3me, 4me côtés du rectangle $r\{a < x < b,\ c < y < d\}$.

Je désigne par $i_{x_0}(c, d)$ (resp. $i_{y_0}(a, b)$), un *intervalle* appartenant à $x = x_0$ (resp. $y = y_0$) et d'extrémités (x_0, c) et (x_0, d) (resp. (a, y_0) et (b, y_0)) et par $s_{x_0}(c, d)$ (resp. $s_{y_0}(a, b)$) le *segment* correspondant [1]).

2. En désignant par E un ensemble fermé (non dense) plan, définissons l'expression: *portion* $\Pi(E, r)$ de E, déterminée par un rectangle r.

Si r ne contient pas de points de E dans son intérieur, $\Pi(E, r)$ n'existera pas; si r contient des points de E dans son intérieur, $\Pi(E, r)$ sera l'ensemble des points de E intérieurs à r, augmenté de leurs points limites sur le contour de r. $\Pi(E, r)$ est le plus petit ensemble fermé coïncidant avec E à l'intérieur de r.

Si $\Pi(E, r)$ existe, ses projections $\Pi_x(E, r)$ sur Ox et $\Pi_y(E, r)$ sur Oy existent et sont fermés.

Si chacun des 2 ensembles $\Pi_x(E, r)$ et $\Pi_y(E, r)$ contient au moins 2 points, il existe un plus petit rectangle r_1 contenant $\Pi(E, r)$; au contraire, r_1 n'existe pas, si l'un au moins des 2 ensembles $\Pi_x(E, r)$ et $\Pi_y(E, r)$ ne contient qu'un seul point. Donc pour que r_1 existe toujours, il faut et il suffit, que $\Pi_x(E, r)$ et $\Pi_y(E, r)$ soient parfaits, quel que soit le rectangle r, contenant des points de E dans son intérieur [2]).

Il est à remarquer que $\Pi(E, r_1)$, s'il existe, ne coïncide pas nécessairement avec $\Pi(E, r)$.

3. Un ensemble fermé E non dense plan et borné sera appelé:

de première sorte en lui-même, si toute portion de E se projette sur les 2 axes suivant un ensemble non dénombrable (nécessairement parfait); E est alors nécessairement parfait;

de première sorte, si E contient un ensemble parfait P de première sorte en lui-même;

de seconde sorte, si E n'est pas de première sorte.

[1]) Intervalle ab, c'est l'ensemble $a < x < b$,
segment ab, c'est l'ensemble $a \leqslant x \leqslant b$.

[2]) C. à d. que E soit de première sorte en lui-même, n° 3

Disons que E est *de première sorte en* M, s'il existe dans E un ensemble parfait $P(M)$ contenant M et de première sorte en lui-même; E sera *de seconde sorte en* M', si E n'est pas de première sorte en M'.

Soit Ω l'ensemble des points (de E), où E est de première sorte et Ω' sont complèmentaire.

Ω contient tout $P(M)$, Ω est fermé. Car si la suite de points de Ω, $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, tend vers M_0, les portions des $P(M_n)$, déterminées par les carrés de centres M_n et de côtés $\frac{1}{n}$, augmentées du point M_0, constituent un ensemble $P(M_0)$.

Ω est donc le plus grand ensemble fermé de première sorte en lui-même, contenu dans E.

Ceci rapelle la décomposition d'un ensemble en un ensemble *dense en lui-même* et un *ensemble clairsemé* (en particulier la décomposition d'un ensemble *fermé* en un *noyau parfait* en un ensemble *dénombrable*).

Un ensemble fermé de seconde sorte est fini on dénombrable sur toute droite de pente finie non nulle.

Mais E peut être fini sur toute droite sans être de seconde sorte (Exemple: un cercle).

Un ensemble fermé de première sorte en lui-même peut encore être caracterisé comme il suit. Appellons *segment* d'un ensemble fermé E les segments $s_{x_0}(\gamma, \delta)$ et $s_{y_0}(\alpha, \beta)$, contenant au moins un point de E; un segment $s_{x_0}(\gamma, \delta)$ ou $s_{y_0}(\alpha, \beta)$ sera dit isolé, s'il existe un rectangle, ayant ce segment pout diamètre et ne contenant pas d'autres points de E. Alors un ensemble de première sorte en lui-même est un ensemble fermé ne possédant pas de segment isolé.

Ceci rappelle la définition d'un ensemble parfait comme ensemble fermé n'ayant pas de point isolé.

4. Si la fonction continue $f(x, y)$ est du type $g(x) + h(y)$ sur un rectangle $r(a < x < b, c < y < d)$, le nombre $\Delta(f, \varrho) = f(\delta, \beta) + f(\alpha, \gamma) - f(\beta, \gamma) - f(\alpha, \delta)$ est zéro sur tout rectangle $\varrho(\alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta)$ contenu dans r; et réciproquement.

Convenons de dire que $f(x, y)$ est du type $g(x) + h(y)$ *en un point* M, si M est centre d'un carré $\gamma(M)$, où f est du type $g(x) + h(y)$; il est équivalent de dire que $\Delta(f, \varrho) = 0$ sur tout rectangle ϱ contenu dans $\gamma(M)$.

Si $f(x, y)$ est du type $g(x)+h(y)$ en tout point d'un rectangle $r_0(a_0 < x < b_0, c_0 < y < d_0)$, $f(x, y)$ est du type $g(x)+h(y)$ sur r_0.

Il suffit de démontrer que $\Delta(f, r_1)=0$, si r_1 est un rectangle quelconque intérieur à r_0.

Faisons correspondre à tout point M de r_1 le plus grand carré $\gamma(M)$ de centre M, où f est de la forme $g(x)+h(y)$ et soit $2u(M)$ la longueur de son côté.

Si le minimum de $u(M)$ était zéro, il existerait une suite de points $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ tendant vers un point M_0 de r_1, tels que $u(M_n)$ tend vers 0. Après une certaine valeur de n, M_n appartient au carré de centre M_0 et de côté $\frac{1}{2}u(M_0)>0$, mais dès ce moment $u(M_n)>\frac{1}{2}u(M_0)$.

Donc le minimum de $u(M)$ est un nombre positif μ. Divisons r_1 en pq rectangles r_1', par des droites parallèles à Ox et à Oy, les côtés des r_1' étant inférieurs à μ. Puisque $\Delta(f, r_1')=0$, on a $\Delta(f, r)=\Sigma\Delta(f, r_1')=0$,[1]) c. q. f. d.

5. Supposons maintenant que f est du type $g(x)+h(y)$ en tout point intérieur à r et étranger à un ensemble fermé non dense E contenu dans r.

Si E est de première sorte, f n'est pas nécessairement du type $g(x)+h(y)$ sur r.

Exemple: soit r le carré $0<x<1$, $0<y<1$, et soit E un ensemble parfait discontinu situé sur la droite $y=x$ et ayant pour points extrêmes $0, 0$ et $1, 1$.

Soit φ une fonction continue quelconque, constante dans les intervalles contigus de E et variante en tout point de E, avec $\varphi(0,0)=0$. Nous définissons $f(x, y)$ comme il suit:

Sur $y=x$, $f(x,y)$ coincide avec φ.

Dans le domaine $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$, f est indépendante de x.

Dans le domaine $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, f est indépendante de y.

On voit aisément que $\Delta(f, r')$ est zéro sur tout rectangle r' ne contenant pas de points de E dans son intérieur, donc f est du type $g(x)+h(y)$ en tout point étranger à E.

On voit que f est zéro sur les 2 axes, donc si f était du type $g(x)+h(y)$ sur r, f serait nulle partout, ce qui n'est pas ainsi.

[1]) On peut aussi appliquer le lemme de Borel et remarquer que la partie commune à 2 rectangles est un rectangle.

Il est à remarquer que E ne divise pas l'intérieur de r en régions distinctes [1]).

6. Au contraire,

Si E est de seconde sorte, f est du type $g(x)+h(y)$ sur r_0, si elle est du type $g(x)+h(y)$ en tout point de r_0 étranger à E.

Il suffit de démontrer que f est du type $g(x)+h(y)$ en tout point de E ou encore que Δ est zéro sur tout rectangle appartenant à r_0.

D'après no 4, nous savons déjà que $\Delta(f, \varrho)$ est zéro sur tout rectangle ϱ ne contenant pas de points de E dans son intérieur.

Nous utiliserons les lemmes suivants:

Lemme I: *Une fonction continue $f(x)$ d'une seule variable indépendante, constante dans les intervalles contigus d'un ensemble fermé dénombrable E', est constante sur tout intervalle contenant des points de E'.*

En effet, soit $\alpha\beta$ un intervalle contenant des points de E' dans son intérieur. L'ensemble des valeurs prises par f aux points de $\alpha\beta$ est fini on dénombrable, puisque f ne peut prendre de valeurs différentes en x et x', que si x et x' appartiennent à E', ou si x et x' appartiennent à des contigus différents de E'. Or l'ensemble des points de E' et celui des intervalles contigus de E', appartenant à $\alpha\beta$ est fini ou dénombrable. — Si l'on avait $f(\alpha) \neq f(\beta)$, f, étant continue, devrait prendre entre α et β toute valeur comprise entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, c. à d. un ensemble de valeurs ayant la puissance du continu.

Donc on a $f(\alpha) = f(\beta)$, c. q. f. d. [2]).

[1]) D'autre part, un segment de droite $s_{x_0}(0, 1)$ $(0 < x_0 < 1)$ est un ensemble fermé divisant r en 2 régions; cependant f est de la forme $g(x)+h(y)$ sur r si elle est de cette forme en tout point étranger à $s_{x_0}(0, 1)$.

On aura d'ailleurs l'occasion de remarquer que la distinction de continu et discontinu et la répartition d'un ensemble ouvert en régions distinctes n'intervient jamais dans les résultats.

[2]) Cette proposition est connue. Voir pour 2 autres démonstrations:

H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, p. 12

A. Denjoy, Journ de Math.. 1915 p. 111

Il est à remarquer que la démonstration exige seulement la propriété de $f(x)$ de prendre entre α et β toute valeur comprise entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, si $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Or, cette propriété appartient non seulement aux fonctions continues, mais aussi à certaines fonctions discontinues (Voir A. Denjoy. Enseignement Math. Genève 1916) savoir les fonctions à préponderance de continuité, en particulier les fonc-

Lemme II: *Soit E'' un ensemble fermé non dense plan, se projetant sur l'un des axes suivant un ensemble fini ou dénombrable. Si $\Delta(f, \varrho'') = 0$ sur tout rectangle ϱ'' ne contenant pas de points de E'', dans son intérieur, f est de la forme $g(x) + h(y)$.*

Nous démontrerons que $\Delta(f, r'') = 0$, si $r''\{a'' < x < b'', c'' < y < d''\}$ est un rectangle contenant des points de E'' dans son intérieur. La projection de $\Pi(E'', r'')$ sur un des axes, p. e. Ox, est fini ou dénombrable. La fonction de x:

$$\varphi(x, c'', d'') = f(x, d'') - f(x, c'')$$

est continue et constante dans les intervalles contigus de $\Pi_x(E'', r'')$. Donc, d'après le Lemme I $\varphi(x, c'', d'')$ est constante entre 2 points quelconques du segment a'', b'', d'où

$$\Delta(f, r'') = \varphi(b'', c'', d'') - \varphi(a'', c'', d'') = 0, \text{ c. q. f. d.}$$

Même démonstration, en introduisant la fonction

$$\psi(y, a'', b'') = f(b'', y) - f(a'', y),$$

si $\Pi_y(E'', r'')$ est dénombrable.

Passons maintenant à la démonstration de notre théorème. E contient nécessairement des points M, centres de rectangles r, tels que l'un au moins des 2 ensembles $\Pi_x(E, r)$ ou $\Pi_y(E, r)$ soit dénombrable; sinon E serait de première sorte (en lui-même).

En ces points M, $f(x, y)$ est, d'après le Lemme II, de la forme $g(x) + h(y)$.

Si E ne contient pas d'autres points, la propriété est démontrée.

Si, au contraire, E contient des points M_1 tels que, si r_1 est un rectangle quelconque, contenant M_1 dans son intérieur, les ensembles $\Pi_x(E, r_1)$ et $\Pi_y(E, r_1)$ sont l'un et l'autre non dénombrables, ces points M_1 forment un ensemble E_1 qui est évidemment fermé. En tout point étranger à E_1, f est de la forme $g(x) + h(y)$.

Soit E_2 l'ensemble des points de E_1, qui ne sont pas centres de rectangles r_2 tels que un au moins des 2 ensembles $\Pi_x(E_1, r_2)$ ou $\Pi_y(E_1, r_2)$ est dénombrable.

D'après le Lemme II, $f(x, y)$ est de la forme $g(x) + h(y)$ en tout point de $E_2 - E_1$.

Nous définissons ensuite $E_3, E_4, \ldots E_n, \ldots$

tions approximativement continues, et les dérivés préponderants, en particulier les dérivées approximatives, les dérivées ordinaires.

L'énoncé est donc exact pour ces fonctions discontinues.

Si E_n existe pour toute valeur de n, soit E_ω l'ensemble (fermé) des points communs à tous les E_n.

E_ω existe; en tout point étranger à E_ω, f est de la forme $g(x)+h(y)$

Généralement, soit α un nombre ordinal quelconque. Si α est de première espèce, E_α est l'ensemble des points M_α de $E_{\alpha-1}$, qui ne sont pas centres d'un rectangle r_α, tel que l'un au moins des 2 ensembles $\Pi_x(E_{\alpha-1}, r_\alpha)$ et $\Pi_y(E_{\alpha-1}, r_\alpha)$ soit dénombrable. Si α est de seconde espèce, E_α est l'ensemble commun à tous les $E_{\alpha'}$ d'indice $\alpha' < \alpha$.

Tout E_α est fermé et agrégé aux ensembles E_α d'indice inférieur. Donc, d'après le théorème connu de Cantor, il existe un nombre transfini (dénombrable) β, tel que $E_\beta = E_{\beta+1} = \ldots$; $E_{\beta-1}$ étant différent de E_β.

Supposons que E_β contienne des points. D'après la définition de $E_{\beta+1} (= E_\beta)$, quel que soit le rectangle ϱ contenant des points de E_β dans son intérieur, les 2 ensembles $\Pi_x(E_\beta, \varrho)$ et $\Pi_y(E_\beta, \varrho)$ sont parfaits. Donc E_β est de première sorte en lui-même et E serait de première sorte, contrairement à notre hypothèse.

Donc E_β ne peut pas contenir des points. Donc f est de la forme $g(x)+h(y)$ en tout point de E, donc f est de cette forme sur r_0, c. q. f. d.

7. Montrons par un exemple que ce nombre β peut être tout nombre ordinal donné d'avance.

Nous construirons E à l'aide d'ensembles $\lambda(r)$ et $\mu(r)$ dont voici les définitions.

Si r est le rectangle $a<x<b$, $c<y<d$, nous construisons les segments $s_{x_0}(c, d)$, $x_0 = a + \frac{b-a}{2^n} (n=1, 2, \ldots)$. Puis nous construisons pour toute valeur de n les 2^n segments, se projetant sur Ox dans le segment occupant le tiers médian du segment $a+\frac{b-a}{2^n} \leqslant x \leqslant a + \frac{b-a}{2^{n-1}}$ et sur Oy en les points $c+k\frac{d-c}{2^n} (k=0, 1, \ldots, 2^n-1)$. La réunion de tous ces segments, augmentée du segment $s_a(c, d)$ constitue un ensemble parfait $\lambda(r)$, tel que $\lambda_1(r)$ (déduit de $\lambda(r)$ comme E_1 de E au n⁰ 6) existe est est identique au segment $s_a(c, d)$.

En remplaçant x par y, a par c, b par d, nous obtenons un ensemble analogue $\mu(r)$, tel que $\mu_1(r)$ existe et est identique au segment $s_c(a, b)$.

Cela posé, prenons pour r_0 le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Si $\beta = 1$, on prend pour E le segment $s_{x=0}(0, 1)$. Si $\beta = 2$, nous pouvons prendre pour E l'ensemble $\lambda(r_0)$. Si $\beta = 3$, on construit d'abord l'ensemble $\lambda(r_0)$ et puis nous construisons pour les rectangles r'_n, ayant pour côtés verticaux les segments $s_{x=\frac{1}{2^n}}(0, 1)$ et $s_{x=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}}(0, 1)$ les ensembles $\lambda(r'_n)$ et pour les rectangles $r''_{n,k}$ ayant pour côtés horizontaux les segments $s_{y=\frac{k}{2^n}}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3}\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}+\frac{2}{3}\frac{1}{2^n}\right)$ et $s_{y=\frac{k+1}{2^n}}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3}\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}+\frac{2}{3}\frac{1}{2^n}\right)$, $(k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$, nous construisons les ensembles $\mu(r)$. L'ensemble E, réunissant ces ensembles, a pour ensemble E_1 l'ensemble $\lambda(r_0)$.

En répétant cette construction un nombre fini de fois, on construit des ensembles tels que $\beta =$ nombre fini.

Soit β maintenant un nombre transfini. Sur un rectangle $r'(a' < x < b', c' < y < d')$ on peut construire de la façon suivante des ensembles $\sigma(r')$ et $\tau(r')$, tel que $\sigma_\omega(r')$ et $\tau_\omega(r')$ déduits de σ et τ comme E_ω de E au n° 6) existent et sont resp identiques à $s_a(c, d)$ et $s_c(a, b)$.

Pour obtenir $\sigma(r')$, nous divisons r' en rectangles

$$r'_n\left(a' + \frac{b'-a'}{2^n} \leqslant x \leqslant a' + \frac{b'-a'}{2^{n-1}}, \; c' \leqslant y' \leqslant d'\right).$$

Dans r'_n nous construisons un ensemble $e(r'_n)$, tel que l'ensemble $e_n(r'_n)$ existe et est identique à l'ensemble commun à r'_n et $\lambda(r')$. $\sigma(r')$ est défini comme réunion des tous les $e(r'_n)$, augmentée du segment $s_a(c, d)$; $\sigma_\omega(r')$ est visiblement identique à $s_c(a, b)$.

En remplaçant x par y, a par c, b par d, nous obtenons l'ensemble $\tau(r')$.

Si $\beta = \omega + 1$, on peut prendre pour E l'ensemble $\sigma(r_0)$.

Si $\beta = \omega + 2$, il suffit d'appliquer les constructions des ensembles λ, μ, σ et τ.

On voit aisément que par application répétée de ces constructions on peut atteindre tout nombre β.

8. Soit P un ensemble parfait de première sorte en lui-même et soit $\Pi(P, r)$ la portion de P, déterminée par le rectangle

$$r(a < x < b, c < y < d).$$

Pour calculer ce que nous pouvons appeler: la variation d'une fonction continue $f(x, y)$ sur l'ensemble complémentaire $C(\Pi)$ de

$\Pi(P, r)$ par rapport à r [1]), nous considérerons un certain domaine D constitué d'un nombre fini de rectangles sans points intérieurs en commun, dont voici la définition.

Donnons nous un nombre positif ω arbitrairement; divisons l'intervalle $a<x<b$ en n intervalles partiels $x_{i-1}<x<x_i$ $(x_0=a, x_n=b)$, dont la longueur est $<\omega$. Désignons par β_i la bande verticale $x_{i-1}<x<x_i$, $c<y<d$. Alors les rectangles ϱ constituant D seront tous de la forme $x_{i-1}<x<x_i$, $\gamma<y<\delta$ $(c\leqslant\gamma\leqslant\delta\leqslant d, i=1, 2,\dots n)$ et seront choisis d'après la règle suivante:

Si $\Pi(P, \beta_i)$ n'existe pas, ϱ sera le rectangle β_i lui-même.

Si $\Pi(P, \beta_i)$ existe et si sa projection $\Pi_y(P, \beta_i)$ sur Oy ne coïncide pas avec le segment $c\leqslant y\leqslant d$, il peut se faire ou non qu'il existe des intervalles contigus de $\Pi_y(P, \beta_i)$ dont la longueur est $\geqslant x_i - x_{i-1}$. Dans le premier cas nous prenons pour rectangles ϱ tous les rectangles $x_{i-1}<x<x_i$, $\gamma_n<y<\delta_n$, $\gamma_n\delta_n$ étant un intervalle contigu de $\Pi_y(P, \beta_i)$, tel que $\delta_n-\gamma_n\geqslant x_i-x_{i-1}$. Dans le second cas, nous dirons que les rectangles ϱ n'existent pas (pour la bànde β_i considérée).

Si $\Pi_y(P, \beta_i)$ coïncide avec le segment $c\,d$, les rectangles ϱ n'existent non plus.

Deux rectangles ϱ n'ont jamais des points intérieurs en commun et peuvent seulement avoir des points frontières en commun, s'ils appartiennent à 2 bandes consécutives β_i et β_{i+1}.

Un rectangle ϱ possède sur l'un au moins des côtés horizontaux des points de P, excepté peut être dans le cas où ces 2 côtés appartiennent resp. à $y=c$ et à $y=d$.

Le nombre des rectangles ϱ est fini, puisque les bandes β_i (en nombre fini) contiennent chacune un nombre de rectangles ϱ, $<\dfrac{d-c}{x_i-x_{i-1}}$.

On voit facilement, que, si $u(M)$ désigne la longueur du demi-côté du plus grand carré $\gamma(M)$ de centre M, appartenant à r et ne contenant pas de points de P dans son intérieur, le point M est intérieur à tout domaine D, appartenant à un nombre $\omega\leqslant u(M)$.

De là on déduit que la mesure de D tend vers la mesure du complémentaire $C(\Pi)$ de Π [2]), sous la seule condition que ω tende vers zéro.

[1]) Voir le n° 25.

[2]) La mesure de $C(\Pi)$ est la variation de la fonction $\varphi(x, y)=xy$ sur

9. $\varphi(x)$ étant une fonction (continue) d'une seule variable, on définit comme *variation* $V(x, x')$ de φ sur l'intervalle x, x' le nombre $\varphi(x') - \varphi(x)$, $(x < x')$.

On définit comme *variation relative* de φ sur x, x' le rapport $\dfrac{V(x, x')}{x' - x}$, dont le dénominateur n'est autre chose que la variation de la fonction $\varphi_1(x) = x$.

Si $V(x, x')$ est nulle, quels que soient x et x', φ est une *constante*; si $\dfrac{V(x, x')}{x - x}$ a une valeur constante pour tout couple x, x', φ est une fonction *linéaire*.

Si $f(x, y)$ est une fonction (continue) de x et y, nous définissons comme *variation* de f sur un rectangle $r\{x_0 < x < x_0', y_0 < y < y_0'\}$ le nombre

$$\Delta(f, r) = f(x_0', y_0') + f(x_0, y_0) - f(x_0', y_0) - f(x_0, y_0').$$

Nous définissons comme *variation relative* de f sur r le rapport $\dfrac{\Delta(f, r)}{(x_0' - x_0)(y_0' - y_0)}$, dont le dénominateur, égal à l'aire de r, représente la variation de la fonction $f_1(x, y) = xy$.

Si $\Delta(f, r) = 0$ sur tout rectangle r, f est de la forme $g(x) + h(y)$; les fonctions du type $g(x) + h(y)$ sont donc les analogues des constantes.

Si $\dfrac{\Delta(f, r)}{(x' - x_0)(y' - y_0)} =$ nombre constant A, pour tout rectangle r, f est de la forme $Axy + g_1(x) + h_1(y)$; les fonctions de ce type sont donc analogues aux fonctions linéaires.

Remarquons que $\Delta(f, r)$ ne change pas sa valeur, si l'on remplace $f(x, y)$ par $f(x, y) + g(x) + h(y)$. En particulier on peut remplacer $f(x, y)$ par $f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)$, sans changer $\Delta(f, r)$; ou, ce qui revient au même, on peut toujours supposer que $f(x, y)$ s'annulle sur les 2 axes.

Si l'on remplace le 1^{er} et le 3^{me} sommet de r par le 2^{me} et le 4^{me}, $\Delta(f, r)$ change seulement de signe, donc $\dfrac{\Delta(f, r)}{(x_0' - x_0)(y_0' - y_0)}$ ne varie pas.

10. Voici quelques définitions de dérivées et nombres dérivés.

$C(II)$. On voit donc que cette variation s'obtient comme limite de la variation de φ sur D, si ω tend tend vers zéro.

a) Soit x, y un point fixe, r un rectangle variable de sommets opposés x, y et $x+u$, $y+v$ $(uv \neq 0)$, $\frac{\Delta(x,y,u,v)}{uv}$ la variation relative de la fonction continue $f(x,y)$ sur r, et appelons i^{me} quadrant $(i=1,2,3,4)$ du point x, y, la région où doit se trouver le point $x+u$, $y+v$, pour que r ait le point x, y pour i^{me} sommet. Nous posons

$$L_i = \overline{lim}\, \frac{\Delta(x,y,u,v)}{uv},$$

$$l_i = \underline{lim}\, \frac{\Delta(x,y,u,v)}{uv}$$

si le point $x+u$, $y+v$ tend vers x, y en restant dans le i^{me} quadrant.

l_i et L_i sont les nombres dérivés extrêmes dans le i^{me} quadrant; s'ils sont égaux, il existe une dérivée pour le i^{me} quadrant; si les 8 nombres dérivés sont égaux, il existe une dérivée $s(x,y)$.

b) Soient $\lambda_i(\alpha,\beta)$ et $\Lambda_i(\alpha,\beta)$ la plus petite et la plus grande limite d'indétermination de $\frac{\Delta(x,y,u,v)}{uv}$, si $x+u$, $y+v$ tend vers x, y en restant dans le i^{me} quadrant, de façon que $\alpha < \left|\frac{u}{v}\right| < \beta$, α et β indépendants de u et de v. Si α tend vers 0 et β vers ∞, λ_i et Λ_i tendent respectivement vers des limites déterminées r_i et R_i, que l'on peut appeler: *nombres dérivés extrêmes réguliers*. r_i et R_i peuvent être égaux, sans que l'on ait $l_i = L_i$.

c) Posons $u = \varrho \cos\theta$, $v = \varrho \sin\theta$ et faisons tendre $\varrho (>0)$ vers 0, θ restant fixe. Soient $\mu(\theta)$ et $M(\theta)$ les limites inférieure et supérieure de $\frac{\Delta(x,y,u,v)}{uv}$ et posons

A_i = borne inférieure stricte de $\mu(\theta)$,

B_i = borne supérieure stricte de $M(\theta)$,

pour les valeurs de θ correspondant au i^{me} quadrant.

On a $r_i \leqslant A_i \leqslant B_i \leqslant R_i$.

On peut avoir $A_i = B_i$ et en même temps $r_i < A_i$ et $B_i < R_i$.

d) Le point $x+u$, $y+v$ tend vers x, y dans le i^{me} quadrant en restant dans la région $0 < \left|\frac{v}{u}\right| < \alpha'$. Si nous désignons par $\sigma_i(\alpha')$ et $\Sigma_i(\alpha')$ les limites inférieures et supérieures de $\frac{\Delta(x,y,u,v)}{uv}$, ainsi obtenues, on voit que $\sigma_i(\alpha')$ et $\Sigma_i(\alpha')$ tendent vers des limites déterminées $s_{x,i}$ et $S_{x,i}$, si α' tend vers zéro.

Si l'on remplace la condition $0 < \left|\frac{v}{u}\right| < \alpha$ par la condition $\beta < \left|\frac{v}{u}\right| < \infty$, on définit des nombres analogues $s_{y,i}$ et $S_{y,i}$.

On a évidemment $l_i \leqslant s_{x,i} \leqslant S_{x,i} \leqslant L_i$ et $l_i \leqslant s_{y,i} \leqslant S_{y,i} \leqslant L_i$.

e) Soit γ un carré variable de côté u contenant x, y dans son intérieur ou sur son contour et soit $\frac{\Delta(f,\gamma)}{u^2}$ la variation relative de f sur γ. Posons

$$C = \overline{\lim_{u\to 0}} \frac{\Delta(f,\gamma)}{u^2}, \qquad c = \underline{\lim_{u\to 0}} \frac{\Delta(f,\gamma)}{u^2}$$

On a: le plus petit des nombres $l_i \leqslant c \leqslant C \leqslant$ le plus grand des nombres L_i.

On ne voit pas immédiatement que l'égalité $c = C$ n'entraîne pas nécessairement $l_i = L_i$. L'exemple suivant montre que Δ peut être zéro sur tout rectangle contenant un point O, sans que l'on ait $l_i = L_i$ au point O.

Soit O le centre de coordonnées; nous divisons le plan en 8 octants par les 2 axes et leurs bissectrices; nous les numérotons I, II,..., VIII, dans l'ordre où l'on les rencontre en décrivant un cercle de centre O et en partant du demi-axe des x positifs.

$f(x, y)$, nulle sur les axes, sera définie ainsi:

$$f(x, y) = y(x - y), \text{ dans I et V,}$$
$$f(x, y) = x(x - y), \text{ dans II et VI,}$$
$$f(x, y) = x(x + y), \text{ dans III et VII,}$$
$$f(x, y) = -y(x + y), \text{ dans IV et VIII.}$$

Si γ est un carré quelconque de côté u, contenant le point O, l'un (au moins) des sommets, soit x_0, y_0, appartient à I ou à II, les autres sommets sont alors $(x_0 - u, y_0)$, $(x_0 - u, y_0 - u)$, $(x_0, y_0 - u)$. Il faut démontrer:

$$f(x_0, y_0) + f(x_0 - u, y_0 - u) = f(x_0 - u, y_0) + f(x_0, y_0 - u).$$

Si x_0, y_0 appartient à I, resp. à II, le sommet opposé $x_0 - u, y_0 - u$ appartient à VI, resp. à V et l'on vérifie immédiatement:

$$f(x_0, y_0) + f(x_0 - u, y_0 - u) = (x_0 - y_0)(x_0 + y_0 - u)$$

Le sommet x_0-u, y_0 appartient à III ou à IV; le sommet x_0, y_0-u appartenant alors resp. à VIII et VII, on a en tous les cas: $f(x_0-u, y_0)+f(x_0, y_0-u)=(x_0-y_0)(x_0+y_0-u)$.

Donc $\Delta(f,\gamma)=0$.

Cependant $l_i=-1$, $L_i=+1$ $(i=1,2,3,4)$ [1]).

Cas, où $\Delta(f,r)$ est déterminé par la connaissance d'une dérivée dans r.

11. Considérons d'abord les nombres l_i et L_i.

Si $\varphi(x)$ est une fonction continue d'une seule variable indépendante, on sait que l'existence d'un nombre dérivé médian ou extrême zéro d'un certain côté invariable entraîne la nullité de la variation $\varphi(b)-\varphi(a)$, quels que soient a et b [2]).

Un tel théorème n'existe pas pour les nombres l_i et L_i.

En effet, nous allons donner des exemples de fonctions continues, telles que $l_i=L_i=0$ en tout point (i fixe) sans que $\Delta(f,r)$ soit

[1]) Toute fonction $f(x,y)$, nulle sur les axes et dont la variation est nulle sur tout carré contenant l'origine des coordonnées, est connue en tous les octants, si elle est connue dans l'un d'eux, p. e. dans I. En considérant diverses catégories de carrès, on trouve:

1° $f=0$ sur les bissectrices; (carrés dont un sommet est dans O)

2° f prend des valeurs opposées et égales en 2 points M et M',

a) symétriques p. r. à la 2^e bissectrice, M dans I ou II, M' dans VI ou V (carré dont 1 sommet est sur la 2^e bissectrice),

b) symétriques p. r. à la 1^e bissectrice, M dans III ou VI, M' dans VIII ou VII (carrés dont 1 sommet est sur la 1^e bissectrice),

3° f prend des valeurs égales en 2 points N et N', situés sur une même droite $x=x_0$ (ou $y=y_0$) dans des quadrants différents et ayant pour distance le nombre $|x_0|$ (resp. $|y_0|$) (carré dont 2 sommets sont sur l'un des axes de coordonnées).

N et N' sont dans II et III, ou IV et V, ou VI et VII, ou VIII et I.

De la résulte immédiatement la propriété énoncée.

On voit facilement que dans I, f satisfait à l'équation:

$$f(x,y)-f(d-y,d-x)+f(y,x+y-d)-f(x,x+y-d)=0 \quad (x\leqslant d\leqslant x+y),$$

et que réciproquement, toute fonction dans I, continue, satisfaisant à cette équation et nulle pour $x=0$ et pour $y=x$, détermine une fonction $f(x,y)$, nulle sur les axes et dont la vaiation est nulle sur tout carré contenant 0.

On vérifiera que toute fonction du type $\varphi(x)-\varphi(x-y)-\varphi(y)+\varphi(0)$, φ étant une fonction continue d'une seule variable, satisfait à l'équation et s'annulle pour $x=0$, et pour $y-x=0$. Notre exemple correspond à $\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2$.

[2]) A. Denjoy. *Journ. de Math. 1915*, p. 175.

La démonstration exige seulement la continuité du côté opposé à celui où l'on considère le nombre dérivé zéro.

identiquenant nulle. Donc $\Delta(f, r)$ *n'est pas déterminé par la connaissance d'une dérivée finie, supposée existante, pour un même quadrant invariable.*

Exemple: Soit $f_1(x, y) = y$, pour $y - x \leqslant 0$
$= x$, pour $y - x \geqslant 0$.

Dans chacun des demi-plans $y - x \leqslant 0$ et $y - x \geqslant 0$, $f_1(x, y)$ est du type $g(x) + h(y)$, donc $\Delta(f_1, r) = 0$, si r appartient entièrement à un de ces demi-plans.

Sur la droite $y - x = 0$, les rectangles servant à la définition de l_2 et L_2 sont encore situés entièrement dans $y - x \geqslant 0$, ceux qui servent pour l_4 et L_4 dans $y - x \leqslant 0$, donc en tout point $l_2 = L_2 = l_4 = L_4 = 0$.

Cependant $f_1(x, y)$, nulle sur les demi-axes positif n'est pas indentiquement nulle dans le premier quadrant.

Géométriquement $z = f_1(x, y)$ est représentée par un dièdre ayant pour arête la droite $x = y = z$, les 2 faces passant resp. par l'axe des x et l'axe des y (positifs).

Exemple analogue, si l'on exige $l_1 = L_1 = 0$ ou $l_3 = L_3 = 0$.

Cet exemple montre que les nombres l_i et L_i ne possèdent pas un théorème de la moyenne généralisé, comme les nombres dérivés des fonctions continues d'une seule variable, et comme la dérivée sconde généralisée.

12. $f(x, y)$ étant une fonction continue, je désignerai par $d_x^+(x, y)$, $D_x^+(x, y)$, $d_x^-(x, y)$, et $D_x^-(x, y)$ les nombres dérives extrêmes de f par rapport à x au point x, y; par $d_y^-(x, y)$, etc. les nombres dérivés par rapport à y.

La signification de $d_y^+[D_x^+(x, y)]$, $D_y^+[D_x^+(x, y)]$ sera alors évidente.

Je vais démontrer la *proposition* suivante:

Si l_1 *et* L_1 [1]) *sont finis au point* x_0, y_0, on a:

1° *si* $D_x^+(x_0, y_0)$ *est* $+\infty$ (resp. $-\infty$), *il existe un nombre positif* ϱ, *tel que* $D_x^+(x, y+v) = +\infty$ (resp. $-\infty$) pour $0 \leqslant v < \varrho$;

2° *si* $D_x^+(x_0, y_0)$ *est fini, le nombre* $D_x^+(x, y)$ *est continue à droite par rapport à* y *au point* x_0, y_0 *et l'on a*

$$l_1 \leqslant d_y^+[D_x^+(x_0, y_0)] \leqslant D_y^+[D_x^+(x_0, y_0)] \leqslant L_1.$$

Théorème analogue pour $d_x^+(x_0, y_0)$ *et (en échangeant* x *et* y*) pour* $D_y^+(x_0, y_0)$ *et* $d_y^-(x_0, y_0)$.

[1]) On voit facilement les changements à apporter si l'on remplace l_1 et L_1 par les autres nombres l_i et L_i $(i = 2, 3, 4)$.

Démonstration: A tout nombre positif ε ou peut faire correspondre un nombre positif ϱ, tel que les 2 inégalités

$$0 < u < \varrho,\ 0 < v < \varrho$$

entraînent

$$l_1 - \varepsilon < \frac{f(x_0+u, y_0+v)+f(x_0, y_0)-f(x_0+u, y_0)-f(x_0, y_0+v)}{uv} < L_1+\varepsilon.$$

$$(1) \qquad (l_1-\varepsilon)v < \frac{f(x_0+u, y_0+v)-f(u_0, y_0+v)}{u} - \frac{f(x_0+u, y_0)-f(x_0, y_0)}{u} < (L_1+\varepsilon)v$$

1° Si $D_x^+(x_0, y_0) = \overline{\lim_{u\to+0}} \frac{f(x+u, y_0)-f(x_0, y_0)}{u} = +\infty$, il existe une suite de nombres positifs $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ tendant vers 0, tels que

$$\frac{f(x_0+u_n, y_0)-f(x_0, y_0)}{u_n} \quad \text{tend vers} \quad +\infty.$$

Le rapport

$$\frac{f(x_0+u_n, y+v)-f(x_0, y_0+v)}{u_n} > \frac{f(x_0+u_n, y_0)-f(x_0, y_0)}{u_n} + (l_1-\varepsilon)v$$
$$(0 < v < \varrho,\ v \text{ indépendant de } n)$$

tend donc aussi vers $+\infty$. Donc $D_x^+(x_0, y_0+v) = +\infty$ $(0 \leqslant v < \varrho)$.

Si $D_x^+(x_0, y_0) = \overline{\lim_{u=+0}} \frac{f(x_0+u, y_0)-fx_0, y_0)}{u} = -\infty$, on a aussi

$$\underline{\lim_{v=+0}} \frac{f(x_0+u, y_0)-f(x_0, y_0)}{u} = d_x^+(x_0, y_0) = -\infty,$$

donc $\frac{f(x_0+u, y_0)-f(x_0, y_0)}{u}$ tend vers $-\infty$, quelle que soit la façon où u tend vers $+0$. Mais le rapport

$$\frac{f(x_0+u, y_0+v)-f(x_0, y_0+v)}{u} < \frac{f(x_0+u, y_0)-f(x_0, y_0)}{u} + (L_1+\varepsilon)v$$

tend aussi vers $-\infty$, u tendant vers $+0$ d'une façon quelconque. Donc $D_x^+(x_0, y_0+v) = d_x^+(x_0, y_0+v) = -\infty$ $(0 \leqslant v < \varrho)$.

2° Si $D_x^+(x_0, y_0)$ est fini, il existe une suite de nombres positifs $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ tendant vers $+0$, tels que

$$\lim \frac{f(x_0+u_n, y_0)-f(x_0, y_0)}{u_n} = D_x^+(x_0, y_0),$$

nombre fini.

Donc toutes les limites de $\frac{f(x_0+u_n, y_0+v) - f(x_0, y_0+v)}{u_n}$ sont finies et $\geqslant D_x^+(x_0, y_0)+(l_1-\varepsilon)v$. D'où

$$D_x^+(x_0, y_0+v) \geqslant D_x^+(x_0, y_0)+(l_1-\varepsilon)v.$$

Est-ce que $D_x^+(x_0, y_0+v)$ peut être $> D_x^+(x_0, y_0)+(L_1+\varepsilon)v$? Non, car alors il existerait une suite de nombre u_n tendant vers 0, tels que $\frac{f(x_0+u_n, y_0+v)-f(x_0, y_0)}{u_n}$ tend vers $D_x^+(x_0, y_0)+(L_1+\varepsilon)v+\omega$ $(0<\omega)$, d'où résulte que le rapport $\frac{f(x_0+u, y_0)-f(x_0, y_0)}{u_n}$ aurait au moins une limite $\geqslant D_n^+(x_0, y)+\omega$, ce qui est impossible. Donc nous avons

$$(l_1-\varepsilon)v \leqslant D_x^+(x_0, y_0+v) - D_x^+(x_0, y_0) \leqslant (L_1+\varepsilon)v \quad (0 \leqslant v < \varrho)$$

d'où résulte que $D_x^+(x_0+y_0)$ est continue à droite par rapport à y et que ses nombres dérivés extrêmes à droite par rapport à y sont compris entre $l_1-\varepsilon$ et $L_1+\varepsilon$ inclusivement. Donc, ε étant arbitrairement petit,

$$l_1 \leqslant d_y^+[D_x^+] \leqslant D_y^+[D_x^+] \leqslant L_1.$$

Même raisonnement pour $d_x^+(x, y)$. Enfin, pour démontrer la proposition pour D_y^+ et d_y^+ on part de la double inégalité

$$(2) \qquad (l_1-\varepsilon)u < \frac{f(x_0+u, y_0+v)-f(x_0+u, y_0)}{v} - \frac{f(x_0, y_0+v)-f(x_0, y_0)}{v} < (L_1+\varepsilon)u$$

à laquelle s'applique un raisonnement comme ci-dessus [1]).

[1]) Le raisonnement et les résultats subsistent, si l'on remplace les nombres l_1 et L_1 par les nombres $s_{y,1}$ et $S_{y,1}$ dans (1): et par les nombres $s_{x,1}$ et $S_{x,1}$ dans (2). Voir nº 10.

Si l'on veut seulement obtenir la continuité de $D_x^+(x, y)$ et $d_x^+(x, y)$ par rapport à y au point x_0, y_0, il suffit de supposer que le rapport

$$\frac{f(x_0+u, y_0+v)+f(x_0, y_0)-f(x_0+u, y_0)-f(x_0, y_0+v)}{u}$$

tend vers 0, si u et v tendent vers $+0$.

13. Démontrons maintenant le *théorème* suivant[2]):
Si en tout point d'une droite déterminée $x = x_0$,
1° l_1 et L_1 *sont finis et égaux*, $= \sigma(x, y)$.
2° l_4 et L_4 *sont finis (ou, condition moins réstrictive, si*

$$\frac{f(x+u,\, y+v)+f(x,\, y)-f(x+u,\, y)-f(x,\, y+v)}{u}$$

tend vers 0, *pour* $u = +0$, $v = -0$), *alors, s'il existe un seul point* x_0, y_0, *où* f *possède une dérivée à droite par rapport à* x *finie* $p^+(x_0, y_0)$,

a) f *possède en tout point* x_0, y *une dérivée à droite par rapport à* x *finie* $p^+(x_0, y)$;

b) *cette dérivée* $p^+(x_0, y)$, *continue par rapport à* y, *possède une dérivée à droite par rapport à* y, $= \sigma(x, y)$.

D é m o n s t r a t i o n. Tout point x_0, y, où $D_x^+(x_0, y)$ est infini (resp. fini) est, d'après le théorème du n° 13 (énoncé pour l_1 et L_1 et pour l_4 et L_4) centre d'un intervalle $i_{x_0}(y-\varrho, y+\varrho)$, en tout point duquel D_x^+ est infini (resp. fini).

Les deux ensembles E, où $D_x^+(x_0, y)$ est infini, et E' où, $D_x^+(x_0, y)$ est fini sont l'un et l'autre des ensembles ouverts; ils sont complèmentaires, donc l'un d'eux ne peut pas exister; c'est évidemment E, puisque au point x_0, y_0 D_x^+ est fini. Donc D_x^+ est fini en tout point x_0, y.

De même, $d_x^+(x_0, y)$ doit être fini en tout point de la droite $x = x_0$.

D'après n° 12, $d_x^+(x_0, y)$ et $D_x^+(x_0, y)$ sont continues par rapport à y et puisque nous avons supposé $l_1 = L_1 = \sigma(x, y)$, on a

$$d_y^+[d_x^+] = D_y^+[d_x^+] = d_y^+[D_x^+] = D_y^+[D_x^+] = \sigma(x, y)$$

c. à. d. $d_x^+(x_0, y)$ et $D_x^+(x_0, y)$ ont en tout point x_0, y une dérivée à droite par rapport à $y = \sigma(x, y)$.

De même, pour obtenir la continuité de $D_x^+(x, y)$ et de $d_x^+(x, y)$ par rapport à y, il suffit de supposer que

$$\frac{f(x_0+u,\, y_0+v)+f(x_0,\, y_0)-f(x_0+u,\, y_0)-f(x_0',\, y_0+v)}{v}$$

tend vers 0, si u et v tendent vers 0.

On peut encore faire d'autres hypothèses.

[2]) Il est évident, qu'en obtient des énoncés analogues, en remplaçant les indices 1 et 4, par 1 et 2, ou 2 et 3, ou 3 et 4, ou en échangeant les indices d'un même couple.

Ils coïncident au point x_0, y_0, par hypothèse, donc ils coïncident en tout point de $x = x_0$, donc en tout point de cette droite f admet une dérivée à droite finie $p^+(x_0, y)$ par rapport à x, continue par rapport à y et admettant une dérivée à droite par rapport à y, égale à $\sigma(x, y)$; c. q. f. d.

Remarque: En particulier, *si tous les nombres l_i et L_j sont égaux entre eux pour $x = x_0$ et $= s(x_0, y)$*, c. à. d. *s'il existe une dérivée en tout point de la droite $x = x_0$, et s'il existe un seul point x_0, y_0, où f possède une dérivée par rapport à x, en tout point x_0, y, il existe alors une dérivée $p(x_0, y)$ continue en y; $\frac{\partial p}{\partial y}$ existe* et $= s(x_0, y)$.

Même remarque pour $q(x, y_0)$ si l'on remplace x_0 par y_0 et y par x; $\frac{\partial q}{\partial x}$ existe et $= s(x_0, y)$.

Il existe alors même une differentielle totale première, comme il résulte de la formule:

$$\frac{f(x_0 + u, y_0 + v) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0)}{u} +$$

$$+ \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{f(x_0, y_0 + v) - f(x_0, y_0)}{v} +$$

$$+ \frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \frac{\Delta(x, y, u, v)}{uv}.$$

13. bis. Soit r le rectangle $a < x < b$, $c < y < d$.

Si les conditions 1° et 2° du n° 13, *sont vérifiées pour tout nombre x_0, $a < x_0 < b$, $(c < y < d)$, je dis que $\Delta(f, r)$ est entièrement déterminé par la connaissance de $\sigma(x, y)$ en tout point de r.*

Posons, en effet,

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + f(a, c) - f(x, c) - f(a, y),$$
$$\text{pour } a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d.$$

$\varphi(x, y)$ satisfait aux mêmes conditions que $f(x, y)$ dans r.

De plus $\varphi(x, c) = 0$ pour $a \leqslant x \leqslant b$, donc admet une dérivée par rapport a x pour toute valeur x_0, $a < x_0 < b$. Donc d'après n° 12, $\varphi(x, y)$ admet en tout point de r une dérivée à droite par rapport à x, $\pi(x, y)$, celle-ci est continue par rapport à y et admet $\sigma(x, y)$ pour dérivée à droite par rapport à y. Donc, puisque une fonction continue d'une seule variable est déterminée par sa dérivée à droite finie, existante en tout point, et par sa valeur en un point, $\pi(x_0, y)$, nulle pour $y = c$, est entièrement déterminée $(c < y' < d)$ par $\sigma(x_0, y')$, et $\varphi(x, y_0)$, nulle pour $x = a$, est determinée par $\pi(x', y_0)$ $(a < x' < x)$. Donc

$\Delta(f, r) = \varphi(b, d)$ est entièrement déterminé.

14. $\Delta(f, r)$ peut étre déterminée moyennant d'autres hypothèses.

Soit r le rectangle $a < x < b$, $c < y < d$.

Supposons que:

1° *il existe une infinité dénombrable de droites $y = y_n$, partout denses sur r, telle qu'en tout point x, y_n les 4 dérivés extrêmes par rapport à x, c. à. d. d_x^-, D_x^-, d_x^+, D_x^+ soient finis.*

2° *il existe une pleine épaisseur*[1]) *de droites $x = x_0$, telles qu'en tout point x_0, y $(c < y < d)$ l'une au moins des 2 hypothèses suivantes soit vérifiée:*

a) l_1, L_1, l_4 et L_4 sont finis,

b) l_2, L_2, l_3 et L_3 sont finis.

3° *si l'hypothèse* a) *est vérifiée, ou bien $l_1 = L_1$, ou bien $l_4 = L_4$; si l'hypothèse* b) *est vérifiée, où bien $l_2 = L_2$, ou bien $l_3 = L_3$.*

En désignant cette valeur commune par $\tau(x_0, y)$, $\Delta(f, r)$ est entièrement déterminé par la connaissance de $\tau(x, y)$.

D é m o n s t r a t i o n. Puisque une fonction d'une seule variable à nombres dérivés extrêmes finis, possède une dérivée sur une pleine épaisseur, à chaque droite $y = y_n$ correspond une pleine épaisseur E_n de valeurs de n telles que $d_x^- = D_x^- = d_x^+ = D_x^+ = p(x, y_n)$, x appartenant à E_n. Les ensembles E_n ont en commun un ensemble E_0 complémentaire d'un ensemble de mesure nulle. Si x_0 appartient à E_0, on a en tout point x_0, y_n, c. à d. sur une infinité dénombrable de points partout denses sur l'intervalle $i_{x_0}(c, d)$,

$$d_x^- = D_x^- = d_x^+ = D_x^+ = p(x, y_n).$$

L'ensemble des valeurs de x, pour lesquelles l'hypothèse 2° est verifiée, possède en commun avec E_0 une pleine épaisseur E_0'.

Soit x_0' un point de E_0' et y_0 un point de l'intervalle (c, d). Il suit du théorème du n° 12, que si au point x_0', y_0 le cas a) se présente, les 2 nombres $d_x^+(x_0', y_0)$ et $D_x^+(x_0', y_0)$ doivent être finis et égaux entre eux; donc $p_x^+(x_0', y_0)$ existe. De même, si au point x_0', y_0, le cas b) se présente, $d_x^-(x_0', y_0)$ et $D_x^-(x_0', y_0)$ sont finis et égaux entre eux et $p_x^-(x_0', y_0)$ existe.

[1]) c. à d. complémentaire d'un ensemble de mesure nulle.

Il existe donc une fonction $\varphi(x, y)$, définie quels que soient x appartenant à E'_0 et y appartenant à l'intervalle (c, d), coïncidant avec $p(x_0, y_n)$ aux points x_0, y_n, avec $p^+(x_0, y)$ ou $p^-(x_0, y)$ resp., aux points x_0, y où le cas a) resp. le cas b) se présente. $\varphi(x, y)$ est continue par rapport à y, car $\varphi(x, y) = \lim \varphi(x, y_n)$, si y_n tend vers y, donc $= \lim \varphi(x, y')$, si y' tend vers y, puisque tout $\varphi(x_0, y')$ est lui-même limite de $\varphi(x, y_n)$.

De notre hypothèse 3^0), il résulte (d'après n^0 13) que $\varphi(x, y)$ (x appartenant à E'_0) possède une dérivée unilaterale finie, $= \sigma(x, y)$, quelque soit y appartenant à l'intervalle (c, d).

Donc pour une telle valeur de x, la variation de $\varphi(x, y)$, c. à d. le nombre $\varphi(x, y) - \varphi(x, c)$, est entièrement déterminée par la connaissance de $\sigma(x, y)$ pour cette valeur de x.

Considérons maintenant $f(x, y_n)$; puisque $f(x, y_n)$ est à nombres dérivés finis par rapport à x (hypothèse 1^0), la variation de f (pour cette valeur y_n) par rapport à x, est entièrement déterminée par la connaisance de la dérivée $\varphi(x, y)$, sur la pleine épaisseur E'_0.

Donc, $f(x, y_n) - f(a, y_n)$ étant entièrement déterminé et y_n étant partout dense sur l'intervalle $c < y < d$, $\Delta(f, r)$ est entièrement déterminé.

15. Démontrons maintenant que:

$\Delta(f, r)$ est entièrement déterminé, par la limite $\lambda(x, y)$ de $\dfrac{\Delta(f, \gamma)}{u^2}$ supposée existante et finie, γ étant un carré quelconque contenant x, y, le côté u tendant vers 0.

Il suffit évidemment de démontrer que $\Delta(f, r) = 0$, si $\lambda(x, y) = 0$ en tout point de r.

Pour cela, je démontre d'abord, que:

Si $\dfrac{\Delta(f, r)}{\text{mes}\,(r)} = \omega$ et si $\lambda(x, y)$ existe en tout point de r, il existe au moins un point M' intérieur à r', tel que $\lambda(M') \geqslant \omega - \varepsilon$, et au moins un point M'', tel que $\lambda(M'') \leqslant \omega + \varepsilon$, ε étant un nombre positif arbitraire, donné d'avance.

En effet, puisque $f(x, y)$ est continue, il existe un rectangle r_1 dont le rapport des côtés $=$ nombre rationnel p/q (p et q nombres entiers), et tel que

$$\omega - \varepsilon = \frac{\Delta(f, r)}{\text{mes}\,(r)} - \varepsilon < \frac{\Delta(f, r_1)}{\text{mes}\,(r_1)} < \frac{\Delta(f, r)}{\text{mes}\,(r)} + \varepsilon = \omega + \varepsilon.$$

Divisons r_1 en pq carrés égaux.

Sur l'un au moins des carrés ainsi obtenus, soit γ'. on aura:

$$\Delta(f, \gamma') \geqslant \frac{1}{pq} \Delta(f, r_1).$$

On a aussi: mes $\gamma' = \dfrac{1}{pq}$ mes r_1, donc

$$\frac{\Delta(f, \gamma')}{\text{mes } (\gamma')} \geqslant \frac{\Delta(f, r_1)}{\text{mes } r_1} > \omega - \varepsilon.$$

De même, il existe au moins un carré γ'', tel que

$$\frac{\Delta(f, \gamma'')}{\text{mes } (\gamma'')} < \omega + \varepsilon.$$

Divisons le carré γ' en 4 carrés égaux; sur l'un de ces carrés, soit γ_1', on a $\dfrac{\Delta(f, \gamma_1')}{\text{mes } \gamma_1'} > \omega - \varepsilon$. On peut déduire de γ_1' un carré γ_2', comme γ_1' est déduit de γ', et ainsi de suite. On obtient alors une suite de carrés

$$\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_n' \ldots$$

tels que γ_{n+1} est contenu dans γ_n' et que mes $(\gamma_{n+1}') = \frac{1}{4}$ mes γ_n'. Il existe donc un point M' et un seul appartenant à tous les γ_n', et l'on a

$$\lambda(M') \geqslant \omega - \varepsilon,$$

puisque l'on a, quel que soit n, $\dfrac{\Delta(f, \gamma_n')}{\text{mes } \gamma_n'} > \omega - \varepsilon$.

D'une manière analogue, on trouve un point M'', tel que $\lambda(M'') \leqslant \omega + \varepsilon$. Donc notre lemme est établi.

Supposons $\omega \neq 0$.

Si $\omega > 0$, prenons $\varepsilon = \dfrac{\omega}{2}$; on voit que $\lambda(M') \geqslant \dfrac{\omega}{2}$.

Si $\omega < 0$, prenons $\varepsilon = \dfrac{|\omega|}{2}$; on voit que $\lambda(M') \leqslant \dfrac{-|\omega|}{2}$

Donc en tout cas, ou trouve un point, où $\lambda \neq 0$.

Donc si $\lambda(x, y) = 0$ en tout point, $\omega = \Delta(f, r)$ doit être 0, c. q. f. a.

16. Un raisonnement analogue permet de démontrer que $\Delta(f, r_0)$ *est entiérement déterminé* par la *dérivée régulière* [1]) $\varrho(x, y)$, *supposée*

[1]) Voir n°. 10 b), $\varrho(x, y)$ est la valeur commune des r_i et R_j supposés égaux entre eux.

existante et finie en tout point de r_0, *si l'on fait l'hypothèse complémentaire, que pour une suite régulière de rectangles* r_n *ayant un point* x, y *pour sommet, le rapport* $\frac{\Delta(f, r_n)}{\text{mes } c_n}$ *tend vers zéro,* c_n *étant le plus petit carré de sommet* x, y *contenant* r_n.

Le calcul totalisant.

17. Il est est bien facile de former des fonctions dérivées $s(x, y)$, *non sommables* au sens de Lebesgue [1]).

En effet, si $\varphi(x)$ est une fonction continue d'unè seule variable indépendante, admettant une dérivée non sommable $\varphi(x)$, la fonction continue $f(x, y) = y\varphi(x)$ est telle que

$$\frac{\Delta}{uv} = \frac{f(x+u, y+v) - f(x+u, y) - f(x, y+v) + f(x, y)}{uv} =$$

$$= \frac{\varphi(x+u) \quad \varphi(x)}{u}$$

donc $s(x, y)$ existe et $= \varphi'(x)$, donc $s(x, y)$ n'est pas sommable, car toutė fonction sommable est sommable par rapport à x pour une pleine épaisseur de valeurs de y.

Nous avons démontré, que si $s(x, y)$ existe (et est finie) et si nous supposons $f(a, y) = f(x, c) = 0$ (ce qui est toujours permis), p existe et est continue par rapport à y, $\frac{\partial p}{\partial y}$ existe et $= s(x, y)$. $\left(\text{De même } q \text{ existe et est continue par rapport a } x \text{ et } \frac{\partial q}{\partial x} = s(x, y)\right)$.

$s(x, y)$, dérivée d'une fonction continue en y, est donc totalisable sur chaque droite parallèle à Oy (et sur chaque droite parallèle à Ox)

[1]) Dans ce qui suit, j'entends par *intégrale* toujours *l'integrale double*, c. à d. $\lim \Sigma$ mes. ens. $\{l_i \leqslant S(x, y) < l_{i+1}\}$ (les l_i étant une échelle de nombres allant de $-\infty$ à $+\infty$) pour une suite quelconque de subdivisions, telle que $\max(l_{i+1} - l_i)$ tend vers zéro.

Pour calculer *l'intégrale répétée* $\int_a^b dx \int_c^d s(x, y)\, dy$, si cette intégrale a un sens, il faudrait calculer $\int_c^d s(x, y)\, dy$ pour une pleine épaisseur de valeurs de x, ce qui exigerait une infinité non dénombrable d'opérations. Or, notre but est de ne pas sortir du dénombrable.

Totalisons $(y)\,T_c^d s(x, y) = p(x, d) - p(x, c)$.

$p(x, y)$, continue pas rapport à y, peut avoir, par rapport à x, toutes les discontinuités de la fonction dérivée la plus générale. Donc, pour pouvoir calculer

$$\Delta(f, r) = (x)\,T_a^b[\,p(x, d) - p(x, c)].$$

il faut calculer $(y)(T_c^d s(x_0, y)$ pour une pleine épaisseur de valeurs de x_0, c. à d. il faut effectuer une infinité non dénombrable d'opérations.

L'objet des pages suivantes est de donner une méthode exigeant seulement l'emploi d'une suite *dénombrable* de calculs.

Faisons d'abord une remarque générale.

Le nombre $s(x, y)$ étant la limite du nombre $\dfrac{\Delta(f, r)}{\text{mes}\,(r)}$ dépendant du rectangle r, le problème de l'intégration [1]) est de retrouver $\Delta(f, r)$ pour tous les rectangles r.

[1]) Tout revient, comme nous verrons, à donner le moyen de trouver un ensemble fermé E_1 agrégé à un ensemble fermé E (non dense, donné quelconque) et non dense sur E, en dehors duquel la totalisation puisse être effectué, si elle est déjà effectuée en dehors de E. A l'analogie de la totalisation dans le cas linéaire, on pourrait être tenté de tirer parti de la décomposition du complémentaire de E en régions distinctes $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$; tâcher de définir la totalisation pour l'intérieur de R_n, puis pour le domaine D_n, correspondant à R_n; puis tâcher de réunir D_m et D_n, si D_m et D_n ont des points en commun, etc. Mais un exemple simple montrera que la décomposition du complémentaire de E en régions distinctes ne peut pas jouer un rôle dans la totalisation.

Scit $\varphi(x)$ une fontions continue, dont la dérivée $\varphi'(x)$ existe en tout point du segment $0, 1$ et admet pour ensemble de points de non-sommabilité un certain ensemble parfait H de points extrêmes 0 et 1. La fonction $f(x, y) = \frac{1}{2}y^2\varphi(x)$ définie sur le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, admet une dérivée $s(x, y) = y\varphi'(x)$, dont l'ensemble des points de non sommabilité est constitué par des segments $s_{x_0}(0, 1)$, x_0 appartenant à H.

L'ensemble complémentaire est composé d'une infinité dénombrable de régions distinctes.

Définissons maintenant $f_1(x, y)$ sur le rectangle $0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1$; $= f(x, y)$, pour $0 \leqslant y \leqslant 1$; $= 0$, pour $-1 \leqslant y \leqslant 0$. $f(x)$ possède en tout point une dérivée $s_1(x, y)$, dont l'ensemble des points de non-sommabilité est le même que celui pour $f(x, y)$. Maintenant l'ensemble complémentaire est une seule région.

Cependant les difficultés de la totalisation sont les mêmes.

Or, $\Delta(f, r)$ dépend continûment des 4 paramètres, dont dépend r. Donc il suffit de donner le moyen de calculer $\Delta(f, r')$ pour tous les rectangles r', en infinité dénombrable, dont les coordonnées des sommets sont des nombres rationnels. Nous les appellerons *rectangles à sommets rationnels*. Si r_0 est donné quelconque, $\Delta(f, r)$ peut être calculé comme $\lim \Delta(f, r')$, r' tendant vers r_0.

19. *Si* $s(x, y)$ *est sommable sur le rectangle* $r(a<x<b,\ c<y<d)$, *on a l'égalité*

$$\Delta(f, r) = \int\!\!\int_{(r)} s(x, y)\,dx\,dy\ ^{1)}.$$

D'après les propriétés de l'intégrale de Lebesgue, on a:

$$\int\!\!\int_{(r)} s(x, y)\,dx\,dy = \int_E dx \int_c^d s(x, y)\,dy,$$

E désignant la pleine épaisseur de valeurs de x_0, pour lesquelles $\int_c^d s(x_0, y)\,dy$ a un sens.

D'après n° 17, et les propriétés de la totale de Denjoy on a:

$$\int_c^d s(x_0, y)\,dy = (y)\,T_c^d\, s(x_0, y),$$

donc puisque dans le calcul de la totale les valeurs sur un ensemble de mesure nulle peuvent être négligées,

$$\int_E dx \int_c^d s(x_0, y)\,dy = (x)\,T_a^b (y)\,T_c^d\, s(x_0, y) = \Delta(f, r),$$

c. q. f. d.

20. Supposons maintenant $s(x, y)$ *non sommable*.

Dans tous les cas, $s(x, y)$ est la limite de la suite de fonctions continues

$$\frac{f(x+u_n, v_n)+f(x, y)-f(x+u_n, y)-f(x, y+v_n)}{u_n v_n},$$

[1]) C'est seulement dans les *démonstrations* que nous utilisons les intégrales et les totales répétées, pour le *calcul* nous nous servons exclusivement de l'intégrale double.

u_n et v_n étant deux suites de nombres, non nuls, tendant vers 0. Donc, d'après le théorème de Baire:

Quelque soit l'ensemble parfait P, l'ensemble des points au voisinage desquels $s(x, y)$ n'est pas borné sur P, est non dense sur P.

A fortiori,

l'ensemble H des points, au voisinage desquels $s(x, y)$ est non sommable sur P, H est non dense sur P.

H est évidemment fermé.

L'expression „$s(x, y)$ est sommable sur P", signifie que la fonction $\sigma(x, y) = s(x, y)$ sur P et $= 0$ en dehors de P, est sommable.

21. Soit E l'ensemble (fermé, non dense, d'après 20) des points du plan au voisinage desquels $s(x, y)$ n'est pas sommable. Pour tous les rectangles r_1, à sommets rationnels, ne contenant pas de points de E dans leur intérieur, ni sur leur contour, nous calculons $\Delta(f, r_1)$ d'après la formule:

$$\Delta(f, r_1) = \iint\limits_{(r_1)} s(x, y)\, dx\, dy.$$

L'intégration besgienne sera appellée la *première opération de la totalisation.*

Les rectangles r_1 étant en infinité dénombrable, nous n'effectuons qu'une infinité dénombrable d'opérations.

22. Soit maintenant r_2 un rectangle à sommets rationnels, contenant des points de E sur son contour, mais n'en contenant pas dans son intérieur.

D'après la remarque du n° 17, nous calculons $\Delta(f, r_2)$ suivant la formule

$$\Delta(f, r_2) = \lim \Delta(f, r_1'),$$

en désignant par r_1' un rectangle variable, intérieur à r_2, et tendant vers r_2; $\Delta(f, r_1')$ est déjà connu (n° 21).

Le calcul de Δ d'après cette formule sera appelé la *seconde opération* de la totalisation.

Les rectangles r_2 sont en nombre nul, fini ou infinité dénombrable.

Dès à présent, quel que soit le rectangle r_0, ne contenant pas de points de E dans son intérieur, $\Delta(f, r_0)$ peut être supposé connu.

23. Supposons que les rectangles r_3 et r_3'

1° ne possèdent pas de points de E dans leur intérieur;

2⁰ possèdent un côté en commun et soient situés de part et d'autre de ce côté. Supposons que ce coté contienne des points de E et appelons r_4 la réunion de r_3 et r'_3.

Il résulte de la definition de Δ, que l'on a:

$$\Delta(f, r_4) = \Delta(f, r_3) + \Delta(f, r'_3).$$

Le calcul de Δ d'après cette formule sera appellé la *troisième opération* de la totalisation.

24. Effectuons maintenant la décomposition:

$$E = P + Q$$

$P =$ l'ensemble (parfait) des points où E est de première sorte

$Q =$ l'ensemble des points au voisinage desquels E est de seconde sorte (n⁰ 3).

Nous allons démontrer, que, *si r_0 est un rectangle quelconque ne contenant pas de points de P dans son intérieur, $\Delta(f, r_0)$ peut être caculé en appliquant un nombre fini ou infinité dénombrable de fois la première, seconde, et troisième opérations.*

Pour cela, nous calculerons $\Delta(f, \varrho)$ sur tous les rectangles ϱ à sommets rationnels, ne contenant par de points de P dans leur intérieur; ces rectangles sont évidemment en infinité dénombrable.

Soit $$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots, E_\omega, E_{\omega+1}, \ldots$$

la suite d'ensembles fermés, définis au n⁰ 5.

Il existe un nombre fini ou transfini dénombrable β, tel que $E_\beta = E_{\beta+1} = \ldots = P$, $E_{\beta-1}$ étant différent de P.

Nous distinguons successivement les cas suivants:

1) ϱ contient des points de E, (dans son intérieur), et ne contient pas de points de E_1 (ni dans son intérieur, ni sur son contour). Soit ϱ le rectangle $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$

Tout point de $\Pi(E, \varrho)$ étant centre d'un rectangle, tel que la projection de la portion correspondante de E, sur l'un au moins des deux axes, est dénombrable, on voit, en appliquant le lemme de Borel, que $\Pi(E, \varrho)$ est compris dans la réunion de 2 ensembles fermés H et K, H étant constitué de segments $s_{x_0}(\gamma, \delta)$, H_x est fini ou dénombrable; K étant constitué de segments $s_{y_0}(\alpha, \beta)$, K_{y_0} est fini ou dénombrable.

A tout intervalle contigu $\alpha_m < x < \beta_m$ de H_x, il correspond un rectangle σ_m $\{\alpha_m < x < \beta_m, \gamma < y < \delta\}$, tel que $\Pi(H + K, \sigma_m) = \Pi(K, \sigma_m)$.

L'ensemble complémentaire de $\Pi(K, \sigma_m)$ par rapport à σ_m est divisé en rectangles (en nombre fini on infinité dénombrable), où Δ est déjà connu. De ces nombres on déduit $\Delta(f, \sigma_m)$ en appliquant la 2^{me} et 3^{me} opération en nombre fini ou une infinté dénombrable de fois, d'une manière analogue à celle employée dans la totalisation de Denjoy [1]).

Après avoir calaculé $\Delta(f, \sigma_m)$ pour toute valeur de m, on calcule $\Delta(f, \varrho)$ au moyen des $\Delta(f, \sigma_m)$ de la même façon que $\Delta(f, \sigma_m)$ a été calculé.

La démonstration, que le résultat obtenu, est exactement $\Delta(f, \varrho)$, se fait à l'aide de la proposition du n⁰ 9.

1 bis) ϱ contient des points de E_1 sur son contour, mais non pas dans son intérieur.

On applique la *seconde opération,* Δ étant calculé pour tous les rectangles du cas 1^0).

2^0) ϱ contient des points de E_1 dans son intérieur, et ne contient pas de points de E_2 dans son intérieur, ni sur son contour.

On opère comme dans le cas 1^0).

2 bis) ϱ contient des points de E_2 sur son contour, mais non pas dans son intérieur.

On opère comme dans le cas 2^0).

De là on passe au cas 3), 3 bis),... n), n bis),... Si E_ω existe, et si ϱ ne contient pas de points de E_ω dans son intérieur, ni sur son contour, $\Delta(f, \varrho)$ est dejà calculé dans un des cas n_0) ou n_0 bis), n_0 étant un certain nombre fini.

De là on parvient au cas

ω bis) ϱ contient des points de E_ω sur son contour, mais non pas dans son intérieur, et ainsi de suite.

Arrivé à l'opération de rang β), il ne reste qu'à effectuer l'opération de rang β bis), pour avoir $\Delta(f, \varrho)$ sur tout rectangle ϱ, ne contenant pas de points de $E_\beta = P$ dans son intérieur.

Dès lors $\Delta(f, r_0)$ peut être supposé connu, quel que soit r_0, n'ayant aucun point de P pour point intérieur; on n'est jamais sortie du dénombrable.

25. Définissons maintenant la *quatrième opération* de la totalisation.

P étant un ensemble parfait de première sorte en lui même, r

[1]) Voir Denjoy. Ann. Sc. Ec. Norm. 1917 p. 192.

un rectangle contenant des points de P dans son intérieur, soit $C(\Pi)$ l'ensemble complémentaire de $\Pi(P, r)$ par rapport à r.

Soit ω un nombre positif arbitrairement petit, D un domaine correspondant à ω (voir nº 8) et désignons par $V(f, D)$ (variation de f sur D), la somme des variations de f sur les rectangles ϱ, constituant D.

$$V(f, D) = \Sigma \Delta(f, \varrho).$$

Alors, si $\lim V(f, D)$, pour $\omega = 0$, existe, nous dirons, que *la variation* $V(f, C(\Pi))$ *de* f *sur* $C(\Pi)$ *est définie* et nous posons:

$$V(f, C(\Pi)) = \lim_{\omega \to 0} V(f, D).$$

Le calcul de $V(f, C(\Pi))$, (si ce nombre est défini), sera la *quatrième opération.*

Il suffit évidemment, de choisir une suite de nombres décroissants, tendant vers zèro,

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$$

de construire des domaines correspondants,

$$D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$$

et de calculer

$$\lim_{n=\infty} V(f, D_n).$$

26. Soit P l'ensemble (parfait, de première sorte en lui-même), du nº 25.

D'après nº 20, l'ensemble (fermé) H des points de P, au voisinage desquels $s(x,y)$ n'est pas sommable sur P, H est non dense sur P.

Soit M un point de $P - H$.

Nous dirons que $\Delta(f, r)$ est *calculable* au voisinage de M, si M est centre d'un rectangle $\gamma(M)$, tel que:

1º $V\{f, C(\Pi(P, r))\}$ est défini sur toute portion $\Pi(P, r)$ appartenant à $\Pi(P, \gamma)$;

2º il existe égalité entre les 2 nombres:

$$\Delta(f, r) \quad \text{et} \quad \iint_{(r)} \sigma(x, y)\, dx\, dy + \lim_{\omega=0} V(f, D)\ {}^{1)}.$$

[1]) $\sigma(x, y) = s(x, y)$ sur P
$= 0$ hors de P.

L'intégrale $\iint_{(r)} \sigma(x, y)\, dx\, dy$ existe évidemment pour tout rectangle r ne contenant par de points de H dans son intérieur, ni sur son contour.

L'ensemble des points M, au voisinage desquels $\Delta(f, r)$ est calculable, est évidemment ouvert sur P. Son complèmentaire K par rapport à P, est donc fermé; K comprend évidemment H.

27. Nous voulons démontrer que:

L'ensemble K des points de P, au voisinage desquels $\Delta(f, r)$ est non calculable, K est non dense sur P.

Il suffit de démontrer, que toute portion $\Pi(P, r_0)$ contient un point M, au voisinage duquel $\Delta(f, r)$ est calculable; pour cela il est permis de supposer que r_0 ne contient pas de points de H dans son intérieur, ni sur son contour (puisque H est non dense).

Nous établirons l'existence de M:

1°) Si $\Pi(P, r_0)$ contient une portion $\Pi(P, r_0')$ constitué de segments $s_x(c_0', d_0')$; r_0' est le rectangle $a_0' < x < b_0'$, $c_0' < y < d_0'$.

Si $\Pi(P, r_0)$ ne satisfait pas à 1°), mais si $\Pi(P, r_0)$ contient une portion $\Pi(P, r_0')$, tel que $\Pi_x(P, r_0')$ coïncide avec le segment $a_0' \leqslant x \leqslant b_0'$.

3° Si $\Pi(P, r_0)$ ne satisfait ni à 1°), ni à 2°).

Donc l'existence de M sera établi dans tous les cas.

28. Dans le premier, resp. le troisième cas, $\Pi_x(P, r_0')$, resp. $\Pi_x(P, r_0)$ sont des ensembles parfaits discontinus. Désignons r_0' dans le 1^er^ cas, et r_0 dans le 3^me^ cas, par $r\{a<x<b,\ c<y<d\}$ et soient $\alpha_n < x < \beta_n$ les intervalles contigus de $\Pi_x(P, r)$. A tout intervalle $\alpha_n \beta_n$ correspond un rectangle $r_n(\alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n,\ c \leqslant y \leqslant d)$ ne contenant pas de points de Π dans son intérieur.

En désignant par r_n' un rectangle quelconque intérieur à r_n (sens large), nous posons

$$\mu_n = \frac{\max |\Delta(r_n')|}{(\beta_n - \alpha_n)(d-c)}\ ^{1)}.$$

Nous allons voir que:

Tout point (α_n, y_0), $(c \leqslant y_0 \leqslant d)$, est soit premier sommet, soit quatrième sommet d'un rectangle, tel que $\dfrac{|\Delta|}{(\beta_n - \alpha_n)(d-c)} \geqslant \dfrac{1}{4}\mu_n$, *si Δ est la variation de f sur ce rectangle.*

Tout point (β_n, y_0) $(c \leqslant y_0 \leqslant d)$, est soit le deuxième, soit le quatrième sommet d'un rectangle, tel que $\dfrac{|\Delta|}{(\beta_n - \alpha_n(d-c)} \geqslant \dfrac{1}{4}\mu_n$.

[1]) Ce nombre est analoque à *l'oscillation relative* dans le cas d'une seule variable. Voir pour cette notion:

Denjoy Journ. de Math. 1915, p. 166.

Démontrons p. e. la première partie.

Soit $\alpha'_n \leqslant x \leqslant \beta'_n$, $\gamma'_n \leqslant y \leqslant \delta'_n$, un rectangle ou $|\Delta(r'_n)|$ atteint son maximum. Nous prolongeons ses 2 côtés horizontaux (s'il le faut) jusqu'à leur rencontre avec $x=\alpha_n$. On obtient (sauf dans le cas $\alpha'_n=\alpha_n$) 2 rectangles nouveaux, ayant l'un et l'autre le point α_n, γ'_n pour 1[er] sommet et α_n, δ'_n pour 4[me] sommet et l'on voit aisément que sur l'un de ces rectangles le nombre $\dfrac{|\Delta|}{(\beta_n-\alpha_n)(d-c)} \geqslant \dfrac{1}{2}\mu_n$. (Si $\alpha_n=\alpha'_n$, l'un de ces rectangles est nul, l'autre coïncide avec le rectangle, sur lequel le maximum est atteint). Désignons ce rectangle par r''_n.

Prolongeons le côté vertical à droite jusqu'à sa rencontre avec $y=c$ et $y=d$. Cette droite verticale et $x=\alpha_n$ déterminent avec une droite quelconque $y=y_0$ $(c \leqslant y_0 \leqslant d)$ et les 2 côtés horizontaux respectifs de r''_n, 2 rectangles (dont l'un peut être nul). Sur l'un de ces 2 rectangles le nombre $\dfrac{|\Delta|}{(\beta_n-\alpha_n)(d-c)} \geqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{|\Delta(r''_n)|}{(\beta_n-\alpha_n)(d-c)} \geqslant \dfrac{1}{4}\mu_n$.

On voit en considérant respectivement les hypothèses: $c \leqslant y_0 \leqslant \gamma'_n$, $\gamma'_n < y_0 < \delta'_n$. $\delta'_n \leqslant y_0 \leqslant d$, que ce rectangle peut avoir le point α_n, y_0 aussi bien pour 1[er] que pour 4[me] sommet,

Donc notre énoncé est établi.

La seconde partie se démontre d'une façon analogue.

29. Apellons: nombres μ_n au voisinage de x_0 (x_0 appartenant à Π_x) les nombres μ_n correspondant aux intervalles contigus α_n, β_n au voisinage de x_0.

Supposons que *l'ensemble des nombres x_0, au voisinage desquels les nombres μ_n ne sont pas bornés, soit dense sur Π_n*, en autres termes, *contienne une portion Π'_x* de Π_x.

Puisque tout point α_n, c est premier sommet d'un rectangle r'_n, tel que $\dfrac{|\Delta(r'_n)|}{(\beta_n-\alpha_n)(d-c)} \geqslant \frac{1}{4}\mu_n$, donc à fortiori $\dfrac{|\Delta(r'_n)|}{\text{mes}\,(r'_n)} \geqslant \frac{1}{4}\mu_n$, l'ensemble des nombres $\dfrac{|\Delta(r'_n)|}{\text{mes}\,(r'_n)}$ est non borné au voisinage de tout point de Π'_x.

En appliquant un type de raisonnemment connu [1]), on voit qu'il

[1]) Voir pour ce type de raisonnement Denjoy, Journ. de Math. 1915, p. 149. On applique le principe suivant:
Si l'ensemble dénombrable M_n est partout dense sur l'ensemble parfait (con-

existe un ensemble partout dense R sur Π'_x, tel que tout point x_0 de R est premier sommet d'une infinité de rectangles r'_{n_p}, dont la longueur des côtés horizontaux tend vers zéro avec $\frac{1}{n_p}$, le nombre $\frac{|\Delta(\varrho_{n_p}(u_0)|}{\text{mes } \varrho_{n_p}(u_0)}$ tendant en même temps vers ∞.

Si la suite de rectangles r'_{n_p} contient une suite partielle r'_ν, telleque la longueur des côtes verticaux tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$, l'un au moins des 2 nombres $|l_1|$ et $|L_1|$ est ∞ au point x_0, c.

Si une telle suite n'existe pas, il existe évidemment une suite de rectangles r''_ν, tendant vers un segment limite $s_{x_0}(c, \delta)$.

On voit aisément que dans ce cas le nombre $\frac{\Delta(r''_\nu)}{\text{mes }(r''_\nu)}$ ne peut tendre vers $\pm\infty$ que si l'un au moins des nombres l_1, L_1, l_4, L_4 est infini au point x_0, δ, ou si l'un au moins des nombres $|d_x^+|$ et $|D_x^+|$ est infini, soit au point x_0, c, soit au point x_0, δ.

Donc, *en supposant* l_1, L_1, l_4 *et* L_4 *finis (en particulier en supposant l'existence d'une dérivée* $s(x, y)$ *finie), l'ensemble des points* x_0 *de* Π_x *au voisinage desquels les nombres* μ_n *ne sont pas bornés, cet ensemble est non dense sur* P.

Même consequence, si l'on suppose l_2, L_2, l_3 et L_3 finis.

30. Il existe donc, d'après n⁰ 29, un rectangle $r_1(a_1 < u < b_1, c < y < d)$ appartenant à r, tel que les nombres μ_n sont bornés sur $\Pi_x(P, r_1)$ par un même nombre fini A.

$s(x, y)$ est sommable sur $\Pi(P, r_1)$.

Je dis que, dans le *premier cas,* $\Delta(f, r_2)$ *est calculable au voisinage d'un point quelconque* M *intérieur à* $\Pi(P, r_1)$.

En effet, soit r_2 un rectangle quelconque, appartenant à r_1 et contenant des points de P dans son intérieur.

Considérons la fonction de x, $(a_2 < x < b_2)$:

$$\varphi(x, c_2, d_2) = f(x, d_2) - f(x, c_2).$$

tinu ou discontinu, à un nombre quelconque de dimensions), *et si le point* M_n *est intérieur à un domaine* ω_n, *il existe un ensemble* R *partout dense sur* P *et dont chaque point est intérieur à une infinité de domaines* ω_n.

R est appelé un *résiduel,* savoir un ensemble situé sur P et dont la complémentaire relativement à P est, ou bien non dense sur P, ou bien la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P.

Cette fonction φ possède les propriétés suivantes:

1° φ est continue:

2° φ possède en tout point une dérivée finie $= p(x, d_2) - p(x, c_2)$

3° $p(x, d_2) - p(x, c_2)$ est sommable sur $\Pi_x(P, r_1)$ et l'on a:

$$\int\limits_{\Pi_x(P, r_1)} [p(x, d_2) - p(x, c_2)]\, dx = \int\!\!\int\limits_{\Pi(P, r_1)} s(x, y)\, dx\, dy = \int\!\!\int\limits_{(r)} \sigma(x, y)\, dx\, dy.$$

Démonstration analogue à celle du n° 19.

4° L'oscillation relative de $\varphi(x)$ autour de $\Pi_x(P, r_1)$ est bornée, et la variation de φ autour de $\Pi_x(P, r_1)$ est définie. En effet, si $\alpha\beta$ est un intervalle appartenant à un intervalle contigu $\alpha_n\beta_n$ de $\Pi(P, r_1)$, on a évidemment

$$\frac{|\varphi(\beta, c_2, d_2) - \varphi(\alpha, c_2, d_2)|}{\beta_n - \alpha_n} \leqslant (d - c)\, A.$$

Donc on a, d'après les propriétés de la totale de Denjoy:

$$\Delta(f, r_2) = \varphi(b_2, c_2, d_2) - \varphi(a_2, c_2, d_2) =$$
$$\int\limits_{\Pi_x(P, r_1)} [p(x, d_2) - p(x, c_2)]\, dx + \Sigma W(\varphi, \alpha_n, \beta_n),$$

en désignant par $W(\varphi, \alpha_n, \beta_n)$ le nombre $\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)$, et en étendant la sommation sur tous les intervalles contigus de $\Pi_x(P, r_1)$.

Construisons maintenant un domaine D correspondant à un nombre positif ω assez petit.

Les rectangles ϱ constituant D, ont tous leurs côtés horizontaux sur $y = c$ et $y = d$, donc on a:

$$V(f, D) = \Sigma \Delta(\varrho) = \Sigma W(\varphi, \alpha, \beta),$$

si $\alpha < x < \beta$ est la projection de ϱ sur Ox, $\alpha\beta$ appartient à un intervalle $\alpha_n\beta_n$.

Donc $V(f, D) =$ somme des variations de φ sur un certain nombre d'intervalles $\alpha_n'\beta_n'$, intérieurs à des intervalles contigus $\alpha_n\beta_n$ de φ; un intervalle $\alpha_n\beta_n$ contient au plus un intervalle $\alpha_n'\beta_n'$ et l'on a: $\alpha_n' - \alpha_n < \omega$, $\beta_n - \beta_n' < \omega$.

Donc, puisque la variation de φ autour de $\Pi_x(P, r_1)$ existe,

1° $\lim\limits_{\omega=0} V(f, D)$ existe;

2° Cette limite est $\Sigma W(\varphi, \alpha_n, \beta_n)$.

Donc:

$$\Delta(f, r_2) = \int_{\Pi_x(P, r_1)} [p(x, d_2) - p(x, c_2)]\,dx + \Sigma\, W(\varphi, \alpha_n, \beta_n) =$$

$$= \int\!\!\int_{(r)} \sigma(x, y)\,dx\,dy + \lim_{\omega=0} V(f, D), \quad \text{c. q. f d}$$

31. Désignons maintenant par $r(a < x < b,\ c < y < d)$:
le rectangle r_1 (n° 30) pour le troisième cas,
le rectangle r_0' (n° 27) pour le deuxième cas.

L'ensemble des points x de $\Pi_x(P, r)$, tel que le segment $s_x(c, d)$ appartient à $\Pi(P, r)$, est un ensemble fermé non dense sur Π_x, s'il existe. L'ensemble complémentaire est donc ouvert et partout dense sur $\Pi_x(P, r)$; x_0 appartenant à ce complémentaire, le segment $s_{x_0}(c, d)$ contient à la fois des points de $\Pi(P, r)$ et du complémentaire $C(\Pi)$ de $\Pi(P, r)$; ces derniers points constituent des intervalles $i_{x_0}(\gamma, \delta)$, dont l'un au moins des extrémités appartient à $\Pi(P, r)$, l'autre pouvant appartenir à $y = c$, ou $y = d$, sans appartenir à $\Pi(P, r)$.

L'ensemble des points x_0, γ et des points x_0, δ est partout dense sur $\Pi(P, r)$ [1]).

Considérons les nombres

$$\mu = \frac{\max\limits_{\gamma \le y' < y'' \le \delta} |p(x, y'') - p(x, y')|}{\delta - \gamma}\ ^{2}).$$

Puisque $p(x, y)$ est continue par rapport à y, le segment $s_x(\gamma, \delta)$ contient au mains deux points x, y_1 et x, y_2 tel que

$$\frac{|p(x, y_2) - p(x, y_1)|}{\delta - \gamma} = \mu.$$

On voit aisément que l'un au moins des 2 nombres

$$\frac{|p(x, y_2) - p(x, \gamma)|}{\delta - \gamma} \quad \text{et} \quad \frac{|p(x, y_1) - p(x, \gamma)|}{\delta - \gamma}$$

est $\geqslant \frac{1}{2}\mu$ et de même l'un au moins des 2 nombres

$$\frac{|p(x, \delta) - p(x, y_2)|}{\delta - \gamma} \quad \text{et} \quad \frac{|p(x, \delta) - p(x, y_1)|}{\delta - \gamma}.$$

[1]) Ces points n'existent pas dans le premier cas.

[2]) $p(x, y)$ désigne la dérivée de f par rapport à x, ou plus généralement la dérivée à droite (dans ce cas $s(x, y)$ est la valeur commune de l_1 et L_1).

Donc à fortiori chacun des deux nombres:

$$\frac{\max\limits_{\gamma \leq v \leq \delta} |p(x, \delta) - p(x, y)|}{\delta - y} \quad \text{et} \quad \frac{\max\limits_{\gamma \leq v \leq \delta} |p(x, y) - p(x. \gamma)|}{y - \gamma}$$

est au moins égale à $\frac{1}{2}\mu$.

32. Supposons que *l'ensemble des points* de $\Pi(P, r)$ *au voisinage desquels lès nombres* μ *ne sont pas bornés, soit dense sur* Π (ou contienne une portion Π' de Π).

Il en est donc de même de l'ensemble où les nombres:

$$\frac{\max\limits_{\gamma < v < \delta} |p(x, \delta) - p(x, y)|}{\delta - y} \quad \text{et} \quad \frac{\max\limits_{\gamma < v < \delta} |p(x, y) - p(x, \gamma)|}{y - \gamma}$$

ne sont pas bornés.

En remarquant que tout rapport $\dfrac{p(x, y'') - p(x, y')}{y'' - y'}$ est limite d'une suite de nombres $\dfrac{\Delta(f, r_n)}{\text{mes}\, r_n}$, où r_n désigne un rectangle variable, ayant le segment $s_x(y', y'')$ pour côté gauche et dont le côté horizontal tend vers zéro, on démontre, par un raisonnement analogue à celui du n° 29, l'existence d'un résiduel R de Π', dont tout point est premier sommet d'une suite de rectangles r', dont le côté horizontal tend vers zéro, et sur lequel le nombre $\dfrac{\Delta(f, r')}{\text{mes}\,(r')}$ tend vers $\pm\infty$. Comme au n° 29, on démontre, que *cela est incompatible avec l'hypothèse de nombres* l_1, L_1, l_4 et L_4 *finis en tout point, et en particulier avec l'existence d'une dérivée finie* $s(x, y)$.

On peut aussi considérer les nombres l_2, L_2, l_3 et L_3.

33. On peut donc déterminer toujours une portion $\Pi(P, r_1)$ de l'ensemble $\Pi(P, r)$ du n° 31, sur lequel les nombres μ sont bornés par un nombre fini B.

Je dis què, *dans le deuxième cas,* Δ *est calculable au voisinage de tout point intérieur à* $\Pi(P, r_1)$.

Soit r_2 un rectangle intérieur à r_1 (sens large), tel que $\Pi(P, r)$ existe; il faut démontrer que l'on a:

$$\Delta(f, r_2) = \iint\limits_{(r_2)} \sigma(x, y)\, dx\, dy + \lim_{\omega_n = 0} V(f, D_n).$$

Tout domaine D_n est la réunion d'un nombre fini de rectangles ϱ_k du type $u_{i-1} \leqslant u \leqslant u_i$, $\mu_k \leqslant y \leqslant v_k$, sans points intérieurs en commun.

Posons $\psi_k(x)=0$, si x n'appartient pas à l'intervalle $x_{i-1}<x<x_i$: $\psi_k(x)=p(x, v_k)-p(x, \mu_k)$, si x appartient à l'intervalle x_{i-1}, x_i.

Soit

$$\varphi_n(x)=\Sigma\psi_k(x),$$

la sommation étant étendue sur tous les rectangles ϱ_k.

L'intervalle $i_{x_0}(\mu_k, v_k)$ appartient à un intervalle $i_{x_0}(\gamma, \delta)$; donc $|p(x, v_k)-p(x, \mu_k)|\leqslant M(\delta-\gamma)$ est borné, donc $\psi_k(x)$ est intégrable.

On a: $|\varphi_n(x)|<M(d-c)$, donc $\varphi_n(x)$ étant mesurable, est intégrable.

Donc:

$$V(f, D_n)=\Sigma\Delta(f, \varrho_k)=\Sigma\int_{a_2}^{b_2}\psi_k(x)\,dx=\int_{a_2}^{b_2}\Sigma\psi(x)dx=\int_{a_2}^{b_2}\varphi_n(x)\,dx.$$

A l'aide de cette expression nous allons démontrer que $\lim\limits_{\omega_n=0} V(f, D_n)$ existe. Il nous suffit de démontrer, d'après le théorème de la passage à la limite sous le signe $\int$ pour les fonctions bornées, que $\varphi_n(x)$ tend vers une fonction limite bornée [1]).

Nous posons:

$$\varphi(x_0)=(c_2\,\Sigma\,d_2)[p(x_0, \delta)-p(x_0, \gamma)].$$

le second membre désignant la somme de la série absolument convergente des nombres $p(x_0, \delta)-p(x_0, \gamma)$. si les intervalles $i_{x_0}(\delta, \gamma)$, sont les intervalles contigus (s'il en existe) de l'ensemble fermé (s'il existe) commun à $s_{x_0}(c_2, d_2)$ et $\Pi(P, r_2)$. Si aucun intervalle contigu n'existe, nous posons $\varphi(x_0)=0$; si l'ensemble fermé pour $x=x_0$ n'existe pas, nous posons $\varphi(x_0)=p(x_0, d_2)-p(x_0, c_2)$.
$\varphi(x)$ est une fonction bornée de x [2]).

Je dis que $\varphi_n(x)$ tend vers $\varphi(x)$ [1]).

L'ensemble commun à D et $x=x_0$, s'il existe, est un nombre fini d'intervalles, intérieurs aux intervalles contigus de la section de $\Pi(P, r_2)$ avec $x=x_0$, tendant vers le système d'intervalles contigus, si ω_n tend vers 0. $\varphi_n(x)$ pour une valeur de x différente des points de division

[1]) Tout au moins en exceptant une infinité dénombrable de valeurs de x au plus.

[2]) $\varphi(x)$ est la variation de $p(x_0, y)$ sur l'ensemble complémentaire de l'ensemble commun à $x=x_0$ et $\Pi(P, r_2)$.

x_i n'est autre chose que la variation de $p(x, y)$ sur ce nombre fini d'intervalles. D'où résulte, en remarquant (comme au n° 30) que la variation de $p(x, y)$ autour de l'ensemble $\{\Pi(P, r_i), x_0\}$ est définie que $\varphi_n(x)$ tend vers $\varphi(x)$. Dans les cas particuliers où $x = x_0$ (x_0 différent des x_i) ne contient pas de points de $C(\Pi)$, ou de $\Pi(P, r)$, $\varphi_n(x) = \varphi(x)$ après une certaine valeur de ω_n.

Si x appartient au système des x_i pour une infinité de valeurs de n, il peut se faire que $\lim \varphi_n(x)$ n'existe pas, mais cet ensemble est de mesure nulle.

Donc on a:

$$\lim_{\omega_n=0} V(f, D_n) = \lim_{\omega_n=0}\int_{a_2}^{b_2} \varphi_n(x)\,dx = \int_{a_2}^{b_2} \varphi(x)\,dx.$$

Il nous reste à démontrer l'égalité des 2 nombres $\Delta(f, r_2)$ et $\iint_{(r_2)} \sigma(x, y)\,dx\,dy + \lim_{\omega_n=0} V(f, D_n)$.

Or, pour une pleine épaisseur E de valeurs de x, $\int_{c_2}^{d_2} \sigma(x, y)\,dy$ existe, et l'on a $\iint_{r_2} \sigma(x, y)\,dx\,dy = \int_E dx \int_{c_2}^{d_2} \sigma(x, y)\,dy$, donc le second membre de l'égalité à démontrer équivaut à

$$\int_E [\varphi(x) + \int_{c_2}^{d_2} \sigma(x, y)\,dy]\,dx.$$

On voit aisément que la fonction à intégrer est égale à $p(x, d_2) - p(x, c_2)$, donc. puisque $f(x, d) - f(x, c)$ est une totale indéfinie par rapport à x:

$$\iint_{(r_2)} \sigma(x, y)\,dx\,dy + \lim_{\omega_n=0} V(f, D) = \int_E [p(x, d_2) - p(x, c_2)]\,dx = \Delta(f, r_2),$$

c. q. f. d.

34. Désignons maintenant par $r(a < x < b,\ c < y < d)$ le rectangle r_1 du n° 33, pour le *troisième cas*.

L'ensemble $\Pi_x(P, r)$ est parfait discontinu; sur $\Pi(P, r)$ l'ensemble des points x, γ et x, δ est partout dense. En désignant par $\alpha_n \beta_n$ les intervalles contigus de $\Pi_x(P, r)$, même l'ensemble des points α_n, γ et α_n, δ, et celui des points β_n, γ et β_n, δ est partout dense sur $\Pi(P, r)$.

Considérons les rectangles r', dont un côté vertical appartient à un intervalle $i_{x_0}(\gamma, \delta)$, x_0 étant un point α_n ou β_n, et dont la projection r'_x sur Ox appartient à un intervalle contigu de Π_x. En désignant la longueur de r'_x aussi par r'_x, nous considérons les nombres $\nu = \max \dfrac{\Delta(r')}{r'_x(\delta-\gamma)}$, si x_0, δ et γ sont fixes et r' varie.

Considérons en particulier les rectangles $r'(\gamma)$ et $r'(\delta)$, ayant pour sommets les points x_0, γ et x_0, δ, et se projetant sur Ox dans r'_x. On voit facilement que les 2 nombres

$$\max \frac{|\Delta(r'(\gamma)|}{r'_x(\delta-\gamma)} \quad \text{et} \quad \max \frac{|\Delta(r'(\delta)|}{r'_x(\delta-\gamma)}$$

sont au moins égaux à $\frac{1}{2}\nu$.

En supposant que l'ensemble des points de $\Pi(P, r)$, au voisinage desquels les nombres ν ne sont pas bornés, soit dense sur $\Pi(P, r)$, on obtient une contradiction analogue à celle déjà obtenue aux n⁰ 29 et 32.

Donc, *si* $s(x, y)$ *existe et est fini*, l'ensemble *des points de* $\Pi(P, r)$ *au voisinage desquels les nombres* v *ne sont pas bornés, est non dense sur* $\Pi(P, r)$.

35. Il existe donc toujours une portion $\Pi(P, r_1)$ de $\Pi(P, r)$ telle que les nombres v sont bornés par un même nombre fini C.

Je dis que Δ *est calculable au voisinage de tout point intérieur à* $\Pi(P, r)$.

Désignons par $r_2(a_2<x<b_2,\ c_2<y<d_2)$ un rectangle appartenant à r_1, tel que $\Pi(P, r_2)$ existe; nous choisissons une suite de nombres décroissants, tendant vers zéro: $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ et nous construisons des domaines $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ correspondants. Si n est assez grand, il existe parmi les rectangles ϱ de D des rectangles ϱ_1, ayant leur côtés horizontaux resp. sur $y=c_2$ et $y=d_2$ et encore d'autres rectangles ϱ_2.

Ecrivons:

$$V(f, D) = \Sigma\Delta(f, \varrho) = \Sigma\Delta(f, \varrho_1) + \Sigma\Delta(f, \varrho_2).$$

On voit, comme au n⁰ 30, que $\Sigma\Delta(f, \varrho_1)$ tend vers $\Sigma[f(\beta_p, d) - f(\beta_p, c) - f(\alpha_p, d) + f(\alpha_p, c)]$, en désignant par $\alpha_p\beta_p$ les intervalles contigus de $\Pi(P, r)$.

En désignant par $\varrho_{2,x}$ la projection d'un rectangle $\varrho_2\,(x_2<x<x'_2,\ y_2<y<y'_2)$ sur Ox, $\varrho_{2,x}$ contient en général des points de $\Pi_x(P, r_2)$

dans son intérieur et ϱ_2 est la réunion d'une infinité dénombrable de rectangles ϱ_2', ayant même hauteur que ϱ_2, et se projetant sur Ox comme les intervalles contigus de $\Pi_x(P, r_2)$, (deux des ϱ_2' peuvent se projeter suivant des parties d'intervalles contigus), et d'un ensemble parfait de segments $s_{x_0}(y_2, y_2')$. Les nombres $p(x_0, y_2') - p(x_0, y_1')$ sont bornés et les nombres $|\Delta(\varrho_2')|$ sont en rapport borné avec $\varrho_{2,x}'$ donc

$$\Delta(f, \varrho_2) = \Sigma\Delta(f, \varrho_2') + \int\limits_{(\Pi_x, \varrho_{2,x})} [p(x, y_2') - p(x, y_2)]\,dx.$$

Faisons la sommation sur les rectangles ϱ_2 (en nombre fini). On a:

$$\Sigma\Delta(f, \varrho_2) = \Sigma(\Sigma\Delta(f, \varrho_2')] + \Sigma \int\limits_{\Pi_x, \varrho_{2,x}} [p(x, y_2') - p(x, y_2]\,dx.$$

Comme au n⁰ 33, on montre que, si x appartient à $\Pi_x(P, r_2)$, $\Sigma \int\limits_{\Pi_x, \varrho_{2,x}} [p(x, y_2') - p(x, y_2)]\,dx$ (que l'on peut écrire aussi $\int\limits_{a_2}^{b_2} \varphi_n(x)\,dx$, en posant $\psi_k(x) = p(x, y_{2,k}') - p(x, y_{2,k})$, si x appartient à $\Pi_{x, \varrho_{2,k,x}}$, et $= 0$; si x n'appartient pas à $\Pi_{x, \varrho_{2,k,x}}$ et $\varphi_n(x) = \Sigma\psi_k(x)$), tend vers $\int\limits_{\Pi_x} \varphi(x)\,dx$, en définissant $\varphi(x)$, pour x appartenant à $\Pi_x(P, r)$ comme nous avons fait au n⁰ 33 pour x quelconque.

Nous démontrerons que $\Sigma[\Sigma\Delta(f, \varrho_2')]$ tend vers 0.

Ce nombre étant la somme d'un nombre fini de séries absolument convergentes, nous pouvons prendre les termes dans un ordre quelconque.

Faisons d'abord la somme des $\Delta(f, \beta_2')$ correspondant à des rectangles ϱ_2' se projetant dans un même intervalle contigu u_n de Π_x, cette somme est inférieure à $C \times u_n \times (d - c)$.

En faisant maintenant la somme sur les intervalles contigus de Π_x, nous voyons:

$$\Sigma(\Sigma\Delta(f, \varrho_2')) < C \times (d - c) \times \text{mes (projection des } \varrho_2' \text{ sur } Ox).$$

Or on voit facilement que cette mesure tend vers zéro avec ω_n. Donc $\Sigma(\Sigma\Delta(f, \varrho_2'))$ tend vers zéro.

Donc $\lim V(f, D_n)$ existe et $=$

$$\Sigma\{f(\beta_p, d) - f(\beta_p, c) - f(\alpha_p, d) + f(\alpha_p, c)\} + \int\limits_{\Pi_x} \varphi(x)\,dx.$$

On voit, comme au n° 33, que l'on a:
$\int\limits_{\Pi_x} \varphi(x)\,dx = \int\!\!\int\limits_{(r)} \sigma(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\Pi_x} [p(x, d) - p(x, c)]$, et que ce nombre augmenté de $\Sigma\{f(\beta_p, d) - f(\beta_p, c) - f(\alpha_p, d) + f(\alpha_p, c)\}$ est égale à $\Delta(f, r_2)$.

Donc on a:

$$\Delta(f, r_2) = \int\!\!\int\limits_{(r)} \sigma(x, y)\,dx\,dy + \lim_{\omega_n = 0} V(f, D_n), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

36. Ayant démontré que l'ensemble K des points de P, au voisinage desquels Δ est non calculable, est non dense sur P, soit r_0 un rectangle à sommets rationnels, étranger à K et contenant des points de $P - K$ dans son intérieur.

Tout point de $\Pi(P, r_0)$ est centre d'un plus grand carré γ (de demi-côté u) tel que Δ est calculable sur tout rectangle r' intérieur à γ. On voit que le minimum des nombres u est un nombre positif u_0 (cf. n° 4). Divisons r_0 en un nombre fini de rectangles r_0' (de côté $< u_0$) et calculons les nombres $\Delta(f, r_0')$. On trouve ensuite $\Delta(f, r_0)$ par la formule

$$\Delta(f, r_0) = \Sigma \Delta(f, r_0').$$

En appliquant la 2$^{\text{me}}$ opération, on trouve $\Delta(f, r)$ sur tous les rectangles à sommets rationnels, qui contiennent des points de K sur leurs contours mais pas dans leur intérieur.

37. Décomposons:

$$K = P_1 + Q_1 \qquad \text{(voir n° 24)}.$$

Nous sommes dans le cas étudié, E étant remplacé par K, nous faisons des calculs analogues; et ainsi de suite. Nous obtenons une suite d'ensembles fermés:

$$E, P, P_1, P_2, \ldots, P_\omega, \ldots, P_{\omega+1}, \ldots, P_{2\omega}, \ldots$$

dont la définition est évidente.

Chacun des ensembles étant non dense sur les précédents, la suite s'arrête à un ensemble nul à un certain rang fini ou dénombrable.

Arrivé à ce rang, nous connaissons Δ sur tout rectangle à sommets rationnels, après avoir fait seulement une infinité dénombrable d'opérations.

La totalisation est donc effectuée.