ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits.

Par

Maurice Fréchet (Université de Strasbourg).

Table des matières.

Introduction: I—II.

Chapitre I. *Les familles additives d'ensembles abstraits.*

1. Opérations sur les ensembles abstraits. 2—6. Ensembles limites. 7. Familles d'ensembles closes. 8—9. Définition des familles additives d'ensembles. Les deux additivités. 10—11. Passage de l'additivité au sens restreint à l'additivité au sens complet par l'adjonction de la continuité. 12. Exemples de familles additives d'ensembles.

Chapitre II. *Les fonctions additives d'ensembles abstraits.*

A) *L'additivité et ses conséquences:* 13. Définitions des fonctions additives. 14. Les deux additivités. 15—19. Propriétés des fonctions additives.

B) *Étude des fonctions additives par la variation totale:* 20—22. Définitions. 23—24. Forme canonique comme différence de deux fontions additives monotones. 25. Passage de l'additivité au sens restreint à l'additivité au sens complet par l'adjonction de la continuité. 26. Définition de la variation totale pour les fonctions d'ensemble additives au sens restreint.

C) *De quelques ensembles particuliers.* 27—28. Ensembles presque nuls, presque identiques. 29—34. Définitions. L'ensemble des singularités disjointes est dénombrables. 35—40. Fonctions des sauts. 41—44. Partie régulière d'une fonction additive.

E) *Des fonctions additives sans singularités:* 45—47. Propriétés. 48. La valeur d'une fonction monotone additive sans singularité passe par toute valeur intermédiaire entre son maximum et son minimum.

Chapitre III. *Construction de familles d'ensembles qui sont closes par rapport à certaines opérations. Cas des familles additives.*

A) *Procédés généraux et applications:* 49—50. Plus petite famille close par rapport à certaines opérations. 51. Réduction au cas l'une famille finie. 52. Réduction au cas d'une famille dénombrable. 53. Application aux familles additives au sens restreint. 54—55. Atomes. 56. Système moléculaire. 57. Cas des ensembles

ponctuels. 58—61. Exemples. 62, 62. Retour aux familles additives au sens complet. 64. Applications aux ensembles ponctuels.

B) *Généralisation des clasees de Baire:* 65, 66. La famille UK. 67. Construction par récurrence de la plus petite famille H_c close par rapport à certaines opérations. 68—71. Application aux familles additives au sens complet. 72. Exemples.

Chapitre IV. *Construction d'une fonction additive d'ensembles dont les valeurs sur une famille H d'ensembles sont donnés.*

73—75. Le prolongement peut être impossible ou indéterminé. 76. Si H_r est additive au sens restreint, la solution si elle existe est unique sur la plus petite H_c des familles additives au sens complet comprenant H_r. 77. Conditions d'existence. 78—82. Construction sur la famille A. 83—89. Ensembles normaux. 90—95. Prolongement sur la famille des ensembles normaux. 96. Cas où H_r est additive au sens complet. 97, 98 Familles complètes.

Introduction.

I. Le présent mémoire a été rédigé par M. Franck, licencié ès sciences, d'après le cours fait par M. Fréchet pendant le premier semestre 1921—22 à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg. On trouvera en outre à la suite de ce mémoire, une note supplémentaire où M. Franck expose les compléments qu'il a apportés aux recherches de M. Fréchet, dans un travail présenté à Strasbourg pour le diplôme d'études supérieures de mathématiques.

II. Les notions de famille additive et de fonction additive d'ensembles linéaires ont été implicitement introduites par M. Borel à l'occasion de sa définition de la mesure. C'est M. Lebesgue qui leur a donné un nom et en a fait le premier une étude systématique. M. de la Vallée-Poussin a complété cette étude en divers points et c'est dans son livre sur l'intégrale de Lebesgue qu'on en trouvera l'exposé le plus à jour.

M. Fréchet a cru intéressant de reprendre cette exposition en s'affranchissant de deux hypothèses. Premièrement, dans le cas même des ensembles linéaires ou à n dimensions examiné par M. de la Vallée-Poussin, la notion de famille „close" était limitée au cas où la famille d'ensemble considérée contient les intervalles. Si ce cas est le plus intéressant, il peut être cependant considéré comme un cas particulier. D'autre part, les notions de fonctions et et familles additives d'ensembles n'ont pas moins d'intérêt quand les ensembles envisagés appartiennent à des champs fonctionnels plus complexes que les espaces à n dimensions. Dans la suite nous

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

appellerons *ensemble abstrait* un ensemble dont les éléments ne sont pas nécessairement des points mais sont de nature quelconque.

Enfin l'exposé de M. Fréchet a peut-être aussi l'avantage de bien mettre en évidence que les notions de fonctions et de familles additives d'ensembles et leurs propriétés sont entièrement indépendants de la notion d'élément limite de ces ensembles.

Que par exemple dans l'espace à une infinité de coordonnées où diverses applications de l'Analyse avaient conduit à diverses définitions non équivalentes d'une suite convergente de points, on remplace une de ces définitions par une autre, rien ne sera changé dans les propriétés des familles et fonctions additives d'ensembles dans ces espaces.

Chapitre I

Familles additives d'ensembles abstraits.

1. Opérations sur les ensembles abstraits [1]. Soient E et F deux ensembles: on appelle *somme* de ces deux ensembles et on désigne par $E+F$ l'ensemble des éléments appartenant à E et à F.

On désigne par $E-F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F (s'il en existe): on dit alors que l'on a soustrait F de E.

On appelle *produit* des deux ensembles E et F et on désigne par $E.F$ l'ensemble des éléments communs à E et à F (s'il en existe).

On généralise immédiatement les définitions de la somme et du produit au cas d'une suite dénombrable d'ensembles et on obtient la somme $E_1+E_2+\ldots+E_n+\ldots$ et le produit $E_1 E_2 \ldots E_n \ldots$

On déduit des définitions les relations

$$E_1 . E_2 = E_1-(E_1-E_2)=E_2-(E_2-E_1), \qquad (E_1+E_2)F=E_1F+E_2F$$

$$E_1+E_2=(E_1-E_2)+E_1 . E_2+(E_2-E_1).$$

On dit qu'un ensemble E comprend un ensemble F quand tous les éléments de F appartiennent à E et on exprime ce fait par la notation

$$E \supset F.$$

[1]) Cf. De la Vallée Poussin: Intégrales de Lebesgue p. 7 et suivantes.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Réciproquement on dit que F est contenu dans E et on exprime ce fait par la notation

$$E \subset F.$$

On dit que deux ensembles sont *disjoints* s'ils n'ont aucun élément commun. On dit aussi que leur produit est nul.

2. **Ensembles limites.** Soient les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$: on appelle ensemble *limite restreint* de cette suite d'ensembles l'ensemble R qui est formé de tout élément A appartenant à la suite donnée à partir d'un certain rang variable. Si on considère un élément quelconque A de R, il appartient, par exemple, à la fois à tous les ensembles $E_n, E_{n+1}, \ldots$; A appartient donc au produit $E_n . E_{n+1} . E_{n+2} \ldots$ et par conséquent à la somme de ces produits. Réciproquement tout élément, qui appartient à la somme des produits $E_n, E_{n+1} \ldots$, appartient au moins à un de ces produits et par conséquent à une infinité d'ensembles de la suite à partir d'un certain rang. On en conclut que

$$R = E_1 . E_2 . E_3 \ldots + E_2 . E_3 . E_4 \ldots + \ldots + E_n . E_{n+1} . E_{n+2} \ldots + \ldots$$

On appelle *ensemble limite complet* de la suite $E_1, E_2, E_3, \ldots$ l'ensemble C qui est formé de tout élément A qui appartient à une infinité d'ensemble tirés de la suite. Cet élément appartient à l'ensemble $E_n + E_{n+1} + \ldots$, quel que soit n; il appartient donc au produit des ensembles $E_n + E_{n+1} \ldots$ Réciproquement tout élément A qui appartient au produit des ensembles $E_n + E_{n+1} + \ldots$ appartient à une infinité d'ensembles tirés de la suite. On en conclut que

$$C = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots) . (E_2 + E_3 + \ldots) \ldots (E_n + E_{n+1} + \ldots) \ldots$$

3. **Ensemble limite.** On dit que la suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ converge vers l'ensemble limite L, si son ensemble limite restreint et son ensemble limite complet coïncident:

$$L = C = R\ ^{1}).$$

4. **Exemples.** Considérons une suite monotone croissante d'ensembles, c'est-à-dire une suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ telle que $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \ldots \subset E_n \subset \ldots$ Appelons E_ω l'ensemble somme des E_n, on voit que l'on a $E_n + E_{n+1} + \ldots + E_{n+p} = E_{n+p}$, $E_n . E_{n+1} \ldots E_{n+p} = E_n$. En formant les ensembles limites restreint et complet, on obtient

$$R = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots = E_\omega \qquad C = E_\omega . E_\omega \ldots = E_\omega.$$

[1]) L'ensemble limite restreint et toujours au plus égal à l'ensemble limite complet: $R \subset C$.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

L'ensemble limite restreint et l'ensemble complet sont égaux: l'ensemble limite existe et a pour expression $L = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$

On verrait de même que pour une suite monotone décroissante d'ensembles, c'est-à-dire une suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ telle que $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$, l'ensemble limite existe et a pour valeur

$$L = E_1 \,.\, E_2 \ldots E_n \ldots$$

5. **Remarque.** Les notions d'ensemble limite complet et d'ensemble limite restreint peuvent paraitre assez artificielles: on se rend facilement compte de leur introduction dans la théorie des ensembles en généralisant pour les ensembles abstraits une notion due à M. de la Vallèe-Poussin en ce qui concerne les ensembles ponctuels: c'est la notion de fonction caractéristique d'ensemble[1]). Soit E un ensemble abstrait, nous appelons fonction caractéristique la fonction d'élément $\varphi_E(A)$, telle que sur tout élément A appartenant à E, $\varphi_E(A) = 1$ et sur tout élément n'appartenant pas à E, $\varphi_E(A) = 1$

Avec cette définiton de la caractéristique il suffit de reprendre mot pour mot le raisonnement de M. de la Vallée-Poussin, le seul changement consistant à remplacer le mot point par le mot élément.

Les ensembles limites complet et restreint de la suite des E_n ont respectivement pour fonctions caractéristiques la plus grande et la plus petite limite de la fonction caractéristique des E_n. En particulier pour que E_n converge, il faut et, il suffit que sa fonction caractéristique converge et la limite de l'une a pour fonction caractéristique la limite de l'autre.

6. **Théorème:** *Etant données deux suites convergentes d'ensembles, la suite $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ ayant pour ensemble limite E et la suite $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ ayant pour ensemble limite F, la suite $E_1 + F_1, E_2 + F_2, \ldots$ est une suite convergente qui ten vers l'ensemble $E + F$ et la suite $E_1 - F_1, E_2 - F_2, \ldots$ est une suite convergente qui tend vers l'ensemble $E - F$.*

Considérons, en effet, les suites $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ et $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ sans supposer qu'elles soient convergentes et appellons R et C les ensembles limites restreints et complets de la suite de E, R' et C' ceux de la suite des F. Formons la suite d'ensembles $E_1 + F_1$, $E_1 + F_2, \ldots, E_n + F_n, \ldots$ et soient ϱ et γ ses ensembles limites restreint et complet. Portons notre attention sur l'ensemble γ: tout élément de γ appartient à une infinité des ensembles $E_1 + F_1, E_2 + F_2, \ldots$; par exemple, il appartient aux ensembles $E_{n_1} + F_{n_1}, E_{n_2} + F_{n_2}, \ldots$ Il

[1]) Cf. De la Vallée-Poussin: Intégrale de Lebesgue pages 7, 8 et 9.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

appartient donc soit à une infinité des ensembles E, soit à une infinité des ensembles F, soit à la fois à une infinité des ensembles E et à une infinité des ensembles F.

Cet élément appartient donc soit à C, soit à C', soit à la fois à C et à C'. D'une façon ou d'une autre il appartient à $C+C'$ et on en conclut que γ est compris dans $C+C'$. Passons maintenant à l'ensemble limite restreint ϱ et pour cela considérons l'ensemble $R+R'$. Un élément de $R+R'$ appartient à tous les ensembles, soit de la suite $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ soit de la suite $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ à partir d'un certain rang: dans tous les cas, il appartient à tous les ensembles de la suite $E_1+F_1, E_2+F_2, \ldots$ à partir d'un certain rang et par conséquent à l'ensemble limite restreint ϱ Tout élément de $R+R'$ appartenant à ϱ, $R+R'$ est compris dans ϱ et nous obtenons les inégalités:

$$R+R' \subset \varrho \subset \gamma \subset C+C'.$$

Si l'on suppose que les suites des E_n et des F_n sont convergente set ont respectivement pour ensembles limites les ensembles E et F, on a $R=C=E$, $R'=C'=F$ et les inégalités s'écrivent

$$E+F \subset \varrho \subset \gamma \subset E+F. \qquad \text{D'où } \varrho=\gamma=E+F.$$

La suite des E_n+F_n est alors convergente et son ensemble limite est $E+F$.

Passons au cas de la différence et considérons la suite d'ensembles $E_1-F_1, E_2-F_2, \ldots, E_n-F_n, \ldots$ et soient ϱ_1 et γ_1 ses ensembles limites restreints et complets. Tout élément de γ_1 appartient à une infinité des ensembles E_n F_n par exemple à $E_{n_1}-F_{n_1}$, $E_{n_2}-F_{n_2}, \ldots$. Il appartient donc à $E_{n_1}, E_{n_2}, \ldots$, et on voit que tout élément de γ_1 appartieut à C. Cet élément n'appartient pas à $F_{n_1}, F_{n_2}, \ldots$, il n'appartient donc pas à tous les éléments de la deuxième suite à partir d'un certain rang et par suite il n'appartient pas à R'. Par conséquent il appartient a $C-R'$ et on voit que γ_1 est compris dans $C-R'$. Passons maintenant à ϱ_1 et considérons un élément de $R-C'$: appartenant à R il appartient à tous les ensembles de la suite des E_n à partu d'un certain rang, par exemple, à $E_n, E_{n+1} \ldots$. D'autre part n'appartenant pas à C', il n'appartient qu'à un nombre fini des ensembles de la suite de F_n, par exemple, à $F_1, F_2, \ldots, F_p$. L'élément considéré appartenant à E_{n+p} sans appartenir à F_{n+p}, on voit qu'il appartient à la suite des ensembles $E_{n+p}-F_{n+p}$,

$E_{n+p+1} - F_{n+p+1}, \ldots$, et par là qu'il appartient à ϱ_1. Il en résulte que l'ensemble ϱ_1 comprend l'ensemble $R - C'$ et on arrive aux inégalités

$$R - C' \subset \varrho_1 \subset \gamma_1 \subset C - R'.$$

Si l'on suppose que les suites considérées sont convergentes et ont pour ensembles limites E et F, on arrive aux inégalités

$$E - F \subset \varrho_1 \subset \gamma_1 \subset E - F. \qquad \text{D'où } \varrho_1 = \gamma_1 = E - F.$$

Ce qui prouve que la suite d'ensembles $E_1 - F_1, E_2 - F_2, \ldots$, converge vers l'ensemble $E - F$.

7. **Familles d'ensembles closes.** On dit qu'une famille d'ensembles est *close* [1]) par rapport à certaines opérations $S, D, \ldots$ (par exemple, l'addition) si tout ensemble obtenu par une des opérations $S, D, \ldots$ effectuée sur des ensembles appartenant à la famille appartient encore à cette famille.

8. **Définition des familles additives d'ensembles. Les deux additivités.** Une famille d'ensembles F est *additive au sens restreint*, si elle vérifie ces deux propriétés:

1° Si E_1, E_2 sont deux ensembles appartenant à la famille F, il en est de même de leur différence $E_1 - E_2$ (quand cette différence existe)

2° Si E_1, E_2 sont deux ensembles disjoints appartenant à la famille F, il en est de même de leur somme.

Il résulte de cette définition de l'additivité et de l'égalité $E_1 . E_2 = E_1 - (E_1 - E_2)$, que si E_1, E_2 sont deux ensembles appartenant à la famille F, il en est de même de leur produit $E_1 . E_2$ (s'il existe). On peut donc dire qu'une famille additive au sens restreint est close par rapport, à l'addition, la soustraction et la multiplication. L'additivité ainsi définie est telle que les opérations ne portent que sur un nombre fini d'ensembles. On définit une deuxième additivité par les conditions suivantes

1° Si E_1, E_2 sont deux ensembles appartenant à la famille T, il en est de même de $E_1 - E_2$.

2° Si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, est une suite dénombrable (finie ou non) d'ensembles disjoints appartenant à la famille T il en est de même de leur somme $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$.

[1]) Cette expression est empruntée à M. de la Vallée-Poussin sous un sens plus général, mais en éliminant de sa définition une restriction inutile et qui d'ailleurs ne correspond pas au sens vulgaire du mot. Cf. Intégrale de Lebesgue, page 83.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Dans cette deuxième définition de l'additivité, les opérations peuvent porter sur une série dénombrable, même infinie, d'ensembles, c'est *l'additivité au sens complet.*

Comme dans la première définition de l'additivité le produit de deux ensembles appartenant à la famille T appartient à la famille T.

La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (disjoints ou non) appartenant à la famille T appartient encore à la famille T. En effet, soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles considérés. Posons $E_1 = E'_1$,

$$E'_2 = E_2 - E_1, \quad E'_3 = E_3 - (E_2 + E_1), \quad E'_n = E_n - (E_{n-1} + E_{n-2} + \ldots + E_1).$$

On a $E_1 + E_2 + \ldots + E_n = E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_n$: on arrive à cette égalité par récurrence et on obtient ces résultats: les ensembles $E'_1, E'_2, \ldots, E'_n, \ldots$, appartiennent à la famille T, sont disjoints et leur somme est égale à la somme des ensembles $E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$ D'après la définition de l'additivité au sens complet l'ensemble $E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_n + \ldots$ appartient à la famille T: il en est de même de l'ensemble identique $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$

9. **Le produit d'une suite dénombrable (finie ou infinie) d'ensembles appartenant à une famille d'ensembles T additive au sens complet appartient à la famille T.** Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles considérés. Considèrons les ensembles $E_i - E_k$, différences de deux quelconques des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$: d'après la définition même de l'additivité ils appartiennent à la famille T. Leur somme, formée d'une infinité dénombrable d'ensembles appartient à la famille T: soit $\Sigma(E_i - E_k)$ cet ensemble. Comme l'ensemble $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ appartient aussi à la famille T, il en est encore de même de l'ensemble $(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots) - \Sigma(E_i - E_k)$. Or cet ensemble est constitué par les éléments communs à tous les ensembles E_n: il est donc précisément l'ensemble produit $E_1 . E_2 \ldots E_n \ldots$: ainsi si tous les ensembles considérés appartiennent à la famille d'ensembles T additive (au sens complet), il en est de même de leur produit.

10. **Passage de l'additivité au sens restreint à l'additivité au sens complet psr l'adjonction de la continuité.** La condition nécessaire et suffisante pour qu une famille d'ensembles soit additive au sens complet est que cette famille soit additive au sens restreint et close par rapport au passage à la limite d'une suite d'ensembles non décroissants.

En effet. la famille T, additive au sens complet, est a fortiori

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

additive au sens restreint. Comme tout ensemble-limite E d'une suite croissante d'ensembles $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ peut être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints appartenant à la famille T, $e_1, (e_1 - e_2), \ldots, (e_n - e_{n-1}), \ldots$, la famille T additive au sens complet contient aussi E. Par suite elle est close par rapport au passage à la limite d'une suite d'ensembles non décroissants.

Réciproquement, si la famille T est additive au sens restreint et close par rapport au passage à la limite d'une suite d'ensembles non décroissants et si l'on considère des ensembles disjoints $E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$, appartenant à la famille T, les ensembles $E_1, E_1 + E_2, \ldots E_1 + E_2 + \ldots + E_n, \ldots$ appartient à la famille T. Or ils forment une suite non décroissante et la famille T étant close par rapport au passage à la limite d'une suite non décroissante d'ensembles. leur ensemble limite $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ appartient à la famille T: ce qui prouve l'additivité au sens complet de la famille T.

11. **Remarque.** Si une famille d'ensembles T additive au sens restreint est close par rapport au passage à la limite de suites d'ensembles non décroissants, elle est close par rapport au passage à la limite de suites quelconques d'ensembles convergentes.

Tout d'abord elle est close par rapport au passage à la limite de suites d'ensembles non croissants. En effet, considérons la suite d'ensembles non croissants appartenant à la famille additive d'ensembles T,

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

Soit E son ensemble limite: considérons la suite d'ensembles $E_1 - E_2, E_1 - E_3, \ldots, E_1 - E_n, \ldots$: cette suite est une suite d'ensembles non décroissants appartenant à la famille T. Son ensemble-limite E' appartient à la famille T. Or nous savons que la suite $E_1 - E_2, E_1 - E_3, \ldots, E_1 - E_n, \ldots$ est convergente en raison de la convergence des suites $E_1, E_1, \ldots, E_1, \ldots$ et $E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots$ et son ensemble limite est $E_1 - E$. On a donc $E' = E_1 - E$.

Comme E est compris dans E_1 on en conclut que $E = E_1 - E'$. Les ensembles E_1 et E' appartenant à la famille T, il en est de même de l'ensemble E.

Passons à une suite quelconque d'ensembles. D'après les formules du § 2, l'ensemble limite restreint de cette suite peut être considéré comme l'ensemble limite d'une suite non décroissante d'ensembles

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

qui peuvent chacun être considérés comme les ensembles limites de suites d'ensembles non croissants tirés de la famille T: il s'ensuit que l'ensemble limite restreint appartient à la famille T, close par rapport au passage à la limite de suites d'ensembles non décroissants. Il en est de même de l'ensemble limite complet. Si la suite considérée est convergente, son ensemble limite appartient donc à la famille T, qui est ainsi prouvée être close par rapport au passage à la limite (sans conditions).

12. Exemples de familles additives d'ensembles.

1° La famille de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné est additive au sens complet.

2° Considérons une droite orientée avec une origine des abscisses. La famille des ensembles dont chacun est somme d'un nombre fini d'intervalles rationnels incomplets (c'est à dire d'intervalles dont les abscisses des extrémités sont rationnelles, l'extrémité droite, par exemple, étant exclue) est additive au sens restreint, non au sens complet.

3° Sur cette même droite considérons les intervalles incomplets $0, 1; 1, 2; \ldots; n-1, -n; \ldots$; supposons qu'on ait peint en couleur rouge les ensembles $(0, 1)$ $(2, 3), \ldots, (2n, 2n+1), \ldots$, et le reste en bleu. La famille d'ensembles dont chacun est formé de tous les points appartenant d'un nombre quelconque (fini ou infini) d'intervalles rouges est additive au sens complet.

4° Sur cette même droite la famille des ensembles „bien définis" de M. Borel est aussi additive au sens complet. Il en est de même de la famille des ensembles mesurables de M. Lebesgue.

Chapitre II.

Les fonctions additives d'ensembles abstraits.

A) L'additivité et ses conséquences

13. Définitions. Si on considère une certaine famille T d'ensembles E, on dit qu'un nombre est fonction uniforme de l'ensemble E sur la famille T, si ce nombre, qu'on désigne par la notation $f(E)$, est bien déterminé, quand E est un ensemble bien déterminé appartenant à la famille T.

On appelle *fonction monotone* sur la famille T une fonction qui

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

a même signe (ou s'annule) sur tout ensemble appartenant à la famille T.

La fonction f est dite *additive* sur la famille T, si l'on a l'égalité

$$f(E_1+E_2+\ldots)=f(E_1)+f(E_2)+\ldots \tag{1}$$

quand $E_1, E_2, \ldots$ sont des ensembles disjoints de la famille T et que l'ensemble $E_1+E_2+\ldots$ appartient aussi à la famille T.

14. **Les deux additivités** On distingue comme pour les familles d'ensembles, deux sortes d'additivité: *l'additivité au sens restreint et l'additivité au sens complet.* La fonction f est additive au sens restreint, quand la relation (1), qui définit l'additivité, ne porte que sur un nombre fini d'ensembles disjoints. La fonction f est additive au sens complet quand la relation (1) p ut porter sur une suite dénombrable d'ensembles disjoints.

On peut passer de l'additivité au sens restreint à l'additivité au sens complet grâce à la notion de continuité des fonctions d'ensemble. On dit qu'une fonction d'ensemble $f(E)$, définie sur une famille d'ensembles close par rapport au passage à la limite, est *continue*, si l'égalité $E=$ limite de E_n entraîne l'égalité $f(E)=$ limite de $f(E_n)$, quand n augmente indéfiniment. La continuité permet d'arriver à cette proposition.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'ensemble, définie sur une famille d'ensembles additive au sens complet T, soit additive au sens complet, est qu'elle soit additive au sens restreint et continue relativement aux ensembles limites de suites d'ensembles non décroissants tirés de la famille T.

En effet, si la fonction f est additive au sens complet et si $E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$ sont des ensembles disjoints appartenant à la famille T, on a

$$f(E_1+E_2+\ldots+E_n+\ldots)=f(E_1)+f(E_2)+\ldots+f(E_n)+\ldots$$

La fonction f additive au sens complet est à fortiori additive au sens restreint. Or tout ensemble e limite d'une suite d'ensembles non décroissant $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ peut-être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints appartenant à la famille T.

$$e_1, (e_2-e_1), \ldots, (e_n-e_{n-1}), \ldots$$

et l'on a

$$e=e_1+(e_2-e_1)+\ldots+(e_n-e_{n-1})+\ldots$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

D'où résulte

$$f(e) = f(e_1) + f(e_2 - e_1) + \ldots f(e_n - e_{n-1}) + \ldots = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\, f(e_n).$$

Ainsi la fonction f additive au sens complet est additive au sens restreint et continue relativement aux ensembles limites de suites monotones croissantes d'ensembles tirés de la famille T.

Réciproquement, si la fonction f jouit de ces deux dernières propriétés, elle est additive au sens complet. En effet, considérons une infinité dénombrable d'ensembles disjoints appartenant à la famille T: $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ Les ensembles $E_1, E_1 + E_2, \ldots, E_1 + E_2 + \ldots + E_n, \ldots$ appartiennent tous à la famille T et forment une suite monotone croissante d'ensembles qui admet pour ensemble limite $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ En raison de la continuité de la fonction f, on a

$$f(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\, f(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [f(E_1) + f(E_2) + \ldots + f(E_n)],$$

d'où

$$f(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots) = f(E_1) + f(E_2) + \ldots + f(E_n) + \ldots$$

Ce qui prouve l'additivité au sens complet de la fonction f.

On verra dans la suite qu'une fonction additive au sens complet est continue non seulement relativement aux ensembles limites de suites monotones croissantes d'ensembles, mais encore relativement aux ensembles limites de toute suite convergente d'ensembles tirés de la famille T.

15. **Propriétés des fonctions additives d'ensemble** [1]. Soit f une fonction additive d'ensembles définie sur la famille additive d'ensembles T. Si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ sont des ensembles disjoints appartenant à la famille T, on a

$$(1) \quad f(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots) = f(E_1) + f(E_2) + \ldots + f(E_n) + \ldots$$

Si on considère $f(E_n)$ comme le terme général d'une série, il résulte de l'égalité (1) que cette série est convergente. Elle est même absolument convergente. En effet, elle comprend des termes positifs et des termes négatifs: les termes positifs correspondent à des ensem-

[1]) Dans la suite, quand nous emploierons l'adjectif additif tout court il s'agira toujours de l'additivité au sens complet.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

bles $E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \ldots$, qui forment au plus une infinité dénombrable; de même les termes négatifs correspondent à une suite dénombrable d'ensembles $E_{\beta_1}, E_{\beta_2}, \ldots$ D'après les propriétés de l'additivité, les deux séries $f(E_{\alpha_1}) + f(E_{\alpha_2}) + \ldots$ et $f(E_{\beta_1}) + f(E_{\beta_2}) + \ldots$ sont bien convergentes.

16. Théorème: *Une fonction additive d'ensembles $f(E)$ définie sur une famille additive d'ensembles T est bornée sur cette famille T.* En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi: quel que soit le nombre entier n, il existe alors un ensemble E_n appartenant à la famille T et tel que $f(E_n)$ soit supérieur à n. On peut ainsi déterminer un ensemble E_1, tel que $f(E_1) > 1$, un ensemble E_2, tel que $f(E_2) > 2$ et ainsi de suite. On obtient par ce procédé une infinité dénombrable d'ensembles appartenant à la famille T. Leur ensemble-somme $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ appartient aussi à la famille d'ensembles T. Les valeurs que prend la fonction f sur les sous-ensembles de E (appartenant à la famille T) ne sont pas bornées. Nous allons démontrer que cette hypothèse est en contradiction avec l'additivé. Tout d'abord, si e est un sous-ensemble de E appartenant à la famille d'ensembles T, l'ensemble $E - e$ est aussi un sous-ensemble de E appartenant à T et les ensembles e et $E - e$ sont disjoints. On a donc $f(E) = f(e) + f(E - e)$ et cette somme a une valeur fixe, quand e varie dans E. D'autre part, puisque la fonction f n'est pas bornée sur les sous-ensembles de E appartenant à T, on pourra choisir e de sorte que la valeur absolue de $f(e)$ soit aussi grande que l'on veut. Alors $f(E - e)$ aura aussi une très grande valeur et de signe contraire à celle de $f(e)$. Ainsi quelque soit le nombre α positif, on peut choisir l'ensemble e (dans E et appartenant à T) de sorte que $|f(e)| > \alpha$ et $|f(E - e)| > \alpha$. Comme la fonction f n'est pas bornée dans l'ensemble E, elle n'est pas bornée à la fois dans les ensembles e et $E - e$. On peut donc, étant donné un nombre positif α quelconque, choisir un sous-ensemble e de E appartenant à la famille T, tel que $f(e)$ soit en valeur absolue supérieure à α et que la fonction f ne soit pas bornée dans e. On prend d'abord pour α la valeur 1: on obtient un sous-ensemble e_1 de E (appartenant à la famille T) tel que $|f(e_1)| > 1$ et que la fonction f ne soit pas bornée dans e_1. On peut reprendre le raisonnement avec e_1 et en tirer un sous-ensemble e_2 (appartenant à T) tel que $|f(e_2)| > 2$ et que le fonction f ne soit pas bornée dans e_2. On continue ainsi

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

et obtient une suite d'ensembles $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, appartenant tous à la famille T, et tels que

$$E \supset e_1 \supset e_2 \supset \ldots \supset e_n \supset \ldots \text{ et que } |f(e_1)| > 1,\ |f(e_2)| > 2, \ldots, |f(e_n)| > n, \ldots$$

On peut, par suite, écrire .

$$(1) \qquad -f(E) + [f(E) - f(e_1)] + \\ + [f(e_1) - f(e_2)] + \ldots + [f(e_{n-1}) - f(e_n)] = -f(e_n).$$

La valeur absolue du second membre étant inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues du premier membre, on a

$$(2) \qquad |f(E)| + |f(E) - f(e_1)| + \\ + |f(e_1) - f(e_2)| + \ldots + |f(e_{n-1} - f(e_n)| \geqslant |f(e_n)| > n.$$

D'où

$$(3) \quad |f(E) - f(e_1)| + |f(e_1) - f(e_2)| + \ldots + |f(e_{n-1} - f(e_n)| \geqslant n - |f(E)|,$$

Faisons croître n indéfiniment: $n - |f(E)|$ augmente indéfiniment et par conséquent le premier membre de l'inégalité (3) aussi. Les ensembles $E - e_1, e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n$, étant disjoints, quand on fait croître n indéfiniment, le premier membre de l'inégalité (3), qui n'est autre que la série des valeurs absolues des termes de $f(E - e_1) + f(e_1 - e_2) + \ldots + f(e_{n-1} - e_n) + \ldots$, augmente indéfiniment. La série considérée ne serait donc pas absolument convergente: ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de l'additivité de la fonction f [1]).

17. **Corollaire.** *Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n \ldots$ une suite dénombrable d'ensembles disjoints appartenant à la famille additive d'ensembles T, la somme des valeurs absolues $\Sigma|f| = |f(E_1)| + |f(E_2)| + \ldots$ est bornée quand on fait varier la suite d'ensembles.*

Considérons les nombres $f(E_1), f(E_2), \ldots, f(E_n), \ldots$: nous pouvons séparer les positifs des négatifs. Soient $E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_n}, \ldots$ les ensembles tel que $f(E_{\alpha_n})$ est positif et $E_{\beta_1}, E_{\beta_2}, \ldots, E_{\beta_n}, \ldots$ les ensembles tels que $f(E_{\beta_n})$ est négatif, on a

$$f(E_1) + f(E_2) + \ldots + f(E_n) + \ldots = [f(E_{\alpha_1}) + f(E_{\alpha_2}) + \ldots] + [f(E_{\beta_1}) + f(E_{\beta_2}) + \ldots]$$

Posons $E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + \ldots = H, \qquad E_{\beta_1} + E_{\beta_2} + \ldots = K.$

$$f(E_1) + f(E_2) + \ldots + f(E_n) + \ldots = f(H) + f(K)$$

$$|f(E_1)| + |f(E_2)| + \ldots + |f(E_n)| + \ldots \leqslant |f(H)| + |f(K)|.$$

[1]) MM. de la Vallée-Poussin et Radon démontrent le théorème 16 seulement sur les sous-ensembles (appartenant à la famille T) *d'un* ensemble de T.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Or d'après le théorème précédent $|f(H)|$ et $|f(K)|$ sont bornées et admettent, quels que soient H et K, la même borne M.

On a, par conséquent, $|f(E_1)|+|f(E_2)|+\ldots+|f(E_n)|+\ldots \leqslant 2M$, quelle que soit la suite dénombrable d'ensembles disjoints tirés de la famille T.

18. **Théorème.** *La somme d'un nombre fini de fonctions additives d'ensemble est une fonction additive d'ensemble.*

Sur tout ensemble E appartenant à la famille T, considérons les fonctions additives d'ensemble $f_1(E), f_2(E), \ldots f_p(E)$ et leur somme $f(E)=f_1(E)+f_2(E)+\ldots+f_p(E)$. Supposons qu'on ait décomposé E en une suite dénombrable d'ensembles appartenant à la famille T et ne chevauchant pas: soient $e_1, e_2, \ldots, e_q \ldots$ ces ensembles. Supposons d'abord qu'ils soient en nombre fini. On a

$$f(E)=f_1(e_1)+f_1(e_2)+\ldots+f_1(e_q)+$$
$$+f_2(e_1)+\ldots+f_2(e_q)+\ldots+f_p(e_1)+\ldots+f_p(e_q).$$

On obtient $f(E)=f(e_1)+f(e_2)+\ldots+f(e_q)$ en groupant les termes en e_1, ceux en e_2, etc.

On voit déjà que la fonction f est additive au sens restreint.

Si les ensembles e sont en nombre infini dénombrable, la série $f(e_1)+f(e_2)+\ldots+f(e_q)+\ldots$ est convergente et égale à $f(E)$. Cela résulte de la possibilité d'ajouter terme à terme un nombre fini de séries convergentes (En effet, les fonctions $f_1(E), f_2(E), \ldots, f_p(E)$ étant additives, nous avons, d'après $E=e_1+e_2+e_3+\ldots$

$$f_1(E)=\sum_{r=1}^{\infty} f_1(e_r), \quad f_2(E)=\sum_{r=1}^{\infty} f_2(e_r), \ldots, f_p(E)=\sum_{r=1}^{\infty} f_p(e_r),$$

ce qui donne, d'après $f(E)=f_1(E)+f_2(E)+\ldots+f_p(E)$

$$f(E)=\sum_{r=1}^{\infty} f_1(e_r)+\sum_{r=1}^{\infty} f_2(e_r)+\ldots+\sum_{r=1}^{\infty} f_p(e_r)=$$
$$=\sum_{r=1}^{\infty}[f(e_r)+f_2(e_r)+\ldots+f_p(e_r)]=$$
$$=\sum_{r=1}^{\infty} f(e_r), \qquad \text{c. q. f. d.).}$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

19. Problème. Etant donnée une suite S d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ appartenant à la famille additive d'ensembles T et une fonction d'ensemble $f(E)$ additive et définie sur la famille d'ensembles T, que peut-on dire des valeurs de la fonction sur les ensembles limites (restreint et complet) de la suite S?

Considérons d'abord le cas d'une suite monotone croissante d'ensembles: soit $E_1, E_2, \ldots$ cette suite telle que $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$.

Nous savons que l'ensemble limite de la suite est E_ω.

$$E_\omega = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots = E_1 + (E_2 - E_1) + \ldots + (E_{n+1} - E_n) + \ldots$$

D'où

$$f(E_\omega) = f(E_1) + [f(E_2) - f(E_1)] + \ldots + [f(E_{n+1}) - f(E_n)] + \ldots$$

On en tire

$$f(E_\omega) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\ f(E_n).$$

La valeur de la fonction sur l'ensemble limite est donc dans ce cas la limite des valeurs de la fonction sur les ensembles de la suite.

On voit par un calcul analogue que ce résultat subsiste pour les suites monotones décroissantes d'ensembles.

Considérons maintenant une suite quelconque d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ (appartenant à la famille T). Nous avons obtenu plus haut pour les ensembles limites complet (C) et restreint (R) les formules

$$C = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots)(E_2 + E_3 + \ldots) \ldots (E_n + E_{n+1} + \ldots) \ldots$$

$$R = E_1 . E_2 . E_3 \ldots + E_2 . E_3 \ldots + \ldots + E_n . E_{n+1} \ldots + \ldots$$

Posons

$$H_1 = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots, H_2 = E_2 + E_3 + \ldots, \ldots, H_n = E_n + E_{n+1} + \ldots,$$

$$G_1 = E_1 . E_2 . E_3 \ldots, G_1 = E_2 . E_3 \ldots, \ldots, G_n = E_n . E_{n+1} \ldots, \ldots$$

Tous les ensembles H et G appartiennent à la famille T: on peut considérer chaque H_n comme l'ensemble limite de la suite monotone croissante $E_n, E_n + E_{n+1}, \ldots, E_n + E_{n+1} + \ldots + E_{n+p}, \ldots$ et chaque G_n comme l'ensemble limite de la suite monotone décroissante $E_n, E_n . E_{n+1}, \ldots, E_n . E_{n+1} \ldots E_{n+p}, \ldots$ Les ensembles $H_1, H_2, \ldots$ forment une suite monotone décroissante: on a donc $f(C) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\, f(H_n)$.

De même on a $f(R) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\, f(G_n)$.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Pour pousser un peu plus loins l'étude des valeurs de la fonction sur les ensembles limites, considérons d'abord le cas où la fonction est monotone (c'est-à-dire toujours de même signe). Supposons-la, par exemple, positive ou nulle: elle est croissante (en ce sens que si E croît, $f(E)$ croît aussi). Désignons la par la notation φ. On ramène le cas où la fonction monotone est négative à ce cas en changeant tous les signes. On a toujours

$$\varphi(C) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\, \varphi(H_n), \qquad \varphi(R) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\, \varphi(G_n).$$

Considérons d'abord $\varphi(C)$: supposons que les valeurs de la fonction φ sur une infinité d'ensembles de la suite soient supérieures, à un certain nombre $k: \varphi(E_{p_i}) \geqslant k$. La fonction φ étant croissante $\varphi(H_n) \geqslant \varphi(E_{p_i})$ pour p_i assez grand; les valeurs de la fonction sur les ensembles H seront supérieures ou égales au nombre k. $\varphi(C)$ sera donc la limite d'une suite de nombres qui sont tous supérieurs ou égaux à un nombre k; cette limite est elle même supérieure ou égale à $k: \varphi(C) \geqslant k$. Or la borne supérieure de ces nombres k, inférieurs ou égaux à une infinité des $\varphi(E_n)$ est la *plus grande des limites* de $\varphi(E_n)$, nombre que nous désignons par la notion limite $\varphi(E_n)$. On a donc

$$\varphi(C) \geqslant \overline{\text{limite}}\, \varphi(E_n)$$

Passons à $\varphi(R)$: si nous supposons que les valeurs de la fonction φ sur une infinité d'ensembles de la suite soient inférieures à un certain nombre k, nous arrivons par un raisonnement analogue au précédent aux inégalités

$$\varphi(R) \leqslant k \quad \text{et} \quad \varphi(R) \leqslant \underline{\text{limite}}\, \varphi(E_n)$$

($\underline{\text{limite}}\, \varphi(E_n)$ désignant la plus petite des limites des nombres $\varphi(E_n)$).

Si on suppose enfin que la suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ converge vers un ensemble E, les ensembles C et R sont identiques à E et les inégalités concernant $\varphi(C)$ et $\varphi(R)$ deviennent

$$\varphi(E) \leqslant \underline{\text{limite}}\, \varphi(E_n) \leqslant \overline{\text{limite}}\, \varphi(E_n) \leqslant \varphi(E).$$

Ces inégalités prouvent que, si la suite d'ensembles $E_1, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ est convergente, il en est de même de la suite de nombres $\varphi(E_1), \varphi(E_2), \ldots, \varphi(E_n), \ldots$ et que l'on a

$$\varphi(E) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\, \varphi(E_n).$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Nous verrons plus loin que cette propriété s'étend au cas où la fonction d'ensembles, additive, n'est pas monotone.

B) Etude des fonctions additives d'ensemble par la variation totale.

20. **Définitions.** Soit E un ensemble quelconque appartenant à la famille d'ensembles T, on appelle *découpage* de E l'opération qui consiste à représenter E comme la somme d'une suite finie de sous-ensembles disjoints et appartenant à la famille d'ensembles T et on emploie la notation

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n = D(E).$$

On appelle *variation* de la fonction f sur l'ensemble E, relative au découpage $D(E)$ la somme des valeurs absolues

$$|f(E_1)| + |f(E_2) + \ldots + |f(E_n)|$$

et on désigne cette somme par la notation $\Sigma_{D(E)}|f|$. Nous avons démontré que la variation de la fonction f sur l'ensemble E, relativement au découpage $D(E)$ est bornée, quand le découpage $D(E)$ varie. On appelle *variation totale* de la fonction f sur l'ensemble E, relativement à la famille T, la borne supérieure de $\Sigma_{D(E)}|f|$, quand le découpage $D(E)$ varie et on désigne avec Radon cette quantité par la notation $\int_E |df|$.

21. **Remarque.** Si l'on admettait que les découpages pouvaient comprendre une suite infinie dénombrable de sous-ensembles appartenant à la famille T, on trouverait la même variation totale.

Appelons $\int'_E |df|$ la borne supérieure des variations correspondant aux découpages comportant un nombre fini ou une infinité dénombrable de sous-ensembles. Tout d'abord $\int'_E |df|$ sera au moins égal à $\Sigma_{D(E)}|f|$ pour tout découpage $D(E)$ comportant un nombre fini d'ensembles. Donc on a déjà

$$\int'_E |df| \geqslant \int_E |df|.$$

D'après la définition même de $\int'_E |df|$, étant donné le nombre positif $\frac{1}{n}$, il existe un découpage comportant une suite dénombrable de sous-ensembles, $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$, tel que

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

$$(4)\qquad \int_E' |df| - \frac{1}{n} < |f(E_1)| + |f(E_2)| + \ldots + |f(E_n)| + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant \int_E' |df|.$$

Si cette suite d'ensembles est finie, on aura $|f(E_1)| + \ldots \leqslant \int_E |df|$. Donc

$$\int_E' |df| - \frac{1}{n} < \int_E |df|.$$

Si la suite est infinie la série de terme général $|f(E_n)|$ est convergente: on peut trouver un nombre p tel que $|f(E_p)| + |f(E_{p+1})| + \ldots$ soit inférieur à $\frac{1}{n}$. Or, la somme $E_p + E_{p+1} + \ldots$ est un ensemble E' appartenant à la famille T et tel que

$$|f(E'_p)| \leqslant |f(E_p)| + |f(E_{p+1})| + \ldots < \frac{1}{n}.$$

Or, d'après (4)

$$\int_E' |df| - \frac{1}{n} < [|f(E_1)| + |f(E_2)| + \ldots + |f(E_{p-1})| + |f(E'_p)|] +$$
$$+ [-|f(E'_p)| + |f(E_p)| + |f(E_{p+1})| + \ldots].$$

La quantité dans le premier crochet est inférieure à $\int_E |df|$; celle dans le second est inférieure à $\frac{1}{n}$: on a donc dans tous les cas

$$\int_E' |df| - \frac{2}{n} \leqslant \int_E |df| \leqslant \int_E' |df|;$$

n étant aussi grand que l'on veut, on en conclut que $\int_E' |df| = \int_E |df|$.

22. **Théorème:** *La variation totale d'une fonction additive d'ensembles sur une famille additive d'ensembles est elle-même une fonction additive d'ensemble sur cette famille additive d'ensembles.*

Considérons une suite dénombrable d'ensembles disjoints, appartenant à la famille additive d'ensembles T, $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, et soit E leur ensemble-somme qui appartient aussi à la famille T. Je veux démontrer que la série $\int_{E_1} |df| + \int_{E_2} |df| + \ldots + \int_{E_n} |df| + \ldots$ est une série convergente, dont la somme est précisément $\int_E |df|$.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Or, toutes les variations sur des découpages de E_p ont pour borne supérieure $\int_{E_p}|df|$. On peut, par conséquent, trouver un découpage $D(E_p)$ de l'ensemble E_p tel que

$$\int_{E_p}|df| - \varepsilon_p < \Sigma_{D(E_p)}|f| \leqslant \int_{E_p}|df|.$$

ε_p étant un nombre positif donné, aussi petit que l'on veut.

En remplaçant p par $1, 2, \ldots$ et ajoutant terme à terme les inégalités obtenues, on obtient

$$\sum_{k=1}^{k=p}\int_{E_k}|df| - \sum_{k=1}^{k=p}\varepsilon_k < \sum_{k=1}^{k=p}\Big[\sum_{D(E_k)}|f|\Big];$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{k=p}\int_{E_k}|df| < \sum_{k=1}^{k=\infty}\varepsilon_p + \sum_{k=1}^{k=\infty}\Big[\sum_{D(E_k)}|f|\Big].$$

Or on peut choisir les ε_p de sorte que $\sum_{k=1}^{k=\infty}\varepsilon_k = \varepsilon$ et, d'autre part, la juxtaposition des découpages $D(E_k)$ fournit un découpage $D(E)$ de l'ensemble E et on arrive ainsi aux inégalités:

$$\sum_{k=1}^{k=p}\int_{E_k}|df| < \varepsilon + \sum_{D(E)}|f| < \varepsilon + \int_E|df|.$$

Elles prouvent la convergence de la série $\int_{E_1}|df| + \int_{E_2}|df| + \ldots + \int_{E_q}|df| + \ldots$ et indiquent même que sa somme est au plus égale à $\int_E|df|$: il reste à montrer qu'elle est précisément égale à $\int_E|df|$.

Considérons un nouveau découpage, $D'(E)$, de l'ensemble E, ce découpage ne comportant qu'un nombre fini de sous-ensembles.

$$D'(E) = E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_q = E.$$

On pourra le choisir de sorte que

$$\int_E|df| - \varepsilon < \sum_{D'(E)}|f| < \int_E|df|.$$

En le combinant avec le premier découpage, on a

$$E'_h = E'_h \,.\, E_1 + E'_h \,.\, E_2 + \ldots + E'_h \,.\, E_k + \ldots$$

$$|f(E'_h)| \leqslant |f(E'_k \,.\, E_1)| + |f(E'_h \,.\, E_2)| + \ldots + |f(E'_h \,.\, E_k)| + \ldots$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

En remplaçant h par $1, 2, 3, \ldots, q$ et en ajoutant, on obtient

$$\sum_{D'(E)} |f| = \sum_{h=1}^{h=q} |f(E'_h)| \leqslant \sum |f(E'_h \cdot E_k)|.$$

En raison de la convergence de la série de terme genéral $|f(E'_h| \cdot E_k)|$, on a le droit de grouper les termes correspondant à une même valeur de h, $\Sigma|f(E'_h \cdot E_k)| = \sum_{k=1}^{k=\infty}[\sum_{h=1}^{h=q}|f(E'_h \cdot E_k)|]$. Mais $\sum_{h=1}^{h=q}|f(E'_h \cdot E_k)|$ est une variation de la fonction f sur l'ensemble E_k et par suite

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\Big[\sum_{k=1}^{h=q}|f(E_h \cdot E_k)|\Big] \leqslant \sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{E_k}|df|.$$

On arrive donc par les deux raisonnements précédents à la double inégalité

$$\int_E |df| - \varepsilon < \sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{E_k}|df| \leqslant \int_E |df|.$$

Cette double inégalité, vraie quel que soit ε, montre que l'on a bien

$$\int_E |df| = \sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{E_k}|df|.$$

23. Forme canonique des fonctions additives d'ensemble. Parmi les découpages d'un ensemble E, il y a celui qui consiste à prendre E lui-même. On a donc $|f(E)| \leqslant \int_E |df|$. Il en résulte que les deux quantités

$$2\varphi(E) = \int_E |df| + f(E) \quad \text{et} \quad 2\psi(E) = \int_E |df| - f(E)$$

sont positives ou nulles. En outre, ces quantités étant somme ou différence de fonctions additives d'ensemble, elles sont elles-même des fonctions additives d'ensembles. En retranchant $\psi(E)$ de $\varphi(E)$ on trouve que $f(E)$ peut être considérée comme la différence de deux fonctions d'ensemble additives monotones et on obtient ainsi pour $f(E)$ la *forme dite canonique:* $f(E) = \varphi(E) - \psi(E)$. Les fonctions $\varphi(E)$ et $\psi(E)$ vérifient, en outre, la relation $\int_E |df| = \varphi(E) + \psi(E)$.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Cette forme canonique est d'une grande importance pour l'étude des fonctions additives d'ensemble: elle permet dans bien des cas de ramener l'étude des fonctions additives quelconques à l'étude plus simple des fonctions additives monotones.

Nous allons démontrer, en outre, que, si l'on essaie de mettre $f(E)$ sous la forme d'une différence de deux fonctions additives monotones, la forme la plus simple est la forme canonique. Soient en effet, $f(E)=\varphi(E)-\psi(E)$ la forme canonique et $f(E)=\varphi_1(E)-\psi_1(E)$ une autre forme de la fonction $f(E)$, $\varphi_1(E)$ et $\psi_1(E)$ étant deux fonctions monotones positives différant respectivement de $\varphi(E)$ et $\psi(E)$.

En retranchant les deux dernières égalités, on obtient

$$\varphi_1(E)-\varphi(E)=\psi_1(E)-\psi(E)=v(E).$$

La fonction $v(E)$ est une fonction additive d'ensembles comme différence de fonctions additives d'ensemble. Si nous pouvons démontrer qu'elle est monotone non négative, il en résultera que $\varphi_1(E)$ et $\psi_1(E)$ sont supérieures ou égales à $\varphi(E)$ et $\psi(E)$. C'est en ce sens que la forme canonique est la plus simple. Considérons un découpage quelconque de l'ensemble E

$$D(E)=E_1+E_2+\ldots+E_q.$$

$$|f(E_1)|+|f(E_2)|+\ldots+|f(E_q)|=$$
$$=|\varphi_1(E_1)-\psi_1(E_1)|+|\varphi_1(E_2)-\psi_1(E_1)|+\ldots+|\varphi_1(E_q)-\psi_1(E_q)|.$$

D'où

$$\sum_{D(E)}|f|\leqslant\varphi_1(E_1)+\varphi_1(E_2)+\ldots+\varphi_1(E_q)+\psi_1(E_1)+\psi_1(E_2)+\ldots+\psi_1(E_q).$$

or

$$\varphi_1(E_p)=\varphi(E_p)+v(E_p)\qquad\psi_1(E_p)=\psi(E_p)+v(E_p).$$

En remplaçant les φ_1 et ψ_1 par leurs valeurs et effectuant les calculs, on arrive à l'inégalité

$$\sum_{D(E)}|f|\leqslant\int_E|df|+2v(E).$$

Cette inégalité étant vraie quel que soit le découpage $D(E)$, on en conclut que

$$\int_E|df|\leqslant\int_E|df|+2v(E).$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

D'où il résulte bien $2v(E) \geqslant 0$.

24. **Remarque.** La variation totale d'une fonction monotone positive ou nulle est cette fonction elle-même. De même la variation totale de la variation totale est la variation totale elle-même.

25. **Remarque.** Revenons à la valeur d'une fonction additive d'ensembles sur l'ensemble limite d'une suite convergente d'ensembles appartenant à une famille additive d'ensembles T. Nous avons démontré (n° 19) que, si l'on considère une suite convergente d'ensembles de la famille T, $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, ayant pour ensemble limite l'ensemble E et une fonction d'ensembles additive monotone φ, l'on a $\operatorname*{limite}_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \varphi(E)$. La forme canonique des fonctions additives d'ensemble nous permet de généraliser ce résultat aux fonctions d'ensembles non monotones. Soit une fonction additive d'ensemble quelconque $f(E_n)$: on peut mettre $f(E_n)$ sous la forme $f(E_n) = \varphi(E_n) - \psi(E_n)$; $\varphi(E_n)$ et $\psi(E_n)$ sont deux fonctions monotones positives. Si la suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ converge vers l'ensemble E, on a

$$\operatorname*{limite}_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \varphi(E) \qquad \operatorname*{limite}_{n\to\infty} \psi(E_n) = \psi(E).$$

Or

$$\operatorname*{limite}_{n\to\infty} f(E_n) = \operatorname*{limite}_{n\to\infty} \varphi(E_n) - \operatorname*{limite}_{n\to\infty} \psi(E_n) = \varphi(E) - \psi(E) = f(E).$$

Ce qui prouve la continuité des fonctions additives d'ensembles.

§ On a donc le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'ensembles définie sur une famille additive d'ensembles y soit additive au sens complet est qu'elle y soit additive au sens restreint et continue.

En introduisant dans la science à l'occasion de sa définition de la mesure la notion d'additivité au sens complet, M. Borel a ouvert un nouveau chapitre de l'Analyse. Le théorème précédent montre (après coup) que cette nouvelle notion est au fond une combinaison de la notion classique de continuité avec la notion très ancienne d'additivité au sens restreint (voir en géométrie élémentaire la mesure des aires, des volumes, etc.).

26. **Définition de la variation totale pour les fonctions d'ensemble additives au sens restreint.** La définition (20) de la variation totale d'une fonction additive au sens complet ne faisant intervenir dans les différents découpages qu'un nombre fini d'ensembles, on peut reprendre mot pour mot cette définition pour dé-

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

finir la variation totale d'une fonction additive au sens restreint f_r sur un ensemble appartenant à une famille d'ensembles additive au sens restreint T_r sur laquelle la fonction est définie: la variation totale de la fonction f_r sur l'ensemble E relativement à la famille T_r est la borne supérieure de $\Sigma_{D(E)}|f_r|$, quand le découpage $D(E)$ varie et on désigne cette quantité par la notation $\int_E |df_r|$.

Toutes les propriétés qui ne font intervenir qu'un nombre fini d'ensembles subsistent. D'autre part la variation totale est une fonction additive au sens restreint. Il suffit de montrer que si E_1 et E_2 sont deux ensembles de la famille T_r, on a

$$\int_{E_1+E_2} |df_r| = \int_{E_1} |df_r| + \int_{E_2} |df_r|.$$

Or tout découpage de E_1 joint à un découpage de E_2 forme un découpage de E_1+E_2: on en conclut que

$$\int_{E_1+E_2} |df_r| \geqslant \int_{E_1} |df_r| + \int_{E_2} |df_r|.$$

Considérons maintenant un découpage quelconque, soit $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, de E_1+E_2. La variation de la fonction f_r sur le découpage

$$e_1 E_1 + e_1 E_2 + e_2 E_1 + e_2 E_2 + \ldots + e_n E_1 + e_n E_2$$

est supérieure ou égale à la variation de la fonction f_r sur le découpage précédent. On en conclut que

$$\int_{E_1+E_2} |df_r| \leqslant \int_{E_1} |df_r| + \int_{E_2} |df_r|$$

et finalement

$$\int_{E_1+E_2} |df_r| = \int_{E_1} |df_r| + \int_{E_2} |df_r|.$$

Ce qui prouve que la variation totale d'une fonction additive au sens restreint est elle même une fonction additive au sens restreint.

La forme canonique d'une fonction additive au sens restreint s'obtient comme celle d'une fonction additive au sens complet. (Cf. § 23). Et si l'on peut mettre f_r sous la forme d'une différence entre deux fonctions monotones additives au sens restreint sur E_r, ces

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

deux fonctions *sont respectivement au moins égales* aux fonctions correspondantes dans la forme canonique que nous venons de définir sur F_r.

C) De quelques ensembles particulieurs.

27. **Définitions.** Considérons la fonction d'ensemble $f(E)$ additive sur une famille additive d'ensembles T. Nous dirons qu un ensemble E est *presque nul*[1]) relativement à la fonction f et à la famille T, s'il appartient à la famille T et si la variation totale de la fonction f sur l'ensemble E est nulle: $\int_E |df| = 0$.

Nous dirons, de même, que deux ensembles E_1, E_2 sont *presque disjoints* relativement à la fonction f si leur ensemble commun est presque nul relativement à la fonction f: $\int_{E_1 \cdot E_2} |df| = 0$.

Nous dirons que deux ensembles E_1, E_2 sont *presque identiques* relativement à la fonction f, s'ils diffèrent chacun de leur ensemble commun par un ensemble presque nul relativement à la fonction f:

$$\int_{E_1 - E_2} |df| = 0, \int_{E_2 - E_1} |df| = 0.$$

28. **Propriétés.** *Tout sous-ensemble e (appartenant à la famille T) d'un ensemble E presque nul relativement à la fonction f est lui-même presque nul relativement à la fonction f*

On a, en effet, en raison de l'additivité de la variation totale, si e est un sous-ensemble de E, $\int_e |df| + \int_{E-e} |df| = \int_E |df| = 0$. Comme $\int_E |df| \geqslant 0$, $\int_{E-e} |df| \geqslant 0$, on en conclut que $\int_e |df| = 0$.

De plus comme, $f(e) \leqslant \int_e |df|$, $f(e) = 0$

Si l'ensemble E (appartenant à la famille T) est presque nul relativement à la fonction f, $f(e) = 0$ pour tout sous-ensemble e de E (appartenant à la famille T) et, en particulier, $f(E) = 0$. La réciproque est évidente.

Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu un ensemble E de la famille additive T soit presque nul relativement à une fonction f additive sur T est que f soit identiquement nulle sur E, c'est-à-dire que $f(e)$ soit nul pour tout sous-ensemble e de E appartenant à T.

Si deux ensembles E_1, E_2 (appartenant à la famille T) sont pres-

[1]) Nous réserverons l'expression d'ensemble nul au cas des ensembles qui n'ont aucun élément, comme cela se fait d'habitude; ce qui nous permet d'écrire

$$f(E) = f(E) + f(0) \qquad \text{d'où } f(0) = 0.$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

que identiques et presque disjoints relativement à la fonction f, ils sont presque nuls relativement à la fonction f.

Les ensembles E_1, E_2 étant presque disjoints relativement à la fonction f, $\int_{E_1 . E_2} |df| = 0$. Les ensembles E_1, E_2 étant presque identiques relativement à la fonction f, $\int_{E_1 - E_2} |df| = \int_{E_2 - E_1} |df| = 0$. Or, on a par exemple $E_1 \equiv E_1 . E_2 + (E_1 - E_2)$. En raison de l'additivité de la variation totale, on trouve $\int_{E_2} |df| = \int_{E_1} |df| = 0$.

Si deux ensembles sont presque identiques relativement à la fonction f, la fonction f et sa variation totale prennent respectivement les mêmes valeurs sur les deux ensembles.

En effet

$$\int_{E_1 - E_2} |df| = \int_{E_2 - E_1} |df| = 0 \qquad f(E_1 - E_2) = f(E_2 - E_1) = 0$$

$$f(E_1) = f(E_2) = f(E_1 . E_2).$$

La formule d'addition d'une fonction additive, vraie quand les ensembles sont disjoints deux à-deux, est encore vraie quand les ensembles sont presque disjoints deux à deux.

Soient les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, appartenant à la famille T. Posons

$$E'_1 = E_1, \quad E'_2 = E_2 - E_1, \ldots, \quad E'_n = E_n - (E_1 + E_2 + \ldots + E_{n-1}), \ldots$$

Les ensembles $E'_1, E'_2, \ldots, E'_n, \ldots$ sont disjoints et tels que

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots = E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_n + \ldots$$

On a $E_n - E'_n = E_n . E_1 + E_n . E_2 + \ldots + E_n . E_{n-1}$. On peut transformer cette somme d'ensembles comme la première et la remplacer par la somme $E''_1 + E''_2 + \ldots$ formée d'ensembles disjoints deux à deux. On a donc

$$E_n - E'_n = E''_1 + E''_2 + \ldots \quad \text{avec} \quad E''_1 \subset E_n . E_1, \quad E''_2 \subset E_n . E_2, \ldots$$

L'ensemble E'_n étant compris dans E_n, on a

$$f(E_n) - f(E'_n) = f(E_n - E'_n) = f(E''_1) + f(E''_2) + .$$

Mais, les ensembles $E_n . E_1, E_n . E_2, \ldots$ etant presque nuls, $f(E''_1) = f(E''_2) = \ldots = 0$. D'où $f(E_n) = f(E'_n)$ et par suite

$$f(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots) = f(E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_n + \ldots) =$$
$$= f(E'_1) + \ldots + f(E'_n) + \ldots = f(E_1) + \ldots + f(E_n) + \ldots$$

La formule d'addition reste donc vraie.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

D) Singularités des fonctions additives et fonction des sauts.

29. **Définitions.** Soit un ensemble E appartenant à une famille additive d'ensembles T sur laquelle une fonction additive d'ensemble f est définie. Prenons un sous-eusemble e de l'ensemble E (appartenant à la famille T): on a évidemment $0 \leqslant \int_e |df| \leqslant \int_E |df|$. Il peut arriver qu'en faisant varier e dans E, $\int_e |df|$ prenne différentes valeurs comprises entre zéro et $\int_E |df|$. On appelle *singularité* de la fonction d'ensemble f sur la famille d'ensembles T tout ensemble non presque nul H (appartenant à la famille T), tel qu'on ne puisse pas réduire la variation de f en réduisant l'ensemble H à un sous-ensemble non presque nul convenable; c'est à-dire que tout sous-ensemble de H (appartenant à la famille T) est presque nul ou presque identique à l'ensemble H.

30. **Remarque.** La variation totale de la fonction f sur une quelconque de ses singularités H est égale à $|f(H)|$; car si $H = H_1 + H_2 + \ldots$ est une somme d'ensembles de T disjoints, l'un au plus des termes de la somme $|f(H_1)| + |f(H_2)| + \ldots$ est différent de zéro. Et comme $f(H) = f(H_1) + f(H_2) + \ldots$, la somme des valeurs absolues est égale à $|f(H)|$, $f(H)$ est le *saut* de la fonction f sur la singularité H et $|f(H)|$ est le *saut absolue*. Ces deux sauts sont $\neq 0$.

31. **Remarques:** 1° Tous sous-ensemble (appartenant à T) d'une singularité de f est une singularité de f avec le même saut ou est un ensemble presque nul. 2° l'ensemble commun à une singularité H de f et à un ensemble quelconque E de T est un ensemble presque nul ou une singularité de f presque identique à H.

32. **Théorème.** *Deux singularités, appartenant à une famille additive d'ensembles T et relatives à une fonction additive d'ensemble f, sont nécessairement presque disjointes ou presque identiques relativement à la fonction f.*

Soient H_1, H_2 ces singularités. Leur ensemble commun $H_1 . H_2$, en tant que sous-ensemble de H_1, est un ensemble presque nul ou presque identique à H_1 relativement à la fonction f. De même $H_1 . H_2$, en tant que sous-ensemble de H_2, est un ensemble presque nul ou presque identique à H_2 relativement à la fonction f. Deux cas se présentent: 1° $H_1 . H_2$ est un ensemble presque nul relativement a la fonction f. Alors H_1 et H sont des ensembles presque disjoints. 2° $H_1 . H_2$ n'est pas presque nul: alors $H_1 . H_2$ est presque identique d'une part à H_1, d'autre part H_2 et on en

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

déduit que les ensembles H_1 et H_2 sont presque identiques relativement à la fonction f.

33. **Théorème**: *Si f est une fonction additive d'ensembles définie sur la famille additive d'ensembles T, ou bien f n'admet pas de singularité, ou bien il existe une suite dénombrable de sigularités de f disjointes deux à deux et qui sont telles que toute singularité de f soit presque identique à une des singularités de la suite.*

Nous allons d'abord montrer qu'il ne peut exister au plus qu'une infinité dénombrable de singularités presque disjointes et, pour cela, qu'il ne peut y en avoir qu'un nombre fini dont le saut absolu est supérieur à un nombre positif donné α. En effet, s'il y en avait une infinité, il suffirait d'en extraire une infinité dénombrable. Ces singularités sont, par hypothèse, presque disjointes. Leur ensemble-somme appartiendrait aussi à la famille T et en raison de l'additivité de la variation totale, on aurait

$$H = H_1 + H_2 + \ldots + H_n + \ldots \qquad \int_H |df| = \int_{H_1} |df| + \int_{H_2} |df| + \ldots + \int_{H_n} |df| + \ldots$$

Le deuxième membre de cette dernière égalité doit former une série convergente: ce qui serait impossible dans l'hypothèse que tous ses termes sont supérieurs à α.

Dans le cas où précisément il existe une infinité dénombrable de singularités, nous savons former une suite dénombrable de singularités presque disjointes T, telle que, s'il se présente une singularité différente des singularités de la suite T, elle n'est pas presque disjointe des singularités de la suite T. Car par notre procédé de formation de la suite T à l'aide des valeurs des sauts absolues, elle ne peut qu'être presque identique à une des singularités de la suite considérée.

Un tel ensemble T de singularités presque disjointes de la fonction f s'appelle un *ensemble singulier* de la fonction f. Supposons que nous ayons pu obtenir un dexième ensemble singulier T': tout ensemble E'_n de T' est presque identique à un ensemble E_n de T et cet ensemble E_n de T est de même presque identique à un ensemble de T'. Cet ensemble de T' ne peut être que E'_n. Car, s'il en était autrement, il y aurait deux ensembles presque identiques dans T'. La correspondance entre deux ensembles presque identiques appartenant respectivement à T' et à T est donc biunivoque: *Deux ensembles singuliers sont presque identiques.*

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

34. **Remarque.** On peut supposer que les singularités de T sont strictement disjointes, car si T est formé des ensembles $H_1, \ldots, H_n, \ldots$ on peut remplacer T par la famille S composée des ensembles disjoints:

$$S_1 = H_1, \ldots, \; S_n = H_n - (H_1 + H_2 + \ldots + H_{n-1}).$$

35. **Fonction des sauts:** Soit E un ensemble quelconque de la famille additive d'ensembles T et f une fonction additive d'ensembles définie sur la famille T. S'il y a des ensembles singuliers relativement à la fonction f et la famille T, ils sont presque identiques. Soit Q un de ces ensembles singuliers, la valeur de $f(E \cdot Q)$, est indépendante du choix de l'ensemble singulier Q. Considérons, en effet, deux ensembles singuliers S et Q. Si l'on pose $S \cdot Q = U$, les ensembles $S' = S - U$ et $Q' = Q - U$ sont presque nuls relativement à la fonction f. Il en est, a fortiori, de même des ensembles ES' et EQ'. Par suite les ensembles ES et EQ sont presque identiques relativement à la fonction f: $f(E \cdot S) = f(E \cdot Q)$. Ainsi la fonction $f(ET)$ est bien définie pour tout ensemble de la famille T et est indépendante du choix de l'ensemble singulier Q de la fonction f. C'est cette fonction que nous appellons la *fonctions des sauts*[1]) *de la fonction f sur la famille T* et nous la désignons par la notation $s(E)$

$$s(E) = f(E \cdot Q).$$

36. **Théorème** *La fonction des sauts de la fonction f sur la famille T a une valeur nulle sur tout ensemble presque disjoint d'un ensemble singulier de la fonction f.*

En effet, on a alors $s(E) = f(E \cdot Q) = 0$.

37. **Théorème** *La valeur de la fonction f sur un ensemble E (appartenant à la famille T) peut se représenter à l'aide d'une combinaison d'une suite dénombrable de nombres fixes.*

Soit S un ensemble singulier de la fonction f sur la famille T. $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$ et les ensembles $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ sont supposés disjoints. On a, par suite, $ES = ES_1 + ES_2 + \ldots + ES_n + \ldots$ et les ensembles $ES_1, ES_2, \ldots, ES_n, \ldots$ sont, a fortiori, disjoints. Ce qui permet d'écrire

$$s(E) = f(ES) = f(ES_1) + f(ES_2) + \ldots + f(ES_n) + \ldots$$

Considérons ES_n: de deux choses l'une, ou bien l'ensemble ES_n est presque nul relativement à la fonction f et alors $f(ES_n) = 0$;

[1]) L'expression de fonction des sauts a été introduite par M. Lebesgue.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

ou bien $E.S_n$ est une singularité de f presque identique à S_n et alors $f(E.S_n)=f(S_n)$. $f(S_n)$ est un nombre fixe C_n, qui est le saut de la fonction f sur la singularité S_n. On a en particulier, $f(S)=$ $=C_1+C_2+\ldots+C_n+\ldots$ En définitive, dans l'expression de $s(E)$ figurent des termes nuls et d'autres qui sont égaux à certaines quantités C. Ces derniers termes proviennent des singularités de la fonction f comprises dans l'ensemble E. On peut, en conséquence, énoncer le théorème sous cette forme un peu différente:

La valeur $s(E)$ de la fonction des sauts d'une fonction additive d'ensembles f sur un ensemble E appartenant à la famille T est égale à la somme des sauts de f sur celles des singularités de f qui appartiennent à l'ensemble E.

38. **Théorème.** *La fonction des sauts d'une fonction additive d'ensemble définie sur une famille additive d'ensembles T est elle-même une fonction additive d'ensembles sur la famille T.*

Soient, en effet, $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ des ensembles disjoints appartenant à la famille T et E leur somme. On a,

$$E.S=E_1.S+E_2.S+\ldots+E_n.S+\ldots$$

D'où suit

$$f(E.S)=f(E_1.S)+\ldots+f(E_n.S)+\ldots$$

et, comme par définition, $f(E.S_n)=s(E_n)$, on a

$$s(E)=s(E_1)+s(E_2)+\ldots+s(E_n)+\ldots$$

39. *Variation totale et forme canonique de la fonction des sauts.* La fonction des sauts étant additive, sa variation totale sur les ensembles de la famille T existe et on a

$$\int_E |ds| = \int_{E.S} |ds| + \int_{E-S} |ds|.$$

La fonction s étant presque nulle sur l'ensemble $E-S$, on a

$$s(E)=f(E.S), \quad \int_E |ds| = \int_{E.S} |ds| = \int_{E.S} |df|.$$

On voit à l'aide des relations précédentes, que la fonction $s(E)$ se met sous la forme canonique:

$$s(E)=\Phi(E)-\Psi(E) \quad \text{et} \quad \Phi(E)=\varphi(E.S) \quad \text{et} \quad \Psi(E)=\psi(E.S).$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

$\varphi(E)$ et $\psi(E)$ étant les éléments de la forme canonique de la fonction f.

40. Théorème. *Tout ensemble singulier d'une fonction additive d'ensembles f est un ensemble singulier de la fonction des sauts de f.*

Soit Q un ensemble singulier de la fonction f et K une singularité de la fonction s. On a $K = K.Q + K - Q$. L'ensemble $K.Q$, étant vide d'élément appartenant à Q, est presque nul relativement à la fonction s en vertu même de la définition de cette fonction. Les deux ensembles K et $K.S$ sont donc presque identiques relativement à la fonction s. Pour que l'ensemble K soit une singularité de la fonction s, il faut et il suffit que l'ensemble $K.Q$ soit une singularité pour la fonction s. Or les fonctions f et s ont même valeur sur $K.Q$ et sur tous ses sous-ensembles appartenant à la famille Q. Il en est donc de même de leurs variations totales. Par suite, pour tout sous-ensemble e de la singularité $K.Q$ de s, on a $\int_e |df| = \int_{K.T} |df|$ ou $= 0$ Donc $K.Q$ est une singularité de f.

Ainsi toute singularité de la fonction s est égale à la somme d'une singularité de la fonction f et d'un ensemble presque nul relativement à S. On ne peut en conclure que tout ensemble singulier de s est ensemble singulier de f. Au contraire, toute singularité de la fonction f est une singularité de la fonction s. Tout ensemble singulier Q de la fonction f est donc aussi un ensemble singulier pour la fonction des sauts s de la fonction f.

41. *Décomposition d'une fonction additive d'ensemble en une partie régulière et une partie singulière.* Reprenons la fonction additive d'ensemble $f(E)$ (définie sur la famille additive d'ensembles T). Si $s(E)$ est la fonction des sauts de la fonction $f(E)$, on définit (sur la famille T) une fonction d'ensemble $g(E)$ par la relation

$$g(E) = f(E) - s(E)$$

$g(E)$, différence de deux fonctions additives d'ensemble, est aussi une fonction additive d'ensemble. L'égalité précédente pouvant encore s'écrire $f(E) = g(E) + s(E)$, on obtient une représentation de la fonction additive $f(E)$ au moyen des deux fonctions additives $g(E)$ et $s(E)$. Connaissant $s(E)$, il nous reste à étudier $g(E)$, et à montrer l'intérêt de cette représentation en prouvant que $g(E)$ est plus simple que $f(E)$. Comme $s(E) = f(E.S)$, on a $g(E) = f(E) - f(E.S) = f(E - S)$. On voit par là que la fonction $g(E)$ est nulle sur l'ensemble singulier S de la fonction f, ainsi que sur

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

tous ses sous-ensembles. Par contre, en dehors de l'ensemble singulier S, la fonction g a même valeur que la fonction f (sur les ensembles de la famille T).

42. *Variation totale et forme canonique de la fonction* $g(E)$. On voit par un raisonnement analogue du § 39 que la variation totale de la fonction $g(E)$ existe et que l'on a

$$\int_E |dg| = \int_{E-S} |df|.$$

La forme canonique de la fonction $g(E)$ est $g(E) = \alpha(E) - \beta(E)$ avec

$$\alpha(E) = \varphi(E - S) \quad \text{et} \quad \beta(E) = \psi(E - S).$$

43. *La fonction g n'a pas de singularité.* Supposons en effet, que la fonction g ait une singularité E_0. Tout d'abord l'ensemble E_0 n'est pas presque nul relativement à la fonction g et l'on a $\int_{E_0} |dg| > 0$.

Comme $g(E) \equiv f(E - S)$, on a $\int_{E_0} |dg| = \int_{E_0 - S} |df|$: on a aussi $\int_{E_0 - S} |df| > 0$. Appelons E_1 l'ensemble $E_0 - S$. E_1 étant donc une singularité pour la fonction g et f coïncidant avec g sur E_1 et ses sous-ensembles (car E_1 est en dehors de S), il en résulte que E_1 est une singularité de la fonction f en dehors de l'ensemble singulier S relatif à la fonction f. Or toute singularité de la fonction f est presque identique à une singularité appartenant à l'ensemble singulier S et il n'y a pas de singularité en dehors de S.

La fonction g n'admet donc pas de singularité: c'est la *partie régulière* de la fonction f.

44. En résumé étant donnée une fonction additive d'ensembles $f(E)$ (définie sur une famille additive d'ensembles T), on a pu la mettre sous la forme $f(E) = s(E) + g(E)$, les fonctions $s(E)$ et $g(E)$ étant des fonctions additives d'ensemble définies sur la famille T: $g(E)$ est *la partie régulière* de $f(E)$ et n'a pas de singularité, $s(E)$ est la *fonction des sauts* de $f(E)$ et on peut prendre un ensemble singulier de la fonction f pour ensemble singulier de la fonction s.

En outre la fonction des sauts (et la partie régulière) de la variation totale de la fonction f sont les variations totales de la fonction des sauts (et de la partie régulière) de la fonction f.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

E) Des fonctions additives sans singularités.

45. Nous considérerons maintenant une fonction d'ensemble $g(E)$ additive, sans singularité, définie sur une famille additive d'ensembles T et nous supposerons qu'il existe des ensembles appartenant à la famille T, sur lesquels la variation totale de la fonction g à une valeur positive. On peut alors parler de la borne inférieure de la variation totale sur les sous-ensembles non presque nuls relativement à la fonction g d'un ensemble déterminé E.

46. **Théorème.** *La borne inférieure de la variation totale de la fonction g sur les sous-ensembles non presque nuls relativement à la fonction g d'un ensemble déterminé est égale à zéro.*

Soit ϱ la borne inférieure considérée: elle est positive ou nulle comme borne inférieure de nombres tous positifs. Nous allons montrer qu'il est inadmissible que ϱ soit positif. Supposons, en effet, ϱ positif. Par définition même de ϱ, quel que soit l'entier n il y a au moins un sous-ensemble e_n de l'ensemble E (appartenant à la famille T) tel que l'on ait

$$\varrho \leqslant \int_e |dg| < \varrho + \frac{\varrho}{n}.$$

Considérons une suite d'ensembles $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ (tous compris dans E et appartenant à T) qui correspondent à la suite des valeurs de n. Tout d'abord il ne peut pas y en avoir une infinité tels qu'ils soient presque identiques à l'un d'eux, par exemple e_q, relativement à la fonction g. Car, si ce fait avait lieu, il y aurait une infinité de valeurs de n telles que $\varrho \leqslant \int_{e_q} |dg| < \varrho + \frac{\varrho}{n}$. On en conclurait que $\int_{e_q} |dg| = \varrho$. Or si e est un sous-ensemble non presque nul de e_q relativement à la fonction g, on aurait d'une part $\int_e |dg| \leqslant \int_{e_q} |dg| = \varrho$ et d'autre part $\varrho \leqslant \int_e |dg|$. D'où on conclurait $\int_e |dg| = \int_{e_q} |dg|$. Il n'y aurait pas de valeurs intermédiaires entre zéro et $\int_{e_q} |dg|$ pour les valeurs de la variation totale sur les sous-ensembles de e_q. L'ensemble e_q serait donc une singularité pour la fonction g: ce qui est impossible.

Cette première hypothèse etant écartée, en retirant au besoin certains ensembles de la suite $e_1, e_2, \ldots e_n, \ldots$ on pourra toujours supposer qu'il en reste une infinité, ne présentant aucun couple d'ensembles presque identiques relativement à la fonction g. Nous

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

allons de même écarter l'hypothèse que ces ensembles soient presque disjoints deux à deux relativement à la fonction g. En effet, s'il en était ainsi, en appelant e la somme des ensembles presque disjoints $e_1 + e_2 + \ldots + e_n + \ldots$, on trouverait que $\int_e |dg|$ à une valeur qui n est pas finie. Ce qui est en contradiction avec le fait que $\int_e |dg| \leqslant \int_E |dg|$, $\int_E |dg|$ ayant une valeur bornée.

Par conséquent dans la suite $e_1, e_2, \ldots$ il existe au moins deux ensembles e_p et e_r qui ne sont ni presque identiques, ni presque disjoints relativement à la fonction g. Si K est leur ensemble commun, on a

$$e_p = K + e'_p \qquad e_t = K + e'_r.$$

Et les deux ensembles e'_p et e'_r ne sont pas tous deux presque nuls relativement à la fonction g; par exemple, e'_p n'est pas presque nul. D'autre part K n'est pas presque nul relativement à g. Supposons $p < t$: e_p et e_t appartenant à la suite $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, on a

$$\varrho \leqslant \int_{e_p} |dg| < \varrho + \frac{\varrho}{p} \qquad \varrho \leqslant \int_{e_t} |dg| < \varrho + \frac{\varrho}{p}$$

e_p etant supposé non presque nul relativement à g, $\varrho \leqslant \int_{e_p} |dg|$. De ces deux dernières inégalités, on conclut

$$2\varrho \leqslant \int_{e'_p} |dg| + \int_K |dg| = \int_e |dg| < \varrho + \frac{\varrho}{p}.$$

D'ou résulte $\varrho < \frac{\varrho}{p}$, inégalité evidemment impossible si $\varrho > 0$.

47. **Théorème.** Soit E un nombre arbitraire > 0 et g une fonction additive sans singularité sur une famille additive d'ensembles F. On peut décomposer tout ensemble E appartenant à la famille F en un nombre fini de sous-ensembles disjoints appartenant à F et sur chacun desquels la variation totale de g est inférieure à E.

Si E est presque nul la proposition est évidente. Supposons $\int |dg| > 0$.

La borne inférieure des valeurs de la variation totale sur les sous-ensembles de E étant zéro, quelque soit le nombre positif ε, on peut trouver un ensemble e_1, appartenant à la famille T et compris dans E, tel que $0 < \int_{e_1} |dg| < \varepsilon$ Considérons l'ensemble $e'_1 = E - e_1$. S'il est presque nul relativement à la fonction g,

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

$\int_E |dg| = \int_{e_1} |dg|$ et, par suite, $\int_E |dg| < \varepsilon$. Dans ce cas la décomposition qui repond à la question, s'obtient en prenant E lui-même.

Si au contraire $\int_{e_1} |dg| > 0$, il faut continuer. Appellons ϱ_1 la borne supérieure des valeurs de $\int_H |dg|$, lorsque $\int_H |dg| < \varepsilon$ et que H est un sous-ensemble de e_1'. ϱ_1 sera un nombre positif tel que $0 < \varrho_1 \leqslant \varepsilon$. On pourra prendre dans e_1' au moins un sous-ensemble e_2, tel que $\frac{\varrho_1}{2} < \int_{e_1} |dg| < \varrho_1$. Les ensembles e_1 et e_2 sont deux sous-ensembles disjoints de l'ensemble E et sur chacun d'eux la valeur de la variation totale de la fonction g est comprise entre zéro et ε.

On continue ainsi de suite en posant $e_2' = E - (e_1 + e_2)$, cherchant un ensemble e_3, etc... Supposons que l'on ait obtenu ainsi les sous-ensembles de E $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, tous disjoints et sur chacun desquels la variation totale a une valeur comprise entre zéro et ε. Considérons l'ensemble e_{n-1}' défini par la relation $e_{n-1}' = E - (e_1 + e_2 + \ldots + e_{n-1})$: ou bien e_{n-1}' est un ensemble presque nul relativement à g et les ensembles $e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, (e_{n-1} + e_{n-1}')$ constituent un décomposition de l'ensemble E en un nombre fini de sous-ensembles, sur chacun desquels la variation totale de g est inférieure à ε. Ou bien, au contraire, l'ensemble e_{n-1}' n'est pas presque nul relativement à la fonction g et si l'on appelle ϱ_{n-1} la borne supérieure de $\int_H |dg| < \varepsilon$ et alors que H est un sous-ensemble de e_{n-1}, ϱ_{n-1} est un nombre positif et il y a alors un sous-ensemble e_n de l'ensemble e_{n-1}' tel que $\left|\frac{n-1}{n}\right| \varrho_{n-1} \leqslant \int_{e_n} |dg| \leqslant \varrho_{n-1} \leqslant \varepsilon$. On voit que deux cas peuvent se présenter: ou bien à un certain moment on arrive à un ensemble e_n' presque nul et le problème est résolu; ou bien on n'arrive jamais à un ensemble e_n' presque nul relativement à la fonction g. Supposons donc qu'on ait obtenu par le procédé employé une suite infinie de sous-ensembles de E disjoints: $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Soit $e_\omega' = E - (e_1 + e_2 + \ldots + e_n + \ldots)$. Si l'ensemble e_ω' est presque nul relativement à g, la série $\int_{e_1} |dg| + \int_{e_2} |dg| + \ldots + \int_{e_n} |dg| + \ldots$ est convergente et on peut grouper tous les termes de la série à partir d'un rang assez grand, de sorte que $[\int_{e_n} |dg| + \int_{e_{n+1}} |dg| + \ldots] < \varepsilon$. Alors le découpage $E = e_1 + e_2 + \ldots + e_{n-1} + [e_n + e_{n+1} + \ldots + e_\omega']$ vérifie la proposition.

Il reste comme dernier cas à étudier celui où l'ensemble e_ω' n'est pas presque nul relativement à la fonction g. e_ω' étant contenue dans tous les e', si l'on appelle ϱ_ω la borne supérieure des $\int_H |dg|$,

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

quand H est un sous-ensemble de e'_ω, tel que $\int_H |dg| < \varepsilon$, cette valeur ϱ_ω est inférieure ou égale à la valeur ϱ_{n-1}, borne supérieure des quantités analogues relatives à un ensemble e'_{n-1}. Or d'après les inégalités écrites plus haut $\varrho_{n-1} \leqslant \frac{n}{n-1} \int_{e_n} |dg|$. On obtient donc les inégalités

$$0 < \varrho_\omega < \varrho_{n-1} \leqslant \frac{n}{n-1} \int_{e_n} |dg| \leqslant 2 \int_{e_n} |dg|.$$

D'où on tire $\int_{e_n} |dg| > \frac{\varrho_\omega}{2}$, quel soit e_n. Or la série de terme général $\int_{e_n} |dg|$ est convergente: on ne peut pas avoir $\int_{e_n} |dg| > \frac{\varrho_\omega}{2}$.

L'ensemble e_ω, s'il existe, ne peut être que presque nul relativement à la fonction g et, dans tous les cas possibles, la proposition énoncée est vérifiée.

48. **Théorème.** *La valeur de la variation totale d'une fonction additive d'ensemble sans singularité g (définie sur une famille additive d'ensembles T) sur un sous-ensemble e (appartenant à la famille T) d'un ensemble E passe, quand e varie, par toute valeur intermédiaire entre son minimum qui est zéro et son maximum qui est $\int_E |dg|$.*

Soit, en effet, un ensemble E de la famille T et une valeur λ telle que $0 < \lambda < \int_E |dg|$. Il faut montrer qu'il existe un sous-ensemble e de E tel que $\int_E |dg| = \lambda$. Considérons la suite de nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$: dans cette suite, il y a un nombre n tel que $\frac{1}{n} < \lambda$. Ce nombre $\frac{1}{n}$ étant choisi, on peut décomposer l'ensemble E en un nombre fini de sous-ensembles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ tels que sur chacun a valeur de la variation totale de la fonction g est inférieure à $\frac{1}{n}$. Les ensembles $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$ forment une suite croissante: il en est de même des valeurs de la variation totale, dont la plus grande valeur est $\int_E |dg|$. La différence entre deux valeurs consécutives de cette suite est inférieure à $\frac{1}{n}$. Or il existe dans cette suite des nombres supérieurs à λ: le plus petit de ces nombres correspond à un certain ensemble e_n et on a $e_n \subset e$,

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

$$\int_{e_n} |dg| > \lambda > \int_{e_n} |dg| - \frac{1}{n}$$

Ces dernières inégalités s'écrivent aussi

$$\lambda < \int_{e_n} |dg| < \lambda + \frac{1}{n}$$

L'ensemble e_n appartient à la famille T: on reprend le raisonnement en remplaçant E par e_n et $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{n+1}$. On trouve ainsi un ensemble e_{n+1} appartenant à la famille T et tel que

$$e_{n+1} \subset e_n \subset E, \quad \int_{e_{n+1}} |dg| < \int_{e_n} |dg|, \qquad \lambda < \int_{e_{n+1}} |dg| < \lambda + \frac{1}{n+1}.$$

En poursuivant ainsi on forme une suite non croissante d'ensembles appartenant à la famille T: leur ensemble-limite e est compris dans E et appartient à la famille T. $\int_e |dg|$ étant la limite de la suite de nombres $\int_{e_n} |dg|$, $\int_{e_{n+1}} |dg|, \ldots$, on en conclut que $\int_e |dg| = \lambda$. Ainsi l'ensemble e, sous-ensemble de E, appartenant à la famille T, a une variation totale de la fonction g qui a une valeur quelconque (donnée à l'avance) comprise entre zéro et $\int_E |dg|$.

(La suite de ce Mémoire paraîtra dans le tome V de ce journal).

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki