ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits.

Par

Maurice Fréchet (Université de Strasbourg).

(Suite) [1].

Chapitre III.

Construction de familles d'ensembles qui sont closes par rapport à certaines opérations. Applications aux familles d'ensembles additives au sens restreint et aux familles d'ensembles additives au sens complet.

I°. Procédés généraux et applications.

46. Au lieu d'aborder directement la construction des familles additives d'ensembles, nous traiterons d'abord le problème plus général suivant: On suppose donnée une famille arbitraire H d'ensembles arbitraires et on se propose de construire une famille T d'ensembles comprenant la famille donnée H et close [2]) par rapport à certaines opérations $S, D, \ldots$

Nous distinguerons deux cas, qui sont les plus simples et les plus importants de tous les cas possibles et nous n'étudierons que ces deux cas.

1° Les opérations $S, D, \ldots$ ne sont applicables (ou on convient de ne les appliquer) qu'à des grouppements formés d un nombre fini d'ensembles.

2° Les opérations $S, D, \ldots$ ne sont applicables (ou on convient de ne les appliquer) qu'à un nombre fini ou à un groupement dénombrable d'ensembles

[1]) V. ce journal t. IV, p. 329—365.

[2]) Voir définition.

47. Plus petite famille close par rapport à certaines opérations $S, D, \ldots$ Plaçons nous d'abord dans le premier cas, où les opérations $S, D, \ldots$ ne portent que sur un nombre fini d'ensembles. Considérons la familles H_p constituée de la façon suivante: elle comprend la famille H et tout ensemble E qui est le dernier terme d'une *suite finie ordonnée* σ, telle que chaque ensemble G de σ appartient à H ou résulte d'une opération $S, D, \ldots$ effectuée sur des ensembles appartenant à H ou précédant G dans σ. La famille H_p ainsi formée comprend d'abord la famille H. D'autre part elle est close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ Supposons en effet que les ensembles, sur lesquels on effectue une des opérations $S, D, \ldots$, soient E_1 et E_2, appartenant à la famille H_p et soit K le résultat de cette opération. Chacun de deux ensembles E_1 et E_2 peut être considéré comme le dernier terme des suites respectives σ_1, σ_2, analogues à la suite σ définie plus haut. Considérons la suite σ, obtenue en plaçant à la suite des ensembles de la suite σ_1 ceux de la suite σ_2 et enfin après tous ceux-ci l'ensemble K. La suite σ' est formée comme la suite σ, définie plus haut, et l'ensemble K, dernier terme de la suite σ', appartient bien à H_p. Ainsi nous avons obtenu une solution du problème. C'est la plus simple; car toutes les familles T, closes par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ et comprenant la famille H comprennent toutes la famille H_p: cela résulte de la définition des suites finies σ.

La famille H_p jouit donc de ces propriétés: 1° elle comprend la famille H; 2° elle est close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$, 3° elle est comprise dans toute famille d'ensembles T comprenant la famille H et close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ En raison de ces propriétés, nous appelons famille H_p *la plus petite famille close par rapport aux opérations* $S, D, \ldots$ *et comprenant* H.

Plaçons nous maintenant dans le deuxième cas, où les opérations $S, D, \ldots$ peuvent porter sur les groupements formés d'une infinité dénombrable d'ensembles. Nous suivons une marche parallèle à la précédente et nous considérons la famille H_c, constitué ainsi: la famille H_c comprend la famille H et tout ensemble E qui est le dernier terme d'une *suite finie ou dénombrable bien ordonnée* Σ, telle que chaque ensemble G de Σ appartient à H ou résulte d'une des opérations $S, D, \ldots$, effectuée sur des ensembles appartenant à H ou précedant G dans Σ.

La famille H_c ainsi formée comprend d'abord la famille H,

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

D'autre part elle est close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$; c'est à dire que, si on effectue une des opérations $S, D, \ldots$ sur des ensembles de H_c, l'ensemble K qui en résulte appartient aussi à H_c. Soient, en effet, $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles de H_c sur lesquels on effectue l'opération. Chacun d'eux est le dernier terme de l'une des suites respectives $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ analogues à la suite Σ définie plus haut. La suite Σ', obtenue en plaçant à la suite des ensembles de Σ_1 ceux de Σ_2, etc,... et enfin à la suite de tous les ensembles appartenant aux suites $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ l'ensemble K, est dénombrable par sa construction même et bien ordonnée Il suffit de montrer que Σ'_1, suite quelconque tirée de Σ', a un premier élément. Les ensembles qui forment Σ'_1 proviennent de certaines des suites $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$: Soit Σ_i la première de ces suites. Dans Σ'_1 les éléments qui proviennent de Σ_i sont les premiers et Σ_i étant bien ordonnée, ils ont un premier élément, qui est précisément le premier élément de Σ'_1. La suite Σ' est donc analogue à la suite Σ définie plus haut et l'ensemble K, dernier terme de Σ', appartient à la famille H_c.

Considérons maintenant toutes les familles T, closes par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ et comprenant la famille H: elles comprennent toutes la famille H_c. Soit, en effet, un ensemble E appartenant à H_c: par hypothèse E est le dernier terme d'une suite Σ bien ordonnée. Supposons que E n'appartienne pas à T, il y a alors un certain sous ensemble Σ'' de Σ formé d'ensembles n'appartenant pas à la famille T. Σ'' est bien ordonnée (comme Σ) et admet un premier terme L, qu'on suppose ne pas appartenir à T. Mais, L résulte d'une des opérations $S, D, \ldots$, effectuée sur des ensembles qui appartiennent tous à la fois aux familles H_c et T, toutes deux closes par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ Par suite L appartient à la famille T: d'où une contradiction. Comme précédemment, nous appellerons la famille H_c la *plus petite famille close par rapport aux opérations* $S, D, \ldots$ *et comprenant* H.

49. **Procédés de construction dérivés des procédés généraux.** Revenons au cas où les opérations $S, D, \ldots$ ne s'appliquent qu'à un nombre fini d'ensembles et portons notre attention sur la famille H_p, plus petite famille close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ et comprenant la famille arbitraire d'ensembles arbitraire H. Tout ensemble E de H_p est le dernier terme d'une certaine suite finie d'ensembles σ obtenue comme il est indiqué plus haut (§ 47). Mais chacune des opérations, employée dans la construction de σ, et par

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

suite toutes ces opérations n'ont porté que sur un nombre fini d'ensembles appartenant à H. Soient $G_1, G_2, \ldots, G_q$ ces ensembles. La construction de E n'est pas modifiée, si on remplace la famille H par les q ensembles utilisés; E appartient à la plus petite famille comprenant $G_1, G_2, \ldots, G_q$ et close par rapport aux opérations S, $D, \ldots$ Nous désignerons cette famille par la notion $(G_1, G_2, \ldots, G_q)$. Par suite, si on appelle $H^{(q)}$ la famille composée pour une valeur de q déterminée de toutes les familles $(G_1, G_2, \ldots, G_q)$ formées à partir de q ensembles distincts de H, tout ensemble E de H_q appartient aussi à la famille $H + H^{(2)} + \ldots + H^{(q)} + \ldots$ Réciproquement tout ensemble E appartenant à $H + H^{(2)} + \ldots + H^{(q)} + \ldots$ appartient à l'une des familles, par exemple à $H^{(q)}$ et la construction qui introduit un ensemble E dans $H^{(q)}$ l'introduit aussi dans H_p. Finalement nous arrivons à l'identité:

$$H_p = H + H^{(2)} + \ldots + H^{(q)} + \ldots$$

La famille H_p est formée par la collection des familles $(G_1, G_2, \ldots G_q)$, qu'on obtient en appliquant le procédé de construction de H_p au cas où la famille H est remplacée par un groupement quelconque d'un nombre fini de ses éléments.

50. Dans le cas où les opérations $S, D, \ldots$ peuvent porter sur une infinité dénombrable d'ensembles, il existe un procédé analogue au précédent pour la construction de la plus petite famille H_c close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ et comprenant la famille arbitraire d'ensembles arbitraires H. En effet, si E est un ensemble de H_c, E est le dernier terme d'une certaine suite d'ensemble Σ, obtenue comme il est indiqué plus haut (§ 48). Les opérations, qui fournissent H, ne portent au total que sur une collection dénombrable d'ensembles de H constituée, par exemple, par les ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_p, \ldots$ La famille d'ensembles construite comme H_c, mais obtenue en partant des ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_p, \ldots$ et que l'on désignera par la notation $(F_1, F_2, \ldots, F_p, \ldots)$ comprend l'ensemble E et, par conséquent E appartient à la famille des ensembles appartenant à une quelconque des familles $(F_1, F_2, \ldots, F_q, \ldots)$. Réciproquement, par construction même tout ensemble de cette famille totale appartient à H_c

En définitive la famille H_c est identique à la collection de toutes les familles analogues à H_c construites en remplaçant H par une quelconque de ses sous-familles dénombrables.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

§ 1. **Application à la construction de la plus petite famille additive au sens restreint comprenant une famille d'ensembles donnée.** Une famille d'ensembles additive au sens restreint est close par rapport à l'addition et à soustraction de deux ensembles. Les opérations utilisées ne portent donc chacune que sur un nombre fini d'ensembles. La famille H_p répondant à la question sera formée des ensembles qui s'obtiennent chacun en combinant des ensembles de H au moyen d'un nombre fini d'additions et de soustractions. Pour étudier de plus près la structure de ces ensembles, rappelons que H_p est aussi formée des ensembles qui appartiennent à toutes les familles G_p, formées à partir de chaque groupement G d'un nombre fini d'ensembles de H exactement comme H_p à partir de H. On peut représenter ce fait par les égalités

$$H_p = \Sigma G_p \quad \text{avec} \quad H = \Sigma G.$$

On est ainsi ramené à résoudre le problème quand la famille H est remplacée par un groupement fini d'ensembles. Soit donc la famille G, formée par les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_q$; il s'agit de former la plus petite famille G_p additive au sens restreint et comprenant G. Un cas évident est celui où les ensemblembles de G sont disjoints: les seuls ensembles qu'on peut former à partir des premiers par un nombre fini d'additions et de soustractions sont les ensembles sommes d'un nombre fini de ces ensembles.

§ 2. **Définition des atomes.** Nous allons ramener le cas général à ce cas particulier en attachant à tout groupement fini G un groupement G_0, formé d'un nombre fini d'ensembles particuliers que nous appelons les *atomes* de la famille G. Ces atomes sont disjoints et tels que chacun d'eux peut être obtenu en effectuant sur les ensembles de G un nombre fini de soustractions et que chacun des ensembles de G est la somme d'un nombre fini d'entre eux. En remplaçant G par G_0, le problème est ramené au cas simple. Nous allons montrer que ces atomes existent en les construisant. Un premier procédé pour les obtenir consiste à opérer ainsi. Soient E_1, $E_2, \ldots, E_p$ les ensembles de G. On définit les ensembles

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_p, \quad E'_1 = E - E_1, \ldots, \quad E'_p = E - E_p$$

et on prend pour atomes les ensembles définis par l'égalité

$$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_h, j_{h+1}, \ldots j_p} = E_{i_1} . E_{i_2} \ldots E_{i_h} . E'_{j_{h+1}} \ldots E'_{j_p}$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

où $i_1, i_2, \ldots, i_h, j_{h+1}, \ldots j_p$ désigne une permutation quelconque des p premiers nombres entiers. La formule qui donne les atomes montre que chacun d'eux appartient au moins à l'un des ensembles E_1, $E_2, \ldots, E_p$; tout élément de ces ensembles appartient à un seul atome et chacun d'eux est égal à la somme d'un nombre fini d'atomes. Les atomes sont tous disjoints. Enfin, on peut écrire la formule qui les donne sous la forme

$$E - \alpha_{i_1, \ldots i_h, j_{h+1}, \ldots j_p} = (E - E_{i_1}) + (E - E_{i_2}) + \ldots + (E - E_{i_h}) + \\ + (E - E'_{j_{h+1}}) + \ldots + (E - E'_{j_p}).$$

Or $E - E'_{j_{h+1}} = E_{j_{h+1}} \ldots, E - E'_{j_p} = E_{j_p}$ et comme tous les atomes sont compris dans E, on a

$$\alpha_{i_1, \ldots i_h, j_{h+1}, \ldots j_p} = E - [(E - E_{i_1}) + \ldots + (E - E_{i_h}) + E_{j_{h+1}} + \ldots + E_{j_p}].$$

On voit par cette relation que chaque atome s'obtient par un nombre fini d'additions et de soustractions. Or on peut, à l'aide uniquement de la soustraction, remplacer la quantité entre crochets par des ensembles disjoints et ensuite, pour avoir l'atome, il suffit de les retrancher successivement. On obtient ainsi l'atome comme dernier terme d'une suite finie d'ensembles σ, où la seule opération utilisée est la soustraction.

Un autre moyen pour former la famille G_0 des atomes de la famille G consiste à procéder par récurrence: on résoud d'abord le problème pour les deux ensembles E_1, E_2, puis pour les trois ensembles E_1, E_2, E_3, et l'on continue ainsi. Pour résoudre le problème pour les deux ensembles E_1 et E_2, on les écrit ainsi

$$E_1 = (E_1 - E_2) + [E_1 - (E_1 - E_2)], \quad E_2 = (E_2 - E_1) + [E_2 - (E_2 - E_1)].$$

Posons

$$\alpha_1 = E_1 - E_2, \quad \alpha_2 = E_1 - (E_1 - E_2) = E_2 - (E_2 - E_1), \quad \alpha_3 = E_2 - E_1.$$

On obtient ainsi un nombre fini d'ensembles disjoints $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, qui s'obtiennent chacun en effectuant à partir de E_1 et E_2 un nombre fini de soustractions. Enfin E_1 et E_2 sont chacun somme d'un nombre fini des ensembles disjoints $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Supposons maintenant le problème résolu pour le groupement d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_{p-1}$, c'est-à-dire qu'on a obtenu un groupement d'ensembles α en nombre fini, disjoints, provenant uniquement de soustractions et tels que chacun des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_{p-1}$ soit la somme d'un nombre fini de

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

ces ensembles α. Cherchons maintenant à résoudre le problème de la construction des atomes du groupement d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_{p-1}, E_p$. Dans ce dessein décomposons chaque α en deux parties selon la formule $\alpha = [\alpha \quad E_p] + [\alpha - (\alpha - E_p)]$. Désignons par α' les ensembles tels que $(\alpha - E_p)$, par α'' ceux tels que $[\alpha - (\alpha \quad E_p)]$ et par α''' l'ensemble $E_p - E_1 - E_2 \ldots - E_{p-1}$. Les ensembles de la famille somme des familles $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ sont disjoints. Les α résultent du groupement d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_{p-1}$ par un nombre fini de soustractions comme pour obtenir les $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ à partir des α on ne s'est servi que de soustractions, les ensembles $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ s'obtiennent à partir des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_p$ par un nombre fini de soustractions. En outre les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_{p-1}$ étant chacun somme d'un nombre fini d'ensembles α, chacun d'eux est somme d'un nombre fini d'ensembles α' et α''. Quant à l'ensemble E_p, il est la somme de tous les ensembles α'' et de l'ensemble α'''.

On peut encore préciser davantage la notion d'atome par une troisième définition. En considérant, à nouveau, une famille G formée d'un nombre fini d'ensembles, on appelle atôme du groupement G relatif à l'élément A l'ensemble commun des ensembles de G qui comprennent l'élément A et sont disjoints des ensembles de G qui ne comprennent pas A. On désigne cet atome par α_A. α_A contient au moins un élément, à savoir A. Deux atomes sont nécessairement identiques ou disjoints. Tout d'abord si l'atome α_A contient l'élément B différent de A, α_A est identique à l'atôme α_B relatif à B. Car B, appartenant à α_A, est compris dans les ensembles du groupement G qui comprennent A et il n'appartient à aucun des ensembles de G qui ne comprennent pas A. Ceci posé, considérons deux atomes α_A et α_C: s'il ne sont pas disjoints, ils ont au moins un élément B et alors $\alpha_A = \alpha_B$, $\alpha_C = \alpha_B$: d'où résulte $\alpha_A = \alpha_C$. *Deux atomes sont donc nécessairement identiques ou disjoints.* Par suite tout élément d'un ensemble du groupement G appartient à un seul atome relatif au groupement G et tout ensemble de G est la somme d'un nombre fini d'atomes disjoints, car le groupement G étant formé d'un nombre fini d'ensembles, les atomes correspondants sont en nombre fini et leur définition même, où n'entrent qu'un produit et des soustractions, montre qu'on peut les obtenir à l'aide d'un nombre fini de soustractions [1]).

[1]) On a en effet $E_1 . E_2 = E_1 - (E_1 - E_2) = E_2 - (E_2 - E_1)$.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

En résumé, nous avons pu attacher à chaque groupement G d'un nombre fini d'ensembles une famille G_0 d'ensembles appelés atomes de G et jouissant des propriétés suivantes: 1° les atomes sont disjoints; 2° on peut les déduire de la famille G par un nombre fini de soustractions; 3° chaque ensemble de G est la somme d'un nombre fini de ces atomes

53. Revenons à la construction de la plus petite famille additive au sens restreint G_p comprenant la famille G Les atomes pouvant être considérés comme les derniers de suites σ analogues à celles définies plus haut (§ 47), mais où la seule opération utilisée est la soustraction, la famille G_0 des atomes appartient à la famille G_p et, par conséquent aussi, tout ensemble somme d'un nombre fini d'atomes. Réciproquement, tout ensemble de G_p est la somme d'un nombre fini d'atomes: il suffit, pour le voir, de remplacer dans la suite σ, dont cet ensemble est le dernier terme, tout ensemble de G par la suite $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_p} + \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_p}$ formée à l'aide des atomes qui constituent cet ensemble. On obtient ainsi une suite analogue à σ, mais formée uniquement à l'aide des atomes et, comme ceux ci sont disjoints, l'ensemble final est somme d'un nombre fini d'atomes.

En résumé, pour obtenir la famille G, on forme la famille G_0 des atomes et la famille cherchée est constituée par les ensembles qui sont chacun somme d'un nombre fini d'atomes.

54. Or nous savons (§ 51) que, pour obtenir la plus petite famille H_p additive au sens restreint et comprenant une famille quelconque d'ensembles H, il faut considérer toutes les familles G formées d'un nombre fini quelconque d'ensembles de la famille H et l'on a $H = \Sigma G \quad H_p = \Sigma G_p$ Comme nous savons construire les familles G_p à l'aide des atomes, nous savons former la famille H_p.

55. Système moléculaire. On peut encore déduire des considérations précédentes, un autre mode de construction de la famille H_p. Pour chaque groupement G d'un nombre fini d'ensembles de la famille H, nous avons formé un groupement G_0 d'ensembles atomes α de G. Nous appellerons la famille M des ensembles atomes α, qui correspondent chacun à l'un des groupements finis G d'ensembles de H le *système moléculaire attaché à la famille* H. D'après ce qui précède tout ensemble de M peut être obtenu par une suite finie de soustractions à partir d'un nombre fini d'ensembles de H. Il est clair que *la famille H_p sera formée par les ensambles qui sont chacun somme d'un nombre fini d'ensambles disjoints de la famille M.*

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

56. **Remarque.** La différence de deux ensembles de la famille M est égale à la somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints appartenant à M. En effet les ensembles de M appartenant à H_p, leur différence appartient à H_p et, par conséquent, est somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints de la famille M.

57. **Applications des procédés précédents à la construction de familles d'ensembles ponctuels additives au sens restreint.** Considérons d'abord des ensembles linéaires. On appelle *intervalle fermé* un ensemble de points dont les abscisses vérifient des inégalités de la forme $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ et nous désignons un tel intervalle par la notion I_f. On appelle *intervalle ouvert* un ensemble de points dont les abscisses vérifient des inégalités de la forme $\alpha < x < \beta$ et nous le désignons par la notation I_0. Enfin, nous appellerons *intervalle incomplet* un ensemble de points dont les abscisses vérifient des inégalités soit de la forme $\alpha < x \leqslant \beta$, soit de la forme $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$: dans le premier cas nous désignons l'intervalle par la notation I_d et dans le second par I_g.

Nous considérons un segment rectiligne ab, où la famille H d'ensembles linéaires que nous nous donnons est une famille d'intervalles (α, β) où $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$. Le problème à résoudre est de trouver la plus petite famille H_p additive au sens restreint comprenant la famille H donnée.

58. **Premier exemple.** Nous considérons d'abord le cas simple où les intervalles de la famille H sont des intervalles incomplets I_d représentés par des inégalités de la forme $a \leqslant x < \beta$, où β est un nombre rationnel inférieur ou égal à b. La famille des nombres rationnels compris entre a et b étant dénombrable la famille H est composée d'une infinité dénombrable d'ensembles. La différence de deux intervalles de H est un intervalle incomplet I_d de la forme $(a \leqslant)\beta \leqslant x < \gamma(\leqslant b)$ et la différence de deux intervalles de cette forme se compose au plus de deux intervalles de même forme. Par suite les atomes du système moléculaire sont des intervalles I_d de la forme précédente et tous ont des extrémités d'abscisses rationnelles en supposant pour simplifier a, b rationnels. En conséquence la famille H_p cherchée est constituée par tous les ensembles qui sont chacun la somme d'un nombre fini d'intervalles I_d disjoints à extrémités d'abscisses rationnelles.

Si les intervalles de H, restant incomplets à droite, ne sont plus assujettis à avoir des extrémités rationnelles, on voit de même que

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

la famille H_p est constituée par des ensembles dont chacun est la somme d'un nombre fini d'intervalles I_a disjoints.

58. **Deuxième exemple.** Un cas, un peu plus difficile, est celui où la famille H se compose des intervalles fermés I_β compris dans l'intervalle ab, c'est-à-dire des intervalles de la forme $(0 \leqslant) a \leqslant x \leqslant \beta$ $(\leqslant b)$. La difficulté ou plutôt la complication qui s'introduit consiste en ce qu'il intervient dans la construction des ensembles de la famille H_p des ensembles différents des intervalles, à savoir des points. Si on forme les atomes moléculaire de cette famille, on obtient tous les intervalles ouverts et tous les points appartenant à l'intervalle fermé ab et la famille H_p est constituée par des ensembles dont chacun est la somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints qui sont chacun un intervalle ouvert ou un point appartenant à l'intervalle fermé ab.

Si on astreint les intervalles de H à avotr des extrémités d'abscisses rationnelles, comme les seules opérations qui interviennent, l'addition et la soustraction de deux ensembles, n'introduisent pas d'abscisses irrationnelles, on obtient ce résultat: la plus petite famille H_p, additive au sens restreint et comprenant la famille H des intervalles fermés à abscisses rationnelles appartenant à l'intervalle ab, est constituée par les ensembles, dont chacun est la somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints qui sont chacun un intervalle ouvert à extrémités rationnelles ou un point d'abscisse rationnelle appartenant à l'intervalle ab.

§ 9. **Troisième exemple.** Passons aux cas d'ensembles ponctuels dans les espaces à deux, trois ou à un nombre fini n de dimensions. Nous raisonnerons pour l'espace à deux dimensions, et les résultats se généralisent immédiatement. Nous considérons les points d'un rectangle $ABCD$, après avoir supprimé les points des côtés BC et CD pour simplifier les raisonnements ultérieurs. Nous prendrons les axes parallèles aux côtés AC et AB avec les sens habituels. Nous prenons pour famille H la famille des rectangles jouissant de ces propriétés: 1° ils appartiennent au rectangle $ABCD$, 2° leurs côtés sont parallèles à ceux de $ABCD$; 3° On supprime les points de ces rectangles qui ont l'abscisse ou l'ordonnée maximum. Nous appellerons ces rectangles les rectangles incomplets $\overline{R}$: la différence de deux d'entre eux peut être considérée comme somme d'un nombre fini de rectangles $\overline{R}$. Par suite, les atomes de la famille H sont les rectangles incomplets $\overline{R}$. La famille H_p cherchée est donc for-

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

mée des ensembles dont chacun est la somme d'un nombre fini de rectangles $\overline{R}$ disjoints.

Si on astreint les ensembles de la famille H à avoir leurs coordonnées extrêmes rationnelles. les rectangles $\overline{R}$, qui servent à la construction de H_p, sont à extrémités de coordonnées rationnelles.

Pour l'éspace à un nombre fini n de dimensions, le raisonnement est identique: on prend la famille des parallélipipèdes incomplets vérifiant des inégalités de la forme:

$$\alpha_{i_1}^{(1)} \leqslant x_1 < \beta_{i_1}^{(1)},\ \alpha_{i_2}^{(2)} \leqslant x_2 < \beta_{i_2}^{(2)}, \ldots \alpha_{i_n}^{(n)} \leqslant x_n < \beta_{i_n}^{(n)}.$$

Appellons $\overline{P}$ les parallélipipèdes à n dimensions de cette sorte. La plus petite famille additive au sens restreint H_p, comprenant la famille H de tous les parallélipipèdes incomplets P appartenant à un certain parallélipipède P_Δ, est constituée par les ensembles qui sont chacun somme d'un nombre fini de parallélipipèdes P appartenant à $\overline{P}_\Delta$.

60. **Quatrième exemple.** Passons enfin à l'espèce à une infinité de coordonnées [1]). Nous appelons alors intervalle incomplet I l'ensemble des points vérifiant les inégalités

$$a_1 \leqslant x_1 < b_1,\ a_2 \leqslant x_2 < b_2, \ldots,\ a_n \leqslant x_n < b_n,\ a_{n+1} \leqslant x_{n+1} < b_{n+1}, \ldots$$

et nous dirons que l'intervalle incomplet I est *inscrit d'ordre n* au plus dans l'intervalle incomplet J défini par les inégalités

$$A_1 \leqslant x_1 < B_1,\ A_2 \leqslant x_2 < B_2, \ldots,\ A_n \leqslant x_n < B_n,\ A_{n+1} \leqslant x_{n+1} < B_{n+1}, \ldots$$

si l'on a

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 \leqslant a_1 < b_1 \leqslant B_1,\ A_2 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant B_2, \ldots,\ A_n \leqslant a_n < b_n \leqslant B_n, \\ \qquad a_{n+1} = A_{n+1},\ b_{n+1} = B_{n+1},\ a_{n+2} = A_{n+2},\ b_{n+2} = A_{n+2}, \ldots \end{array}\right.$$

Nous prenons pour famille H la famille des intervalles incomplets $\overline{I}$ inscrits dans l'intervalle J et nous cherchons la plus petite famille additive au sens restreint H_p comprenant cette famille H. Ce problème se ramène facilement au précédent. En effet, considérons deux intervalles incomplets I_1 et I_2 inscrits dans J, I_1 étant inscrit d'ordre m_1 et I_2 d'ordre m_2. Soit q le plus grand des

[1]) L'espace à une infinité de coordonnées est la généralisation de l'espace à n dimensions: on convient d'appeler point toute suite de nombres, infinie dénombrable et bien ordonnée, par exemple, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

nombres m_1 et m_2. les limites des coordonnées seront les mêmes pour $\overline{I_1}$, $\overline{I_2}$ et $\overline{J}$ à partir du rang $q+1$ Tout se passera alors comme pour des intervalles P dans l'espace à q coordonnées: les ensembles $\overline{I_1}$ et $\overline{I_2}$ sont chacun la somme d'un nombre fini d'intervalles $\overline{P}$ disjoints. En complétant la suite des coordonnées on voit que la différence de deux intervalles $\overline{I_1}$ et $\overline{I_2}$ se compose d'un nombre fini d'intervalles incomplets $\overline{I}$ inscrits dans $\overline{J}$. Les atomes du système moléculaire sont formés chacun d'un nombre fini d'intervalles incomplets disjoints $\overline{I}$ inscrits dans $\overline{J}$ et la famille H_p est constituée par des ensembles qui sont chacun somme d'un nombre fini d'intervalles incomplets disjoints inscrits dans J.

Remarque Les exemples que nous venons de traiter et l'intervention des intervalles incomplets ou inscrits peuvent paraitre assez artificiels. Mais ils nous permettront de simplifier souvent les raisonnements par la suite.

60. **Application à la construction de la plus petite famille additive au sens complet comprenant une famille d'ensembles donnée.** Nous avons ou (§ 50) que, quand les opérations S, D,... peuvent porter sur une infinité dénombrable d'ensembles, la plus petite famille H_c, close par rapport aux opérations S, D,... et comprenant la famille H donnée, est identique à la collection de toutes les familles analogues à H_c construites en remplaçant H par une quelconque de ses sous familles dénombrables. Dire que l'on cherche la plus petite famille additive au séns complet, c'est dire que les opérations S, D,... sont la soustraction de deux ensembles et l'addition d'un groupement dénombrable d'ensembles. Le problème se ramène donc à la construction de la plus petite famille additive au sens complet N_c comprenant une famille dénombrable N d'ensembles extraits de la famille H donnée et l'on a $H = \Sigma N$ et $H_c = \Sigma N_c$.

Or, N_c est aussi la plus petite famille additive au sens complet comprenant la famille N_p, la plus petite famille additive au sens restreint comprenant la famille N; et N étant formée d'un groupement dénombrable d'ensembles, il en est de même de N_p. Nous sommes amenés à construire la plus petite famille additive au sens complet comprenant une famille dénombrable d'ensembles additive au sens restreint. On essaie de généraliser le procédé de construction à l'aide des atomes et, en raison de l'additivité au sens restreint de N_p, la définition de l'atome relatif à un élément A d'un ensemble de N_p peut s'énoncer ainsi: on appelle atome de la famille N_p relatif

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

à un élément A l'ensemble α_A commun à tous les ensembles de N_p qui contient l'élément A. Les atomes ainsi définis sont nécessairement identiques ou disjoints: le raisonnement fait plus haut (§ 52) subsiste, puisqu'en raison de l'additivité de la famille N_p l'atome relatif à un élément est disjoint des ensembles qui ne comprennent pas cet élément. Tout élément d'un ensemble de la famille N_p appartient à un atome et à un seul et tout ensemble de N_p est la somme d'une certaine famille d'atomes disjoints. Mais la difficulté dans ce cas consiste en ce que ces atomes peuvent former un groupement non dénombrable. Les ensembles de la famille N appartenant à N_p, chacun d'eux est aussi la somme d'une certaine famille (dénombrable ou non) d'atomes disjoints. Les ensembles de la famille N_c sont les derniers termes de suites bien ordonnées Σ, obtenues à partir d'ensembles de N à l'aide de la soustraction et de l'addition. Ces opérations, appliquées à des ensembles sommes d'atomes disjoints, ne peuvent donner que des sommes d'atomes disjoints. On n'a pas là un procédé de construction, mais une propriété de la famille H_c.

61. **Remarque.** Si la famille H contient comme ensembles particuliers les éléments de ses ensembles, ces éléments seront atomes de la famille et alors la propriété précédente n'apporte rien de nouveau. C'est p. ex. le cas où l'on cherche à construire la plus petite famille H_c additive au sens complet comprenant la famille H des intervalles fermés appartenant à un intervalle fermé ab.

62. Au cas où la famille des tous les atomes relatifs à l'une quelconque des familles N_p est dénombrable, on peut généraliser le système moléculaire. On appelle encore système moléculaire de H l'ensemble de tous les atomes que l'on peut former à partir de toutes les familles d'ensembles dénombrables N, que l'on peut extraire de la famille H donnée. Tout ensemble somme d'une famille dénombrable d'atomes appartient alors à la famille H_c. Comme les atomes appartiennent aussi à la famille H_c, la plus petite famille additive au sens complet comprenant la famille donnée est encore constituée par les ensembles qui sont somme d'un groupement fini ou dénombrable d'atomes disjoints extraits du système moléculaire.

Neanmoins, en général, la construction de la plus petite famille H_c additive au sens complet comprenant une famille donnée H d'ensembles est assez compliquée. On va essayer de mettre de l'ordre dans les ensembles qui constituent la famille H_c et de les assujettir

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

à un certain classement. Aussi nous allons reprendre plus loin (p. 221) l'étude des familles closes par rapport à certaines opérations S, D,... et comprenant une famille d'ensembles donnée, pour en déduire les procédés qui mettent en évidence un certain classement des ensembles de la famille cherchée.

Application. Dans le cas où les éléments des ensembles de H appartiennent à une droite (on a un espace à un nombre fini de dimensions), on voit que la plus petite famille additive au sens complet H_c comprenant la famille des sous-intervalles d'un intervalle fixe I peut être construite de la manière suivante: Chaque ensemble E de H est le dernier terme d'une suite dénombrable bien ordonnée σ dont chaque terme est un sous-intervalle de I ou s'obtient comme différence ou comme somme d'un ensemble dénombrable de termes de σ précédant E. En d'autres termes, *la plus petite famille additive au sens complet H_c comprenant les intervalles n'est autre que la famille des ensembles dits „bien définis" de M. Borel.*

Au point de vue de la théorie de la mesure, il est important de remarquer, qu'on peut prendre pour la famille H qui donne naissance à H_c une famille plus étroite que celle de tous les sous-intervalles de T: La famille H_c des ensembles bien définis est aussi la plus petite famille additive au sens complet comprenant les sous intervalles de I obtenus en divisant I en 2, 4, 8,..., 2^n,... parties égales. Ou plus généralement. si on considère un ensemble dénombrable de points dense sur I et la famille H des sous-intervalles ayant une origine commune avec I et dont l'extrémité appartient à cet ensemble de points, la famille H_c des ensembles bien définis est la plus petite famille additive au sens complet comprenant cette famille H. Notons que cette famille H est dénombrable. Si on astreint les intervalles de H à être incomplets à droite, sauf celui qui coïncide avec I on peut noter que H_c sera aussi la plus petite famille additive au sens complet comprenant la famille dénombrable et additive au sens restreint H_p constituée des ensembles qui sont chacun somme d'un nombre fini de sous intervalles de I limités à deux points de E et incomplets à droite sauf celui qui coincide avec I.

Toutes ces remarques seraient très utiles pour arriver à la construction de fonctions additives d'ensembles linéaires les plus générales sur la famille H_c. Mais, elles ont surtout ici l'avantage de conduire à des considérations analogues pour l'espace à une infinité de dimensions.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Dans celui-ci, il y a avantage à ramener la solution des problèmes à celle de problèmes analogues dans l'espace à un nombre fini de dimensions. C'est pourquoi la considération des sous-intervalles inscrits á un intervalle fixe I peut rendre de grands services

Si l'on désigne encore par H_e la plus petite famille additive au sens complet et comprenant les sous-intervalles (fermés) d'un intervalle I, nous allons montrer que H_e est aussi la plus petite famille additive au sens complet comprenant la famille H des intervalles *inscrits* à I. La conclusion subsiste si au lieu de ranger dans H tous les intervalles inscrits à I on n'y retient que ceux dont les extrémités droites coïncident avec celles de I et dont les extrémités gauches sont obtenues en plaçant sur chaque côté de I un ensemble de points dénombrable dense.

Il suffit de prouver la seconde proposition. On suppose donc qu'entre A_n et B_n, on ait placé un ensemble dénombrable partout dense:

$$C_n^0 = B_n,\ C_n^1 = A_n,\ C_n^2,\ C_n^3, \ldots$$

Et on considère la famille H des ensembles

$$A_1 \leqslant x_1 < C_1^{p_1} (\text{ou } \leqslant B_1),\ A_n \leqslant x_n < C_2^{p_2} (\text{ou } \leqslant B_n), \ldots,$$

$$A_r \leqslant x_r < C_r^{p_r} (\text{ou } = B_r),\ A_{r+1} \leqslant x_{r+1} \leqslant B_{r+1},\ A_{r+2} \leqslant x_{r+2} \leqslant B_{r+2},$$

ensemble que nous pourrons désigner par $I_{p_1 p_2 \ldots p_r}$ où r est un entier variable arbitraire. La plus petite famille additive H_e au sens complet comprenant H, contiendra aussi le système moléculaire $\mathfrak{M}$ de H et la plus petite famille additive au sens restreint H_r comprenant H.

Pour former H_r nous considérons donc d'abord I et un nombre fini de ses sous-intervalles et nous en formons les atomes: ce seront évidemment des intervalles incomplets inscrits à I définis par des inégalités de la forme:

$$(1)\quad C_1^{q_1} \leqslant x_1 < C_1^{p_1} (\text{ou } \leqslant B_1):\ C_2^{q_2} \leqslant x_2 < C_2^{p_2} (\text{ou } B_2);\ldots\ C_r^{q_r} \leqslant x_r < C_r^{p_r} (\text{ou } B_r)$$

$$A_{r+1} \leqslant x_{r+1} \leqslant B_{r+1},\ A_{r+2} \leqslant x_{r+2} \leqslant B_{r+2}, \ldots$$

Et la famille $\mathfrak{M}$ des atomes des différents groupements finis d'ensembles de H est constituée par la famille de tous ces sous-intervalles incomplets inscrits à I. Comme chacun peut être désigné par un nombre fini d'indices entiers, $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots p_r, q_r$ la famille $\mathfrak{M}$ est, comme la famille H, dénombrable. Enfin, la famille H_r est

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

constituée par les ensembles qui sont chacun somme d'un nombre fini d'ensembles de $\mathfrak{M}$ Elle est donc aussi dénombrable.

Passons à la famille H_c. Il est manifeste qu'elle comprendra tous les intervalles incomplets inscrits à J, que les extrémités appartiennent aux ensembles dénombrables donnés, ou non. Car, si

$$(2) \qquad a_1 \leqslant x_1 < b_1, \ldots a_r \leqslant x_r < b_r, \; A_{r+1} \leqslant x_{r+1} \leqslant B_{r+1},$$
$$A_{r+2} \leqslant x_{r+2} \leqslant B_{r+2}, \ldots$$

est un de ces intervalles, il est évidemment l'ensemble limite de la suite d'intervalles de $\mathfrak{M}$ obtenus en prenant pour $C_1^{q_1}, C_2^{q_2}, \ldots C_r^{q_r}$, $C_1^{p_1}, \ldots C_r^{p_r}$ les nombres rationnels qui sont les valeurs approchées de $a_1, \ldots a_r, b_1, \ldots b_r$ à $\frac{1}{n}$ près par défaut et donnant à n les valeurs $1, 2, \ldots$

Enfin, H_c comprendra tous les sous intervalles incomplets de I inscrits on non. Car si

$$(3) \qquad a_1 \leqslant x_1 < b_1, \ldots a_r \leqslant x_r < b_r, \; b_{r+1} \leqslant x_{r+1} < b_{r+1}, \ldots$$

est l'un deux, il est l ensemble limite de l'intervalle (2), lorsque r croît indéfiniment. Un passage à la limite aussi simple montrerait que H_c comprend les sous intervalles fermés de I.

Ainsi la plus petite famille additive au sens complet comprenant tous les sous-intervalles de I est aussi la plus petite famille additive au sens complet comprenant la famille *dénombrable* H de sous-intervalles incomplets inscrits dans I définie plus haut.

II°. Procédés de construction qui mettent en évidence un certain classement des ensembles d'une famille additive.

64. Nous reprenons la construction de la plus petite famille d'ensembles H_c close par rapp rt aux opérations $S, D, \ldots$ et contenant une famille arbitraire H d'ensembles arbitraires: nous allons essayer de ranger les ensembles de cette famille H_c en une suite bien ordonnée unique de familles d'ensembles, suite qui mettra en évidence la degré de complexité de chacun de ces ensembles. Nous nous servons dans ce dessein d'une famille d'ensembles déduite d'une façon particulière d'une famille quelconque d'ensembles K à l'aide des opérations $S, D, \ldots$ et que nous désignons par la notation UK.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

65. La famille UK. Supposons que les opérations $S, D, \ldots$, considérées en elle même, puissent etre rangées en une suite bien ordonnée t: c'est, par exemple, ce qui aura lieu quand ces opérations sont en nombre fini. Nous considérons alors une famille d'ensembles K et nous formons successivement les familles K, puis SK (obtenue en adjoignant aux ensembles de K ceux obtenus en épuisant les effets de l'opération S sur les ensembles de K), puis DSK et ainsi de suite. On forme ainsi une suite t' et tout terme L de t' s'obtient de la façon suivante: on commence par former la famille M des ensembles appartenant aux familles précédant L dans la suite t' et on adjoint à cette famille M les ensembles obtenus en appliquant l'opération P de la suite t qui correspond à L, à tout groupement convenable d'ensembles extrait de la famille M. On obtient ainsi une suite bien ordonnée t' semblable à la suite t. On appelle finalement *famille* UK la famille des ensembles qui appartiennent à une quelconque des familles de t.

D'après la construction même des termes de la suite t', la famille UK comprend la famille K.

Si la famille K appartient à une famille T comprenant la famille H et close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$, il en est de même de la famille UK. En effet, ce fait à lieu pour chacune des familles termes de la suite t'. Tout d'abord, par hypothèse, ce fait a lieu pour le premier terme de la suite t' qui est K. Si tous les termes de t' n'appartenaient pas à la famille T, il y aurait dans t' un premier terme L n'appartenant pas à T. Or, la famille L est composée de tous les ensembles appartenant à la famille M, composée de la somme de toutes les familles précédant L dans t', et des ensembles obtenus en appliquant une opération P de la suite t aux ensembles de M. Et la famille M est comprise dans T comme étant formée de familles d'ensembles qui appartiennent à la famille T. La famille T étant close par rapport aux opérations $S, D, \ldots, P, \ldots$ l'application de l'opération P, correspondant dans la suite T au terme L de la suite t', à des groupements convenables extraits de M donnera des ensembles appartenant à T. La famille L appartiendrait donc à T.

En particulier, si une famille d'ensembles K appartient à la plus petite famille d'ensembles close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ formant une suite bien ordonnée t, et comprenant une famille d'ensembles donnée H, il en est de même de la famille UK.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Une de ces familles K étant la famille H, la famille UH appartient donc à la plus petite famille d'ensembles close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ formant une suite bien ordonnée t, et comprenant la famille H.

Les familles UK jouissent aussi de la propriété suivante: La condition nécessaire et suffisante pour que la famille d'ensembles K soit close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ (formant une suite bien ordonnée T), est que l'on ait $UK = K$.

En effet, si la famille K est close par rapport aux opérations $S, D, \ldots, P, \ldots$ de la suite t, chaque terme de la suite bien ordonnée t' est identique à K et par suite $UK = K$. Réciproquement, soit $UK = K$; chaque terme de la suite bien ordonnée t' comprenant tous les précédents, tous les termes de t' sont identiques à K. Ce qui prouve que l'application d'une quelconque des opérations de la suite t appliquée à la famille K donne des ensembles appartenant à K. La famille K est donc bien close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$

Connaissant les propriétés des familles UK, nous allons utiliser ces familles pour la construction des familles d'ensembles.

66. **Formation de la plus petite famille d'ensembles T comprenant une famille d'ensembles donnée, H et close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$** (ces opérations $S, D, \ldots$ pouvant encore être rangées en une suite bien ordonnée t). Ce problème se résoud grâce à une suite Σ de familles d'ensembles qu'on obtient de la façon suivante. On forme d'abord une suite Σ_1, qui est formée de familles d'ensembles, qui a pour premier terme H et qui est semblable à la suite des nombres transfinis. Ayant défini tous ceux de ses termes de rang inférieur a β, le terme de rang s'obtiendra ainsi: on forme la famille N_β de tous les ensembles appartenant à Σ_1 de rang inférieur à β; par définition UN_β sera le terme de Σ_1 de rang β. Si les termes de Σ_1 tous ne sont pas distincts, ils sont distincts jusqu'à un certain rang et identiques ensuite. En effet, si deux termes de rangs différents $\alpha < \beta$ sont identiques, il en est de même de tous les termes intermédiaires car la suite Σ_1 est une suite monotone non décroissante de familles d'ensembles. Il en est de même de tous ceux qui suivent car d'après ce qui précède $N_\beta = UN_\beta$ et les termes qui suivent dans Σ_1 sont identiques au terme de rang β.

Par définition Σ sera Σ_1, si Σ_1 a ses termes distincts et, dans

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

le cas contraire, Σ sera le segment de Σ_1 après lequel les termes de Σ_1 sont identiques au dernier terme de Σ.

La suite Σ résoud le problème posé: la plus petite famille T close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ (classées en une suite bien ordonnée t et comprenant une famille d'ensembles donnée H est composée des ensembles appartenant à un quelconque des termes de la suite bien ordonnée Σ construite à partir de la famille H par l'intermédiaire de l'opération U et cette construction offre en outre un classement des ensembles qui la constituent

$$T = H + UH + UUH + \ldots$$

En effet, il résulte de ce qui précède que la famille T_1, constituée des ensembles appartenant aux termes de Σ, appartient à T. D'autre part, on a évidemment $UT_1 = T_1$, donc T_1 est close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ et comprend H, donc T comprend T_1 et par suite T_1 est identique à T.

67. **Applications.** On applique ce procédé de construction de la plus petite famille T close par rapport aux opérations $S, D, \ldots$ et comprenant une famille d'ensembles donnée H, precédé qui met en évidence un certain classement des ensembles, aux mêmes cas que précédem ment. Ces cas sont les suivants: 1° Les opérations $S, D, \ldots$ sont l'addition de deux ensembles et la soustraction de deux ensembles. On obtient ainsi la plus petite famille H_p additive au sens restreint comprenant la famille d'ensembles donnée H. 2° Les opérations $S, D, \ldots$ sont l'addition de deux ensembles, la soustraction de deux ensembles et le passage à la limite (s'il existe des suites convergentes d'ensembles). L'opération UK consiste alors à adjoindre à une famille K d'ensembles les différences de deux ensembles quelconques de K, puis à la famille K_1 ainsi formée les sommes de deux ensembles quelconques de K_1, puis à la famille K_2 ainsi formée les ensembles limites de suites convergentes d'ensembles extraites de K_2. On obtient dans ce cas la plus petite famille H_c additive au sens complet et comprenant la famille donnée H.

68. **Remarque.** Nous avons obtenu plus haut (§ 56) une construction différente pour les ensembles de la famille H_p. Cette construction est plus pratique que celle qui vient d'etre obtenue, car elle permet la considération des atomes et du système moléculaire et c'est à elle qu'on s'adressera de préférence. Au contraire la construction actuelle est plus intéressante en ce qui concerne H_c.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

69. **Autre mode de formation de la plus petite famille additive au sens complet H_c comprenant une famille d'ensembles donnée H.** La famille H_c, additive au sens complet est à fortiori additive au sens restreint: elle comprend donc la plus petite famille additive au sens restreint H_r comprenant la famille H. Nous sommes donc ramenés pour construire H_c à construire la plus petite famille additive au sens complet comprenant une famille additive au sens restreint donnée H_r. On forme d'abord UH_r: mais l'addition ou la soustraction de deux ensembles de H_r donnent des ensembles appartenant encore à H_r. Les seuls ensembles nouveaux apportés par l'opération CH_r sont les ensembles limites de suites convergentes extraites de H_r. Ces ensembles limites forment la famille LH_r. Les deux premiers termes de la suite de familles qui représente H_c sont donc $H_r + LH_r$. Pour continuer il faudrait appliquer l'opération U aux ensembles de la famille $H_r + LH_r$. Or, nous avons vu que, si les suites d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ et $G_1, G_2, \ldots$ sont convergentes et tendent respectivement vers les ensembles E et G, les suites $E_1 + G_1$, $E_2 + G_2, \ldots$ et $E_1 - G_1, E_2 - G_2, \ldots$ sont convergentes et tendent respectivement vers les ensembles $E - G$ et $E - G$. Par conséquent, la famille $H_r + LH_r$ est encore additive au sens restreint et les seuls ensembles nouveaux apportés par l'application de l'opération U à $H_r + LH_r$ sont les ensembles limites des suites convergentes d'ensembles extraites de la famille $H_r + LH_r$. Pour avoir tous ces ensembles on ajoute à $H_r + HL_r$ la famille LLH_r formée par les ensembles limites des suites convergentes d'ensembles extraites de LH_r la famille $H_r + LH_r + LLH_r$ est encore additive au sens restreint et on continue de la même façon. Finalement la famille H_c est représentée par la suite

$$H_c = H_r + LH_r + LLH_r + \ldots$$

où chaque terme est la famille des ensembles limites de suites convergentes d'ensembles extraites de la famille précédant le terme considéré dans la suite.

70. **Remarque.** Si l'on part d'une famille H_r additive au sens restreint, on voit que cette formule permet de répartir les ensembles de la famille H_c en catégories, en classes de plus en plus complexes. On pourra dire en étendant aux ensembles abstraits la terminologie de Baire que les ensembles de H_r sont de classe 0, ceux de LH_r de classe 1, ceux de LLH_r de classe 2, etc., et on pourra

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

ranger tous les ensembles de H_e en une suite de classes d'ensembles numérotées au moyen des nombres transfinis. Il est évident que plus le rang d'une classe est élevé, plus est complexe la construction des ensembles de cette classe (ou tout au moins de ceux qui n'appartiennent pas à une classe inférieure).

Si en outre les ensembles de H_r sont simples, le rang de la classe marquera le degré de complexité des ensembles qui la composent; mais, si cette condition n'est pas remplie, il n'indiquera que la complexité d'une certaine construction de ces ensembles.

71. **Exemples.** Construire la plus petite famille H_r additive au sens complet et comprenant la famille H des intervalles fermés compris dans un intervalle fermé ab. Nous avons déjà montré qu'on obtient H_r comme la famille constituée des ensembles obtenus chacun comme dernier terme d'une suite dénombrable bien ordonnée d'additions, soustractions et passages à la limite effectués à partir d'intervalles fermés. C'est la définition même des ensembles mesurables (B) ou „bien définis".

Ainsi la famille des ensembles „bien définis" de M. Borel n'est autre que la plus petite famille additive au sens complet comprenant la famille des intervalles fermés.

(Nous verrons que la famille des ensembles mesurables au sens de Lebesgue s'obtient en faisant intervenir l'idée de fonction d'ensemble, (en l'espèce, la mesure)).

Les remarques précédentes permettent de classes les ensembles bien définis par ordre de complexité. On obtiendra, en effet, d'après ce qui précède, tous les ensembles „bien définis" de la façon suivante.

On forme d'abord la plus petite famille additive au sens restreint H_r comprenant la famille H des intervalles fermés: elle est composée des ensembles qui sont chacun somme d'un nombre fini d'intervalles ouverts et de points. Ces ensembles pourrant être dits de classe 1; puis on formera la classe 2 en adjoignant à cette classe les ensembles qui sont limites de suites convergentes d'ensembles de classe 1, etc.. Ayant formé les ensembles de classes inférieures à un nombre transfini α, on formera la famille de classe α en adjoignant à ces classes les ensembles limites de suites convergentes d'ensembles de classe inférieure à α, etc...

On peut, si l'on veut, préciser la nature de certains ensembles linéaires bien définis. On sait, p. ex. (et on s'en assure facilement) que les ensembles dénombrables de points sont bien définis; dans

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

la terminologie précédente, ils sont évidemment de classe 2. On sait aussi que les ensembles fermés sont bien définis. On peut développer des considérations analogues dans l'espace à n dimensions et même dans l'espace à une infinité de coordonnées.

Chapitre IV.

Construction de fonctions additives d'ensembles.

I° Procédés de construction.

72. **Additivité au sens restreint.** Après avoir construit des familles d'ensembles additives soit au sens restreint, soit au sens complet et comprenant une famille arbitraire d'ensembles, on est amené à chercher à résoudre des problèmes analogues concernant les fonctions additives d'ensembles.

Le premier problème qui se pose est le suivant: étant données les valeurs d'nne fonction f sur une famille d'ensembles H, en déduire une fonction additive au sens restreint sur uue famille T, additive au sens restreint, comprenant la famille H, cette fonction prenant sur H les valeurs données. Il est évident que le problème n'est possible que si f est additive au sens restreint sur H. Des exemples simples font voir qu'il est impossible de trouver une solution générale unique à ce problème et qu'on ne peut le résoudre que dans certains cas, ou sous certaines conditions. Si le problème est possible pour T, il est possible pour la plus petite H_r des familles telles que T.

73. Supposons, par exemple, que les ensembles de H soient tous disjoints: alors H_r est la famille des ensembles qui sont chacun somme d'un nombre fini d'ensembles de H et la solution unique du problème consiste à prendre pour valeur de la fonction sur tout ensemble de H_r la somme des valeurs de la fonction sur les ensembles de H qui constituent cet ensemble de H_r. Il n'en est plus ne de même si p. ex. dans la famille H les deux ensembles E_1 et E_2 sont plus disjoints alors que tous les autres couples d'ensembles le sont. Dans la construction de H_r figurent alors les ensembles disjoints $F_1 = E_1 - E_2$, $F_2 = E_1 . E_2$, $F_3 = E_2 - F_2$. Mais on ne connait pas la valeur de la fonction sur ces trois ensembles et le problème admet une infinité de solutions obtenues en prenant arbitrairement la valeur de la fonction f sur F_2 et en prenant $f(F_1) = f(E_1) - f(F_2)$, $f(F_3) = f(E_2) \quad f(F_2)$, ce qui ramène au cas précédent.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

74. L'indétermination dans le second exemple montre qu'il est impossible de concevoir une solution générale unique du problème, comme il est posé. Un problème, dont on peut pousser la solution, est celui de la mesure, mais il faut pour cela résoudre le problème préliminaire de trouver une fonction d'ensembles additive au sens restreint sur la plus petite famille additive au sens restreint H_r, comprenant la famille des intervalles rationnels inscrits dans un intervalle J. et qui soit invariable dans toute translation. C'est cette dernière condition qui assure au problème une solution unique.

75. **Additivité au sens complet.** On se heurte, à fortiori, aux mêmes difficultés si on essaie de résoudre ce problème: *étant données les valeurs d'une fonction sur une famille d'ensembles H, en déduire une fonction additive au sens complet sur une famille additive au sens complet T comprenant H, cette fonction prenant sur H les valeurs données.* Mais, si la famille H est additive au sens restreint, la solution, *si elle existe*, est unique, tout au moins sur la plus petite H_c des familles T En effet, on a vu (§ 70) que

$$H_c = H_r + LH_r + LLH_r + \dots$$

La fonction cherchée f est connue sur H_r; supposons la connue sur H_r, LH_r, LLH_r,... et généralement sur toutes les familles de cette suite de rang inférieur au nombre fini ou transfini α. La famille N composée des ensembles de ces familles de rang inférieur à α est additive au sens restreint (Cf. § 70). Si E est un ensemble appartenant à la famille de rang α, E est la limite d'une suite convergente d'ensembles E_n de N. Si la fonction cherchée existe sur T, elle existe sur H_c et elle y est additive au sens complet; elle est donc continue et la suite des nombres $f(E_n)$ doit avoir une limite unique égale à $f(E)$. Les nombres $f(E_n)$ étant, par hypothèse, connus et convergeant vers une limite unique, $f(E)$ est parfaitement déterminé f, étant connue sur H_r, est donc connue sur tout ensemble E de H_c. Il reste à traiter l question d'existence et c'est cette question que nous allons étudier.

76. **Conditions d'existence d'une solution du problème précédent** La fonction f que l'on se donne, doit satisfaire à certaines conditions nécessaires. La fonction cherchée est, en effet, additive au sens complet et elle coïncide sur H_r avec la fonction f donnée. Une fonction additive au sens complet étant bornée (Cf. § 42), la

fonction f doit satisfaire *sur la famille* H_r à ces deux conditions: 1° elle y est bornée, 2° elle y est additive au sens complet.

Si H_r était additive au sens complet, la deuxième condition entrainerait la première. Mais nous supposons seulement que H_r est additive au sens restreint et dans ce cas les deux conditions sont indépendantes. On s'en rend compte en prenant pour exemple la famille H_r des ensembles dont chacun est composé d'un nombre fini de points d'abscisses entières et en prenant pour valeur de la fonction la somme des abscisses de ces points

Pour faciliter l'étude, on la ramène au cas où la fonction donnée est monotone en mettant la fonction f sous la forme canonique $f = \varphi - \psi$ [1]). Les fonctions φ et ψ sont monotones positives et satisfont encore aux conditons précédentes [1]). Si l'on suppose qu'on trouve des fonctions φ' et ψ' additives au sens complet respectivement sur deux familles d'ensembles T_1 et T_2, additives au sens complet et comprenant la famille donnée H_r, et coïcidant respectivement avec φ et ψ sur H_r, la fonction $\varphi' - \psi'$ sera additive au sens complet sur la famille T des ensembles communs à T_1 et T_2 et coïncidera avec f sur H_r. T est évidemment additive au sens complet et comprend H_r. Le problème sera résolu On est donc ramené au problème suivant: étant donnée une fonction φ non négative, bornée et additive au sens complet sur la famille H_r, additive au sens restreint, déterminer une fonction φ' non négative et additive au sens complet sur une famille T additive au sens complet comprenant la famille H_r, sur laquelle $\varphi' = \varphi$.

77. Prolongement d'une fonction. Toute famille T, additive au sens complet et comprenant H_r comprend les ensembles limites de suites convergentes d'ensembles extraites de H_r. Parmi ces ensembles limites les ensembles limites de suites monotones se prêtent particulièrement au prolongement de φ [2]). Appellons S la famille

[1]) Il s'agit ici de la forme canonique de f relative à la famille additive un sens restreint H_r puisque f n'est donné que sur H_r. On l'obtient en calculant la variation totale de f sur la famille H_r. C'est parce qu'on vient de supposer f bornée sur H_r que cette variation totale existe on plutôt est finie sur tout ensemble de H_r.

[2]) Nous allons nous en servir pour établir l'existence de la fonction φ' cherchée, utilisant un procédé employé avec succes en maintes occasions par M. W H. Young. Notre mode d'exposition se rapprochera souvent de celui dû à L. Lebesgue dans le cas des espaces à n dimensions et perfectionné par M de la

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

des ensembles 0 qui sont limites de suites non décroissantes d'ensembles extraites de H_r et I la famille des ensembles F qui sont limites de suites non croissantes d'ensembles extraites de H_r. La réunion de ces deux familles S et I constitue la famille A : $A = S + I$. Chacune des deux familles S et I comprend la famille H_r, car tout ensemble E de H_r peut être considéré comme ensemble limite de la suite $E, E, E, \ldots, E, \ldots$ qui est une suite monotone à la fois non croissante et non décroissante. Inversement, A fait partie de T. Sans nous occuper de l'existence sur T de la fonction φ' cherchée, nous allons d'abord essayer de prolonger la fonction φ sur A, c'est-à-dire essayer de définir une fonction φ_1 sur A, qui coïncide avec φ sur H_r et avec φ' sur A, au cas où cette fonction φ' existe.

Supposons un instant que cette fonction φ' existe. Elle doit être positive et additive au sens complet. Aussi, si 0 est un ensemble de la famille S limite de la suite monotone d'ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, on a, en raison de l'additivité au sens complet de φ',

$$\varphi'(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi'(C_n).$$

Comme la fonction φ' n'est pas négative, cette égalité peut s'écrire $\varphi'(0) =$ borne supérieure de $\varphi'(C_n)$. Comme enfin φ' coïncide avec φ sur H_r, on a, si φ' existe,

$$\varphi'(0) = \text{borne supérieure de } \varphi(C_n).$$

Par analogie avec cette égalité vraie quand φ' existe, mais dont le second membre a un sens que φ' existe ou non, on définit une fonction φ_1 sur la famille S par la relation

$$\varphi_1(0) = \text{borne supérieure de } \varphi(C),$$

C étant un ensemble variable de la famille H_r, compris dans l'ensemble 0.

On définit de même une fonction φ_2 sur la famille I par la relation: $\varphi_2(F) =$ borne inférieure de $\varphi(D)$, D étant un ensemble de H_r comprenant F. Puisque φ est par hypothèse bornée sur H_r, ces égalités définissent complètement la fonction φ_1 sur la famille S et φ_2 sur I, que φ' existe ou non.

Vallée Poussin dans ce même cas. Mais il est par exemple indépendant de la notion d'élément limite des ensembles considérés, notions que fait intervenir M. de la Vallée Poussin dans ses raisonnements.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

La fonction φ, étant sur H_r bornée et non négative, est comprise entre 0 et un certain nombre μ. On aura de même sur S et I

$$0 \leqslant \varphi_1(0) \leqslant \mu; \quad 0 \leqslant \varphi_2(F) \leqslant \mu.$$

Chacune des fonctions φ_1 et φ_2 coïncide avec φ' sur S et I respectivement, si φ' existe. Considérons un ensemble E de H_r: il appartient à la fois à S et I et comme il est l'ensemble limite de la suite $E, E, E, \ldots, E, \ldots$ on a $\varphi_2(E) = \varphi_1(E) = \varphi(E)$, car E est à la fois le plus grand des ensembles de H_r compris dans E et le plus petit des ensembles de H_r comprenant E. Les fonctions φ_1 et φ_2 coïncident donc sur les ensembles de H_r. Voyons s'il en est de même pour tout autre ensemble G commun aux deux familles S et I: l'ensemble G, appartenant à la fois à S et à I, est la fois l'ensemble limite d'une suite non décroissante $C_1, C_2, \ldots$ et d'une suite non croissante $D_1, D_2, \ldots$ d'ensembles de H_r. Par définition $\varphi_2(G)$ est la borne inférieure de $\varphi(D)$ et $\varphi_1(G)$ la borne supérieure de $\varphi(C)$, D et C étant des ensembles de H_r, tels que $D \supset G \supset C$. Quel que soit l'entier n il existe un ensemble C'_n compris danse G et un ensemble D'_n comprenant G (C'_n et D'_n appartenant à H_r), tels que les inégalités suivantes soient vérifiées

$$\varphi_2(G) \leqslant \varphi(D'_n) \leqslant \varphi_2(G) + \frac{1}{n} \quad \varphi_1(G) - \frac{1}{n} \leqslant \varphi(C'_n) \leqslant \varphi_1(G).$$

On en déduit

$$\varphi_2(G) - \varphi_1(G) \leqslant \varphi(D'_n) - \varphi(C'_n) \leqslant \varphi_2(G) - \varphi_1(G) + \frac{2}{n}.$$

En faisant croitre n indéfiniment, on arrive à

$$\varphi_2(G) - \varphi_1(G) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}} [\varphi(D'_n) - \varphi(C'_n)].$$

Cette dernière quantité est positive ou nulle, car D'_n contient G et G contient C'_n. Posons $D''_n = D_n \cdot D'_n$ et $C''_n = C_n + C'_n$. D''_n est compris dans D_n et appartient à H_r, C''_n contient C'_n et appartient à H_r. Si on remplace D'_n et C'_n par D''_n et C''_n, les inégalités sont renforcées et on a

$$\varphi_2(G) - \varphi_1(G) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}} [\varphi(D''_n) - \varphi(C''_n)] = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\, \varphi(D''_n - C''_n).$$

Or D''_n et C''_n tendent tous deux vers l'ensemble G par consé-

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

quent l'ensemble limite de $(D''_n - C''_n)$, quand n augmente indéfiniment, est un ensemble vide: limite $\varphi(D''_n - C''_n) = 0$. D'où $\varphi_2(G) = \varphi_1(G)$.

Ainsi les fonctions φ_2 et φ_1 coïncident non seulement sur H_r, mais encore partout où elles sont définies à la fois: on peut, en conséquence, considérer φ_2 et φ_1 comme les valeurs d'une même fonction définie sur la famille A et on peut remplacer la notation φ_2 par φ_1 sur la famille I.

Ainsi, sans savoir si la fonction φ' existe, nous avons défini sur la famille A une fonction φ_1 qui admet les mêmes bornes que la fonction φ, coïncide avec elle sur la famille H_r et telle que, si φ' existe, φ' coïncide avec φ_1 sur la famille A. C'est ce que l'on peut exprimer en disant que φ_1 est le prolongement de φ sur A.

73. **Remarque.** Sur la famille d'ensemble A nous avons défini la fonction φ_1 des deux façons respectives suivantes: $\varphi(0) =$ borne supérieure de $\varphi(C)$. où C est un ensemble de H_r compris dans 0 de S, et $\varphi_1(F) =$ borne supérieure de $\varphi(D)$, où D est un ensemble de H_r comprenant F de I. Considérons, par exemple, un ensemble 0 de la famille S. Il peut être regardé comme l'ensemble limite d'une certaine suite non décroissante d'ensembles de H_r, $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$. La suite des valeurs correspondantes $\varphi(C_1), \varphi(C_2), \ldots, \varphi(C), \ldots$ est non décroissante et a, par conséquent, une certaine limite a: je dis que l'on a $a = \varphi_1(0)$. En effet, tout d'abord tout ensemble C_n étant compris dans 0, on a $\varphi(C_n) \leqslant \varphi_1(0)$ et il en résulte $a \leqslant \varphi_1(0)$. Supposons $a < \varphi_1(0)$: d'après la définition même de $\varphi_1(0)$ comme borne supérieure, il existe un ensemble C de H_r, compris dans 0, tel que $a < \varphi(C) \leqslant \varphi_1(0)$. Ceci étant, considérons la suite des ensembles $C'_n = C \,.\, C_n$. Ces ensembles appartiennent tous à H_r et forment une suite non décroissante, dont l'ensemble limite est

$$C'_1 + C'_2 + \ldots + C'_n + \ldots = C \,.\, C_1 + C \,.\, C_2 + \ldots + C \,.\, C_n + \ldots =$$
$$= C(C_1 + C_2 + \ldots + C_n + \ldots) = C \,.\, 0 = C.$$

On a donc $\varphi(C) = \underset{n \to \infty}{\text{limite}}\, \varphi(C'_n)$, car la fonction φ est supposée additive au sens complet sur H_r. D'autre part, tout ensemble C'_n est compris dans l'ensemble correspondant C_n et par conséquent

$$\varphi(C'_n) \leqslant \varphi(C_n).$$

Il en résulte que $\underset{n \to \infty}{\text{limite}}\, \varphi(C'_n) \leqslant \underset{n \to \infty}{\text{limite}}\, \varphi(C_n) = a$ et on obtient $\varphi(C) \leqslant a$.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Cette inégalité est incompatible avec l'inégalité $\varphi(C) > a$. On a donc $a = \varphi_1(0)$.

En définitive $\varphi_1(0)$ est la limite de $\varphi(C_n)$, quand $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ est une suite non décroissante d'ensembles de H_r tendant vers 0 et le raisonnement précédent montre que cette limite est indépendante de la suite des C_n, pourvu que ce soit une suite non décroissante convergeant vers 0. On démontre de même que $\varphi_1(F)$ est la limite de $\varphi(D_n)$, quand $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ est une suite non croissante d'ensembles de H_r convergeant vers F.

79. **Propriétés de la fonction φ_1.** Pour procéder à une nouvelle extension de la fonction φ, il faudra s'appuyer sur certaines propriétés de la fonction φ_1. Ces propriétés sont les suivantes.

La fonction φ_1 est non décroissante sur la famille A, c'est-à-dire que, si e et E sont deux ensembles de A tels que $e \subset E$, on a $\varphi_1(e) \leqslant \varphi_1(E)$. Pour la démonstration nous avons à considérer plusieurs cas. Si e et E appartiennent tous deux à la famille S, par définition $\varphi_1(e) =$ borne supérieure de $\varphi(C)$, où C est un ensemble de H_r compris dans e, et $\varphi_1(E) =$ borne supérieure de $\varphi(C)$, où C est un ensemble de H_r compris dans E. e étant compris dans E, quand C est compris dans e, il est compris dans E et l'ensemble des premières valeurs de $\varphi(C)$ fait partie de l'ensemble des deuxièmes et il en résulte que $\varphi_1(e) \leqslant \varphi(E)$. Si les deux ensembles e et E appartiennent à la famille I, on a une démonstration analogue. Le raisonnement est à peu près le même dans le cas où l'ensemble C appartient à S et E à I. Il est un peu moins évident dans la quatrième cas, où e appartient à I et E à S On peut, dans ce cas, trouver une suite non croissante d'ensembles D_n appartenant à H_r et convergeant vers e, de sorte que $\varphi(D_n)$ converge vers $\varphi_1(e)$. et une suite non décroissante d'ensembles C_n appartenant à H_r et convergeant vers E, de sorte que $\varphi(C_n)$ converge vers $\varphi_1(E)$ et on a $\varphi_2(e) \leqslant \varphi(D_n)$, $\varphi_1(E) \geqslant \varphi(C_n)$. Posons $D_n = (D_n - C_n) + D_n \cdot C_n$. On peut écrire

$$\varphi(D_n) = \varphi(D_n - C_n) + \varphi(D_n \cdot C_n). \quad \text{Or } \varphi(D_n \cdot C_n) \leqslant \varphi(C_n) \leqslant \varphi_1(E).$$

En comparant les inégalités précédentes, on arrive à l'inégalité

$$\varphi_1(E) - \varphi_1(e) \geqslant -\varphi(D_n - C_n).$$

L'ensemble $D_n - C_n$ converge vers $e - E$ et comme e est compris dans E, $e - E$ est vide et $\varphi(D_n - C_n)$ tend vers zéro. On arrive finalement à l'inégalité cherchée. $\varphi_1(E) \geqslant \varphi_1(e)$.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

80. **Relation entres les familles S et I.** Supposons qu'un ensemble 0 appartienne à un ensemble Δ de H_r: la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble 0 appartienne à la famille S est que l'ensemble $\Delta - 0$ appartienne à la famille I. En effet, si 0 appartient à S, 0 est l'ensemble limite d'une suite non décroissante d'ensembles de H_r: $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ telle que $C_n \subset 0 \subset \Delta$. Par suite l'ensemble $\Delta - C_n$ appartient à H_r et comprend l'ensemble $\Delta - 0$. Les $(\Delta - C_n)$ forment une suite non croissante d'ensembles de H_r, qui a pour limite $\Delta - 0$: l'ensemble $\Delta - 0$ appartient donc à la famille I. On voit de même que, si l'ensemble $\Delta - 0$ appartient à la famille I, l'ensemble 0 appartient à la famille S. On a alors

$$\varphi_1(\Delta - 0) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\,[\varphi(\Delta - C_n)] = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\,[\varphi(\Delta) - \varphi(C_n)] = \varphi(\Delta) - \varphi_1(0).$$

D'une manière plus générale on peut dire que, si un ensemble K de la famille A est compris dans un ensemble Δ de la famille H_r, l'ensemble $\Delta - K$ appartient aussi à la famille A et l'on a

$$\varphi_1(K) = \varphi(\Delta) - \varphi_1(\Delta - K).$$

81. **Combinaisons d'ensembles de la famille A.** Considérons les ensembles 0 et 0′ appartenant à la famille S et F' et F'' appartenant à la famille I: les ensembles $0 + 0'$ et $0 . 0'$ appartiennent aussi à la famille S et les ensembles F', F'' et $F' + F''$ à la famille I. En effet 0 est l'ensemble limite d'une suite non décroissante d'ensembles C_n de H_r, 0′ l'ensemble limite d'une suite non décroissante d'ensembles C'_n de H_r; F' est l'ensemble limite d'une suite non croissante d'ensembles D_n de H_r et F'' l'ensemble limite d'une suite non croissante d'ensembles D'_n de H_r. Il est clair que l'ensemble $0 + 0'$ est l'ensemble limite de la suite non décroissante des ensembles $C_n + C'_n$ de H_r. De même $0 . 0'$ est l'ensemble limite de la suite non décroissante d'ensembles $C_n . C'_n$ de H_r. Les deux ensembles $0 + 0'$ et $0 . 0'$ appartiennent donc à la famille S. Pour des raisons analogues les ensembles F' F'' et $F' + F''$ appartiennent à la famille I. Si l'ensemble F' est compris dans l'ensemble 0, l'ensemble $0 - F'$ est l'ensemble limite de la suite non décroissante d'ensembles $C_n - D_n$ (de la famille H_r) et par suite appartient à la famille d'ensembles S. De même, si l'ensemble 0 est compris dans l'ensemble F', l'ensemble $F - 0$ appartient à la famille d'ensembles I.

Passons aux valeurs correspondantes de la fonction φ_1. Si on

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

a deux ensembles E et E', appartenant à H_r, on peut écrire

$$E + E' = (E' - E) + E \,.\, E' + (E - E')$$
$$\varphi(E' + E) = \varphi(E - E') + \varphi(E \,.\, E') + \varphi(E - E').$$

Or

$$E' = (E' - E) + E \,.\, E'; \quad E = E \,.\, E' + (E - E')$$
$$\varphi(E') = \varphi(E' - E) + \varphi(E \,.\, E'); \quad \varphi(E) = \varphi(E - E') + \varphi(E \,.\, E').$$

D'où

$$\varphi(E) + \varphi(E') = \varphi(E + E') + \varphi(E \,.\, E').$$

Or

$$\varphi_1(0) + \varphi_1(0') = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\,[\varphi(C_n) + \varphi(C'_n)] = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\,[\varphi(C_n + C'_n) + \varphi(C_n C'_n)]$$

Or $C_n + C'_n$ et $C_n \,.\, C'_n$ tendent respectivement vers les deux ensembles $0 + 0'$ et $0 \,.\, 0'$, appartenant à la famille S, et on obtient

$$\underline{\varphi_1(0) + \varphi_1(0') = \varphi_1(0 + 0') + \varphi_1(0 \,.\, 0').}$$

On arrive de même pour les ensembles de la famille I à la relation

$$\underline{\varphi_1(F) + \varphi_1(F') = \varphi_1(F + F') + \varphi_1(F \,.\, F').}$$

Si les ensembles 0, $0'$ d'une part et F, F' d'autre par sont disjoints, on a

$$\varphi_1(0) + \varphi_1(0') = \varphi_1(0 + 0'); \quad \varphi_1(F) + \varphi_1(F') = \varphi_1(F + F').$$

Plus généralement on a toujours:

$$\varphi_1(0 + 0') \leqslant \varphi_1(0) + \varphi_1(0') \quad \varphi_1(F + F') \leqslant \varphi_1(F) + \varphi_1(F').$$

Passons maintenant aux cas où on a, soit un ensemble F compris dans un ensemble 0, soit un ensemble 0 compris dans un ensemble F [1]. On peut écrire $C_n + D_n = C_n + (D_n - C_n) = D_n + (C_n - D_n)$. Les ensembles des deux derniers membres étant disjoints, on a

$$\varphi(C_n) + \varphi(D_n - C_n) = \varphi(D_n) + \varphi(C_n - D_n).$$

Faisons augmenter n indéfiniment: nous avons deux cas à considérer: 1° F comprend 0; C_n tend vers 0, D_n vers F, $D_n - C_n$ vers $F - 0$, qui appartient à I, et $C_n - D_n$ vers l'ensemble vide $0 - F$

$$\varphi_1(0 - F) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_1(F - 0) = \varphi_1(F) - \varphi_1(0).$$

[1]) La démonstration primitive de M. Fréchet a été simplifiée par M. R. Franck sous la forme adoptée ici.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

2° 0 comprend F: c'est l'ensemble $F-0$ qui est vide et $C_n - D_n$ tend vers l'ensemble $0 - F$, appartenant à la famille S et on a

$$\varphi_1(0 - F) = \varphi_1(0) - \varphi_1(F).$$

Considérons enfin des combinaisons où entre une infinité d'ensembles de la famille A. Nous considérons en particulier le produit infini $F = F_1 . F_2 \ldots F_n \ldots$, tous les ensembles F_n appartenant à I, et la somme $O = O_1 + O_2 + \ldots + O_n + \ldots$, tous les O_n appartenant à S. L'ensemble F appartient à la famille I. En effet, chaque ensemble F_n est l'ensemble limite d'une suite non croissante d'ensembles de H_r: $D_n^1, D_n^2, \ldots$ Or F est compris dans F_n et F_n dans D_n^q, quel que soit l'indice q. Par suite F est compris dans l'ensemble D_q, donné par la formule $D_q = D_1^q . D_2^q \ldots D_{q-1}^q . D_q^q$ Cet ensemble D_q appartient à H_r et les ensembles $D_1, D_2, \ldots, D_q \ldots$, qui comprennent tous F, forment une suite non croissante d'ensembles de H_r: l'ensemble limite F' de cette suite appartient donc à la famille I et comprend F: $F' \supset F$. Or d'autre part F' est compris dans tout ensemble D_q et par suite dans tout ensemble D_n^q, pourvu que q soit supérieur à n: par conséquent, F' est compris dans chacun des ensembles de la suite $D_n^{n+1}, D_n^{n+2}, \ldots$ F' est donc compris dans $D_n^{n+1} . D_n^{n+2} \ldots$, ensemble qui est précisément F_n F', étant compris dans chacun des F_n, est compris dans leur ensemble commun F et on a $F' \subset F$. La comparaison des deux inégalités obtenues donne $F' = F$ et, comme F' appartient à la famille I, il en est de même de l'ensemble F.

Passons enfin à l'ensemble $O = O_1 + O_2 + \ldots + O_n + \ldots$: O appartient à la famille S, comme chacun des ensembles $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$. En effet, O_n est l'ensemble limite d'une suite non décroissante d'ensembles C_n^q appartient à H_p. Par conséquent, O comprend tous les C_n^q, quels que soient n et q, et aussi tout ensemble C_q donné par la relation $C_q = C_1^q + C_2^q + \ldots + C_q^q$. Tout ensemble C_q appartient à H_r et O, comprenant tout C_q, comprend l'ensemble O', qui est égal à la somme $C_1 + C_2 + \ldots + C_q + \ldots$: par suite $O \supset O'$. Or, l'ensemble O' comprend C_q et C_q comprend C_n^q à condition que q soit supérieur à n. Par conséquent, O' comprend les ensembles $C_n^{n+1}, C_n^{n+2}, \ldots$ et leur somme qui O_n. O', comprenant chaque O_n, comprend leur somme qui est l'ensemble O: d'où $O' \supset O$. En comparant les inégalités obtenues, on trouve $O = O'$ et, comme O' somme des ensembles $C_1 + C_2 + \ldots + C_q + \ldots$ appartient à la famille I, il en est de même de O.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

L'ensemble O appartenant à la famille S, la fonction φ_1 est déterminée sur O. Comparons $\varphi_1(O)$ avec $\varphi_1(O_1)$. $\varphi_2(O_2), \ldots$ Nous savons déjà que, si O_1 et O_2 sont deux ensembles appartenant à la famille S, il en est de même de leur somme et l'on a

$$\varphi_1(O_1+O_2) \leqslant \varphi_1(O_1) + \varphi_1(O_2).$$

D'une façon générale si $O_1, O_2, \ldots, O_n$ sont n ensembles (n étant un nombre fini) appartenant à la famille S, il en est de même de leur somme et on a $\varphi_1(O_1+O_2+\ldots+O_n) \leqslant \varphi_1(O_1)+\ldots+\varphi_1(O_n)$. Passons à une infinité d'ensembles. Nous venons de voir qu'on peut considérer O comme l'ensemble limite de la suite non décroissante d'ensembles C_q de H_r: $\varphi_1(O) = \underset{q\to\infty}{\text{limite}}\, \varphi(C_q)$. Or C_q est compris dans l'ensemble $O_1+O_2+\ldots+O_q$ et on a

$$\varphi(C_q) \leqslant \varphi_1(O_1+\ldots+O_q) \leqslant \varphi_1(O_1)+\ldots+\varphi_1(O_q).$$

Si q augmente indéfiniment, $\varphi(C_q)$ tend vers $\varphi_1(O)$ et on arrive à l'inégalité

$$\varphi_1(O) \leqslant \varphi_1(O_1) + \varphi_1(O_2) + \ldots + \varphi_1(O_q) + \ldots$$

Nous avons ainsi déterminé quelques propriétés de la fonction φ_1 sur la famille d'ensemble A: elle vont nous être utiles pour une nouvelle extension de la fonction φ_1, par un procédé analogue à celui qui a servi à passer de la fonction φ à la fonction φ_1.

82. **Ensembles normaux**. Pour prolonger la fonction φ_1 on essaye de généraliser son procédé de formation: considérons un ensemble E quelconque et supposons que cet ensemble E soit compris dans un ensemble K appartenant à la famille A et comprenne un ensemble k appartenant à A. Si la fonction φ' existe et si elle est déterminée sur E, on a

$$\varphi'(k) \leqslant \varphi'(E) \leqslant \varphi'(K) \quad \text{et} \quad \varphi'(k) = \varphi_1(k) \quad \varphi'(K) = \varphi_1(K).$$

La double inégalité précédente conduit à considérer la borne supérieure de $\varphi_1(k)$, quand k est un ensemble de A compris dans E, borne que nous désignons par la notation $\underline{\varphi(E)}$, et la borne inférieure de $\varphi_1(K)$, quand K est un ensemble de A comprenant E, borne que l'on désigne par la notion $\overline{\varphi(E)}$. Ainsi, quand $\varphi'(E)$ existe, on a la double égalité $\underline{\varphi(E)} = \varphi'(E) = \overline{\varphi(E)}$. Mais que φ' existe ou non les quantités $\underline{\varphi(E)}$ et $\overline{\varphi(E)}$ sont toujours bien défi-

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

nies et comprises entre les mêmes bornes, zéro et μ, que la fonction φ, si l'on a fait la convention suivante: quand aucun ensemble K de A ne comprend E, on pose par définition $\overline{\varphi(E)}=\mu$ et quand aucun ensemble K de A n'est compris dans E, on pose $\underline{\varphi(E)}=0$. Enfin, on a toujours $\underline{\varphi(E)}\leqslant\overline{\varphi(E)}$ et ce fait résulte immédiatement de ce que la fonction φ_1 est non décroissante et de ce que tout $\varphi_1(k)$ est inférieur ou égal à tout $\varphi_1(K)$.

Si l'ensemble E est tel que $\underline{\varphi(E)}=\overline{\varphi(E)}$, cette valeur est la valeur qu'il faudrait attribuer à $\varphi'(E)$, si $\varphi'(E)$ existait sur T et si E faisait partie de T Mais cette valeur commune à $\underline{\varphi(E)}$ et $\overline{\varphi(E)}$ est bien déterminée en partant uniquement de la fonction φ_1 et de la famille H_r et cela sans supposer l'existence de la fonction φ'. Nous dirons alors que *l'ensemble E est un ensemble normal relativement à la fonction φ et à famille H_r.*

Nous allons étudier la famile T_1 composée de tous les ensembles normaux (relativement à la fonction φ et à la famille H_r). Sur les ensembles de la famille A, on a évidemment $\underline{\varphi(E)}=\overline{\varphi(E)}=\varphi_1(E)$: ce qui prouve que la famille T_1 des ensembles normaux comprend la famille A et par là la famille H_r. Comme sur A la valeur commune de $\underline{\varphi(E)}$ et $\overline{\varphi(E)}$ est $\varphi_1(E)$, il n'y a pas d'inconvénient à appeler d'une façon générale sur tout ensemble normal $\varphi_1(E)$ la valeur commune de $\underline{\varphi(E)}$ et $\overline{\varphi(E)}$. On obtient donc un nouveau prolongement φ_1 de la fonction φ, tel que, si la fonction φ' existe, $\varphi_1=\varphi'$ sur les ensembles de T_1.

Pour les démonstrations il nous sera plus commode de nous restreindre au cas où tous les ensembles de H_r sont les sous-ensembles de l'un d'eux, *l'ensemble fondamental* J. Alors il y aura toujours un ensemble de H_r qui contient un ensemble E de A: l'ensemble J. Nous considérons également que T_1 est la famille des ensembles normaux appartenant à J.

84. Nouvelle définition des ensembles normaux. Il y a lieu, en vue de l'étude des propriétés de la famille T_1, de donner une nouvelle définition des ensembles normaux, définition qui sépare les ensembles de la famille S de ceux de la famille I. Désignons par $\overline{\overline{\varphi(E)}}$ la borne inférieure de $\varphi_1(O)$, où O est un ensemble quelconque de S (sous-ensemble de J) comprenant l'ensemble E; il y en a au moins un: J. On ne peut avoir entre $\underline{\varphi(E)}$ et $\overline{\overline{\varphi(E)}}$ que la

relation $\overline{\varphi(E)} \leqslant \overline{\overline{\varphi(E)}}$. L'hypothèse $\overline{\varphi(E)} < \overline{\overline{\varphi(E)}}$ est impossible: si, en effet, $\overline{\varphi(E)} < \overline{\overline{\varphi(E)}}$, il existerait un ensemble F de I, comprenant E, tel que $\overline{\varphi(E)} \leqslant \varphi_1(F) < \overline{\overline{\varphi(E)}}$. Or F est l'ensemble limite d'une suite non croissante d'ensembles D_n appartenant à H_r: $\varphi_1(F) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\, \varphi(D_n)$ et, par définition même de $\varphi_1(F)$ comme borne inférieure, il y a un ensemble D_n tel que $\varphi_1(F) \leqslant \varphi(D_n) < \overline{\overline{\varphi}}(E)$. Or, D_n, ensemble de H_r, appartient aussi à la famille S. Ainsi il y aurait un ensemble D_n de la famille S qui comprendrait E et tel que $\varphi(D_n) \leqslant \overline{\overline{\varphi(E)}}$. Ce qui est impossible par définition même de $\overline{\overline{\varphi(E)}}$. Ainsi $\overline{\overline{\varphi}}(E) = \overline{\varphi}(E)$. On démontre de même que $\underline{\varphi(E)}$ est la borne supérieure de $\varphi_1(E)$, où F est un ensemble de la famille I compris dans E.

85. **Lemme.** Considérons des ensembles $E_1, E_2, \ldots$, sous-ensembles de l'ensemble fondamental J. $E_1 + E_2 + \ldots$ est aussi un sous-ensemble de J. Les quantités $\overline{\varphi(E_1)}, \overline{\varphi(E_2)}, \ldots, \overline{\varphi(E_1 + E_2 + \ldots)}$ sont bien déterminées $\overline{\varphi(E_1)}$ est la borne inférieure de $\varphi_1(O_1)$, où O_1 est un ensemble de S comprenant O_1; $\overline{\varphi(E_2)}$ est la borne inférieure de $\varphi_1(O_2)$, où O_2 est un ensemble de S comprenant $E_2, \ldots, \overline{\varphi(E_1 + E_2 + \ldots)}$ est la borne inférieure de $\varphi_1(O)$ où O est un ensemble de S comprenant l'ensemble $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$

On a donc $\overline{\varphi(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots)} \leqslant \varphi_1(O)$. D'autre part on peut déterminer des ensembles $O_1, O_2, \ldots$, de sorte que, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ étant des quantités positives quelconques données, on ait:

$$\varphi_1(O_1) < \overline{\varphi(E_1)} + \varepsilon_1, \ldots, \varphi_1(O_i) < \overline{\varphi(E_i)} + \varepsilon_i, \ldots$$

Considérons alors l'ensemble $O = O_1 + O_2 + \ldots + O_i + \ldots$: il appartient à la famille S, comprend l'ensemble $E_1 + E_2 + \ldots$ et on a

$$\overline{\varphi(E_1 + E_2 + \ldots)} \leqslant \varphi_1(O) \leqslant \varphi_1(O_1) + \varphi_1(O_2) + \ldots$$

d'où

$$\overline{\varphi(E_1 + E_2 + \ldots)} \leqslant \overline{\varphi(E_1)} + \overline{\varphi(E_2)} + \ldots + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$$

On peut choisir $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, de sorte que leur somme soit inférieure ou égale à une quantité donnée quelconque positive et on en conclut l'inégalité

$$\overline{\varphi(E_1 + E_2 + \ldots)} \leqslant \overline{\varphi(E_1)} + \overline{\varphi(E_2)} + \ldots$$

86. **Expression analytique des ensembles normaux.** Soient E un sous-ensemble de J et ε un nombre positif arbitraire donné, il

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

existe deux ensembles, l'un F, appartenant à la famille I et compris dans E, l'autre O, appartenant à la famille S et comprenant E, tels qu'on ait les inégalités:

$$\underline{\varphi(E)} - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi_1(F) \leqslant \underline{\varphi(E)} \leqslant \overline{\varphi(E)} \leqslant \varphi_1(O) < \varphi(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'ensemble E est égal à somme de l'ensemble F et d'un ensemble $e = E - F$ compris dans l'ensemble $O - F$. Or, $O - F$, F étant compris dans O, appartient à la famille A et on a

$$\overline{\varphi(e)} \leqslant \varphi_1(O - F) = \varphi_1(O) - \varphi_1(F).$$

Des inégalités précédentes, on conclut que

$$\varphi_1(O) - \varphi_1(F) \leqslant \varphi(E) - \varphi(E) + \varepsilon$$

et par suite

$$\overline{\varphi(e)} \leqslant \overline{\varphi(E)} - \underline{\varphi(E)} + \varepsilon.$$

Si l'ensemble E est normal, $\overline{\varphi(E)} = \underline{\varphi(E)}$ et $\overline{\varphi(e)} \leqslant \varepsilon$. Ainsi *pour qu'un ensemble E soit normal (relativement à la fonction φ et à la famille H_r) il faut que quel que soit $\varepsilon > 0$, on puisse considérer E comme la somme d'un ensemble F appartenant à la famille I et d'un ensemble e tel que $\overline{\varphi(e)}$ soit inférieur à ε.*

Réciproquement cette condition est suffisante. En effet, si elle est vérifiée, on a, en vertu du lemme précédent, les inégalités

$$\varphi_1(F) \leqslant \underline{\varphi(E)} \leqslant \overline{\varphi(E)} \leqslant \overline{\varphi(F)} + \overline{\varphi(e)} \leqslant \varphi_1(F) + \varepsilon.$$

On conclut de ces inégalités, vraies quel que soit ε, que $\underline{\varphi(E)} = \overline{\varphi(E)}$ et que l'ensemble E est normal.

87. **Lemme.** La famille T_1 des ensembles normaux (relativement à la fonction φ et à la famille H_r) est additive au sens restreint. Il suffit de montrer que si E_1 et E_2 sont des ensembles normaux, il en est de même de $E_1 + E_2$ et de $E_2 - E_1$. Or, E_1 et E_2 étant des ensembles normaux, quelle que soit la quantité positive donnée ε, on peut écrire $E_1 = F_1 + e_1$, $E_2 = F_2 + e_2$, avec $\overline{\varphi(e_1)} < \varepsilon$, $\overline{\varphi(e_2)} < \varepsilon$. En ajoutant E_1 et E_2, on obtient $E_1 + E_2 = (F_1 + F_2) + (e_1 + e_2)$. Les ensembles F_1 et F_2 appartenant à la famille I, il en est de même $F_1 + F_2$. D'autre part, d'après le lemme (§ 85),

$$\overline{\varphi(e_1 + e_2)} \leqslant \overline{\varphi(e_1)} + \overline{\varphi(e_2)} < 2\varepsilon.$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

On voit par là qu'on peut écrire $E_1+E_2=F+e$, l'ensemble F appartenant à la famille I et l'ensemble e étant tel que $\overline{\varphi(e)}<2\varepsilon$, 2ε étant une quantité positive quelconque donnée. Ainsi l'ensemble E_1+E_3 est un ensemble normal.

Pour l'ensemble E_1-E_2, nous allons ramener la démonstration à la précédente grâce aux ensembles complémentaires. Considérons d'abord la différence d'un ensemble Δ de la famille H, et d'un ensemble normal E compris dans Δ: $\Delta-E$ est aussi un ensemble normal. En effet, E étant un normal, on peut écrire $E=F+e$, F étant un ensemble de la famille I et e étant un ensemble tel que $\overline{\varphi(e)}$ soit inférieur à une quantité arbitraire donnée ε. On peut aussi trouver un ensemble O, appartenant à la famille S, comprenant E et tel que $\varphi_1(O)<\overline{\varphi(E)}+\varepsilon$, et un ensemble F appartenant à la famille I, compris dans E et tel que $\underline{\varphi(E)}-\varepsilon<\varphi_1(F)$. On obtient donc les inégalités $\underline{\varphi(E)}-\varepsilon<\varphi(F)\leqslant\varphi_1(O)<\underline{\varphi(E)}+\varepsilon$. D'où on déduit $\varphi_1(O)-\varphi(FO)<2\varepsilon$. L'ensemble F est compris dans l'ensemble Δ; on peut supposer que O est aussi compris dans Δ, en le remplaçant au besoin par l'ensemble $O_1=O\,.\,\Delta$. Cet ensemble O_1 appartient à la famille S, comme produit de deux ensembles de S, et il comprend E. On a donc $\varphi_1(F)\leqslant\varphi_1(O_1)\leqslant\varphi_1(O)$. Ceci nous permet de prendre le complément F' de l'ensemble O par rapport à l'ensemble Δ: l'ensemble $F'=\Delta-O$ appartient à la famille I et l'ensemble $O'=\Delta-F$ appartient à la famille S. L'ensemble $E'=\Delta-E$ comprend F' et est compris dans O'. Or on a

$$\varphi_1(O')-\varphi_1(F')=[\varphi_1(\Delta)-\varphi_1(F')]-[\varphi_1(\Delta)-\varphi_1(O)]=\varphi_1(O)-\varphi_1(F).$$

Comme $\varphi_1(O)-\varphi_1(F)<2\varepsilon$, $\varphi_1(O')-\varphi_1(F')<2\varepsilon$. Or, posons $E'=F'+e'$. L'ensemble F' est un ensemble de la famille I compris dans E' et l'on a $e'\subset O'-F'$. D'où

$$\overline{\varphi(e')}\leqslant\varphi_1(O'-F')=\varphi_1(O')-\varphi_1(F')<2\varepsilon:$$

ce qui prouve que l'ensemble E' est normal.

Passons enfin à E_1-E_2: les deux ensembles E_1 et E_2 appartiennent à l'ensemble fondamental J et on a $J-(E_1-E_2)=(J-E_1)+E_2$ E_1 étant un ensemble normal ainsi que E_2, il en est de même de $J-E_1$ et, par suite de $(J-E_1)+E_2$. Comme $E_1-E_2=J-[J-(E_1-E_2)]$, l'ensemble E_1-E_2 est un ensemble normal.

88. **Remarque.** Revenons à la somme de deux ensembles nor-

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

maux E_1 et E_2. Supposons les ensembles E_1 et E_2 disjoints: il en sera a fortiori de même des ensembles F_1 et F_2, qui y sont compris et on a alors $\varphi_1(F) = \varphi_1(F_1) + \varphi_1(F_2)$. Si on fait tendre ε vers zéro, $\varphi_1(F_1+F_2)$ tend vers $\varphi_1(E)$, $\varphi_1(F_1)$ vers $\varphi(E_1)$ et $\varphi_1(F_2)$ vers $\varphi_1(E_2)$. A la limite. $\varphi_1(E_1+E_2) = \varphi_1(E_1) + \varphi_1(E_2)$. La fonction φ_1 est additive au sen restreint sur la famille additive au sens restreint des ensembles normaux.

89. Théorème. *La famille des ensembles normaux est additive au sens complet.* Nous venons de voir (§ 87) que la somme d'un nombre fini d'ensembles normaux est un ensemble normal. Voyons ce qui se passe dans le cas d'une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles normaux: $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ Tous ces ensembles sont supposés appartenir à l'ensemble fondamental J. Formons la différence

$$E = J - (E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots) = (J - E_1).(J - E_2)\ldots(J - E_n)\ldots$$

Tous les ensembles $(J - E_1), \ldots, (J - E_n), \ldots$ sont normaux. Nous pouvons alors nous donner des nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ tels que leur somme $\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$ soit inférieure à un nombre donné positif quelconque ε. Tout ensemble $J - E_i$ étant un ensemble normal, on peut écrire $J - E_i = F_i + e_i$, l'ensemble F_i appartenant à la famille I et l'ensemble e_i étant tel que $\varphi(e_i) < \varepsilon_i$. Nous aurons alors $E = (F_1 + e_1).(F_2 + e_2)\ldots(F_i + e_i)\ldots$ Posons $F = F_1 . F_2 \ldots F_i \ldots$, et $E = F + e$. Nous avons démontré plus haut (§ 81) que l'ensemble E appartient à la famille I. D'autre part tout élément de l'ensemble e appartient au moins à un des ensembles $e_1, e_2, \ldots$: il résulte de là que $e \subset e_1 + e_2 + \ldots + e_i + \ldots$ D'où

$$\overline{\varphi(e)} \leqslant \overline{\varphi(e_1 + e_2 + \ldots)} \leqslant \varphi(e_1) + \ldots + \varphi(e_i) + \ldots \leqslant \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i + \ldots;$$

$\overline{\varphi(e)} \leqslant \varepsilon$. Cette inégalité prouve que l'ensemble $E_1 + E_2 + \ldots + E_i + \ldots$ est un ensemble normal.

90. Théorème. *La fonction φ_1 est additive au sens complet sur la famille T_2 des ensembles normaux.* Nous avons déjà prouvé (§ 88) l'additive au sens restreint de la fonction φ_1. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ une infinité dénombrable d'ensembles disjoints appartenant à la famille T_2 et E leur somme (qui est aussi un ensemble normal). Nous sommes arrivés précédemment (§ 85) à l'inégalité

$$\overline{\varphi(E)} \leqslant \overline{\varphi(E_1)} + \varphi(E_2) + \ldots + \varphi(E_n) + \ldots$$

L'inégalité $\varphi_1(E) \leqslant \varphi_1(E_1) + \varphi_1(E_2) + \ldots + \varphi_1(E_n) + \ldots$ démontrée

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

sur A est donc vraie aussi sur T_2. Or nous pouvons poser $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + R_n$ avec $R_n = E_{n+1} + \ldots$ L'ensemble R_n est un ensemble normal et, φ_1 étant une fonction additive au sens restreint, on a

$$\varphi_1(E) = \varphi_1(E_1) + \varphi_1(E_2) + \ldots + \varphi_1(E_n) + \varphi_1(R_n).$$

Comme la fonction φ_1 est positive,

$$\varphi_1(E) \geqslant \varphi_1(E_1) + \varphi_1(E_2) + \ldots + \varphi_1(E_n).$$

Cette inégalité, vraie quel que soit n, prouve que la série qui débute au deuxième membre est convergente et que sa somme est inférieure ou égale à $\varphi_1(E)$. D'où $\varphi_1(E) \geqslant \varphi_1(E_1) + \ldots + \varphi(E_n) + \ldots$ En comparant à l'inégalité obtenue plus haut, on arrive bien à l'égalité

$$\underline{\varphi_1(E) = \varphi_1(E_1) + \varphi_1(E_2) + \ldots + \varphi_1(E_n) + \ldots}$$

91. Ainsi étant donnée une fonction monotone φ, bornée et additive au sens complet sur une famille H_r additive au sens restreint, les ensembles normaux, relatifs à la fonction φ et à la famille H_r, nous fournissent une famille d'ensembles T_2 additive au sens complet et comprenant la famille H_r. Ils nous permettent de déterminer uue fonction d'ensembles φ_1, additive au sens complet et non négative sur la famille T_2, qui coïncide avec la fonction donnée φ sur les ensembles de la famille H_r: cette famille des ensembles normaux existe dans tous le cas, car elle contient certainement les ensembles de la famille H_r et de la famille A et nous avons toujours une solution au problème proposé, pourvu que la fonction φ soit bornée, monotone et additive au sens complet sur les ensembles de la famille H_r. De plus, s'il existe une autre fonction φ' égale à φ sur H_r, monotone et additive au sens complet sur une famille T additive au sens complet et comprenant H_r, φ' coïncide avec φ sur tout ensemble commun aux deux familles T et T_2.

92. La solution du problème obtenue dans le cas où la fonction φ donnée est monotone permet enfin de résoudre le problème dans le cas où la fonction donnée n'est plus monotone: on suppose donnée une famille d'ensembles H_r additive au sens restreint et une fonction d'ensembles f définie sur H_r, bornée et additive au sens complet et on cherche une fonction additive au sens complet sur une famille additive au sens complet comprenant H_r et prenant sur H_r la valeur de f. Pour cela on fait usage de la décomposition canonique de la

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

fonction f sur la famille H_r: on a la décomposition $f = \varphi - \psi$, les deux fonctions φ et ψ étant chacune positive ou nulle, bornée et additive au sens complet sur H. S'il existe une autre décomposition de la fonction f satisfaisant à ces conditions, elle se déduira des fonctions φ et ψ en ajoutant à chacune la même fonction non négative et qui jouit des mêmes propriétés. La somme de φ et ψ est précisément la variation totale.

La connaissance de la fonction φ sur la famille H_r détermine une fonction φ_1 définie sur une famille T_2 additive au sens complet comprenant H_r et qui coïncide avec φ sur H_r; de même la connnaissance de la fonction sur la famille H_r détermine une fonction ψ_1 définie sur une famille T_3 additive au sens complet comprenant H_r et coïncidant avec ψ sur H_r. Considérons la famille T_1 formée par les ensembles communs aux familles T_2 et T_3: $T_1 = T_2 \cdot T_3$. T_1 comprend H_r et est évidemment additive au sens complet. La fonction $f_1 = \varphi_1 - \psi_1$ est définie sur la famille T_1. Elle est additive au sens complet sur T_1 comme différence de deux fonctions additives au sens complet et elle coïncide avec la fonction donnée f sur H_r, puisque φ_1 et ψ_1 coïncident avec φ et ψ sur H_r. Ainsi la fonction f_1 et la famille T_1 forment une solution du problème cherché et sur T_1 la solution f_1 est unique.

93. **Variations.** Le procédé de construction de la fonction f_1 fournit même davantage que la solution du problème cherché: nous allons démontrer que les *fonctions φ_1 et ψ_1 sont les variations positives et négatives de la fonction f_1 relativement à la famille T_1*. On a d'abord $f_1 = \varphi_1 - \psi_1$ et les fonctions φ_1 et ψ_1 sont, par construction, positives ou nulles et additives au sens complet sur H_r. Comme elles coïncident respectivement avec les fonctions φ et ψ sur H_r, la décomposition $f_1 = \varphi_1 - \psi_1$ constitue déjà la décomposition canonique sur H_r. Si sur la famille T_1 la décomposition canonique est $f = \Phi_1 - \Psi_1$, d'après les propriétés de φ_1 et ψ_1, on a $\varphi_1 = \Phi_1 + u$ et $\psi_1 = \Psi_1 + u$, la fonction u étant non négative bornée et additive au sens complet sur la famille T_1. Il s'agit de démontrer que la fonction u est nulle sur la famille T_1.

Les fonctions φ_1 et ψ_1 coïncident respectivement avec φ et ψ sur H_r, on a, sur H_r, $\varphi = \Phi_1 + u$ $\psi = \Psi_1 + u$. Or φ et ψ sont précisément les variations positive et négative de la fonction f sur H_r: aussi a-t-on sur H_r, $\Phi_1 = \varphi + v$ $\Psi_1 = \psi + v$, v étant une fonction d'ensemble positive ou nulle sur H_r. Donc, sur H_r $u + v = 0$. Aucune de ces deux

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

quantités n'étant négative, elles sont toutes deux nulles. La fonction u est donc nulle sur les ensembles de H_r. Ainsi $\Phi_1 = \varphi$ et $\Psi_1 = \psi$ sur H_r. En essayant d'étendre les fonctions φ et ψ sur T_1 on voit qu'elles ont à la fois pour prolongement φ_1 et Φ_1, ψ_1 et Ψ_1 sur les ensembles de la famille T_1: ce qui prouve que φ_1 et ψ_1 sont bien égales aux variations positives et négatives Φ_e et Ψ_1 de la fonction f_1 sur la famille T_1.

94. **Remarque.** Revenons à la définition de la famille d'ensembles T_1, famille des ensembles normaux relatifs à la fonction f et à la famille H_r. Nous connaissons pour chaque ensemble E, sous-ensemble de l'ensemble fondamental J, les expressions $\overline{\varphi(E)}$, $\underline{\varphi(E)}$, $\overline{\psi(E)}$, $\underline{\psi(E)}$ et l'on a $\overline{\varphi(E)} \geqslant \underline{\varphi(E)}$, $\overline{\psi(E)} \geqslant \underline{\psi(E)}$. Posons $\overline{f(E)} = \overline{\varphi(E)} - \underline{\psi(E)}$ et $\underline{f(E)} = \underline{\varphi(E)} - \overline{\psi(E)}$. On a encore $\overline{f(E)} \geqslant \underline{f(E)}$ et

$$\overline{f(E)} - \underline{f(E)} = [\overline{\varphi(E)} - \underline{\varphi(E)}] + [\overline{\psi(E)} - \underline{\psi(E)}].$$

Cette dernière expression montre que tout ensemble E appartenant à T_1 est tel que $\overline{f(E)} = \underline{f(E)}$ et réciproquement: c'est pourquoi on peut dire que la famille T_1 est la famille des ensembles normaux relatifs à la fonction f et à la famille H_r.

94bis. **Remarque.** La famille T_1 des ensembles normaux relatifs à f et H_r est additive au sens complet et comprend H_r elle comprend donc aussi la plus petite famille H_c additive au sens complet et comprenant H_r. Un raisonnement direct (§ 75) nous avait montré que si le prolongement de f sur H_c existe, il est unique. En construisant le prolongement f_1 sur T_1 nous avons donc non seulement prouvé l'existence de f_1 sur H_c quand f est bornée et additive au sens complet sur H_r, mais nous avons été au delà de H_c, puisque comme nous en verrons des exemples T_1 peut être plus étendu que H_r.

95. **Application de la théorie des ensembles normaux dans le cas où la famille initiale additive au sens restreint est aussi additive au sens complet.** Si la fonction f donnée est une fonction additive au sens complet définie sur la famille H_r, additive au sens complet elle est nécessairement bornée sur H_c, et rien n'empêche de reprendre la théorie précédente en remplaçant H_r par H_c. Mais des simplifications se présentent. Nous supposons encore que les ensembles de la famille H_c sont des sous ensembles d'un ensemble fondamen-

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

tal J et nous effectuons sur H_c la décomposition canonique de la fonction $f: f = \varphi - \psi$. Nous nous proposons de prolonger les fonctions φ et ψ. Nous avons d'abord à considérer des familles S et I, formées par les ensembles limites de suites monotones d'ensembles extraites de H_c: ces ensembles limites appartiennent à H_c en raison de son additivité au sens complet. La famille H_c comprend donc chacune des failles S et I. Comme d'autre part chacune des familles S et I comprend la famille H_c, les familles S et I sont chacune identique à H_c. Les fonctions φ_1 et ψ_1, coïncidant respectivement avec φ et ψ sur H_c, se réduisent aux fonctions φ et ψ. Le premier prolongement des fonctions φ et ψ est inutile et il n'y a plus lieu de distinguer les ensembles de la famille S, de ceux de la famille I, ni de ceux de H_r.

Les nouvelles définitions de $\overline{\varphi(E)}$ et $\underline{\varphi(E)}$ sont, par suite, les suivantes: $\overline{\varphi(E)}$ est la borne inférieure de $\varphi(G)$, où G est un ensemble de H_c comprenant E et $\underline{\varphi(E)}$ est la borne supérieure de $\varphi(K)$, où K est un ensemble de H_c compris dans E. On peut encore transformer ces définitions et considérer $\overline{\varphi(E)}$ comme la valeur limite d'une certaine suite $\varphi(D_1), \varphi(D_2), \ldots, \varphi(D_n), \ldots$, les ensembles $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ appartenant à H_c et formant une suite décroissante comprenant $\overline{E}$. Nous désignerons par $\overline{E}$ l'ensemble limite de la suite décroissante d'ensembles de H_c: $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$, l'ensemble $\overline{E}$ appartient à la famille H_c et comprend l'ensemble E. On a $\varphi(\overline{E}) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\, \varphi(D_n)$. D'où $\overline{\varphi(E)} = \varphi(\overline{E})$. On peut déterminer de même une suite monotone croissante d'ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ appartenant à la famille H_c et compris tous dans l'ensemble E, telle que $\underline{\varphi(E)}$ soit la limite de la suite non décroissante $\varphi(C_1), \varphi(C_2), \ldots, \varphi(C_n), \ldots$ Si on désigne par $\underline{E}$ l'ensemble limite de la suite $C_1, C_2, \ldots C_n, \ldots$, $\underline{E}$ appartient à H_c est compris dans E et on a

$$\varphi(\underline{E}) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\, \varphi(C_n) = \underline{\varphi(E)}.$$

Si l'ensemble E est normal par rapport à la fonction φ et à la famille H_c, $\underline{\varphi(E)} = \overline{\varphi(E)}$ et par conséquent $\varphi(\overline{E}) = \varphi(\underline{E})$. Cette dernière inégalité montre qu'alors il y a deux ensembles $\overline{E}$ et $\underline{E}$, appartenant à H_c, qui encadrent l'ensemble E et tels que leur différence $\overline{E} - \underline{E}$ soit un ensemble presque nul relativement à la fonc-

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

tion φ. E et $\underline{E}$ sont évidemment liés par la relation $\overline{E}=\underline{E}+(\overline{E}-\underline{E})$ et on a $E=\underline{E}+e$; e étant compris dans $\overline{E}-\underline{E}$, on en conclut que l'ensemble e est presque nul relativement à la fonction φ.

On a un résultat analogue pour les ensembles normaux relatifs à la fonction ψ et à la famille H_c [1]). En définitive *pour qu'un ensemble E soit normal relativement à la fonction f et à la famille H_c additive au sens complet il faut que l'ensemble E soit la somme d'un ensemble de H_c et d'un sous-ensemble d'un ensemble de H_c presque nul relativement à la fonction f.*

Réciproquement, cette condition est suffisante: soit $E=R+g$, l'ensemble R appartenant à la famille H_c et l'ensemble g étant une partie d'un ensemble G de H_c presque nul relativement à la fonction f. Il faut montrer que E est un ensemble normal relativement à la fonction f et à la famille H_c. Or on a $R\subset E\subset R+G$, les ensembles R et $R+G$ appartenant à H_c. On en déduit les inégalintés $\varphi(R)\leqslant\underline{\varphi(E)}\leqslant\overline{\varphi(E)}\mid\varphi(R+G)$. Mais $\varphi(R)=\varphi(R+G)$ et on a $\varphi(R)=\underline{\varphi(E)}=\overline{\varphi(E)}$. Ce qui prouve que l'ensemble E est normal relativement à la fonction φ et à la famille H_c et que $\varphi_1(E)=\varphi(R)$. On voit de même que l'ensemble E est normal relativement à la fonction ψ et à la famille H_c. L'ensemble E est donc bien normal relativement à la fonction f et à la famille H_c.

Ainsi, étant donnée une fonction f additive au sens complet définie sur une famille H_c additive au sens complet, la famille T_1 des ensembles normaux relativement à f et à H_c comprend la famille H_c et tous les sous-ensembles d'ensembles de H_c presque nuls relativement à la fonction f. Si on appelle K la famille de ces sous-ensembles, T_1 comprend H_c et K. On voit facilement que de l'additivité au sens complet de H_c résulte l'additivité au sens complet de K. La famille T_1 est la plus petite famille additive au sens complet comprenant les familles H_c et K. Si, en effet, on appelle provisoirement T_0 la plus petite famille additive au sens complet comprenant les familles H_c et K, la famille T_0 comprend les ensembles sommes d'un ensemble de H_c et d'un ensemble de K. Tout ensemble normal étant de cette forme, T_0 comprend le famille T_1

[1]) Si pour ψ, les ensembles $\overline{E}$, $\underline{E}$ étaient remplacés par E', E'', on remplacerait $\overline{E}$ et E' par $\overline{E}.E'$, $\underline{E}$ et E'' par $\underline{E}+E''$.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

des ensembles normaux. D'autre part la famille T_1 est additive au sens complet et comprend les familles H_ε et K: elle comprend donc T_0, plus petite famille additive au sens complet comprenant les familles H_ε et K. On voit par là que les familles T_0 et T_1 sont identiques.

En résumé la famille T_1 des ensembles normaux relativement à la fonction f et à la famille H_ε additives au sens complet s'obtient en adjoignant à la famille H_ε la famille K des sous-ensembles des ensembles de H_ε presque nuls relativement à f et H_ε et en formant la plus petite famille additive au sens complet comprenant les familles K et H_ε.

96. **Exemple.** Comme exemple de famille d'ensembles normaux relativement à une fonction f additive au sens complet et à une famille H_ε additive au sens complet on peut citer la famille des ensembles linéaires mesurables de Lebesgue: la fonction f est la mesure au sens de Borel et la famille H_ε est la famille des ensembles linéaires bien définis au sens de Borel. Tout ensemble mesurable de Lebesgue est la somme d'un ensemble bien défini et d'un sous-ensemble d'un ensemble bien défini de mesure nulle. Et réciproquement.

On encore: la famille des ensembles mesurables de Lebesgue s'obtient en adjoignant à la famille H_ε des ensembles bien définis de Borel, la famille K des sous-ensembles des ensembles bien définis de mesure nulle et en formant la plus petite famille additive au sens complet comprenant H_ε et K.

97. **Remarque sur les familles d'ensembles complètes par rapport à une fonction.** Soit une fonction d'ensembles f additive au sens complet définie sur une famille d'ensembles T additive au sens complet. Nous dirons que la famille d'ensembles T est *complète* par rapport à la fonction f, si tous les sous-ensembles d'un ensemble de T presque nul relativement à f appartient à la famille T. Supposons qu'on ait donné une fonction f et une famille T complète par rapport à f et additive au sens complet; nous allons montrer, que si on essaye de prolonger la famille T et la fonction f par le procédé des ensembles normaux, on ne trouve pas d'autre famille que la famille T donnée; ceci justifiera l'expression de famille complète.

98. Revenons, en effet au cas précédent où l'on donne une fonction f additive au sens complet sur une famille H_ε additive au sens complet. En prolongeant par le procédé des ensembles normaux, on obtient une fonction f_1, qui coïncide avec f sur H_ε. La famille des ensembles normaux T_1 (relativement à f et H_ε) est une famille

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

complète relativement à la fonction f_1. Considérons, en effet, un ensemble G de T_1 presque nul relativement à f_1: il suffit, de montrer que tout sous-ensemble de G appartient aussi à T_1. G appartenant à T_1, on a $G = R + e'$, l'ensemble R appartenant à H_c et e' étant une partie d'un ensemble e de H_c presque nul relativement à la fonction f. L'ensemble G étant presque nul relativement à f_1, on a $\int_G |df_1| = 0$. D'où $\int_R |df_1| + \int_e |df_1| = 0$. L'ensemble e étant une partie d'un ensemble de H_c presque nul relativement à f et f_1 coïncidant avec f sur les ensembles de H_c, on en déduit que l'ensemble R et par suite l'ensemble G sont des ensembles presque nuls relativement à la fonction f. Tout ensemble de la famille T_1 presque nul relativement à f_1 est presque nul relativement à f et il est compris dans un ensemble de H_c presque nul relativement à la fonction f. Toute partie d'un ensemble de T_1 presque nul relativement à f_1 est une partie d'un ensemble de H_c presque nul relativement à f: elle appartient donc à la famille T_1 et on voit par là que la famille T_1 est une famille complète par rapport à la fonction f_1. La famille T_1 étant complète relativement à f_1, on ne peut plus la prolonger par le précédé des ensembles normaux.

Exemple. La famille des ensembles linéaires mesurables de Lebesgue est complète relativement à la mesure de Lebesgue.

99. **Moyens de reconnaitre dans certaines cas si le prolongement d'une fonction par le procédé des ensembles normaux est possible.** Revenons au cas où nous nous donnons une fonction f sur une famille H_r additive au sens restreint. Le prolongement de la fonction f et de la famille H_r par le procédé des ensembles normaux est possible quand la fonction f est bornée et additive au sens complet sur la famille H_r. Mais comment reconnaitre si la fonction f satisfait à ces conditions? Il est assez facile de voir directement si la fonction f est bornée sur H_r. Pour voir si la fonction f est additive au sens complet on passe par l'intermédiaire de la décomposition canonique: $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ étant une infinité dénombrable d'ensembles de H_r disjoints et dont la somme est un ensemble E de H_c, il faut voir si l'on a

$$\varphi(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2) + \ldots + \varphi(E_n) + \ldots$$

Si la fonction φ est additive au sens complet, elle est aussi additive au sens restreint. D'après cette dernière condition, on a

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

$$\varphi(E_1+E_2+\ldots+E_n+\ldots) \geqslant \varphi(E_1+E_2+\ldots+E_n) = \\ = \varphi(E_1)+\varphi(E_2)+\ldots+\varphi(E_n).$$

Cette inégalité, vraie quel que soit n nous montre que que la fonction φ doit être telle que la série $\varphi(E_1)+\varphi(E_2)+\ldots+\varphi(E_n)+\ldots$ soit convergente et que sa somme soit inférieure ou égale à $\varphi(E_1+\ldots+E_n+\ldots)$. Finalement, pour que la fonction φ soit additive au sens complet, il faut et il suffit qu'elle soit additive au sens restreint et qu'elle satisfasse en outre à la condition:

$$\varphi(E_1+\ldots+E+\ldots) \leqslant \varphi(E_1)+\varphi(E_2)+\ldots$$

On peut remplacer cette dernière condition par la condition plus simple $\varphi(J) \leqslant \varphi(F_1)+\varphi(F_2)+\ldots$, où J est l'ensemble fondamental et $F_1, F_2, \ldots$ sont des ensembles quelconques (disjoints ou non) de H_r dont la somme est précisément J. On voit d'abord facilement que cette dernière condition entraîne la précédente: en effet l'ensemble $E_0 = J-(E_1+E_2+\ldots+E_n+\ldots)$ appartient à H_r et la somme des ensembles $E_0, E_1, E_2, \ldots$ est précisément J. La dernière s'écrit alors $\varphi(J) \leqslant \varphi(E_0)+\varphi(E_1)+\ldots+\varphi(E_n)+\ldots$ En faisant passer $\varphi(E_0)$ dans le premier membre, on retrouve la condition

$$\varphi(E_1+\ldots+E_n+\ldots) \leqslant \varphi(E_1)+\varphi(E_2)+\ldots+\varphi(E_n)+\ldots$$

Ainsi pour que le prolongement de la fonction f par les ensembles normaux soit possible, il faut que chacune des fonctions φ et ψ satisfasse aux deux conditions énoncées.

La condition $\varphi(J) \leqslant \varphi(F_1)+\varphi(F_2)+\ldots$ peut encore se simplifier, quand parmi les ensembles de la famille H_r on a pu former une famille d'ensembles M noins étendue que H_r et telle que tout ensemble de H_r soit la somme d'un nombre fini d'ensembles de M disjoints. (Nous avons donnée plus haut des exemples de familles M et en particulier le système moléculaire de la plus petite famille additive au sens restreint comprenant une famille d'ensembles donnée). Il suffit, quand une famille M existe, que la condition

$$\varphi(J) \leqslant \varphi(F_1)+\varphi(F_2)+\ldots$$

sont vérifiée quand $F_1, F_2, \ldots$ sont des ensembles de la famille M. Ceci résulte du fait que, si $F_1, F_2, \ldots$ sont des ensembles quelconques de H_r disjoints ou non, dont la somme est J, chacun de ces ensembles est la somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints de

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

$M : F_i = M_{i.1} + \ldots M_{i.p_i}$ et par conséquent $\Sigma\varphi(F_i) = \Sigma\varphi(M_{i.k})$. On a donc $\varphi(J) \leqslant \Sigma\varphi(M_{i.k})$, les ensembles $M_{i.k}$ étant des ensembles de la famille M, dont la somme couvre l'ensemble J.

Note supplémentaire.

Dans le mémoire ci après de M. Franck „*Sur une propriété des fonctions additives d'ensembles*", on trouve démontré en faisant usage des nombres transfinis, une proposition dont le sens est indépendant de la notion de nombres transfinis. Il serait donc utile de débarasser la démonstration de cette notion étrangère au but poursuivi.

La même proposition permet de compléter la décomposition, donnée dans mon mémoire, d'une fonction $f(E)$ additive au sens complet sur une famille T d'ensemble additive au sens complet. Soit en effet $g(E)$ la partie régulière de $f(E)$ et $u(E)$ sa variation totale. D'après la proposition de M. Franck, on peut décomposer tout ensemble E de F en deux ensembles P et N appartenant à T et sur chacun desquels g est monotone. Soit alors $F(A)$ une foncton égale à 1 si A est un élément de P et à -1 si A est un élément de N. Si l'on adopte la définition de l'intégrale sur un ensemble abstrait que j'ai proposée ailleurs[1]), $F(A)$ est intégrable par rapport à u sur P et sur N où F est constante, elle est donc intégrable sur $E = P + N$ et on a:

$$\int_E F(A)\,du = \int_P F(A)\,du + \int_N F(A)\,du = \int_P du - \int_N du = u(P) - u(N).$$

Finalement $g(E)$ se trouve ainsi représentée par l'integrale sur E d'une certaine fonction bornée $F(A)$ par rapport à une fonction additive *monotone* sans singularités à savoir la propre variation totale $u(E)$ de $g(E)$.

On conçoit sans que nous puissions développer ici ce point, que cette forme se prête à la transformation de g en une intégrale de même forme où F serait plus compliquée mais où u serait remplacée par une fonction monotone plus simple jouant le rôle de la mesure, par exemple.

[1]) Bull. Soc. Math. de F., t. XLIII, 1915, p. 248—265.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki