Sur l'homéomorphie des variétés à deux dimensions.

Par

S. Saks (Varsovie).

Première partie [1]).

Introduction.

1. L'objet principal de la Topologie est la recherche sur les propriétés invariantes des espaces topologiques subissant des transformations biunivoques et bicontinues, ainsi que celui de la géométrie affine est l'étude des invariants affines des figures géométriques. On voit bien que les plus importants parmi ces invariants sont ceux qui caractérisent complètement un espace considéré au point de vue de la Topologie et que je propose, par conséquent, d'appeler des invariants caractéristiques.

Dans les Mémoires [2]) qui sont devenus classiques, Camille Jordan a déterminé les invariants caractéristiques des surfaces bilatères, fermées, resp. percées par un nombre fini de trous. Grâce aux travaux ultérieurs, en premier lieu à ceux des géomètres américains MM. Alexander, Veblen et d'autres, le raisonnement de

[1]) Ce Mémoire constitue la première partie, modifiée légèrement, de ma Thèse présentée au mois de mai 1922 à l'Université de Varsovie pour obtenir le grade de docteur en philosophie.

La deuxième Partie sera consacrée à l'étude des domaines situés sur des surfaces compactes (fermées) ou dans le plan euclidien.

[2]) Jordan. *Résumé des recherches sur la symétrie des polyèdres. Journ. für r. u. a. Math.* 1866. Bd. 66. *Sur la déformation des surfaces. Journ. des Math.* 1866. T. 11. Möbius. *Theorie des elementaren Verwandtschaft. Werke, Bd. II.* p. 435.

On peut consulter aussi: les articles de M. Dehn publiés dans *„Math. Enzyklopädie"*, Bd. III 1 et dans *„Repertorium der höheren Geometrie"* de Pascal-Timerding (1910, p. 174); Brueckner: *Vielecke* et *Vielflache* 1910. pp. 65, 66.

Jordan a été complété et étendu aux surfaces unilatères [1]) Le couple formé par deux nombres, à savoir par le nombre de connexion d'une surface et par le nombre de trous dont la surface est percée se présente ainsi, d'après le théorème de Jordan, un invariant caractéristique de la famille des surfaces bilatères, ainsi que celle des surfaces unilatères.

C'est par des méthodes qui sont au fond d'ordre géometriques, ou bien algébriques, qu'on a obtenu ces résultats. Les méthodes de la Théorie des Ensembles, ou selon une expression de M. Veblen les „continuity considerations", fournissent, comme on sait, une base pour des raisonnements de cet ordre. Mais, d'autre part, c'est les méthodes de Cantor qui permettent d'aller aussi plus loin. En les suivant, je généralise, dans ce travail, le théorème de Jordan à une classe très étendue des surfaces, notamment de celles qui sont homéomorphes des domaines situés sur des surfaces compactes [2]); je propose d'appeler les surfaces de cette classe compactifiables. Je démontre que toute surface compactifiable est homéomorphe d'une surface compacte dépourvue d'un ensemble punctiforme et fermé P d'un type linéaire ν. Cette surface compacte étant bien déterminée par son nombre de connexion n, je démontre que le couple (n, ν) est un invariant caractéristique d'une surface compactifiable bilatère, ainsi que unilatère. Dans le cas, où la surface en question peut être régardée comme compacte percée d'un nombre fini m de trous, l'ensemble correspondant P est formé par m points, et réciproquement. En posant alors $\nu = m$, on retrouve l'invariant caractéristique de Jordan (n, m).

2. Remarquons encore qu'en vertu du précédent, toute surface

[1]) Veblen. *The Cambridge Colloquium 1916. P. II. Analysis Situs.* Brahana. *Annals of Mathematics 1920.* Nous ne citons pas des oeuvres, bien connus, de Poincaré sur l'Analysis Situs qui se rattachent, en premier lieu, aux variétés à un nombre de dimensions dépassant 2 dont nous ne nous occupons pas ici.

[2]) Je préfère appeler compactes les surfaces qui sont nommées ordinairement fermées. Car, la propriété d'être fermé a un sens précis et bien déterminé dans la Théorie des Ensembles, différent de celui que l'on y assigne dans la Topologie. P. ex. le plan est fermé au sens de Cantor, mais il ne l'est pas au sens de l'Analysis Situs. Pour éviter donc tout malentendu et pour rester d'accord avec la langage de la Théorie des Ensembles, j'emploie le mot compact au lieu de fermé, lorsqu'il s'agit de caractériser les surfaces telles que la sphère, le tore etc.

compactifiable peut être transformée en une surface compacte par l'adjonction d'un ensemble punctiforme, compact, d'un type linéaire et bien déterminé. On aboutit ainsi à une généralisation des procédés bien connus de l'adjonction d'un point „à l'infini" au plan ou à la bande de Möbius pour en obtenir resp. la surface de sphère ou le plan projective.

3. Pendant la rédaction de ce travail, j'ai pris connaisance des belles recherches de M. Antoine[1]) sur l'Analysis Situs. Elles se rattachent en certains points aux questions que j'étudie dans l'ouvrage présente. Le théorème 19 de ma Thèse (Chap. II, § 6) présente une généralisation d'un théorème de M. Antoine sur les ensembles parfaits, punctiformes, situés dans le plan. En autre lieu, j'utilise un ensemble P, parfait et punctiforme, dont l'existence dans l'espace à trois dimensions a été démontrée par M. Antoine; cet ensemble jouit de la propriété suivante: aucune homéomorphie entre lui et un ensemble situé sur une droite ne s'étend pas à la totalité de l'espace.

Avant de terminer, qu'il me soit permis ici d'adresser mes affectueux remercîments à MM. Mazurkiewicz et Sierpiński, les professeurs à l'Université de Varsovie, qui ont bien voulu orienter les débuts de ce travail, et à MM. Knaster et Kuratowski dont l'aide m'a été si précieuse pour la rédaction de ce Mémoire. C'est à M. Kuratowski qui a bien voulu s'intéresser à ce travail que je dois une gratitude particulière pour les simplifications qu'il a su apporter à plusieurs de mes énoncés ainsi que pour les renseignements bibliographiques dont j'ai tiré un grand profit.

Chapître I.

Généralités. Secteurs, domaines, surfaces.

Je commence par préciser ou rappeler quelques notions et énoncés.

§ 1. $\mathfrak{A}$ désignant une réunion d'ensembles, les symboles $\Sigma\mathfrak{A}$ et $\Pi\mathfrak{A}$ désignent resp. la somme et le produit de tous les ensembles de $\mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{A}$ ne contient qu'un nombre fini des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on pose aussi:

$$\Sigma\mathfrak{A} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

$$\Pi\mathfrak{A} = A \times A \times \ldots \times A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k$$

[1]) Antoine. *Sur l'homéomorphie de deux figures.* (Thèse) 1921.

$A \subset B$ designe: A est contenu dans B. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ désigne l'ensemble qui est la réunion d'un nombre fini d'éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$a \varepsilon A$ équivaut, par définition, à: $(a) \subset A$.

§ 2. Un ensemble T sera dit espace abstrait, lorsque à chaque sous-ensemble A de T correspond un seul ensemble $(A')_T$ (contenu ou non dans T) qui est appelé l'ensemble dérivé de A par rapport à T. Le éléments de $(A')_T$ sont dits les points d'accumulation de A (par rapport à T).

Un ensemble A peut faire partie de plusieurs espaces abstraits, et, par conséquent, il peut posséder plusieurs ensembles dérivés. C'est pourquoi que nous emploierons dans ce cas la notation $(A')_T$. Mais, lorsque l'ambiguité ne se présentera pas, l'indice T sera supprimé.

§ 3. Une transformation biunivoque φ d'un espace abstrait T en un autre $\overline{T}$ est dite homéomorphe, lorsque $A \subset T$ entraîne:

$$\varphi(A' \times T) = [\varphi(A)]' \times \varphi(T).$$

On en conclut immédiatement que la transformation réciproque φ^{-1} est homéomorphe en même temps que φ.

Deux espaces T, $\overline{T}$ sont dits homéomorphes, s'il existe une transformation homéomorphe de l'un en l'autre; ils sont dits aussi d'un même type topologique.

§ 4. Une propriété W d'un espace abstraits T est dite un invariant topologique, lorsque tout espace homéomorphe à T jouit de la même propriété. Un invariant topologique W sera appelé caractéristique pour des espaces d'une famille $\mathfrak{A}$, lorsque tous deux espaces de $\mathfrak{A}$ jouissant de la propriété W sont homéomorphes.

P. ex. la propriété d'être continu borné est un invariant caractéristique pour des ensembles linéaires; elle est un invariant, mais non caractéristique, pour des ensembles plans.

§ 5. Soit T un espace abstrait:

T est dit isolé, lorsque $A \subset T$ entraîne: $A' \times T = 0$.

Il est appelé fermé lorsque $A \subset T$ entraîne: $A' \subset T$.

Il est appelé fermé dans un espace $\overline{T}$, lorsque $A \subset T$ entraîne: $A' \times \overline{T} \subset T$.

Il est appelé compact dans $\overline{T}$, lorsque A désignant un sous-ensemble infini quelconque de T, la relation subsiste: $A' \times \overline{T} \neq 0$. Un espace compact en lui-même sera dit compact.[1]), tout court.

[1]) Nous assignons à la propriété d'être compact un sens un peu différent que MM. Fréchet et Hausdorff. (*Grundzüge der Mengenlehre.* 1914. p. 230).

T est dit **connexe** s'il contient plus d'un point et s'il n'est pas une somme de deux ensembles A et B tels que:

$$A \times B = A' \times B = A \times B' = 0 \text{ [1]}.$$

Un espace connexe et compact sera appelé aussi un **continu compact**.

Un espace est **punctiforme** lorsqu'il ne contient aucun continu compact.

Un point a de T est dit **multiple** lorsqu'il existe des continus C_1, C_2, C_3. tels que:

$$C_1 + C_2 + C_3 \subset T, \quad C_1 \times C_2 = C_2 \times C_3 = C_3 \times C_1 = (a).$$

§ 6. Un type topologique ν sera dit **somme** des types topologiques ν_1, ν_2, lorsqu'il est type d'un espace $T = T_1 + T_2$, où:

1° T_1, T_2 sont fermés et disjoints,

2° ν_1, ν_2 désignent resp. les types de T_1, T_2.

3° A étant un sous-ensemble quelconque de T, on a:

$$(A')_T = (A \times T_1)'_{T_1} + (A \times T_2)'_{T_2}.$$

On en tire immédiatement:

1° ν_1, ν_2 étant des types, il existe toujours un seul type $\nu = \nu_1 + \nu_2$.

2° l'addition des types est commutative et associative comme l'opération analogue de l'arithmétique.

Soit N un espace isolé et composé d'un nombre fini de n éléments. Le type d'un tel espace est bien deteterminé. Nous convenons de le désigner par le nombre naturel n.

On démontre aisément le théorème suivant:

Théorème 1. ν_1, ν_2, n étant des types topologiques et — en particulier — n étant un nombre naturel, la relation $\nu_1 + n = \nu_2 + n$ entraîne l'égalité: $\nu_1 = \nu_2$.

Démonstration: l'énoncé est évident dans le cas $n = 0$. Supposons que: $n = 1$. $\nu_k + 1$ $(k = 1, 2)$ est, conformément à la définition précédente le type d'un espace $\overline{T}_k = T_k + (a_k)$, T_k et (a_k) étant fermés et disjoints, et ayant des types ν_k et 1 resp.

Soit: $\nu_1 + 1 = \nu_2 + 1$. Je dis que:

$$\nu_1 = \nu_2. \tag{1}$$

D'après notre définition cette propriété est un invariant topologique. Pour des ensembles situés dans l'espace euclidien, elle équivaut à celle d'être **fermé et borné**.

[2]) v. Hausdorff op. cit. p. 244.

En effet, il existe une transformation homéomorphe φ de $\overline{T}_1$ en $\overline{T}_2$. Distinguons deux cas:

1° $\varphi(a_1) = a_2$. Donc, $\varphi(T_1) = \varphi(T_2)$, et $\nu_1 = \nu_2$.

2° $\varphi(a_2) \neq a_2$. Donc, aussi $\varphi^{-1}(a_2) \neq a_1$. Posons:

$$Q_1 = T_1 - (\varphi^{-1}(a_2)),\quad Q_2 = T_2 - (\varphi(a_1)). \tag{2}$$

On a:

$$\varphi[Q_1 + (\varphi^{-1}(a_2) + (a_1)] = Q_2 + (\varphi(a_1)) + (a_2),$$

ou:

$$\varphi(Q_1) + (a_2) + \varphi(a_1) = Q_2 + (\varphi(a_1)) + (a_2),$$

d'où:

$$\varphi(Q_1) = Q_2. \tag{3}$$

Or, a_2 est un point isolé de $\overline{T}_2$, et, par suite $\varphi^{-1}(a_2)$ l'est aussi par rapport à $\overline{T}_1$, donc, à plus forte raison, par rapport à $T_1 \subset \overline{T}_1$. Pareillement, $\varphi(a_1)$ est un point isolé de T_2. Or, on a d'après (2): $T_1 = Q_1 + (\varphi^{-1}(a_2))$, $T_2 = Q_2 + (\varphi(a_1))$. Donc, Q_1, Q_2 étant homéomorphes en raison de (3), T_1, T_2 les sont aussi. L'égalité (1) est donc justifiée.

Notre théorème étant ainsi démontré pour le cas $n=1$, on le prouve, en procédant par induction, pour n quelconque.

§ 7. On appelle **entourage à deux dimensions**, ou simplement **entourage**, un espace abstrait homéomorphe à l'intérieur d'un cercle: $x_1^2 + x_2^2 = 1$ du plan euclidien.

Un point a d'un espace T est dit **intérieur** (par rapport à T), s'il existe un entourage contenant x et contenu dans T.

L'ensemble de tous les points intérieurs d'un espace T sera désigné par $\mathfrak{J}(T)$ et appellé l'**intérieur** de T.

L'ensemble $T - \mathfrak{J}(T)$ sera appelé le **bord** de T et désigné par $\mathfrak{B}(T)$.

L'ensemble $(T + T') - \mathfrak{J}(T)$ sera appelé la **frontière** de T et désigné par $\mathfrak{F}(T)$.

Les points n'appartenant pas à $T + T'$ sont dits **extérieurs** à T.

§ 8. Un ensemble homéomorphe à un segment, resp. à un cercle est dit un **arc simple**, resp. une **courbe simple fermée**.

§ 9. Désignons par D le triangle $\mathrm{a}(0, 0)$, $\mathrm{b}(0, 1)$, $\mathrm{c}(1, 0)$, tracé dans le plan euclidien. Un espace abstrait δ est dit, par définition, un **triangle topologique** par rapport à une transformation homéomorphe π_δ, lorsque: $\delta = \pi_\delta(D)$. Les points $\pi_\delta(\mathrm{a})$, $\pi_\delta(\mathrm{b})$, $\pi_\delta(\mathrm{c})$ et les arcs $\pi_\delta(ab)$, $\pi_\delta(ac)$, $\pi_\delta(bc)$ sont appelés resp. les **sommets** et les **côtés** du triangle δ [1]).

Ainsi le triangle topologique est défini comme un couple (δ, π_δ), formé par un espace abstrait δ et une transformation homéomorphe π_δ de D en δ. Bien entendu, un même espace δ peut correspondre à deux triangles (δ, π_δ), (δ, π'_δ), qui sont considérés comme différents, lorsque les transformations correspondantes ne sont pas identiques. Dans ce cas, les côtés et les sommets des triangles considérés sont, en général, différents.

Deux triangles sont appelés **contigus** lorsque leur produit est un côté pour chacun d'eux. Une suite $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ $(n \geqslant 3)$ de n triangles est dite une **chaîne**, lorsque tous deux triangles successifs dans Δ sont contigus. Une chaîne Δ est appelée une **étoile**, lorsque les triangles δ_1 et δ_n sont aussi contigus et tous deux triangles de Δ qui ne sont pas successifs ou extrêmes, n'ont qu'un seul point commun [2]). On voit que tous les triangles d'une étoile ont un seul point commun, qui sera dit le **sommet** de l'étoile.

§ 10. J'appelle **secteur superficiel** un espace abstrait T satisfaisant aux conditions suivantes:

I. $A_1 + A_2 \subset T$ *entraîne* $(A_1 + A_2)' \times T = (A'_1 + A'_2) \times T$.

II. $A \subset T$ *implique:* $\mathfrak{J}(A) \times (T - A)' = 0$.

III. T *est connexe.*

IV. $\mathfrak{B}(T)$ *est compact et ne contient pas de points multiples.*

V. T *est somme d'un système* Δ *des triangles vérifiant les conditions suivantes:*

1⁰ *si* $\delta_1, \delta_2 \varepsilon \Delta$ *et* $\delta_1 \neq \delta_2$: $\mathfrak{J}(\delta_1) \times \mathfrak{J}(\delta_2) = 0$;

2⁰ *tout point de* T *appartient à un nombre fini de triangles* Δ;

3⁰ *lorsque* $\delta_1, \delta_2 \varepsilon \Delta$, $\delta_1 \times \delta_2 \neq 0$ *et* $\delta_1 \neq \delta_2$, δ_1, δ_2 *sont contigus, ou ils n'ont qu'un seul point commun;*

4⁰ *lorsque* $\bar{\Delta} \subset \Delta$, *la somme* $\Sigma\bar{\Delta}$ *est fermée dans* T [3]).

§ 11. Tout système Δ des triangles satisfaisant par rapport à un secteur superficiel T aux conditions V (1⁰, 2⁰, 3⁰, 4⁰) est nommé une **triangulation** [4]) de T. On voit, qu'une triangulation Δ de T étant donnée, on en peut déduire plusieurs autres. En particulier,

[1]) Cf. Weyl. *Die Idee der Riemannschen Fläche.* 1914. p. 21. Brouwer. *Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann.* 1912. t. 71. p. 97.

[2]) v. Weyl, op. cit. p. 21.

[3]) On peut rapprocher cette définition d'un secteur à celle d'une surface due à M. Weyl (op. cit. p. 21).

[4]) Weyl, op. cit. p. 22.

on peut construire une suite des triangulations $\{\Delta^{(n)}\}$ assujettie aux conditions suivantes:

A) $\Delta^{(0)} = \Delta$.

B) tout triangle de $\Delta^{(n+1)}$ est contenu dans un triangle de $\Delta^{(n)}$;

C) lorsque $x \varepsilon T$ et V est un entourage de x contenu dans T, il existe un nombre n_0 tel que $n \geqslant n_0$ et $x \varepsilon \delta \varepsilon \Delta^{(n)}$ entraînent $\delta \subset V$.

Nous appellerons une suite $\{\Delta^{(n)}\}$ vérifiant lesdites conditions fondamentale pour T.

§ 12. Soit Δ une triangulation d'un secteur T. Tout continu qui est contenu dans la somme des côtés des triangles de Δ sera appelé une ligne polygonale (Δ). Une ligne polygonale qui est un arc simple, ou une courbe simple fermée, sera appelée aussi simple (Δ), resp. simple fermée (Δ).

Nous conviendrons de dire qu'une triangulation (Δ) satisfait à l'énoncé de Jordan, lorsque toute ligne simple fermée Δ qui n'est pas contenue entièrement dans $\mathfrak{B}(T)$, découpe T. Nous dirons que T, lui-même, satisfait audit énoncé [1]), lorsqu'il est découpé par toute courbe simple fermée qui y est tracée et qui n'est pas contenue entièrement dans $\mathfrak{B}(T)$. Nous verrons, plus loin, que ces deux conditions sont équivalentes.

§. 13. Signalons les propriétés élémentaires des secteurs superficiels. Les théorèmes suivants sont des conséquences presque immédiates des définitions précédentes:

Théorème 2. $A \subset B \subset T$ [2]) entraîne: $A' \times T \subset B' \times T$.

Théorème 3. Lorsque $A \subset T$ et $A' \times T \subset A$, A est fermé dans T, et réciproquement.

Théorème 4. δ_1, δ_2 étant deux triangles non identiques d'une triangulation Δ de T, ces deux triangles sont contigus, ou ils n'ont qu'un point commun qui est un sommet pour chacun d'eux, ou bien, ils sont disjoints.

Théorème 5. δ étant un triangle appartenant à une triangulation Δ de T, il n'existe qu'un nombre fini de triangles Δ qui possèdent des points communs avec δ.

Théorème 6. Si $A \subset T$: $A' \times T = \sum_{\delta \varepsilon \Delta} (A \times \delta)'$, où Δ désigne une triangulation quelconque de T.

[1]) c.-à.-d. que T est „schlichtartig" selon M. Koebe. Cf. p. ex. Hurwitz-Courant. *Funktionentheorie*. 1922. p. 354.

[2]) Dans tous les énoncés 2—13, T désigne un secteur superficiel.

Théorèmé 7. Toute triangulation Δ d'un secteur T compact est formée par un nombre fini de triangles; réciproquement, lorsqu'une triangulation Δ et T est formée par la rénion d'un nombre fini de triangles, T est compact[1]).

Théorème 8. $\mathfrak{B}(T)$ est une somme d'un nombre fini des courbes simples fermées sans points communs, ou est un ensemble vide; lorsque Δ est une triangulation de T, lesdites courbes sont des lignes polygonales Δ.

Théorème 9. Toute triangulation de T est finie ou dénombrable.

Théorème 10. δ_1, δ_2 étant deux triangles d'une triangulation Δ, on peut déterminer une chaîne de triangles de Δ qui unit δ_1 et δ_2.

Théorème 11. P étant un ensemble compact situé sur T, il n'existe dans Δ qu'un nombre fini de triangles qui ont des points communs avec P[2]).

Théorème 12. Pour qu'un ensemble A situé sur T soit compact, il faut et il suffit, qu'il soit compact et fermé par rapport à T

Théorème 13. Q et P désignant deux ensembles compacts, disjoints et situés sur T, il existe dans toute suite fondamentale $\{\Delta^{(k)}\}$ des triangulations de T, une triangulation $\Delta^{(n)}$ telle que les relations $\delta \varepsilon \Delta^{(n)}$ et $\delta \times Q \neq 0$ impliquent: $\delta \times P = 0$[3]).

§ 14. Nous allons maintenant énoncer un lemme qui jouera un rôle fondamental dans nos raisonnements et qui sera généralisé dans le Chapitre suivant.

L e m m e 1 f o n d a m e n t a l. *Soient T et $\overline{T}$ deux secteurs superficiels compacts, leurs bords $\mathfrak{B}(T)$, $\mathfrak{B}(\overline{T})$ étant des sommes d'un même nombre des courbes fermées: $l_0, l_1, \ldots, l_n$, resp. $\overline{l_0}, \overline{l_1}, \ldots, \overline{l_n}$. Soit u une transformation homéomorphe de l_0 et $\overline{l_0}$. Supposons enfin qu'il existe sur chacun de ces deux secteurs des triangulations satifaisant à l'énoncé de Jordan.*

[1]) La notion du secteur c o m p a c t équivaut à celle de la v a r i é t é à d e u x d i m e n s i o n s au sens de M. V e b l e n (*The Cambridge Colloquium*. 1916. *Part II. Analysis Situs*. 1922. p. 45).

[2]) On pourrait supposer que P est compact seulement par rapport à T. Or, pour prouver l'énoncé 11 ainsi modifié, on ne saurait pas se passer sans l'a x i o m e d e c h o i x.

[3]) Nous supprimons la démonstration des théorèmes 2—13 qui ne présente pas des difficultés. Mentionnons seulement qu'elle implique le théorème bien connu de J o r d a n sur la coupure du plan par une courbe simple fermée (v. p. ex. H a u s d o r f f, op. cit. pp. 354, 379).

Ces hypothèses vérifiées, les secteurs considérés sont homéomorphes et, en particulier, une transformation homéomorphe de T en $\overline{T}$ peut être établie qui fasse correspondre des courbes l_i, $\overline{l}_i$ de même indice et qui soit identique à u aux points de l_0.

Dans notre Thèse, nous avons donné à ce lemme une démonstration directe et tout-à-fait élémentaire. Mais, elle peut être aisément ramenée au théorème célèbre de Jordan sur l'homéomorphie des surfaces [1]). (Réciproquement, ledit théorème peut être déduit facilement de notre lemme).

En effet, en ajoutant resp. à T et à $\overline{T}$ un certain nombre de triangles, on les transforme resp. en deux secteurs T^* et $\overline{T}^*$, compacts et simplement connexes [2]). Or, d'après le théorème mentionné de Jordan chacun de ces deux secteurs, est homéomorphe à la surface d'une sphère. Donc, T et $\overline{T}$ sont homéomorphes resp. de deux secteurs T^{**}, $\overline{T}^{**}$ situés sur une surface de sphère et limités par un même nombre de contours simples fermés, soient resp. $l_0^*, l_1^*, \ldots, l_n^*$ et $\overline{l}_0^*, \overline{l}_1^*, \ldots, \overline{l}_n^*$.

L'homéomorphie u étant, par hypothèse, établie entre l_0 et $\overline{l}_0$, une homéomorphie correspondante u^* est determinée entre l_0^* et $\overline{l}_0^*$. Or, en raison d'un théorème bien connu, on peut établir une transformation homéomorphe de T^{**} en $\overline{T}^{**}$, de manière que tout l_i^* soit transformé en $\overline{l}_i^*$ d'un même indice et que la correspondance entre l_0^* et $\overline{l}_0^*$ y soit identique à u^* [3]).

Notre lemme est, parsuite, justifié.

On conclut du lemme précédent l'énoncé suivant qui sera aussi généralisé dans le Chap. II:

Lemme 2. Une triangulation Δ d'un secteur superficiel compact T satisfaisant à l'énoncé de Jordan, le secteur T y satisfait aussi.

En effet, car d'après le lemme fondamental, T est homéomorphe d'une portion de surface de sphère.

§ 15. Avant de terminer ce chapitre précisons les définitions suivantes:

Un secteur superficiel T sera dit un domaine superficiel, lorsque: $\mathfrak{B}(T) = 0$.

Un domaine superficiel fermé sera dit une surface [4]).

[1]) Jordan. *Sur la déformation des surfaces. Journ. des Math.* 1866, t. XI. Veblen. op. cit. pp. 70—72. Brahana. *Annals of Mathematics.* 1920. vol. 23.

[2]) En effet, T^* et sa triangulation Δ^* peuvent être construits de façon que toute ligne polygonale simple fermée (Δ^*) soit homologue (selon Poincaré) à O. Cf. Veblen. op. cit pp. 55—56.

[3]) v. Antoine *Thèse.* 1921. p. 32.

[4]) On voit que notre définition de surface équivaut à celle de M. Weyl (op. cit. p. 20). La notion d'une surface compacte correspond à celle d'une surface fermée (geschlossene Fläche) au sens de M. Weyl, et à celles

Chapitre II.

Surfaces compactifiables.

§ 1. **Théorème 14.** Hypothèse: *Soit T un secteur superficiel dont une triangulation Δ satisfait à l'énoncé de Jordan. Soit $\mathfrak{B}(T)$ une somme de $n+1$ courbes simples fermées: $l_0, l_1, \ldots, l_n$ $(n \geqslant 0)$. Soient, en deuxième lieu, D_0 un triangle tracé dans le plan euclidien, et D_1, $D_2, \ldots, D_n$ un système des triangles disjoints, contenus à l'intérieur de D_0. Désignons enfin par u une transformation homéomorphe donnée de l_0 en $\mathfrak{B}(D_0)$.*

Thèse: *Le secteur donné T est homéomorphe d'un secteur plane $\overline{T} = D_0 - \sum\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{J}(D_k) - P$, où P est un ensemble punctiforme, fermé, situé sur un segment arbitrairement choisi à l'intérieur de $D_0 - \sum\limits_{k=1}^{k} \mathfrak{J}(D_n)$. De plus, on peut déterminer une transformation homéomorphe φ de T en $\overline{T}$ qui fasse correspondre l_i et $\mathfrak{B}(D_i)$ d'un même indice et qui soit identique à u aux points de l_0.*

Démonstration: soit T un secteur superficiel vérifiant les conditions de l'hypothèse. Soit $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots)$ une suite fondamentale[1]) des triangulations de T. On voit aisément, en vertu du lemme 2, que toutes les triangulations Δ_n satisfont à l'énoncé de Jordan.

On peut supposer que tout Δ_k soit la réunion d'un infini de triangles. En effet, dans le cas contraire, le secteur T serait compact (th. 7) et notre assertion se réduirait au lemme fondamental du Chapitre précédent.

Rangeons en une suite le système des triangles formé par la somme de toutes les triangulations Δ_k; soit:

$$(1) \qquad (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k.$$

Nous allons déterminer un système $\{M_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}\}$ des secteurs superficiels compacts et remplissant ensemble le secteur donné T. Commençons par définir M_0.

---

d'une variété fermée à deux dimensions au sens de Poincaré et de M. Veblen (op. cit. p. 45). La notion d'un secteur compact, dont le bord n'est pas vide, équivaut à celle d'une variété ouverte à deux dimensions au sens de M. Veblen (l. c.).

[1]) v. § 11, Chap. I.

Soit Δ_{k_1} une triangulation contenant le triangle δ_1. Soit

$$(2) \qquad \delta_{k_1}^{(1)},\ \delta_{k_1}^{(2)}, \ldots,\ \delta_{k_1}^{(s_1)}$$

la réunion (finie d'après le théorème 11) de δ_1 et de tous les triangles de Δ_{k_1} qui ont des points communs avec $\mathfrak{B}(T)$. La somme des triangles (2) peut être évidemment non-connexe. Or, en vertu du théorème 10, on peut la transformer en un continu compact par l'adjonction d'un nombre fini de triangles de Δ_{k_1}. On obtient ainsi une nouvelle suite

$$(3) \qquad \delta_{k_1}^{(1)},\ \delta_{k_1}^{(2)}, \ldots,\ \delta_{k_1}^{(s_2)} \qquad (s_2 \geqslant s_1)$$

dont la somme est connexe. Le bord de cette somme peut contenir des points multiples. Or, s'il existe de tels points, ils sont des sommets des triangles (3), et leur nombre est, par conséquent, fini. Soient $a_1, a_2, \ldots$ les points multiples du bord considéré. On peut, d'après le § 11 du Chapitre I, déterminer un nombre $k_2 \geqslant k_1$ tel que tout triangle de la triangulation Δ_{k_2} contienne, au plus, l'un seulement des sommets des triangles (3). Ajoutons à la somme des triangles (3) tous les triangles de Δ_{k_2} qui contiennent les points singuliers a_i. On obtient ainsi un nouveau continu compact C qui est une somme d'un nombre fini de triangles de Δ_{k_2}; chacun des triangles (3) en étant aussi une somme. Les points a_i étant intérieurs à C, on voit aisément que le bord $\mathfrak{B}(C)$ ne contient guère des points multiples et que C est un secteur superficiel compact.

$\mathfrak{B}(C)$ est donc une somme d'un nombre fini de lignes simples fermées (Δ_{k_2}). Désignons par $l_1, l_2, \ldots, l_{r_0}$ les lignes qui forment $\mathfrak{B}(C) - \mathfrak{B}(T)$. Δ_{k_2} satisfaisant à l'énoncé de Jordan, chacune des lignes envisagées l_i décompose T en deux parties dont elle est le produit. L'une de ces deux parties ne contient des points de $\mathfrak{B}(T)$; nous convenons de l'appeler i n t é r i e u r e par rapport à l_i et de la désigner par $I(l_i)$. Tout $I(l_i)$ et évidemment un secteur, compact ou non, borné par l_i correspondant. S'il est compact, nous l'ajouterons à C. On remplace ainsi le secteur C par un autre, qui sera désigné par M_0 et qui vérifie les conditions suivantes:

1° M_0 est une somme d'un nombre fini de triangles δ_i, et, par conséquent, il est compact;

2° $\delta_1 \subset M_0$;

3° $\mathfrak{B}(M_0)$ est une somme de $\mathfrak{B}(T)$ et d'un nombre fini de lignes polygonales simples fermées, disjointes de $\mathfrak{B}(T)$, qui seront désignées resp. par $l_{01}, l_{02}, \dots, l_{0p_0}$; les $I(l_{0k})\,(k=1,\dots,p_0)$ sont les secteurs non-compacts, bornés par l_{0k} correspondant.

En opérant maintenant de même sur chacun de p_0 secteurs $I(l_{0k})$, on obtient un système de p_0 secteurs $M_{01}, M_{02}, \dots, M_{0p_0}$, bornés resp. par les systèmes des lignes polygonales:

$$\begin{array}{l} l_{01};\ l_{011}, l_{012}, \dots, l_{01p_{01}}; \\ l_{02};\ l_{021}, l_{022}, \dots, l_{02p_{02}}; \\ \dots\dots\dots\dots \\ l_{0p_0};\ l_{0p_01}, l_{0p_02}, \dots, l_{0p_0p_{0p_0}}, \end{array}$$

telles que tous les secteurs

$$I(l_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3})\ (\alpha_1=0;\ \alpha_2=1, 2, \dots, p_{\alpha_1};\ \alpha_3=1, 2, \dots, p_{\alpha_1\alpha_2})$$

sont non-compacts. On voit aussi qu'on peut déterminer les secteurs $M_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1=0;\ \alpha_2=1, 2, \dots, p_{\alpha_1})$ de façon que leur somme, ajoutée à M_0, contienne le triangle δ_2 de la suite (1).

Procédons ainsi de suite. On détermine, par l'induction, le système $\{M_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\alpha_n}\}$ des secteurs superficiels c o m p a c t s, où:

$$\alpha_1=0;\ \alpha_2=1, 2, \dots, p_{\alpha_1};\ \alpha_3=1, 2, \dots, p_{\alpha_1\alpha_2}; \dots;\ \alpha_n=1, 2, \dots, p_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}},$$

la suite des valeurs de n étant essentiellement infinie.

Les propriétés de M_0 étant déjà énoncées (1°, 2°, 3°), nous allons préciser celles des autres secteurs du système envisagé. On a, pour $n>1$:

A) tout $M_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\alpha_n}$ est un secteur compact, contenu dans $I(l_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n})$ et borné par les lignes polygonales: $l_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$; $l_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n1}$, $l_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n2}, \dots, l_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_np_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}}$;

B) lorsque les indices $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ne coïncident pas, les secteurs $I(l_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n})$, $I(l_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n})$ sont disjoints;

C) pour tout n: $\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i \subset \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k)} M_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$, la sommation intérieure étant étendue à tous les indices $(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k)$ d'un même ordre k, supposé fixe.

On voit que les propositions 1°, 2°, 3°, A), B), C) déterminent complètement la structure du système $\{M_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}\}$. On voit aussi, d'après C) et (1), que:

$$T=\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)}M_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}. \tag{4}$$

Traçons dans le plan euclidien un triangle D_0 et n triangles disjoints $D_1, D_2, \ldots, D_n$ contenus à l'intérieur de D_0. Soit a un segment intérieur à $D_0 - \sum_{k=1}^{n} D_k$. Nous allons construire dans le secteur $D_0 - \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{I}(D_k)$ un système des secteurs $\{\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\}$ tels qu'à chacun de $M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ corresponde un seul $\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ d'un même indice, et réciproquement.

Soit $d_{01}, d_{02}, \ldots, d_{0p_0}$ un système des carrés disjoints, intérieurs à $D_0 - \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{I}(D_k)$, à diamètres inférieurs à 1 et à centres situés sur a. Désignons resp. par $l_{\alpha_1\alpha_2}$ $(\alpha_1 = 0;\ \alpha_2 = 1, 2, \ldots, p_0)$ les contours de ces carrés, et par M_0 le secteur compact, borné par $\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{B}(D_k) + \sum_{\alpha_2=1}^{p_0} l_{\alpha_1\alpha_2}$.

Le secteur $\overline{M}_0 = \overline{M}_{\alpha_1}$ déterminé, on peut déterminer, à leur tour les secteurs $\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2}$. Construisons à ce but, à l'intérieur de chaque $d_{\alpha_1\alpha_2}$ $p_{\alpha_1\alpha_2}$ carrés nouveaux, $d_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ $(\alpha_3 = 1, 2, \ldots, p_{\alpha_1\alpha_2})$, à diamètres inférieurs à $\frac{1}{2}$ et à centres situés sur a. Soient $l_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ les contours des carrés ainsi construits. On fait correspondre à chaque $M_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ le secteur plan, désigné par $M_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ et borné par $l_{\alpha_1\alpha_2}$ et les contours $l_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$.

La définition, par l'induction, des systèmes $\{d_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\}$, $\{\overline{l}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\}$, $\{\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\}$ s'impose immédiatement. On construit les carrés $d_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ de manière que leurs diamètres convergent uniformément à 0 avec $\frac{1}{n}$. On a, par conséquent:

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)} \overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = D_0 - \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{I}(D_k) - P = T,$$

où P est un ensemble punctiforme, fermé, situé sur le segment a[1]). On voit que les propositions 1°, 2°, A), B) subsistent, lorsqu'on y remplace $M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ et $l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ par $\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ et $\overline{l}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ respectivement.

On peut maintenant déterminer, par induction, un système d'homéomorphies entre les $M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ et les $\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ correspondant. Soit notamment φ_0 une transformation homéomorphe de M_0 et $\overline{M}_0$ qui fasse correspondre l_i et $\mathfrak{B}(D_i)$ d'un même indice. Les transformations

[1]) On voit que P est l'ensemble limite complet du système de carrés $\{d_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\}$.

$\varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ de $M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ en $\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ supposées déterminées pour $n \leqslant m$, soit $\varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}}$ une transformation homéomorphe de $M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}}$ en $\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}}$ qui coïncide avec $\varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ sur le contour polygonal $l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$

Un tel système des transformations existe, en vertu du lemme fondamental du Chapitre précédent (§ 14).

Or, on voit aussitôt, en raison de (4) et (5), que l'ensemble de ces transformations transforme d'une façon biunivoque et bicontinue T en $\overline{T}$. Notre assertion est, par suite, établie.

Nous avons supposé dans le théorème 14 que le secteur T en question ne soit pas un domaine; en effet, il est, par hypothèse, borné par un, au moins, contour simple qui lui appartient.

Or, ce théorème s'étend facilement aux domaines. A savoir:

Théorème 15. *Si une triangulation Δ d'un domaine superficiel satisfait à l'énoncé de Jordan, ce domaine est homéomorphe d'une surface de sphère, dépourvue d'un ensemble punctiforme, fermé et linéaire.*

Démonstration: envisageons un domaine superficiel D dont une triangulation Δ satisfait à l'énoncé de Jordan. Soit:

$$\delta \varepsilon \Delta,\ D_1 = D - \mathfrak{J}(\delta).$$

D_1 est un secteur superficiel dont $\Delta - (\delta)$ constitue une triangulation satisfaisant, aussi que Δ, à l'énoncé de Jordan. On a:

$$(6) \qquad D = D_1 + \delta,\ \mathfrak{B}(D_1) = \mathfrak{B}(\delta) = D_1 \times \delta,$$

où $D_1 \times \delta$ est le contour du triangle δ.

Soit, en deuxième lieu, $\overline{D}$ une surface d'un tétraèdre régulier inscrit à une surface de sphère K. Désignons par $\overline{D}_1$ la base de ce tétraèdre et soit $\overline{\delta} = \overline{D} - \mathfrak{J}(\overline{D}_1)$. On a:

$$(7) \qquad \overline{D} = \overline{D}_1 + \overline{\delta},\ \mathfrak{B}(\overline{D}_1) = \mathfrak{B}(\overline{\delta}) = \overline{D}_1 \times \overline{\delta}, \quad \text{où} \quad \overline{D}_1 \times \overline{\delta}$$

est le contour simple limitant $\overline{\delta}$ et $\overline{D}_1$. En vertu du théorème précédent, on sait déterminer une transformation homéomorphe φ_1 de D_1 en un secteur plan $\overline{D}_1 - P$, où P est un ensemble linéaire, punctiforme, fermé et situé à l'intérieur de $\overline{D}_1$. On peut aussi, d'après le lemme fondamental, établir une correspondance homéomorphe entre δ et $\overline{\delta}$, qui coincide avec φ_1 sur les contours $D \times \delta$ et $\overline{D} \times \overline{\delta}$. Or, d'après (6) et (7) ces deux correspondances fournissent ensemble une homéomorphie entre D et $\overline{D} - P$.

On transforme maintenant, par la projection du centre de la sphère considérée, le domaine $\overline{D}-P$ en un domaine $K-\overline{P}$ situé sur la surface sphérique K et borné par un ensemble fermé, punctiforme, linéaire $\overline{P}$. On obtient par suite la transformation désirée de D en le domaine $K-\overline{P}$.

§ 2. On déduit immédiatement des théorèmes 14 et 15 l'énoncé suivant qui généralise le lemme 2 du Chapitre précédent:

Théorème 16. *Si une triangulation d'un secteur superficiel satisfait à l'énoncé de Jordan, ce secteur lui satisfait aussi.*

Car, une triangulation d'un secteur satisfaisant audit énoncé, ce secteur est, en vertu des théorèmes du § précédent, homéomorphe d'un secteur plane, ou bien d'une surface de sphère.

§ 3. Nous allons généraliser les résultats du § 1, en utilisant une notion qui a été signalée déjà dans l'Introduction.

Définition. *Un domaine superficiel sera dit* compactifiable, *lorsqu'il est homéomorphe d'un domaine situé sur une surface compacte.*

On voit, d'après le théorème 15 que tout domaine satisfaisant à l'énoncé de Jordan est compactifiable. Or, il existe évidemment des domaines compactifiables qui ne satisfont pas audit énoncé. Nous allons énoncer une condition suffisante et nécessaire pour qu'un domaine soit compactifiable. Il faut d'abord prouver la proposition suivante:

Lemme 3. P étant un ensemble compact contenu dans un domaine superficiel T et ne le découpant pas, il existe une triangulation $\varDelta$ de T, formée par la réunion de deux systèmes disjoints, $\overline{\varDelta}$ et $\overline{\overline{\varDelta}}$, des triangles, tels que:

1° $\overline{\varDelta}$ soit une réunion d'un nombre fini de triangles;

2° $\Sigma\overline{\overline{\varDelta}}$ soit un secteur superficiel ne contenant pas des points de P.

Démonstration: soit $\{\varDelta_n\}$ une suite fondamentale des triangulations de T. Envisageons d'abord la triangulation $\varDelta_0$. Soit $\overline{\varDelta}_0$ la réunion de tous les triangles de $\varDelta_0$ contenant des points de P. En vertu du théorème 11 (Chap. I), $\overline{\varDelta}_0$ est un système fini. Soit: $\overline{\overline{\varDelta}}_0=\varDelta-\overline{\varDelta}_0$. On a évidemment:

$$P\subset\Im(\overline{\varDelta}_0),\ \text{donc:}\ P\times\Sigma\overline{\overline{\varDelta}}_0=0. \tag{8}$$

La somme $\Sigma\overline{\overline{\varDelta}}_0$ est, en général, non-connexe. Or, elle ne contient néanmoins qu'un nombre fini de constituants [1]. En effet, le nombre de ses constituants n'est pas supérieur au nombre de constituants de son bord. D'autre part $\mathfrak{B}(\Sigma\overline{\overline{\Delta}}_0) = \mathfrak{B}(\Sigma\overline{\Delta}_0)$, et ce dernier ensemble étant le bord d'une somme d'un nombre fini de triangles, est évidemment composé d'un nombre fini de constituants. Par suite, il en est de même de $\mathfrak{B}(\Sigma\overline{\overline{\Delta}}_0)$, et, à plus forte raison, de $\Sigma\overline{\overline{\Delta}}_0$. Soit donc:

$$\sum\overline{\overline{\Delta}}_0 = \sum_{s=1}^{i} C_s,$$

où C_s sont les constituants de $\Sigma\overline{\overline{\Delta}}_0$. P ne découpant pas, par hypothèse, T, on peut unir les C_s, l'un à l'autre, à l'aide de $i-1$ arcs simples, $l_1, l_2, \ldots, l_{i-1}$, sans points communs avec P. Or, d'après le théorème 13 (Chap. I), il existe une triangulation Δ_n telle que les relations:

$$(9) \qquad \delta\,\varepsilon\,\Delta_n \quad \text{et} \quad \delta \times \sum_{s=1}^{i} l_s \neq 0,$$

impliquent:

$$(10) \qquad \delta \times P = 0.$$

Ajoutons à $\Sigma\overline{\overline{\Delta}}_0$ la somme des triangles satisfaisant à (9) et, par conséquent, à (10), dont le nombre est, en vertu du théorème 11, fini. On obtient ainsi un ensemble connexe C qui est une somme d'un nombre, fini ou infini, de triangles Δ_n. Par un procédé analogue à celui qu'on a utilisé pour prouver le théorème 14 (§ 1), on enlève des points multiples lorsqu'ils se présentent dans le bord de C; nous ajoutons, en ce but, à C un nombre fini d'étoiles d'une triangulation Δ_m, convenablement choisie $(m > n)$. On obtient donc un secteur superficiel T_0 qui est une somme d'un nombre, fini ou infini, de triangles de Δ_m et qui ne contient pas des points de P. La triangulation Δ_m est celle que nous avons anoncée dans notre théorème. En effet, soit $\overline{\overline{\Delta}}_m$ l'ensemble des triangles de Δ_m dont la somme fournit T_0, et soit $\overline{\Delta}_m = \Delta_m - \overline{\overline{\Delta}}_m$. On voit immédiatement que la décomposition de Δ_m en $\overline{\Delta}_m$ et $\overline{\overline{\Delta}}_m$ satisfait à la condition 2° de notre

[1] On appelle un constituant (ou une composante) d'un point p dans un ensemble E le plus grand ensemble connexe contenant p et contenu dans E. Cf. Knaster et Kuratowski, *Fund. Math.* t. III, p. 215.

énoncé. Il reste donc à étudier la condition 1⁰ Or, pour obtenir de $\Sigma\overline{\Delta}_0\ T_0 = \Sigma\overline{\Delta}_m$, nous y avons ajouté un certain nombre de triangles de Δ_m nous avons donc enlevé en même temps, un certain nombre de triangles Δ_m de la somme $\Sigma\overline{\Delta}_0$ pour la transformer en la somme $\Sigma\overline{\Delta}_m$. Par suite, le système $\overline{\Delta}_m$ est une réunion d'un nombre fini de triangles Δ_m.

Notre assertion est donc démontrée complètement.

Théorème 17. 1⁰ *Pour qu'un domaine superficiel T soit compactifiable, il faut et il suffit qu'il y existe un ensemble compact dont le complémentaire, par rapport à T, soit un domaine satisfaisant à l'énoncé de Jordan.*

2⁰ *Si un domaine superficiel est compactifiable, il est homéomorphe d'une surface compacte dépourvue d'un ensemble linéaire, punctiforme et fermé.*

Démonstration: 1) Désignons par (A) la condition énoncée dans la première partie du théorème à démontrer. Nous allons prouver d'abord que la condition (A) est nécessaire. Il nous faut, pour ce but, faire appel à un théorème bien connu sur les surfaces compactes. Nous y donnons l'énoncé suivant, qui est plus restreint, mais qui suffit pour nos considérations[1]):

> (B) A toute surface compacte S on peut faire correspondre un nombre n tel que. si $\{\Delta_p\} = \Delta$ désigne une suite fondamentale des triangulations de S, le nombre de lignes simples fermées (Δ) disjointes qu'on puisse tracer sur la surface sans la découper, soit inférieur à n[2]).

Cette proposition auxiliaire établie, supposons que la condition (A) ne soit pas nécessaire. Il existe donc un domaine T' qui est homéomorphe d'un domaine situé sur une surface S compacte et qui ne satisfait pas à la condition (A). On peut évidemment supposer que T soit, lui-même, situé sur S.

Soit $\{\Delta_m\}$ une suite fondamentale des triangulations de S et soit $\Delta = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\Delta_m$. Il existe une triangulation Δ_1^* de T, contenue dans Δ. T ne vérifiant pas, par hypothèse, la condition (A), il ne satisfait

[1]) Weyl, op. cit p 76. Le raisonnement de M. Weyl ne se rattache qu'aux surfaces bilatères, mais on voit aisément qu'il peut être généralisé aux surfaces compactes quelconques, au moins s'il s'agit de l'énoncé dont nous faisons ici l'usage.

[2]) On peut remplacer dans cette proposition les lignes (Δ) par des courbes simples fermées quelconques. Or, la démonstration du théorème, ainsi modifié, serait plus compliqué, bien que l'énoncé même en soit plus simple et plus générale.

pas, à plus forte raison, à l'énoncé de Jordan; d'après le théorème 16 (§ 2), il existe donc une ligne polygonale (Δ_1^*), l_1, ne découpant pas T. $T - l_1$ est donc un domaine, et un système des triangles $\Delta_2^* \subset \Delta$ en fournit une triangulation. Il existe, d'après notre hypothèse, une nouvelle ligne simple fermée (Δ_2^*), l_2, tracée dans $T - l_1$ et ne le découpant pas. $T - (l_1 + l_2)$ est, par suite, un domaine superficiel ne satisfaisant pas à l'énoncé de Jordan, comme le secteur T ne vérifie pas la condition (A). n étant donc un nombre naturel quelconque, on peut ainsi, par procédé d'induction, déterminer dans T un système de n lignes simples fermées, $l_1, l_2, \ldots, l_n$, disjointes, dont la somme ne découpe pas T, et, à plus forte raison, $S \supset T$. Nous aboutissons ainsi à une contradiction avec (B) Notre assertion est donc démontrée.

2) Nous prouverons maintenant que la condition (A) est suffisante. Soit T un secteur superficiel qui la vérifie. Il existe donc un ensemble compact $P \subset T$ tel que $T - P$ soit un domaine satisfaisant à l'énoncé de Jordan. D'après le lemme 3, on peut déterminer une triangulation Δ de T, qui soit une réunion de deux systèmes disjoints des triangles, $\overline{\Delta}$, $\overline{\overline{\Delta}}$, satisfaisant, par rapport à T et P, aux conditions 1°, 2° dudit lemme.

On voit que le secteur T est compactifiable dans le cas: $\overline{\Delta} = 0$, ou $\overline{\overline{\Delta}} = 0$ Car, dans le premier cas $P = 0$ et, par conséquent, T, lui même, satisfait à l'énoncé de Jordan, donc, d'après 15, il est homéomorphe d'un domaine situé sur une surface de sphère. Dans le deuxième cas, où $\overline{\overline{\Delta}} = 0$, $\overline{\Delta} = \Delta$ est une réunion d'un nombre fini de triangles, et, en raison du théorème 7, le secteur T et lui-même compact.

Supposons donc que, $\overline{\Delta} \neq 0$ et $\overline{\overline{\Delta}} \neq 0$. Soit: $N = \Sigma \overline{\Delta}$, $M = \Sigma \overline{\overline{\Delta}}$, où M est un secteur superficiel contenu dans $T - P$, donc satisfaisant à l'énoncé de Jordan. Il existe par suite, en vertu du théorème 15, une transformation homéomorphe φ de M en un secteur plane $\overline{M} - R$, où $\overline{M}$ est un secteur compact situé dans le plan euclidien E, et R un ensemble linéaire, fermé et punctiforme. On peut remplacer, dans T, M par $\overline{M} - R$. Soit en effet: $T = \mathfrak{F}(M) + N$. Posons, par définition:

$$A'_{\overline{T}} = \{[A \times \mathfrak{I}(\overline{M})]'_E \times \mathfrak{I}(\overline{M})\} + \varphi^{-1}\{[A \times \mathfrak{I}(M)]'_M \times \mathfrak{B}(\overline{M})\} +$$
$$+ (A \times N)'_T \times N.$$

En raison de cette relation $\overline{T}$ peut être régardé comme un espace abstrait. Il est clair, en outre, que T est une surface compacte.

Désignons maintenant par φ_1 la transformation de T identique à φ aux points de $\Im(M)$ et n'altérant pas des points de N. On voit que φ_1 transforme d'une façon homéomorphe T en $\Im(\overline{M}-\overline{R})+$ $+N=\overline{T}-\overline{R}$. Le secteur T est donc compactifiable.

Or, $\overline{R}$ étant un ensemble linéaire, fermé et punctiforme, nous avons prouvé, en même temps, la deuxième partie de notre énoncé.

On peut donner facilement un exemple d'une surface qui ne soit pas compactifiable. Posons: $\varphi(x, y, n)=(x-n)^2+(y-n)^2-\frac{1}{4}$. L'ensemble des points (x, y, z) de l'espace euclidien à trois dimensions:

$$T=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[\varphi(x, y, n)=0,\ z^2\leqslant 1]+\prod_{n=-\infty}^{+\infty} E[\varphi(x, y, n)>0,\ z^2=1]$$

fournit une exemple d'une telle surface ne vérifiant pas la condition (A) du théorème précédent.

La surface de Riemann de la fonction $u=\log(x+a)(x+b)$ presente un autre exemple d'une surface non-compactifiable, lorsque $a\neq b$ (lorsque $a=b$, c'est un plan au point de vue de l'Analysis Situs).

§ 4. Nous sommes amenés, par la deuxième partie du théorème 17, à l'étude des domaines situés sur des surfaces compactes et étant des complémentaires des ensembles punctiformes. Nous allons les examiner de plus près dans ce § et le suivant.

Théorème 18. *Si P et $\overline{P}$ désignent deux ensembles punctiformes, compacts, contenus aux intérieurs de deux secteurs superficiels compacts T et $\overline{T}$ resp., et si $T-P$ et $\overline{T}-\overline{P}$ sont homéomorphes, toute homéomorphie entre $T-P$ et $\overline{T}-\overline{P}$ peut être étendue aux totalités des secteurs T et $\overline{T}$.*

Démonstration: soit $D=T-P$, $\overline{D}=\overline{T}-\overline{P}$, et soit φ une transformation homéomorphe de D en $\overline{D}$. Nous démontrerons d'abord la propriété suivante de cette transformation:

> (C) $\{a_n\}$ étant une suite des points de D convergeant vers un point p de P, la suite des points correspondant $\{\overline{a}_n=\varphi(a_n)\}$ tend vers un point $\overline{p}$ de $\overline{P}$.

Envisageons la suite $\{\overline{a}_n\}$. Le secteur $\overline{T}$ étant, par hypothèse, compact, la suite $\overline{a}_n$ y admet des points d'accumulation. Soit $\overline{p}$ l'un de ces points. Je dis que: $\overline{p}=\lim \overline{a}_n$.

Supposons le contraire. On peut donc extraire de la suite envisagée deux suites partielles $\{\overline{a}_{n_k}\}$, $\{\overline{a}_{m_k}\}$, dont l'une converge vers p, et l'autre vers un point $\overline{\overline{p}}\,\varepsilon\,\overline{P}$, $\overline{\overline{p}}$ étant différent de $\overline{p}$. Soit $\overline{\delta}$ un triangle situé sur T et contenant $\overline{p}$ à son intérieur. On peut déterminer dans $\mathfrak{J}(\overline{\delta})$ un autre triangle $\overline{\delta}^*$ jouissant des propriétés suivantes:

$$\text{(11)} \qquad \mathfrak{B}(\overline{\delta}^*)\times\overline{P}=0, \text{ donc: } \mathfrak{B}(\overline{\delta}^*)\subset\overline{D},$$

$$\text{(12)} \qquad \overline{p}\,\varepsilon\,\mathfrak{J}(\overline{\delta}^*), \quad \overline{\overline{p}}\,\varepsilon\,\mathfrak{J}(\overline{\delta}-\overline{\delta}^*)\text{ [1]}.$$

Il existe donc un nombre s tel que, pour $n_k, m_k > s$, on ait $a_{n_k}\varepsilon\,\mathfrak{J}(\overline{\delta}^*)$ et $a_{m_k}\varepsilon\,\mathfrak{J}(T-\overline{\delta}^*)$; par conséquent, les points a_{n_k} et a_{m_k} sont séparés, pour $n_k, m_k > s$, par la courbe $\mathfrak{B}(\overline{\delta}^*)$. Or, d'après (11) cette courbe est contenue dans le domaine $\overline{D}$, et par suite, lorsque $n_k, m_k > s$, les points a_{n_k}, a_{n_k} sont aussi séparés par la courbe $\varphi^{-1}[\mathfrak{B}(\overline{\delta}^*)]$.

D'autre part, cette courbe étant contenue dans D et ne contenant donc le point p, il existe un entourage U de p sans point commun avec $\varphi^{-1}[\mathfrak{B}(\overline{\delta}^*)]$. Or, la suite $\{a_n\}$ converge vers p et, par conséquent, les points a_{n_k}, a_{m_k} se trouvent, au moins pour les valeurs des indices n_k, m_k assez grandes, à l'intérieur de U et, par suite, on peut les joindre par un arc contenu dans U [2]) et, à plus forte raison, sans points communs avec $\varphi^{-1}[\mathfrak{B}(\overline{\delta}^*)]$. Nous aboutissons ainsi à une contradiction qui justifie notre énoncé.

La proposition (C) ainsi démontrée, et sa réciproque étant vraie par raison même de la symétrie, on peut évidemment établir une transformation biunivoque φ_1 de T en $\overline{T}$ jouissant des propriétés suivantes:

(13) $\varphi_1(a)=\varphi(a)$, lorsque $a\,\varepsilon\,D$, et: $\varphi_1^{-1}(\overline{a})=\varphi^{-1}(\overline{a})$ lorsque: $\overline{a}\,\varepsilon\,\overline{D}$.

(14) $\lim a_n=p$, entraîne $\lim \varphi_1(a_n)=\varphi_1(p)$, lorsque: $a_n\varepsilon D(n=1,2,\ldots)$ et réciproquement: $\lim \overline{a}_n=\overline{p}$ implique $\lim \varphi_1^{-1}(\overline{a}_n)=\varphi_1^{-1}(\overline{p})$, lorsque: $\overline{a}_n\varepsilon\,\overline{D}\,(n=1,2,\ldots)$.

[1]) $\overline{\delta}$ étant par définition, homéomorphe à un triangle d, situé dans le plan euclidien, la construction de $\overline{\delta}^*$ revient à celle d'un polygone tracé à l'intérieur de d et réalisant (11) et (12) par rapport à un ensemble punctiforme, fermé, plan. Or, l'existence d'un tel polygone est assurée grâce à un lemme de M. Painlévé. Voir aussi: Zoretti: *Thèse* (*Journ. des Math.* t. I, 1905). Antoine, *Thèse*, p. 115, Hausdorff, op. cit. p. 344.

[2]) Car un ensemble fermé, punctiforme ne découpe pas le domaine où il est situé. Hausdorff, op. cit. p. 343.

Nous allons prouver que cette transformation est continue.

Pour nous passer sans l'axiome de M. Zermelo, procédons ainsi:

Soient $\{\Delta_n\}$ et $\{\overline{\Delta}_n\}$ deux suites fondamentales des triangulations de T et de $\overline{T}$ resp. On peut évidemment déterminer une suite $\{r_n\}$ des points de D partout dense dans T (soit p. ex. $\{r_n\}$ l'ensemble des points qui sont les centres de gravité des triangles appartenant à $\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ et contenus dans D).

Soit maintenant:

$$A \subset T \quad \text{et} \quad b \,\varepsilon\, A' \times T. \tag{15}$$

Il faut démontrer que:

$$\overline{b} \,\varepsilon\, [\varphi_1(A)]', \quad \text{lorsque} \quad \overline{b} = \varphi_1(b). \tag{16}$$

Distinguons deux cas:

1° $b \,\varepsilon\, D$, donc: $b \,\varepsilon\, (D \times A)' \times T$ et, en vertu de (13):

$$\overline{b} = \varphi_1(b) = \varphi(b) \,\varepsilon\, [\varphi(D \times A)]' \times T \subset \varphi_1(A)]'.$$

2° $b \,\varepsilon\, P$. Soit alors $\{U_n\}$ une suite décroissante des entourages de b, telle que:

$$(b) = \prod_{n=1}^{\infty} U_n. \tag{17}$$

D'après (15) on a pour tout n: $U_n \times A \neq 0$; on peut donc, pour toute valeur de n, choisir dans la suite $\{r_n\}$ un point r_{k_n} tel que:

(18) $r_{k_n} \,\varepsilon\, U_n$, donc, d'après (17), $\lim r_{k_n} = b$; et

(19) qu'on puisse déterminer un triangle appartenant à une triangulation Δ_s d'ordre s dépassant n qui contienne le point $\varphi(r_{k_n})$, ainsi que des points de $\varphi_1(A)$.

Donc, d'après (14) et (18): $\overline{b} = \varphi_1(b) = \lim \varphi_1(r_{k_n})$, et, en vertu de (19), le point $\overline{b}$ est aussi un point d'accumulation de $\varphi_1(A)$. La rélation (16) est donc complètement justifiée.

La transformation φ_1 étant, par suite, continue, elle est bicontinue par raison même de symétrie. Notre théorème est donc démontré.

§ 5. On peut donner plusieurs généralisations au théorème que nous venons de prouver. Nous en énoncerons l'une dans la deuxième partie de ce Mémoire; l'ensemble punctiforme fermé y sera remplacé par un ensemble fermé ne découpant pas localement [1]) la surface où il est situé. Ici, nous nous bornons seulement aux remarques suivantes:

la propriété des secteurs T, $\overline{T}$ d'être compacts est essentielle dans notre énoncé. Supposons p. ex. que, $T=\overline{T}$ soit le plan euclidien dépourvu de la suite des points $(0, n)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Soient P un ensemble composé d'un seul point et $\overline{P}$ un ensemble formé par la réunion de deux points de T. On voit que les domaines $T-P$ et $T-\overline{P}$ sont homéomorphes, bien que les ensembles P et $\overline{P}$ ne les soient pas.

Lorsque $\mathfrak{J}(T)$ et, par conséquent, $\mathfrak{J}(\overline{T})$, sont des domaines compactifiables, bien que T et $\overline{T}$ ne soient pas compacts, l'homéomorphie de D et $\overline{D}$ entraîne la relation:

$$\nu+\alpha=\overline{\nu}+\overline{\alpha}\ {}^{2)}, \tag{20}$$

où ν, $\overline{\nu}$ désignent resp. les classes [3]) de $\mathfrak{J}(T)$ et $\mathfrak{J}(\overline{T})$ et α, $\overline{\alpha}$ les types topologiques de P et $\overline{P}$. Si les classes ν et $\overline{\nu}$ sont, de plus, égales et finies, on déduit de (20), en vertu du théorème 1 (Chap. I), l'égalité:

$$\alpha=\overline{\alpha}, \tag{21}$$

On peut aussi, dans ce cas, étendre toute homéomorphie entre D et $\overline{D}$ aux totalités de T et $\overline{T}$. Tels sont p. ex. le cas du plan euclidien, de la surface de cylindre, de la bande de Möbius, etc.

On voit, d'après l'exemple précédent, que notre théorème, et même la relation (21), tombent en défaut dans le cas où la classe de $T=\overline{T}$ est infinie.

§ 6. Lemme 4. *P étant un ensemble punctiforme, compact, contenu à l'intérieur d'un secteur T, il existe sur T des triangles contenant P à leurs intérieurs; chacun de ces triangles peut être transformé en un rectangle situé dans le plan euclidien de sorte qu'un ensemble linéaire corresponde à l'ensemble P.*

Démonstration: on détermine, par le procédé déjà connu et utilisé dans les démonstrations du théorème 14 (§ 1) et du lemme 3 (§ 3), un secteur compact T_1 contenu dans T et contenant P à son intérieur. Le secteur T_1 étant compact par définition, les domaines $\mathfrak{J}(T_1)$ et $\mathfrak{J}(T_1)-P$ sont compactifiables. Donc, d'après le théorème 17 (§ 3), il existe dans $\mathfrak{J}(T)-P$ un ensemble compact A tel que $\mathfrak{J}(T_1)-P-A$ soit un domaine satisfaisant à l'énoncè de Jordan. $\mathfrak{J}(T)-A$ est donc aussi un domaine contenant l'ensemble P. On peut, parsuite, déterminer, comme plus haut, un secteur compact T_2 contenu dans $\mathfrak{J}(T_1)-A$ et contenant P à son intérieur. T_2-P est aussi un secteur, car P, étant un ensemble compact punctiforme,

[1]) *Voir:* § 8 de ce Chapitre.

[2]) v. Chap. I, § 6.

[3]) v. § 8 de ce Chapitre.

ne le découpe pas; on a, en outre: $T_2 - P \subset \mathfrak{J}(T_1) - P - A$, donc $T_2 - P$ satisfait à l'énoncé de Jordan. On peut donc, en vertu du théorème 14 (§ 1), le transformer en un secteur plan $\overline{T}$ limité par un nombre fini de contours simples et dépourvu d'un ensemble punctiforme, fermé $\overline{P}$, situé sur un segment a intérieur à $\overline{T}$. Nous avons ainsi transformé $T_2 - P$ en $\overline{T} - \overline{P}$. Or, d'après le théorème 18, cette transformation peut être étendue aux totalités de T_2 et $\overline{T}$. Soit donc φ une homéomorphie telle que:

$$\varphi(T_2) = \overline{T} \quad \text{et} \quad \varphi(P) = \overline{P}. \tag{22}$$

Traçons à l'intérieur de $\overline{T}$ un rectangle R contenant, de sa part, le segment a à son intérieur. Soit: $\delta = \varphi^{-1}(R)$. δ est un triangle situé sur T et contenant P à son intérieur. La première partie de notre lemme est ainsi démontrée.

Or, nous avons transformé, en même temps, le triangle δ en le rectangle plan R de sorte qu'un ensemble $\overline{P}$ situé sur le segment a corresponde à P; il est d'ailleurs clair que tout autre triangle contenant P à son intérieur peut être transformé de même façon. Notre lemme est donc prouvé complètement.

Lemme 5. P et $\overline{P}$ étant deux ensembles punctiformes, fermés, homéomorphes et situés sur un segment a contenu à l'intérieur d'un rectangle R, on peut étendre toute homéomorphie entre P et $\overline{P}$ à la totalité de R, de sorte que R soit transformé en lui même et que les points du contour de R ne soient pas altérés.

Démonstration: soit un ensemble fermé, punctiforme H situé sur une droite. Convenons d'appeler portion de H tout sous-ensemble H_1 de H tel que, si x_1, x_2 sont deux points de H_1, tout point de H, situé dans l'intervalle (x_1, x_2), appartienne aussi à H_1. La proposition suivante peut être regardée comme évidente:

(U): H étant un ensemble fermé, punctiforme, borné et situé sur une droite, on peut décomposer H en deux portions disjointes, aux diamètres inférieurs à $\frac{2}{3}\varrho(H)$.

Soit maintenant P l'ensemble punctiforme, fermé, donné par notre énoncé. On peut, en vertu de (U), le décomposer en deux portions P_0, P_1, sans points communs et aux diamètres inférieurs à $\frac{2}{3}\varrho(P)$. On procède de même sur chacun des ensembles P_0, P_1, et on obtient quatre nouvelles portions de P, notamment, $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$, disjointes et telles que: $P_0 = P_{00} + P_{01}$, $P_1 = P_{10} + P_{11}$, $\varrho(P_{\alpha_1\alpha_2}) < \frac{4}{9}\varrho(P)$

$(\alpha_1, \alpha_2 = 0$, ou $= 1)$. On est amené ainsi à un système des ensembles $\{P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\}$ dont la définition par l'induction s'impose et qui vérifie les conditions suivantes:

(I) à toute suite finie $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, où α_i sont égaux à 0 ou à 1, correspond un seul ensemble $P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ qui est une portion de P.

(II) $P = P_0 + P_1$, et pour tout n: $P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,0} + P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,1}$.

(III) lorsque les indices $(\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n)$, $(\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_n)$ d'un même ordre n ne sont pas identiques, les ensembles $P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, $P_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$ sont disjoints.

(IV) $\varrho(P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$ [1]) tend uniformément à 0. avec $\frac{1}{n}$.

Posons: $P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \varphi(\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$, où φ désigne une homéomorphie donnée entre P et $\overline{P}$. On voit aisément que les ensembles $\overline{P}$, $\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ réalisent aussi les conditions (I—IV) avec la réstriction qu'ils ne sont pas, en général, des portions par rapport à $\overline{P}$. C'est pour les décomposer effectivement en des portions (par rapport à $\overline{P}$), nous énoncérons d'abord quelques propositions auxiliaires et déterminerons certaines opérations qui nous seront utiles plus loin:

(V) Lorsqu'un ensemble fermé, punctiforme H situé sur un segment, est une somme d'un nombre fini d'ensembles fermés et disjoints $H_1, H_2, \ldots, H_n$, on peut décomposes chacun de ces ensembles en un nombre fini de portions par rapport à H, sans points communs.

En effet, soit Δ l'ensemble des intervalles contigus à l'ensemble fermé $H_2 + H_3 + \ldots + H_n$. L'ensemble H_1 est contenu dans la somme des intérieurs de ces intervalles. Or, cet ensemble étant fermé et borné, il n'existe qu'un nombre fini d'intervalles de Δ qui contiennent des points de H_1. Soient donc: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ ces intervalles. Posons: $H_1^{(i)} = \delta_i \times H_1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. On a: $H_1 = \sum_{i=1}^{k} H_1^{(i)}$ les ensembles $H_1^{(i)}$ étant évidemment disjoints entre eux et des portions par rapport à H. Par procédé tout à-fait analogue, on décompose de même les autres ensembles H_s $(s = 2, 3, \ldots, n)$.

(W) Soient $H = H^{(1)} + H^{(2)} + \ldots + H^{(n)}$ une décomposition en des portions disjointes d'un ensemble fermé, punctiforme situé sur un segment et contenu à l'intérieur d'un rectangle S. On peut alors faire correspondre à chacun des ensembles $H^{(i)}$ un rectangle $R[H^{(i)}]$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées:

[1]) P étant un ensemble situé dans un espace euclidien, $\varrho(P)$ désigne son diamètre.

1° $H^{(i)} \subset \Im[R(H^{(i)})]$, 2° $R[H^{(i)} \subset \Im(S)$, 3° $R[H^{(i)}] \times R[H^{(k)}] = 0$, lorsque $i \neq k$, 4° $\varrho[R(H^{(i)})] < 2\varrho(H)$.

(X) Conservons le sens des symboles H, S et R de la proposition précédente et supposons H décomposé en des portions disjointes $H_k^{(i)}$ rangées à l'aide de deux indices; soit donc:

$$H = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{r_k} H_k^{(i)}. \quad \text{Posons encore:} \quad H_k = \sum_{i=1}^{r_k} H_k^{(i)}.$$

On peut alors faire correspondre à chacun des ensembles H_k un polygone $N(H_k)$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées:

1° $\sum_{i=1}^{r_k} R(H_k^{(i)}) \subset \Im[N(H_k)]$, 2° $N(H_k) \subset \Im(S)$, 3° $N(H_k) \times N(H_i) = 0$, lorsque $i \neq k$.

En effet, partageons la famille des rectangles $R(H_k^{(i)})$ en n groupes dont chacun contienne des rectangles à même indice inférieur k. On peut évidemment unir tout rectangle $R(H_1^{(i)})$ avec le suivant $R(H_1^{(i+1)})$ $(i = 1, 2, \ldots, r_1 - 1)$ par une bande polygonale de sorte qu'on obtienne un polygone $N(H_1)$ satisfaisant aux conditions 1°, 2° de notre proposition et disjoint de tous les rectangles $R(H_k^{(i)})$ pour $k \neq 1$. On procède de même sur les autres groupes des rectangles $R(H_k^{(i)})$ $(k = 2, 3, \ldots)$ et on obtient ainsi les polygones $N(H_1)$, $N(H_2), \ldots$, $N(H_n)$ jouissant des propriétés (1°, 2°, 3°) de l'énoncé (X).

Les remarques préliminaires faites, nous revenons aux ensembles donnés P et $\overline{P}$. Nous déterminerons une suite des nombres $n_1 < < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ et en même temps, nous construirons un système des ensembles fermés $\{\overline{P}^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n_k}}\}$, où α_i sont, comme toujours, égaux à 0 ou à 1, et i parcourt, pour $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n_k})$ fixe, les valeurs 1, $2, \ldots, r_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$, $r_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ ne dépendant que de l'indice $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n_k})$. Nous ferons ensuite correspondre à tout ensemble $\overline{P}^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ un rectangle $R[\overline{P}^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}]$ et à tout ensemble $\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ un polygone, $N[\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}]$, ce rectangle et ce polygone contenant à ses intérieurs resp. $\overline{P}^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ et $\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$.

Posons, par définition, $n_1 = 1$, et envisageons les ensembles $\overline{P}_{\alpha_1}$ c.-à.-d. $\overline{P}_0$ et $\overline{P}_1$. En vertu de (V), on peut décomposer chacun de ces deux ensembles en des portions (par rapport à $\overline{P}$), disjointes l'une de l'autre. Soit $\overline{P}_{\alpha_1} = \sum_{i=1}^{r_{\alpha_1}} P_{\alpha_1}^{(i)}$ cette décomposition. On sait, d'après (W), déterminer pour chacune des portions $\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}$ un rectangle $R[\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}]$ de sorte que les conditions (W: 1^0, 2^0, 3^0, 4^0) soient vérifiées par rapport à $\overline{P}$, à ses portions $\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}$ et au rectangle donné R qui contient, par hypothèse, $\overline{P}$ à son intérieur. On effectue ensuite l'opération (X) et on construit deux polygones $N(\overline{P}_{\alpha_1})$ disjoints, contenus à l'intérieur de R et contenant à ses intérieurs resp. les ensembles $\overline{P}_{\alpha_1} (\alpha_1 = 0, 1)$.

Le nombre n_1, les portions $\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}$, les rectangles $R[\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}]$ et les polygones $N[\overline{P}_{\alpha_1}]$ sont ainsi bien déterminés.

Allons plus loin. Les ensembles $\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}$ étant fermés et disjoints, on peut, par raison de la continuité de φ et en vertu de (IV), déterminer un nombre n_2 de manière que tout ensemble $\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_2}}$ soit contenu entièrement dans l'un des ensembles $\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}$, et, à plus forte raison, à l'intérieur d'un rectangle $R[\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}]$. Supposons α_1 et i fixes, et envisageons ceux des ensembles $\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_2}}$ qui sont contenus dans $\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)} \subset \mathfrak{J}[R(\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)})]$. On les décompose, en vertu de (V), en un nombre fini de portions $\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_2}}^{(i)} (i = 1, 2, \ldots, r_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_2}})$, et on fait, à son tour, correspondre à ces portions des rectangles $R[\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_2}}^{(i)}]$, qui vérifient les conditions de l'énoncé (W) par rapport au rectangle $R[\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}]$, à l'ensemble $\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}$ et à ses portions $\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_2}}^{(i)}$. Ces rectangles établis à l'intérieur du rectangle $R[\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}]$, on y applique l'opération (X), on construit ainsi un système des polygones $N(\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_2}})$ dont chacun se trouve à l'intérieur du rectangle $R[\overline{P}_{\alpha_1}^{(i)}]$ et contient l'ensemble $\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_2}}$ qui lui correspond.

Le nombre n_2 établi, on détermine ainsi, en faisant varier les indices α_1 et i, tous les rectangles $R[\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_2}}^{(i)}]$ et tous les polygones $N[\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_2}}]$. On procède ainsi de suite. On obtient, par l'induction, les systèmes annoncés, les conditions suivantes étant réalisées:

(V) à tout indice $(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{n_k})$ correspond un seul ensemble fermé $\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$[1]) et un seul polygone $N[\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}]$ qui contient ledit ensemble à son intérieur;

[1]) On peut admettre que certains de ces ensembles sont vides; néanmoins, on peut leur faire correspondre des rectangles N de sorte que toutes les conditions (V—VIII) subsistent.

(VI) tous deux polygones $N[\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}]$, $N[\overline{P}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n_k}}]$, aux indices d'un même ordre et différents, sont disjoints;

(VII) $N[\overline{P}_0] + N(\overline{P}_1) \subset \Im R)$, et pour tout $(\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{n_k})$ supposé fixe: $\Sigma N[\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}\beta_{n_k+1}\ldots\beta_{n_{k+1}}}] \subset \Im[N(\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}})]$, la sommation s'étendant à tous les systèmes $(\beta_{n_k+1}, \beta_{n_k+2}, \ldots, \beta_{n_{k+1}})$, où $\beta_i = 0$, ou $=1$.

(VIII) diamètres des polygones $N[\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}]$ tendent informément vers 0 avec $\frac{1}{k}$ [1]).

Ceci étant, on peut faire correspondre à toute suite infinie $(\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots)$ un seul point, $\overline{p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, notamment celui qui, en vertu de (VIII) et (VII), est le produit de la suite des polygones $N(\overline{P}_{\alpha_1})$, $N(\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_2}})$, $N(\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}})$,... Désignons par $\overline{P}^*$ l'ensemble de tous les points $\overline{p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ ainsi définis. On voit, en vertu de (II, V, VIII) que: $\overline{P} \subset \overline{P}^*$.

Soit, d'autre part $\overline{l}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ le contour du polygone $N(\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}})$; désignons par $\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ le secteur plan compact limité par $\overline{l}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ et des contours $\overline{l}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_{k+1}}}$ qui sont contenus à l'intérieur de $\overline{l}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$. Désignons encore par $\overline{M}$ le secteur limité par les contours $\overline{l}_0$, $\overline{l}_1$ et par celui ds R.

On a:

$$R = \Sigma \overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}} + \overline{P}^*, \tag{23}$$

la sommation s'étendant à tous les indices $(\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{n_k})$, $(k=1, 2,\ldots)$.

Envisageons maintenant l'ensemble P. Il est clair, en vertu de (I—IV), qu'on peut faire correspondre à tout ensemble $P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ un polygone (et même un rectangle) $N[P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}]$ de façon que les propositions (V—VIII) subsistent, lorsqu'on y remplace partout $\overline{P}$ par P. Ces polygones établis, la définition des secteurs M, $M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$, des

[1]) Car, d'après notre mode de construction $N[P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_{k+1}}}]$ se contient dans un rectangle $R[\overline{P}^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}]$, dont le diamètre est, en vertu de (W: 4°), plus petit que $2\varrho[\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}]$. En tenant compte de (IV) et de la continuité de φ, on obtient donc l'assertion (VIII). C'est pour pouvoir démontrer (VIII), que nous nous sommes servis des rectangles $R[\overline{P}^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}]$ dans la construction des polygones $N[\overline{P}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}]$.

contours $l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ et de l'ensemble P^*, est exactement analogue à celle de $\overline{M}$, $\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$, $\overline{l}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ et P^*. On voit aussi que la relation (23) subsiste pour $M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ et P^*.

On peut établir à présent un système des homéomorphies $\{u_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}\}$ entre les secteurs $M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ et $\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$. Soit d'abord u une homéomorphie entre M et $\overline{M}$ qui n'altère pas des points situés sur contour de R et qui fasse correspondre l_0 et $\overline{l}_0$, ainsi que l_1 et $\overline{l}_1$. Les transformations $u_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_k}}$ supposées déterminées pour $k \leqslant m$, on établit la transformation $u_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_m}\ldots\alpha_{n_{m+1}}}$ du secteur $M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_m}\ldots\alpha_{n_{m+1}}}$ en $\overline{M}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_m}\ldots\alpha_{n_{m+1}}}$ de manière qu'elle fasse correspondre les contours $l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_{m+1}}}$, $\overline{l}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_{m+1}}}$ d'un même indice et qu'elle coïncide avec $u_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_m}}$ sur le contour $l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_m}}$. L'existence de telles homéomorphies est assurée par le lemme fondamental du Chap. I (§ 14).

Faisons enfin correspondre les points $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ et $\overline{p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ d'un même indice.

Ces transformations établies, elles transforment ensemble le rectangle R en lui-même, de façon biunivoque et bicontinue, et n'altérant aucun point de son contour. Or, on voit que lorsqu'un point $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ appartient à P, son transformé $\varphi(p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})$ coïncide avec $\overline{p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. La transformation obtenue est donc une extension de φ satisfaisant aux conditions de notre lemme qui est par suite prouvé.

On déduit comme corollaire immédiat de ce lemme et du précédent le suivant.

Théorème 19. *Si P et $\overline{P}$ sont deux ensembles punctiformes, compacts et homéomorphes, contenus aux intérieurs de deux secteurs superficiels homéomorphes T et $\overline{T}$ resp., toute homéomorphie entre P et $\overline{P}$ peut être étendue aux totalités de T et $\overline{T}$.*

Démonstration: on peut supposer évidemment, sans restreindre l'énoncé, que $T = \overline{T}$. Soit φ une homéomorphie entre P et $\overline{P}$. P et $\overline{P}$ étant punctiformes et compacts, leur somme l'est aussi. On peut donc, en vertu du lemme 4, déterminer un triangle $\delta \subset T$ contenant $P + \overline{P}$ à son intérieur. En tenant compte des lemmes précédents, on peut donc étendre l'homéomorphie φ à la totalité du triangle δ de façon qu'il soit transformé en lui même et que les points de son contour ne soient pas altérés. En supposant, en outre, tous les points extérieurs à δ non altérés, ou obtient l'extension cherchée de φ à la totalité de T [1]).

§ 7. Les théorèmes 18 et 19 suggèrent d'une façon bien naturelle le problème de leur extension aux variétés à un nombre de dimensions plus élévé. Cette généralisation peut être réalisée pour e cas du théorème 18, et la démonstration reste essentiellement la même. Cependant, le théorème 19 tomberait en défaut, même pour l'espace euclidien à trois dimensions Car, il existe, d'après un théorème de M. Antoine [2]), dans l'espace deux ensembles P, $\overline{P}$ punctiformes, parfaits, bornés et homéomorphes, dont aucune homéomorphie ne peut être étendue à la totalité de l'espace. Désignons resp. par D, $\overline{D}$ les domaines qui sont complémentaires des ensembles considérés. Je dis qu'ils ne sont pas homéomorphes, bien que P, $\overline{P}$ les soient En effet, supposons, par contre, qu'il existe l'homéomorphie entre D et $\overline{D}$. Or, le théorème 18 étant valable pour l'espace, on pourrait étendre cette homéomorphie à la totalité de l'espace, contrairement à l'assertion de M. Antoine.

Observons aussi que la propriété des ensembles considérés d'être compacts est essentielle pour notre proposition 19. Il ne suffirait même de supposer que ces ensembles soient fermés par rapport à la surface T. Pour le montrer, soit T le plan euclidien dépourvu d'un seul point $(0, 0)$, P la suite des points $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ et $\overline{P}$ celle des points $(0, n)$. On voit que P et $P+\overline{P}$ sont punctiformes, fermés par rapport à T, et homéomorphes. Supposons, par impossible, que leurs complémentaires $T-P$, $T-(P+\overline{P})$ soient aussi homéomorphes. On transforme le plan en une surface de sphère par l'adjonction du point à l'infini. Les complémentaires de $T-P$, $T-(P+\overline{P})$ y sont des ensembles fermés et punctiformes. Ils sont donc, en raison du théorème 18, homéomorphes. Or, l'un n'en contient qu'un seul point limite $(0, 0)$, et l'autre les contient les deux, notamment $(0, 0)$ et le point à l'infini. L'hypothèse donc que les domaines $T-P$ et $T-(P+\overline{P})$ soient homéomorphes, est contradictoire.

Cependant, dans le cas où T est un domaine compactifiable et de classe [3]) 1, l'hypothèse que P soit compact, peut être remplacée dans notre énoncé par celle que P soit fermé. P. ex. lorsque P, $\overline{P}$ sont deux ensembles situé dans le plan, punctiformes, fermés, bornés ou non, et homéomorphes, toute homéomorphie entre P et $\overline{P}$ peut être étendue à la totalité du plan. Il en est de même de la surface de Möbius et d'autres surfaces de classe 1.

[1]) Observons que lorsqu'on suppose les ensembles P et $\overline{P}$ situés sur un même secteur T et disjoints, on peut aussi déformer T en lui-même de manière que cette déformation fournisse une extension de φ. Cf. Veblen, op. cit. p. 125, Antoine, Thèse, p. 89.

[2]) Antoine Thèse, p. 96.

[3]) v. § 8 de ce Chapitre.

Supposons, pour le montrer, que P, $\overline{P}$ soient deux ensembles fermés, punctiformes et homéomorphes, situés dans un domaine compactifiable T de classe 1. Par l'adjonction d'un point, soit p_∞, à T, on le transforme en un domaine compact T^*. Les ensembles P et $\overline{P}$ étant tous deux compacts, ou tous deux non compacts, on peut évidemment établir une homéomorphie φ^* entre $P+(p_\infty)$ et $\overline{P}+(p_\infty)$ qui soit identique aux points de P et $\overline{P}$ à l'homéomorphie φ donnée d'avance. Or, T^* étant un domaine compact, la transformation φ^* s'étend, en vertu du théorème 19, à la totalité de T^*. En enlevant donc le point p_∞ qui correspond à lui-même, de T^*, on obtient l'extension cherchée de φ à la totalité de $T=T^*-(p_\infty)$.

Cette assertion, comme on voit sur l'exemple précédent, ne subsiste pas pour les domaines des classes dépassant un, même pour ceux de classe 2, p. ex. pour la surface de cylindre de révolution

§ 8. **Définition.** Une surface compacte T sera dite, par définition, compactifiante par rapport à un domaine T, lorsque T est homéomorphe d'un domaine $\overline{T}-P$, où P désigne un ensemble punctiforme. Le type topologique ν de P sera appelé la classe de T.

En vertu du théorème 16 (§ 3), à chaque domaine compactifiable T correspond une surface compactifiante. En tenant compte du théorème 18 (§ 4), on voit sans peine que le type topologique τ de cette surface est bien déterminé par celui de T. Il en est de même du type ν de l'ensemble P. Le couple (ν, τ) est donc un invariant des domaines compactifiables.

De plus, on voit d'après le théorème 19 (§ 6), que le couple (ν, τ) détermine complètement le domaine T au point de vue de la Topologie; donc, en termes du Chap. I (§ 4), ce couple est même un invariant caractéristique des domaines compactifiables.

Nous remplacerons le type τ par un nombre Il faut, dans ce but, préciser d'abord les notions suivantes:

Définitions. *On dit qu'un ensemble fermé F situé à l'intérieur* d'un *domaine T, le* découpe, *lorsque $T-F$ n'est pas connexe.*

Je dis que F découpe localement *T lorsqu'il existe un domaine D contenu dans T et contenant F, et qui est découpé par F au sens ordinaire, c.-à.-d. au sens de la définition précédente*[1]).

[1]) Nous n'envisagerons dans la Partie présente que le cas, où l'ensemble désigné par F est une courbe simple fermée. Ce cas a été d'ailleurs considéré déjà par M. Weyl (op. cit. p. 66) qui a appelé les courbes ne découpant pas localement (selon notre terminologie) des domaines où elles sont situées, „Kurven die keine getrennten Ufer besitzen". Notre définition n'apporte donc qu'une extension qui s'impose, à la notion introduite par M. Weyl. La notion d'une coupure locale faite par un ensemble fermé quelconque jouera un rôle important dans la deuxième Partie de ce Mémoire

Un domaine T est dit unilatère, *lorsqu'il y existe une courbe simple fermée qui ne le découpe pas, même localement; dans le cas contraire, il est nommé* bilatère.

On pourrait, pour nos buts, se borner à n'envisager dans la définition précédente que des courbes qui sont polygones par rapport à certaine triangulation donnée d'avance. On démontrerait aisément que l'existence d'un polygone tracé dans le domaine et ne le découpant pas localement, est indépendente de la manière dont la triangulation est effectuée, et, par suite, qu'elle est une propriété invariante du domaine.

Cette définition équivaudrait d'ailleurs à la précédente et à celle qui est due à M. Klein [1]).

Théorème 20. *Le domaine T est uni, ou bilatère, en même temps que sa surface compactifiante.*

Démonstration: soit T un domaine homéomorphe d'un domaine $\overline{T}-P$. $\overline{T}$ désignant la surface compactifiante par rapport à T et P un ensemble punctiforme situé sur $\overline{T}$.

Supposons d'abord que T est un domaine unilatère. Par suite, $\overline{T}-P$ l'est aussi, et il existe une courbe simple fermée $l\subset\overline{T}-P$ qui ne découpe pas localement $\overline{T}-P$, et, à plus forte raison, la surface $\overline{T}$. $\overline{T}$ est donc une surface unilatère [2]).

Supposons, réciproquement que $\overline{T}$ soit une surface unilatère, et soit l une courbe simple fermée ne la découpant pas localement. Envisageons un triangle δ situé sur $\overline{T}$ et disjoint de l. Or, P étant, en vertu du lemme 4 (§ 6), un ensemble d'un type linéaire, on peut construire à l'intérieur de δ un autre ensemble $\overline{P}$ homéomorphe à P. D'après le théorème 19, le domaine $\overline{T}-P$, donc aussi le domaine T, est homéomorphe de $\overline{T}-\overline{P}$. Or, on a: $l\subset\overline{T}-\overline{P}\subset\overline{T}$, et, par conséquent. l ne découpant pas localement $\overline{T}$, il ne découpe localement aussi $\overline{T}-\overline{P}$. Le domaine $\overline{T}-\overline{P}$ est donc unilatère, ainsi que le domaine T qui est son transformé. Notre théorème est, par suite, justifié.

§ 9. Résumons les résultats obtenus.

Nous avons prouvé que tout domaine compactifiable T est caractérisé par le couple (ν, τ) qui a été déterminé dans le § 8. On sait, d'autre part, que toute surface compacte bilatère, ainsi que

[1]) Klein. *Math. Ann.* 1870. Bd. 9. Weyl op. cit. pp. 56—66. Cf. aussi: O. Veblen. op. cit. p. 67. Chuard. *Questions d'Analysis Situs* (Thèse). *Rend. del Circ. Math. Palermo.* 1922. t. 46 p. 209. On y trouvera la bibliographie récente.

[2]) On démontre de même que tout domaine contenant un domaine unilatère, est, lui-même, unilatère.

l'unilatère, est bien déterminée, au point de vue de la Topologie, par son nombre de connexion [1]). Dans le cas donc, où l'on sait si T est uni- ou bilatère, on peut remplacer dans le couple caractéristique (ν, τ) le type τ par le nombre naturel n qui est nombre de connexion de la surface compactifiante de T. Convenons d'appeler ce nombre n qui est bien déterminé pour tout domaine compactifiable, le nombre spécifique de connexion de ce domaine [2]). L'énoncé suivant résume alors nos considérations:

Théorème 21. *A tout domaine compactifiable T correspond un seul couple (ν, n), où ν désigne la classe du domaine T et n son nombre spécifique de connexion. Ce couple est un invariant caractéristique pour la famille des domaines compactifiables bilatères, ainsi que pour celle des domaines unilatères.*

Observons que dans le cas où T est d'une classe finie c.-à.-d. où ν est un type d'un ensemble fini, on peut remplacer ν par un nombre naturel (Cf. Chap. I, § 6).

Le problème analogue pour les variétés à nombre de dimensions plus élévé me paraît très difficile. On rencontre des difficultés même si l'on se borne aux domaines dans l'espace euclidien à trois dimensions, donc aux domaines compactifiables conformément à la définition du § 3. On ne peut pas transformer, en général, un tel domaine en un complémentaire d'un ensemble punctiforme par rapport à une variété compacte. C'est p. ex. le cas fort simple du domaine qu'on obtient en enlevant une droite de l'espace.

Même dans le cas de deux domaines bornés par des ensembles punctiformes et situés dans l'espace euclidien, l'homéomorphie de leurs bords n'entraîne pas celle de domaines [3]). Ainsi, la classification des domaines à trois dimensions ne se laisse pas effectuer par les mêmes moyens qui nous ont servi à classifier les variétés à deux dimensions.

[1]) Voir l'Introduction, où nous avons passé en revue les travaux de Möbius, Jordan et d'autres qui se rattachent à ce sujet.

[2]) On pourrait déterminer ce nombre de façon directe: p. ex. lorsque T est un domaine bilatère, on peut poser: $n=2p$, où p est un nombre maximum de contours simples fermés et disjoints qu'on puisse enlever de T sans le découper. (Cf. Jordan, *Cours d'analyse*. 1913. t. II. p. 631).

[3]) *Voir*: § 6 de ce Chapitre.