# Sur les continus non-bornés.

## (Applications de la méthode d'inversion).

Par

B. Knaster et C. Kuratowski (Varsovie).

Nous nous proposons dans cet ouvrage d'étudier les propriétés des continus non-bornés, aussi bien celles qui n'étaient connues jusqu'à présent que pour les continus bornés, que celles qui apparaissent exclusivement chez les non-bornés. Nous cherchons à traiter ces problèmes d'une façon autant que possible uniforme. La méthode qui semble s'y prêter tout particulièrement est celle de *l'inversion* [1]).

L'espace est dit transformé par inversion, lorsqu'à chaque point $p$ distinct du centre d'inversion $v$ correspond un point $p^*$ situé sur le rayon $vp$ à distance $\varrho(p^*,v)=\dfrac{1}{\varrho(p,v)}$.

On trouve dans la Note citée 4 propriétés (I—IV) topologiques de l'inversion, qui la caractérisent complètement au point de vue d'Analysis Situs. On en tire les deux théorèmes suivants, auxquels nous aurons constamment recours dans la suite: 1° l'inversion est une opération biunivoque et bicontinue, lorsqu'on néglige le centre d'inversion (théorème 6) et 2° pour que l'ensemble $A^*$ soit non-borné, il faut et il suffit que le centre d'inversion soit un point d'accumulation de l'ensemble $A$ (théorème 9).

La plupart d'applications de l'inversion que nous allons envisager dans les §§ 1—3 concernent le cas, où $A$ est un ensemble fermé non-borné ne contenant pas le centre d'inversion $v$. D'après les deux théorèmes cités, $A^*+v$ est dans ce cas un ensemble borné et fermé. Si, en outre, $A$ est un continu, $A^*+v$ l'est également.

1) Voir: Kuratowski, *Sur la méthode d'inversion dans l'Analysis Situs*, ce journal, t. IV p. 151–163.

Un autre cas fréquent est celui, où $A$ est un continu borné, $A-v$ est connexe et $v$ appartient à $A$. Dans ce cas, les mêmes théorèmes permettent de prouver que l'ensemble $A^*$ est un continu non-borné.

Parmi les notions qui n'interviennent que dans l'étude des continus non-bornés, nous nous occupons surtout de „l'oscillation infinie" et des „sous continus saturés".

La notion de *l'oscillation infinie* s'impose d'une façon naturelle, lorsqu'on veut étendre la notion — si importante dans l'étude des continus non jordaniens [1]) — de l'oscillation finie aux continus non-bornés. Nous l'étudions dans le N 3 du § 1.

L'existence des *sous continus saturés* constitue une singularité dont ne peuvent jouir que les continus non-bornés. On prouve, en effet, qu'aucun continu borné ne contient de sous-continu saturé. Autrement dit: $K$ étant un vrai sous-continu d'un continu borné $C$, il existe toujours un continu $L$, contenant $K$ et contenu dans $C$, qui diffère à la fois de $K$ et de $C$. L'étude des sous-continus saturés constitue l'objet du § 3.

Le § 4 est consacré entièrement à la solution d'un problème [2]) qui s'y rattache de près. Ce problème consiste à définir un continu composé entièrement de sous-continus saturés n'ayant deux à deux aucun point commun. Nous en donnons la solution affirmative, en définissant un exemple (voir le continu $\mathscr{H}$, § 4)

**Notations et notions préliminaires.** $A$ étant un ensemble de points de l'espace euclidien à $m$ dimensions,

$C(A)$ désigne l'ensemble des points qui n'appartiennent pas à $A$.

$A'$ „ „ „ „ d'accumulation de $A$.

$\overline{A}=A+A'$. $a\varepsilon A$ veut dire que $a$ est un point de $A$.

Si $A=\overline{A}$, $A$ est dit ensemble *fermé*. S'il n'existe aucune décomposition de $A$ telle que

$$A=M+N,\quad \overline{M}\times N+M\times \overline{N}=0 \quad \text{et} \quad M\neq 0\neq N,$$

$A$ est dit ensemble *connexe* [3]). Un sous-ensemble connexe de $A$ qui n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de $A$ est dit *composante* de $A$ [4]). Un ensemble connexe et fermé (contenant plus d'un point) s'appelle un *continu*. Si

[1]) Voir: Mazurkiewicz, *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math I.
[2]) C'est le problème N. 16 de Fund. Math., vol. II, p. 286.
[3]) Lennes N. J., American Journ. of. Math. 1911.
[4]) Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 245.

un continu $C$ contient les points $a$ et $b$, sans qu'un vrai sous-continu quelconque de $C$ les contienne simultanément, $C$ est dit *irréductible* entre $a$ et $b$[1]). Un continu qui n'est pas somme de deux continus différents de lui est dit *indécomposable*[2]). L'ensemble de tous les points d'un continu indécomposable $C$ qui peuvent être unis à un point fixe de $C$ par un vrai sous-continu de $C$ sera nommé un *composant* de $C$[3]). $A$ étant un ensemble fermé, l'ensemble $C(A)$ s'appelle ensemble ouvert ou *domaine*. Un domaine connexe, est dit *région*.

## § 1. Les continus de Jordan.

**1.** Un continu borné est dit un *continu de Jordan*, lorsqu'il est l'image continue d'un segment de droite. Pour qu'un continu borné soit un continu de Jordan, il faut et il suffit qu'il soit localement connexe en chaque point[4]). En s'appuyant sur cette condition, on peut étendre la notion du continu de Jordan aux continus non-bornés: nous appelons *continu de Jordan* (borné ou non borné) tout continu qui est localement connexe en chaque point[5]).

Nous en signalons les propriétés suivantes.

*Si un continu non-borné de Jordan $C$ ne contient pas le centre d'inversion $v$, l'ensemble $C^* + v$ est également un continu de Jordan.*

En effet, en vertu des propriétés générales de l'inversion, qui ont été citées au début, $C^* + v$ est un continu. De plus, la connexité locale étant un invariant des transformations homéomorphes, le continu $C^* + v$ est localement connexe en chaque point de $C^*$. Or, tout continu non jordanien contenant plus d'un point de non-

[1]) Zoretti, Ann. de l'Ec. Norm. 1909.

[2]) Janiszewski et Kuratowski, Fund. Math. I. Cf. Brouwer, L. É. J., Math. Ann. 68, 1910.

[3]) Janiszewski et Kuratowski l. c. p. 218. Cf. le terme „*nerve*" employé par M. Brouwer dans les Proceed. Akad. Wett., Amsterdam 1911.

[4]) Cette condition est due à M. Hahn (Wiener Berichte 1914). Un ensemble $E$ est dit *localement connexe au point* $p$ („zusammenhängend im kleinen") si dans chaque sphère entourant $p$ il existe un entourage de $p$ relatif à $E$ qui soit connexe. Pour le cas où $E$ est un continu, la notion de „connexité locale" coïncide avec celle du point de I genre au sens de M. Mazurkiewicz (Voir: C. R. de la Soc. des Sciences de Varsovie 1916 et *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. I).

Le terme „localement connexe" est employé ici par analogie au terme plus général: „localement bien-enchaîné" de M. Fréchet (Ann. de l'Ec. Norm. 38).

[5]) M. R. L. Moore emploie dans le même sens le terme „continuous curve" (Cf. Trans. Amer. Math. Soc. 1920).

connexité locale [1]), le continu $C^* + v$ est localement connexe aussi au point $v$, ce qui prouve qu'il est un continu de Jordan.

On en conclut aisément que le théorème suivant, connu [2]) pour les continus de Jordan bornés, s'applique à chaque continu de Jordan, quel qu'il soit:

*Tous deux points d'un continu de Jordan peuvent être unis dans lui par un arc simple.*

En outre, *chaque point d'un continu de Jordan non-borné est le sommet d'un rayon situé dans ce continu* [3]).

**2.** On distingue parmi les continus de Jordan quatre classes de continus *simples*: arc simple, rayon, courbe simple fermée, courbe simple ouverte [4]). Il y a une équivalence au sens de l'Analysis Situs plane entre tous les arcs simples ainsi qu'entre toutes les courbes simples fermées [5]). Plus précisément: étant donnés sur le plan deux arcs simples (ou deux courbes simples fermées) $A$ et $B$, on peut transformer le plan tout entier en lui-même d'une façon homéomorphe de sorte que $A$ se transforme en $B$. En appliquant la méthode d'inversion, nous allons établir les théorèmes analogues concernant les rayons et les courbes simples ouvertes.

Nous allons démontrer d'abord que, si le rayon $A$ ne contient pas le centre d'inversion $v$, l'ensemble $A^* + v$ est un arc simple.

Par définition du rayon, il y a l'homéomorphie entre les ensembles $A$ et $0 \leqslant x < 1$. De plus, $A^*$ étant homéomorphe à $A$, il existe une fonction $f(x)$, $0 \leqslant x < 1$, biunivoque, bicontinue et admettant comme valeurs tous les points de $A^*$. Le point $v$ étant le seul point d'accumulation de $A^*$, on arrive, en posant $f(1) = v$, à une transformation homéomorphe du segment $[0, 1]$ en l'ensemble $A^* + v$. Cet ensemble est donc un arc simple.

[1]) L'ensemble des points de non-connexité locale se compose de continus. Voir: Kuratowski, Fund. Math. III, p. 60, lemme.

[2]) Théorème de M. Mazurkiewicz op. cit. Cf. aussi R. L. Moore *A theorem concerning continuous curves*, Bull. Amer. Math. Soc. 23, 1917.

[3]) Théorème de M. Kuratowski, l. cit.

[4]) On définit ces continus simples comme continus homéomorphes respectivement: à un segment de droite, une demi-droite, à une circonférence, à une droite géométrique.

[5]) Voir: Antoine, Ann. de l'Ec. Norm. 1922. Cet énoncé est faux pour l'espace à 3 dimensions, comme M. Antoine l'a prouvé sur des exemples.

D'une façon analogue, si $A$ est une courbe simple ouverte qui ne contient pas $v$, $A^* + v$ est une courbe simple fermée.

Ceci établi, soient $A$ et $B$ deux rayons dont aucun ne contient $v$. $A^* + v$ et $B^* + v$ étant des arcs simples, il existe une fonction $g(v)$ biunivoque et bicontinue dans le plan entier qui transforme $A^* + v$ en $B^* + v$. On peut poser, en outre. $g(v) = v$.

Or, soit: $h(x) = (g(x^*))^*$ et $h(v) = v$. On voit aussitôt que la fonction $h(x)$ est biunivoque et bicontinue dans le plan et qu'elle transforme $A$ en $B$. Ceci prouve que *tous les rayons sont équivalents au sens de l'Analysis Situs plane.*

*Il en est de même des courbes simples ouvertes.* La démonstration est analogue.

Par conséquent, chaque propriété topologique de la demi-droite géométrique appartient à chaque rayon (plan), de même que chaque courbe simple fermée (plane) jouit de toutes les propriétés topologiques de la droite géométrique. En particulier, *le rayon ne coupe pas le plan*, tandis que *la courbe simple ouverte le coupe en deux régions dont elle forme la frontière commune.* Cet énoncé présente la généralisation du théorème de Jordan embrassant les courbes simples ouvertes.

**3.** La notion de connexité locale conduit à celle de *l'oscillation.* D'après la définition de M. Mazurkiewicz[1]) l'oscillation d'un continu (borné) $C$ au point $p$ est égale à $\limsup\limits_{x, y \to p} \varrho_C(x, y)$, où $\varrho_C(x, y)$ désigne le plus petit diamètre des sous-continus de $C$ qui unissent $x$ et $y$. Cette notion se prête également à la généralisation aux continus non-bornés.

Nous dirons notamment que l'oscillation est *illimitée* au point $p$, si elle n'est pas finie et si, en outre, tous deux points situés dans le voisinage de $p$ peuvent être unis par un sous-continu borné de $C$. Nous dirons qu'elle est *infinie*, si aussi près de $p$ que l'on veut il existe des points de $C$ qui ne peuvent être unis par un sous-continu borné de $C$. Par exemple, le continu $K$ défini par les conditions

$$(1) \qquad x = 0,\ 0 \leqslant y \qquad \text{et} \qquad 0 < x \leqslant 1,\ y = \frac{1}{x}\sin^2\frac{1}{x}$$

[1]) Op. cit.

est à oscillation infinie aux points de l'axe des $y$ (ce continu ne diffère guère au point de vue topologique du continu $S^*$ où $S$ est donné par les conditions

$$(2) \qquad x=0, \ -1 \leqslant y \leqslant +1 \quad \text{et} \quad 0<x\leqslant 1, \ y=\sin\frac{1}{x}$$

et le point (0, 1) est choisi comme centre d'inversion).

Si l'on unit les points (0, 0) et $(1, \sin^2 1)$ par un arc n'ayant avec $K$ aucun autre point commun, l'oscillation aux points de l'axe des $y$ devient illimitée.

Nous allons établir à présent quelques théorèmes concernant l'oscillation infinie.

*Chacune des trois conditions suivantes est suffisante et nécessaire pour qu'un continu $C$ ne contienne aucun point à oscillation infinie:*

(I) *tous deux points de $C$ peuvent être unis par un sous-continu borné de $C$;*

(II) *tout ensemble homéomorphe à $C$ est un semi-continu* [1]*);*

(III) *$C$ est somme d'une suite finie ou infinie de continus bornés croissants.*

Démonstration I. La condition (I) étant évidemment suffisante, nous allons prouver qu'elle est nécessaire.

Soient $a$ et $b$ deux points de $C$ qui ne peuvent être unis dans $C$ que par un continu non-borné. Soit $A$ l'ensemble composé du point $a$ et de tous les points qui peuvent être unis à $a$ par un sous-continu borné de $C$. On a donc $a \varepsilon A$ et $b \varepsilon C-A$ d'où $\overline{A} \neq 0 \neq \overline{C-A}$. L'identité $\overline{A}+\overline{C-A}=C$ entraîne, par conséquent, l'inégalité $\overline{A}\times\overline{C-A}\neq 0$, puisque $C$ est un continu.

Nous allons prouver que, si $p \varepsilon \overline{A}\times\overline{C-A}$, le point $p$ est à oscillation infinie.

Conformément à l'identité

$$\overline{A}\times\overline{C-A}=A\times(C-A)'+A'\times(C-A)$$

deux cas peuvent se présenter:

1° $p \varepsilon A\times(C-A)'$. Il existe donc dans le voisinage de $p$ des points de $C-A$. Pour prouver que l'oscillation au point $p$ est infinie, il suffit donc de démontrer que, si $q \varepsilon C-A$, le point $q$ ne

[1]) Un ensemble $S$ est dit un *semi-continu*, si tous deux points de $S$ peuvent être unis par un sous-continu de $S$.

peut être uni à $p$ par aucun sous-continu borné de $C$. Or supposons qu'il existe un continu b o r n é $P$ tel que

$$q \varepsilon P,\ p \varepsilon P \quad \text{et} \quad P \subset C.$$

Comme en même temps on a $p \varepsilon A$, il existe un continu b o r n é $Q$ tel que

$$a \varepsilon Q,\ p \varepsilon Q \quad \text{et} \quad Q \subset C.$$

Le continu b o r n é $P+Q$ satisfait donc aux formules:

$$a \varepsilon P+Q,\ q \varepsilon P+Q \quad \text{et} \quad P+Q \subset C,$$

contrairement à l'hypothèse que $q \varepsilon C - A$.

2° $p \varepsilon A' \times (C-A)$. Il suffit dans ce cas de démontrer que, si $r \varepsilon A$, il n'existe aucun continu b o r n é $K$ tel qu'on ait:

$$p \varepsilon K,\ r \varepsilon K \quad \text{et} \quad K \subset C.$$

Or, supposons qu'un tel $K$ existe et soit $L$ un continu b o r n é tel que l'on ait:

$$a \varepsilon L,\ r \varepsilon L \quad \text{et} \quad L \subset C.$$

Le continu b o r n é $K+L$ satisfait donc aux formules:

$$a \varepsilon K+L,\ p \varepsilon K+L \quad \text{et} \quad K+L \subset C,$$

contrairement à l'hypothèse que $p \varepsilon C - A$.

II. La propriété d'être un continu borné étant un invariant de l'Analysis Situs, on déduit de (I) que la condition (II) est nécessaire. Afin de prouver qu'elle est suffisante, nous allons montrer que, si $C$ contient un point à oscillation infinie et $v\, non\, \varepsilon C$, l'ensemble $C^*$, bien que homéomorphe à $C$, n'est pas un semi continu.

En effet, d'après (I), $C$ contient deux points $p$ et $q$ qui ne peuvent être unis dans $C$ que par un continu non-borné. Si $C^*$ était un semi-continu, il existerait un sous-continu $K$ de $C^*$ contenant les points $p^*$ et $q^*$. Or, $C^*$ étant borné (puisque $v\, non\, \varepsilon C$), $K$ l'est également; mais alors $K^*$ est aussi un continu borné et il unit les points $p$ et $q$ dans $C$, contrairement à l'hypothèse.

Nous avons démontré, en même temps, que la condition (II) peut être remplacée par

(II') i l e x i s t e u n p o i n t $v\, non\, \varepsilon C$ t e l q u e $C^*$ e s t u n s e m i - c o n t i n u.

III. La condition (III) étant évidemment suffisante, nous allons prouver qu'elle est nécessaire.

Supposons donc que $C$ ne contienne aucun point à oscillation infinie. Soit $v \operatorname{non} \varepsilon C$. D'après (II), $C^*$ est un semi-continu.

Soit $p$ un point arbitrairement choisi dans $C$. Entourons le point $v$ d'une suite de sphères concentriques (à $m$ dimensions) qui ne contienenent pas le point $p$ et dont le rayon converge vers 0. Soit $S_1$, $S_2, \ldots, S_n, \ldots$, la suite des intérieurs de ces sphères. Soit, pour $n$ fixe: $K_n$ le plus grand continu satisfaisant aux formules:

$$p \varepsilon K_n, \; K_n \subset C^* - S_n.$$

Un tel continu existe: il est celle des composantes de l'ensemble fermé $C^* - S_n$ qui contient le point $p$.

Nous allons démontrer que

$$C^* = \sum_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{3}$$

Il suffit de pouver que, pour tout point $q$ de $C^*$, il existe un $n$ tel que $q \varepsilon K_n$. Or, $C^*$ étant un semi-continu, il existe un sous-continu $Q$ de $C^*$ qui unit $p$ et $q$. Comme $v \operatorname{non} \varepsilon Q$, il existe un $S_n$ à rayon suffisamment petit pour qu'on ait $S_n \times Q = 0$. Donc $Q \subset C^* - S_n$, d'où $Q \subset K_n$ et par conséquent $q \varepsilon K_n$.

L'égalité (3) établie, on en déduit par inversion la formule

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} K_n^*,$$

qui réalise la condition (III). Car, $K_n$ étant un sous-continu de l'ensemble borné $C^*$, $K_n^*$ est également un continu borné. De plus, comme $K_n \subset K_{n+1}$, on a $K_n^* \subset K_{n+1}^*$.

Notre théorème est donc établi complètement.

En se basant sur lui, on peut étendre plusieurs théorèmes concernant les continus bornés aux continus qui ne contiennent pas de points à oscillation infinie.

En particulier: *chaque continu à oscillation finie ou illimitée contient pour chaque couple de ses points un continu irréductible* [1]).

Cet énoncé n'est pas en général vrai pour les continus non-bornés, comme le prouve l'exemple du continu $S^*(0, 0)$, que l'on obtient

[1]) D'après un théorème de Janiszewski tous deux points d'un continu borné s'y laissent unir par un continu irréductible entre eux. Voir: Comptes Rendus, Paris 1910. Cf. Mazurkiewicz ibid. et Zoretti Acta Math. 1912.

du continu $S$ défini par les formules (2), en prenant pour centre d'inversion le point $(0, 0)$. Ce continu ne contient aucun continu irréductible entre les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$[1]).

Il résulte directement de notre théorème que *chaque continu irréductible non-borné contient des points à oscillation infinie.*

Il est à remarquer enfin que *chaque point d'un continu indécomposable non-borné est à oscillation infinie.*

Car, $p$ étant un point quelconque d'un continu indécomposable $C$, l'ensemble des points $q$ tels que $C$ est irréductible entre $p$ et $q$ est dense dans $C$[2]).

*Tout semi-continu borné qui est une différence de deux ensembles fermés, est somme d'une suite finie ou infinie de continus croissants.*

Soit, en effet, $S = A - B$ un semi-continu borné, $A$ et $B$ étant des ensembles fermés. D'après un théorème de MM. Kuratowski et Sierpiński[3]) il existe un continu $C$ homéomorphe à $S$. Tous deux points de $S$ étant situés sur un sous-continu borné, il en est de même de $C$. Le continu $C$ ne contient donc, en vertu de la condition (1), aucun point à oscillation infinie. On en conclut selon (III) que $C$ est somme d'une suite de continus bornés croissants. Il en est de même de $S$, puisque $S$ et $C$ sont homéomorphes.

## § 2. Les coupures du plan[4]).

**4.** Un ensemble $A$ est dit une *coupure* entre les points $p$ et $q$, lorsque $A$ est fermé et ces points appartiennent à deux composantes différentes de $C(A)$.

Nous allons prouver que

($\alpha$) *$A$ étant un ensemble fermé et $R$ une composante de $C(A)$, $R^*$ est une composante de $C(A^* + v)$.*

En effet, $A$ étant fermé, $R$ ne contient que des points intérieurs. Donc les ensembles $R$ et $R - v$ sont des régions. $R - v$ est, par

[1]) Un exemple différent, mais équivalent au point de vue topologique, a été défini par M. Kuratowski dans les Fund. v. III. p. 218.

[2]) Théorème de M. Mazurkiewicz (Fund. Math. I, p. 38). Cf. Janiszewski et Kuratowski ibid.

[3]) Tôhoku Math. Journ., Sendai 1921.

[4]) Les théorèmes du N 4 concernent l'espace à $n \geqslant 2$ dimensions. Les théorèmes des NN 5 et 6 ne sont établis que pour le cas $n = 2$. Leur extension aux espaces à $n > 2$ dimensions dépend de l'extension du théorème de Brouwer (voir N. 6) à ces espaces

conséquent, une composante de $C(A+v)$. On en conclut[1]) que $(R-v)^*$ est une composante de $[C(A+v)]^*$. Les formules[2])

$$(R-v)^* = R^* \text{ et } [C(A+v)]^* = C(A^*+v)$$

donnent la proposition $(\alpha)$.

On déduit de $(\alpha)$ que la propriété de couper le plan est invariante par rapport à l'opération $A^*+v$ effectuée sur les ensembles fermés. On en conclut aussi que, si $R$ est une région, $R^*$ l'est également.

5. On appelle *coupure irréductible* entre $p$ et $q$ toute coupure ne contenant aucune autre coupure entre ces points. On voit aussitôt que la condition suffisante et nécessaire, pour qu'une coupure $A$ entre $p$ et $q$ soit irréductible ,entre eux, est qu'elle soit la frontière commune des régions-composantes de $C(A)$ qui contiennent resp. $p$ et $q$.

Si $A$ est une coupure non-bornée irréductible entre $p$ et $q$ et $v$ *non* $\varepsilon$ $A+p+q$, l'ensemble $A^*+v$ est une coupure irréductible entre $p^*$ et $q^*$.

En effet, d'après $(\alpha)$, $A^*+v$ est une coupure entre $p^*$ et $q^*$. Soit, d'autre part, $B$ un ensemble fermé tel que $B \subset A^*+v$ et $B \neq A^*+v$. On en conclut que, $A$ étant non-borné, on a $v \varepsilon A^{*\prime}$ donc $A^*-B \neq 0$, d'où $A-B^* \neq 0$. Or, $A^*+v$ étant borné, $B^*$ est un vrai sous-ensemble fermé de $A$, de sorte que par hypothèse, $B^*$ n'est pas une coupure entre $p$ et $q$. Il en résulte en vertu de $(\alpha)$ que l'ensemble $B^{**}+v$, égal à $B+v$, n'est pas une coupure entre $p^*$ et $q^*$. Donc à plus forte raison $B$ n'en est pas une coupure, ce qui prouve notre théorème, l'ensemble $B$ étant arbitraire.

Ceci établi, nous allons démontrer le théorème suivant, qui ne l'était jusqu'à présent[3]) que pour le cas d'ensemble borné:

$(\beta)$ *chaque coupure irréductible entre deux points est un continu*[4]).

[1]) Voir: Kuratowski, *Sur la méthode d'inversion.*, théor. 7.

[2]) Ibid , théor. 5.

[3]) Mazurkiewicz, Fund. Math. I, p. 64.

[4]) Un théorème moins général fut établi récemment par M. Chittonden. (*Note on the division of a plane by a point-set*, Bull. Amer. Math. soc. 1922, p. 310—312). M. Chittenden prouve notamment que, si un ensemble fermé $A$ coupe le plan en deux régions $R_1$ et $R_2$, tout en étant leur frontière commune, $A$ est un continu. Or, selon l'hypothèse de ce théorème, $A$ est une coupure irré-

Supposons, en effet, que $A$ soit une coupure non-bornée irréductible entre $p$ et $q$ se décomposant en deux ensembles fermés $M$ et $N$ de façon qu'on ait:

$$A = M + N, \quad M \times N = 0, \quad M \neq A \neq N.$$

On en conclut lorsque $v$ *non* $\varepsilon$ $A + p + q$, que

$$A^* + v = M^* + N^* + v, \; (M^* + v) \times (N^* + v) = v, \; M^* + v \neq A^* + v \neq N^* + v$$

L'ensemble $A^* + v$ étant, comme nous venons de prouver, une coupure irréductible entre $p^*$ et $q^*$, aucun des ensembles $M^* + v$ et $N^* + v$ n'est une coupure entre ces points. Or, d'après un théorème général de Janiszewski[1]), si deux ensembles fermés et bornés dont aucun ne coupe le plan entre $p$ et $q$ ont un seul point commun, leur somme ne coupe le plan non plus entre $p$ et $q$. Par conséquent, l'ensemble $A^* + v = (M^* + v) + (N^* + v)$ n'est pas une coupure, contrairement à l'hypothèse.

Un autre théorème concernant les coupures irréductibles, aussi bien bornées que non-bornées, est le suivant:

($\gamma$) *chaque coupure entre deux points contient une coupure irréductible entre ces points.*

La démonstration donnée par M. Mazurkiewicz dans le vol. I de ce Journal[2]) se prête, en effet, à une généralisation immédiate.

**6.** Les deux théorèmes précédents permettent d'une façon bien simple d'étendre aux continus non bornés l'énoncé suivant connu sous le nom du *théorème de Brouwer*[3]): *$K$ étant un continu, la frontière de chaque région-composante de l'ensemble $C(K)$ est un continu.*

Soit $R$ une région-composante de $C(K)$. Soit $F$ la frontière de $R$. L'ensemble $R + F$ est donc un continu. Nous allons prouver d'abord

---

ductible entre chaque couple de points extraits de $R_1$ et $R_2$, ce qui en entraîne la thèse en vertu de ($\beta$). En outre, on peut remplacer l'hypothèse de M. Chittenden par l'hypothèse plus générale qu'il existe parmi les régions-composantes de $C(A)$ deux dont $A$ forme la frontière commune.

[1]) Voir N 7, théor. I.

[2]) p. 63.

[3]) Math. Ann. 69. Une extension de ce théorème aux ensembles non-bornés a été déjà donnée par M. Mazurkiewicz dans le vol. III des *Fundamenta*.

que $C(R)$ est aussi un continu. Envisageons la décomposition du plan $P$:

$$P = R + K + C(R);$$

on a évidemment

$$(R + K) \times C(R) = K \times C(R) = K.$$

La somme et le produit des ensembles fermés $(R + K)$ et $C(R)$ étant des continus, chacun d'eux est un continu [1]).

Cela établi, supposons que $F$ n'est pas un continu. Soient $a$ et $b$ deux points appartenant à deux sous-ensembles de $F$ disjoints et fermés en lesquels $F$ se décompose. On prouve aisément [2]) (aussi bien pour $F$ borné que non-borné) qu'il existe une coupure $L$ entre $a$ et $b$ telle que

$$L \times F = 0.$$

En vertu de ($\gamma$) la coupure $L$ peut être supposée irréductible. Selon ($\beta$), $L$ est donc un continu. L'égalité $L \times F = 0$ entraîne, par conséquent, une des deux formules

$$L \times R = 0 \quad \text{ou bien} \quad L \times C(R) = 0.$$

Dans les deux cas on arrive à une contradiction.

En effet, si $L \times R = 0$, on a $L \times (R + F) = 0$, ce qui est impossible, puisque $R + F$ est un continu qui unit les points $a$ et $b$ et $L$ est une coupure entre ces points.

Si, au contraire, $L \times C(R) = 0$, on est également en contradiction avec l'hypothèse que $L$ coupe le plan entre $p$ et $q$, puisque, en vertu de l'inclusion évidente $F \subset C(R)$, ces deux points appartiennent au continu $C(R)$. $F$ est donc un continu.

En s'appuyant sur le théorème de Brouwer, on peut aisément étendre aux ensembles non-bornés les deux théorèmes suivants:

*Théorème de Hausdorff* [3]): *Chaque coupure entre deux points contient une composante qui est une coupure entre ces points.*

*Théorème de Phragmèn* [4]): *Un ensemble punctiforme* (c'est à dire, ne contenant pas de continu) *n'est jamais une coupure du plan.*

[1]) Janiszewski et Kuratowski, loc. cit. p 211

[2]) Cf. par exemple Hausdorff, l. c. p. 334.

[3]) Cf. l. c. p. 343.

[4]) Cf. Acta Math. 1885, p. 44.

7. Envisageons à présent les théorèmes suivants qui ont été établis pour la somme et le produit des coupures bornées[1] $A$ *et* $B$ *étant des ensembles bornés et fermés*

I *Si*

1° $A \times B$ *est un continu* (au sens plus large[2]),

2° *ni* $A$ *ni* $B$ *n'est une coupure du plan entre les points* $p$ *et* $q$, *la somme* $A+B$ *n'en est non plus une coupure entre* $p$ et $q$.

II *Si*

1° $A \times B$ *est une somme de deux continus* (au sens plus large) *disjoints*,

2° *ni* $A$ *ni* $B$ *ne coupe le plan entre aucun couple de points:* $(p, q)$, $(q, r)$, $(p, r)$,

*la somme* $A+B$ *n'est pas une coupure entre au moins un de ces couples.*

III *Si*

1° $A \times B$ *n'est pas un continu* (au sens plus large),

2° *aussi bien* $A$ *que* $B$ *sont des continus*.

*la somme* $A \times B$ *coupe le plan.*

On déduit de I et III que

IV. *Pour que la somme de deux continus bornés, dont aucun ne coupe le plan, en soit une coupure il faut et il suffit que leur produit ne soit pas un continu* (au sens plus large).

On prouve aisément que tous ces 4 énoncés restent vrais, même si l'un des deux ensembles considérés est non-borné, pourvu que l'autre soit borné. Cependant tous ces énoncés sont en défaut lorsque les deux ensembles sont non-bornés simultanément. Or, la proposition $(\alpha)$ du N° 4 permet d'en obtenir par inversion des théorèmes analogues et déstinés spécialement pour ce dernier cas. Nous les désignons respectivement par I'—IV'.

Soient donc $A$ et $B$ deux ensembles fermés et non-bornés. Les théorèmes I'—III' s'obtiennent de I—III en y remplaçant la condition 1° respectivement par:

$A \times B$ *est vide ou ne contient aucune composante bornée:*

$A \times B$ *contient tout au plus une composante bornée;*

$A \times B$ *contient tout au moins une composante bornée.*

On déduit de I' et III' que:

[1]) Voir: Janiszewski, *Sur les coupures du plan faites par les continus,* Prace Mat.-Fiz. 1913, et Straszewicz, Fund. Math. IV, p. 128—135.

[2]) C'est à dire: continu, ou vide, ou composé d'un point.

IV'. *La condition nécessaire et suffisante pour que la somme de deux continus non-bornés, dont aucun ne coupe le plan, en soit une coupure, est que leur produit contienne une composante bornée.*

**Démonstration.** *Ad I'.* Soit $v \text{ non } \varepsilon A + B + p + q$. D'après ($\alpha$), ni $A^* + v$ ni $B^* + v$ n'est une coupure entre $p^*$ et $q^*$. Nous allons prouver que le produit $(A^* + v) \times (B^* + v)$ est un continu (au sens plus large).

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait décomposer l'ensemble $A^* \times B^* + v$ en deux ensembles fermés disjoints $M$ et $N$ (non vides). Soit $v \varepsilon M$. Donc $v \text{ non } \varepsilon N$, ce qui prouve que $N^*$ est borné. Par conséquent, l'ensemble $A \times B = (A^* \times B^* + v)^* = M^* + N^*$ se décompose en deux ensembles fermés (puisque $M$ et $N$ sont bornés), disjoints. Il en résulte que toute composante de $N^*$ est en même temps une composante de $A \times B$. Or, $N^*$ étant borné, $A \times B$ contient par conséquent une composante bornée, contrairement à l'hypothèse.

Il est ainsi établi que les ensembles fermés et bornés $A^* + v$ et $B^* + v$ ne coupent pas le plan entre $p^*$ et $q^*$ et que leur produit est un continu (au sens plus large). Donc, selon I, leur somme $A^* + B^* + v$ n'est pas une coupure entre $p^*$ et $q^*$. On en conclut en vertu de ($\alpha$) que $A + B$ n'est pas une coupure entre $p$ et $q$.

*Ad II'.* En raisonnant d'une façon tout à fait analogue, on prouve que $A^* \times B^* + v$ se compose de tout au plus deux composantes, ce qui entraîne, en vertu de II, le théorème II'.

*Ad III'.* On prouve que $A^* \times B^* + v$ n'est pas un continu (au sens plus large), car le produit $A \times B$ contenant une composante bornée $C$, on a $v \text{ non } \varepsilon C^{*\prime}$; $C^*$ et $v$ sont donc situés dans deux composantes différentes de $A^* \times B^* + v$, ce qui implique, en vertu de III, le théorème III'.

## § 3. Les sous-continus du continu non-borné. Les continus indécomposables.

**8. Lemme.** *Si $C$ est un continu irréductible entre $a$ et $b$ et $C - p$ est connexe, $C - p - a$ est aussi connexe.*

**Démonstration.** Nous divisons la démonstration en deux parties [1]).

1. Nous allons prouver d'abord que $C - a$ est *connexe*. Nous nous

[1]) Dans le § 3 nous n'aurons récours qu'à la première partie de la démonstration. La seconde partie interviendra dans le § 4.

appuyons sur le théorème suivant [1]: $A$ étant un continu arbitraire si $A-a$ n'est pas connexe, $A$ se décompose en deux continus $A_1$ et $A_2$ tels que

$$a \varepsilon A_1 \times A_2, \quad A_1 \neq A \neq A_2.$$

Or, si $C-a$ n'est pas connexe, un des continus en lesquels $C$ se décompose contient $a$ et $b$ simultanément. $C$ est donc réductible entre ces points.

2. *Si $p \varepsilon C$, $C-p-a$ est connexe.* Supposons que

$$C-p-a = M+N, \ M \times N' + N \times M' = 0, \ b \varepsilon M.$$

Il s'agit de prouver que $N=0$.

$C-p$ étant connexe par hypothèse, la formule

$$C-p = M+(a+N)$$

entraîne: $a \varepsilon M'$. De même: $p \varepsilon M'$, car l'ensemble $C-a$ est, comme nous avons prouvé, connexe. L'ensemble $M+p+a$ est donc un continu unissant $a$ et $b$. $C$ étant irréductible entre ces points, on a $M+p+a=C$, d'où $C-p-a=M$, donc $N=0$.

**Corollaire.** *$C$ étant un continu indécomposable, l'ensemble $C-a$ est connexe, quel que soit le point $a$.*

**Démonstration.** D'après un théorème de M. Mazurkiewicz [2]) il existe pour chaque point $a$ d'un continu indécomposable $C$ un autre point $b$ tel que $C$ est irréductible entre $a$ et $b$. Pour en conclure que $C-a$ est connexe, on pose dans le lemme: $p \operatorname{non} \varepsilon C$.

**Théorème.** *Chaque continu non-borné contient un continu non-borné différent de lui.*

**Démonstration.** Soit $C$ un continu non-borné et $v \operatorname{non} \varepsilon C$. L'ensemble $C^*+v$ est, par conséquent, un continu borné. Choisissons sur ce continu un point $u$ tel que $C^*+v$ soit réductible entre $u$ et $v$ [3]). Comme continu borné, $C^*+v$ contient un continu $K$ irréductible entre $u$ et $v$ [4]). On a donc $K \neq C^*+v$ et, comme $v \varepsilon C^{*\prime}$, $K^* \neq C$.

[1]) Cf. notre ouvrage du vol. II des Fund. Math., théor. VI', p. 212.

[2]) Fund. Math. I p. 38. Cf. Janiszewski et Kuratowski op. cit. p. 215.

[3]) Le point $u$ existe, car chaque entourage de $v$ renferme un sous-continu de $C$. Voir: Janiszewski, *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Journ. de l'Ec. Polytéchn. 1912, théor. IV.

[4]) Voir p. 30 note 1.

En posant dans le lemme: $p \, non \, \varepsilon K$, $v = a$, $u = b$, $C = K$, on en conclut que $K - v$ est connexe. Donc $K^*$ est un continu. De plus, comme $v \varepsilon K'$, $K^*$ est non-borné. Ainsi: $K^*$ est un vrai sous-continu non-borné de $C$.

Il est à remarquer que chaque ensemble connexe non-borné contient un vrai sous-ensemble connexe non-borné. Car d'après le théorème VIII de notre mémoire précité, chaque ensemble connexe (contenant plus d'un point) est somme de deux ensembles connexes différents de lui.

Cependant un ensemble connexe, malgré qu'il soit non-borné, peut ne pas contenir de continu non-borné. Même s'il est une région. Dans ce dernier cas on a le théorème suivant:

*Pour qu'une région $R$ contienne un continu non-borné, il faut et il suffit que le centre d'inversion $v$ soit accessible*[1] *de $R^*$ quel que soit $v$.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons, en effet, que $C$ soit un continu non-borné tel que $C \subset R$. Nous pouvons admettre que $v \, non \, \varepsilon C$. Car, en cas contraire, on peut entourer le point $v$ d'une petite sphère $A$ contenue dans $R$ et on peut remplacer $C$ par le continu $C - A + B$, $B$ désignant la surface de $A$.

Or, la condition $v \, non \, \varepsilon C$, entraîne que $C^*$ est un ensemble connexe est, comme $C$ est non-borné, $C^* + v$ est un continu. On a donc

$$v \varepsilon C^* + v \quad \text{et} \quad (C^* + v) - v = C^* \subset R^*$$

ce qui prouve que $v$ est accessible de $R^*$.

La condition est suffisante. Nous allons prouver que, si le point $v$ est supposé accessible de la région $R^*$, $R$ contient un rayon[2].

$R$ étant une région, $R^*$ l'est également (voir Nº 4). Or, tout point qui est accessible d'une région, en est accessible par un arc simple[3]. Autrement dit: il existe un arc simple $A$ qui aboutit au point $v$ et qui remplit l'inclusion $A - v \subset R^*$. On en conclut que $(A - v)^* \subset R^{**} \subset R$. L'ensemble $A^* = (A - v)^*$ est donc un rayon situé dans la région $R$. C. Q. F. D.

Nous avons démontré, en même temps, que *si une région contient un continu non-borné, elle contient nécessairement un rayon.*

[1]) Un point $p$ est dit accessible d'un ensemble $E$ s'il existe un continu $K$ tel que $p \varepsilon K$ et $K - p \subset E$.

[2]) Pour la définition de „rayon" voir N 2.

[3]) Soient, en effet, $R$ une région arbitraire, $p$ un point appartenant à la frontière $F$ de $R$ et $C$ un continu tel que: $C - R = (p)$. Le continu $C$ peut toujours être supposé borné (voir: lemme de Janiszewski cité au Nº 9).

Désignons par $A_n$ l'ensemble de points $x$ de $C$ dont la distance de $F$ satisfait à la condition

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \varrho(x, F) \leqslant \frac{1}{n}.$$

**9.** Un vrai sous-continu $A$ de $C$ est dit un *sous-continu saturé* [1]) de $C$, s'il n'existe aucun continu $B$ remplissant les conditions:

$$A \subset B \subset C \quad \text{et} \quad A \neq B \neq C.$$

*Un sous-continu saturé n'est jamais borné.* Cette assertion se déduit aisément [2]) du lemme suivant de Janiszewski [3]):

*$A$ étant un vrai sous-ensemble fermé et borné d'un continu $C$, chaque point $p$ de $A$ peut être uni à l'ensemble $A \times \overline{C-A}$ par un sous-continu de $A$.*

Ainsi la notion du sous-continu saturé n'intervient que dans l'étude des continus non-bornés.

**10.** Pour avoir un exemple d'un sous-continu saturé, nous allons

---

L'ensemble $A_n$ étant fermé et borné, il existe conformément au théorème de Borel une suite finie $R_1^n, R_2^n, \ldots R_{k_n}^n$ de sphères (à $m$ dimensions) de rayon $< \dfrac{1}{n+1}$ qui remplissent l'inclusion: $A_n \subset R_1^n + \ldots + R_{k_n}^n \subset R$.

Posons $S = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} R_i^n$. On a donc.

$$C - p = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \subset S \subset R \tag{1}$$

d'où: $C \subset S+p$, ce qui prouve que $S+p$ est un continu. C'est un continu de Jordan.

En effet, le point $p$ étant le seul point d'accumulation des sphères $R_i^n$ ($n = 1, 2, \ldots, i = 1, \ldots k_n$), il n'y a dans le voisinage de chaque point $x \varepsilon S$ des points que d'un nombre fini de ces sphères. Le continu $S+p$ est donc localement connexe (voir N 1) au point $x$.

Or, le point $p$ ne pouvant être le seul point de non-connexité locale (voir N 1), $S+p$ est localement connexe en chaque point et, partant, un continu de Jordan.

Il existe, par conséquent (voir p. 26), un arc simple $L$ tel que: $p \varepsilon L \subset S+p$, d'où selon (1): $L-p \subset S \subset R$. $L$ est donc l'arc cherché.

[1]) Janiszewski et Kuratowski, l. c. p. 220.

[2]) Ibid.

[3]) Janiszewski, *Sur les continus irréductibles*... Une démonstration très simple de ce lemme a été donnée récemment par M. Vietoris, Monatsh. f. Math. u. Phys. 1921.

transformer par inversion le continu indécomposable $\mathfrak{B}$ suivant[1]) (voir fig. 1):

Soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble parfait non-dense de Cantor, c'est-à-dire, l'ensemble des points du segment [0, 1] dont les abscisses peuvent

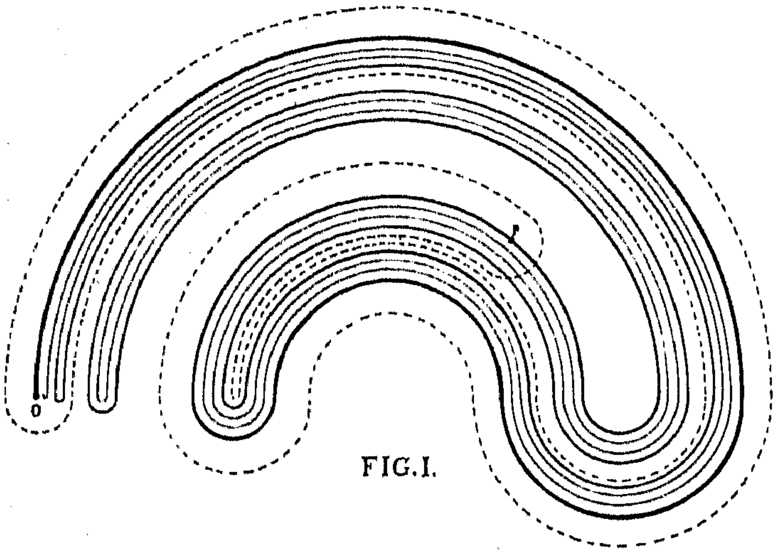


FIG.I.

être écrites dans le système de numération à base 3 sans chiffre 1. Soit $N_n (n \geqslant 1)$ l'ensemble des points $x$ de $\mathfrak{N}$ tels que

$$\frac{2}{3^n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Désignons par $D_0$ l'ensemble plan formé par les demi-circonférences décrites au-dessus de l'axe des $x$ par chaque point de $\mathfrak{N}$ et ayant pour centre le point $(\frac{1}{2}, 0)$. Soit, d'une façon analogue, $D_n (n \geqslant 1)$ l'ensemble formé par les demi-circonférences décrites du point $\left(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0\right)$ par chaque point de $N_n$ mais au-dessous de l'axe des $x$. Posons:

$$\mathfrak{B} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n.$$

Afin de prouver que $\mathfrak{B}$ est un continu indécomposable, considérons la suite infinie

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

des demi-circonférences contenues dans $\mathfrak{B}$ et définies par les conditions:

[1]) Cf. Janiszewski, ibid. p. 36 et Kuratowski: *Théorie des continus irréductibles entre deux points*, Fund. Math. III, p. 209.

1° $S_1$ unit les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$.

2° Pour tout $n \geqslant 1$ le produit $S_n \times S_{n+1}$ se compose de l'extrémité commune de $S_n$ et $S_{n+1}$.

Soit

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n.$$

On démontre par induction que, $I$ désignant l'ensemble des extrémités des segments contigus à $\mathfrak{A}$, on a: $I \subset S$. L'ensemble $I$ étant dense dans $\mathfrak{A}$, on a $\overline{I} = \mathfrak{A}$ et $\overline{S} = \mathfrak{B}$, ce qui prouve que $\mathfrak{B}$ est un continu (puisque $S$ est connexe).

D'autre part, $\overline{\mathfrak{A} - I} = \mathfrak{A}$. Par suite $\overline{\mathfrak{B} - S} = \mathfrak{B}$, ce qui veut dire que $\mathfrak{B} - S$ est dense dans $\mathfrak{B}$. Pour prouver que $\mathfrak{B}$ est indécomposable, il suffit donc[1] de démontrer que $\mathfrak{B}$ est irréductible entre le point $(0, 0)$ et chaque point de $\mathfrak{B} - S$. Or, cela résulte immédiatement de la propriété suivante de $\mathfrak{B}$:

($\pi$) s i $K$ e s t u n c o n t i n u a s s u j e t t i a u x c o n d i t i o n s:

$$K \subset \mathfrak{B}, \quad K \neq \mathfrak{B}, \quad K \times S \neq 0,$$

i l e x i s t e u n $n$ t e l q u e: $K \subset S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

La proposition ($\pi$) peut être démontrée de la façon suivante.

Soit $q \varepsilon K \times S$. L'ensemble $S$ étant dense dans $\mathfrak{B}$, l'inégalité $K \neq \mathfrak{B}$ entraine l'existence d'un point $p$ de $S - K$. On peut, en outre, choisir le point $p$ de façon que, $A$ désignant l'arc à extrémités $(0, 0)$ et $p$, extrait de $S$, on ait $q \varepsilon A$.

Nous allons prouver que $K \subset A$.

Supposons, par contre, que $r \varepsilon K - A$. Soit $n_0$ un nombre naturel tel que la distance de $p$ à $K$ ainsi que celle de $r$ à $A$ dépasse $3^{-n_0}$ et que l'on ait

$$A \subset \sum_{i=1}^{2^{n_0}-1} S_i.$$

Envisageons la bande $P$ formée par tous les cercles à rayon $\frac{4}{3^{n_0+2}}$ qui ont pour centres un point de $A$. Le bord de cette bande (marqué à la fig. 1 par un trait pointillé) se compose de deux lignes parallèles à $A$ et de deux demi-circonférences ayant pour centre resp. les points $(0, 0)$ et $p$. Parmi ces 4 lignes, les

[1]) Selon le théor. IV de MM. J a n i s z e w s k i et K u r a t o w s k i (l. c. p. 215), chaque continu irréductible entre un point $p$ et tout point d'un ensemble dense dans ce continu est indécomposable.

trois premières sont disjointes de $\mathfrak{B}$, car leurs points d'intersection avec l'axe des $x$ sont, en vertu de l'inclusion $A \subset \sum_{i=1}^{2^{n_0}-1} S_i$, situés dans les intervalles contigus à $\mathfrak{N}$. La quatrième est disjointe de $K$, puisque la distance de $p$ à $K$ est $> \frac{1}{3^{n_0}} > \frac{4}{3^{n_0+2}}$.

Ainsi, le bord entier de la bande est disjoint de $K$. Or $K$ étant un continu, on a $K \subset P$ ou bien $K \times P = 0$, contrairement aux formules $r \varepsilon K - P$ et $q \varepsilon K \times P$.

Cette contradiction prouve que $K \subset A$.

Soit $v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ le centre d'inversion. Désignons par $A$ l'arc $[(0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$ extrait du continu $\mathfrak{B}$, le point $v$ exclu. L'ensemble $\mathfrak{B} - v$ étant connexe, $\mathfrak{B}^*$ est un continu (voir N° 11). Nous allons prouver que $A^*$ *est un sous-continu saturé de* $\mathfrak{B}^*$ [1]).

Il suffit à ce but de montrer qu'il n'existe aucun ensemble $D$ connexe et relativement fermé dans $\mathfrak{B} - v$ (c.-à.-d. $D = \overline{D} - v$) qui remplisse les conditions:

$$A \subset D \subset \mathfrak{B} - v \quad \text{et} \quad A \neq D \neq \mathfrak{B} - v.$$

Or, supposons qu'un tel $D$ existe. Par conséquent. $\overline{D}$ est un continu et on a $\overline{D} \neq \mathfrak{B}$. En posant dans $(\pi)$: $K = \overline{D}$, on en conclut que $D$ est contenu dans un arc $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ composé d'un nombre fini de demi-circonférences. Or, le point $v$ étant interposé sur cet arc entre $A$ (qui est contenu dans $D$) et $D - A$ (qui est non-vide), l'ensemble $D = D - v$ n'est pas connexe, contrairement à l'hypothèse.

**11.** *Le continu* $\mathfrak{B}^*$ *est indécomposable.*

Cela résulte du théorème général suivant:

*$C$ étant un continu indécomposable borné, $C^*$ est un continu indécomposable.*

**Démonstration** D'après le corollaire du N° 8, $C - v$ est connexe, quel que soit $v$. Donc, $C$ étant borné, $C^*$ est un continu.

Nous allons prouver que ce continu est indécomposable. Supposons donc que $C^*$ se décompose en deux continus $M$ et $N$ de sorte que

(1) $$C^* = M + N$$

(2) $$M \neq C^* \neq N.$$

[1]) La fig. II représente un continu équivalent topologiquement à $\mathfrak{B}^*$. Le rayon $y \geqslant 0$, $x = 0$ en est un sous-continu saturé, correspondant à $A^*$.

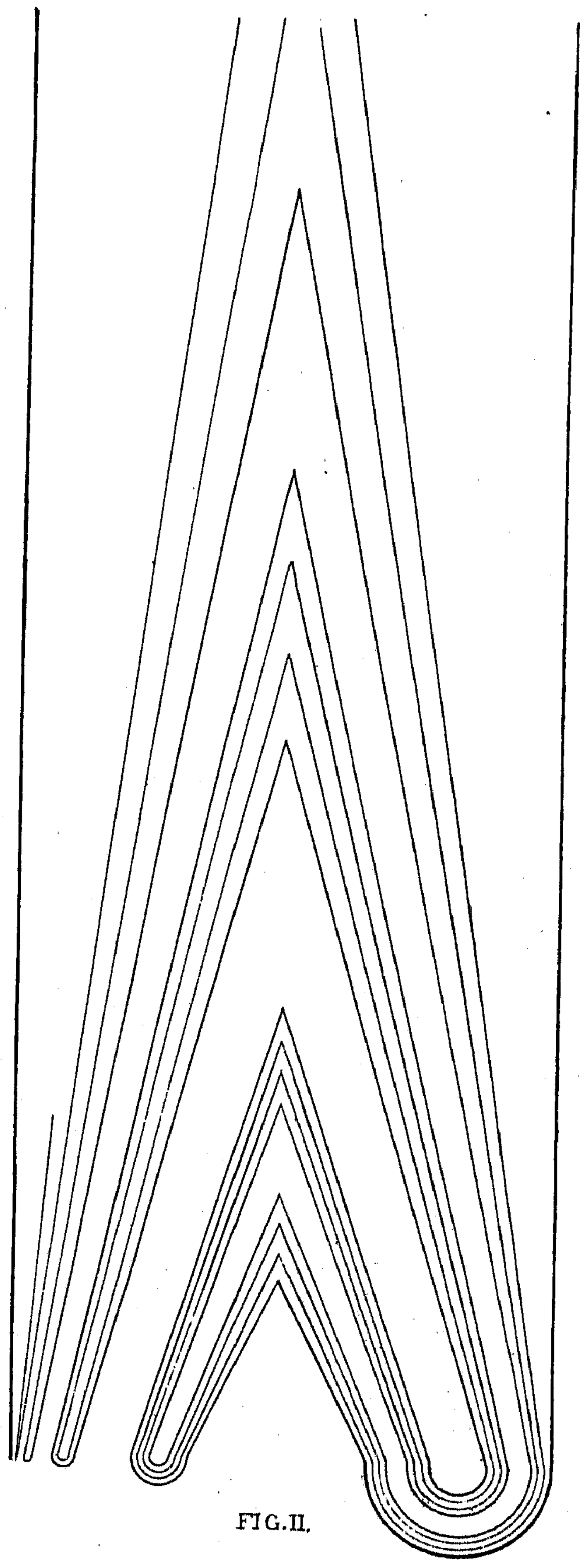

FIG. II.

$M$ et $N$ étant des continus ne contenant pas le point $v$ (puisque $v$ *non* $\varepsilon C^*$) on a selon (2): $M^* \mp C^{**} \mp N^*$ et comme $\overline{M^*}$ et $\overline{N^*}$ ne diffèrent de $M^*$ et $N^*$ que tout au plus par le point $v$, on obtient

$$(3) \qquad \overline{M^*} \mp \overline{C^{**}} \mp \overline{N^*}.$$

D'autre part, la formule (1) donne:

$$(4) \qquad \overline{C^{**}} = \overline{M^*} + \overline{N^*}.$$

Or, $\overline{M^*}$ et $\overline{N^*}$ étant des continus, les formules (3) et (4) impliquent, en vertu de l'identité $\overline{C^{**}} = \overline{C - v} = C$, que $C$ est décomposable, contrairement à l'hypothèse. Il est donc établi que $C^*$ est indécomposable.

Il importe de remarquer que l'hypothèse que $C$ soit borné est essentielle dans l'énoncé du théorème. Dans le N⁰ 17 nous définirons, en effet, un continu indécomposable non-borné $\mathscr{H}$ qui se transforme par inversion en un continu décomposable $\mathscr{H} + v$. L'inversion des continus indécomposables non-bornés sera étudiée dans le N⁰ 13.

Quant au choix du centre d'inversion dans le cas de $\mathscr{B}^*$, on voit aussitôt que, si $v$ est distinct de $(0, 0)$ et appartient à $S$, le continu $\mathscr{B}^*$ contient un sous-continu saturé. Si $v$ est un autre point de $\mathscr{B}$, le continu $\mathscr{B}^*$, tout en restant indécomposable et non-borné, ne contient aucun sous-continu saturé

Ainsi, parmi les continus indécomposables non-bornés il existe qui contiennent des sous-continus saturés et aussi qui n'en contiennent pas.

**12.** D'autre part, un continu ayant un sous-continu saturé n'est pas nécessairement indécomposable. Si, par exemple, on ajoute le segment $[-1, 0]$ de l'axe des $x$ au continu de la fig. II, le continu ainsi formé, tout en étant décomposable, contient un sous-continu saturé, composé du segment ajouté et du rayon $y \geqslant 0$, $x = 0$.

Or, malgré qu'il en soit ainsi, *le rôle des continus indécomposables dans la construction des sous-continus saturés est tout à fait essentiel*: le théorème, qui va suivre, montre en effet que chaque continu admettant des sous-continus saturés — qu'il soit décomposable ou non — contient toujours un continu indécomposable.

**Théorème.** *$K$ étant sous-continu saturé d'un continu $C$, l'ensemble $\overline{C-K}$ est un continu indécomposable.*

**Démonstration.** $\overline{C-K}$ est un continu. Car, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait décomposer le continu $C$ en deux continus $C_1$ et $C_2$ tels que

$$K \subset C_1,\ K \subset C_2,\ C_1 \neq C \neq C_2\text{ [1]},$$

contrairement à l'hypothèse que $K$ est saturé.

Ceci établi, supposons que le continu $\overline{C-K}$ soit décomposable:

$$\overline{C-K} = M + N \tag{5}$$

$$M \neq \overline{C-K} \neq N. \tag{6}$$

$C$ étant un continu, l'identité

$$C = K + M + N \tag{7}$$

entraîne: $K \times (M+N) \neq 0$. On peut donc poser: $K \times M \neq 0$. On en conclut que $K + M$ est un continu et, comme $K$ est saturé, on a:

$$K + M = C \tag{8}$$

ou bien

$$K + M = K. \tag{9}$$

Dans les deux cas on arrive à une contradiction.

Car, l'égalité (8) entraîne que $C - K \subset M$, donc $\overline{C-K} \subset M$, ce qui donne selon (5): $\overline{C-K} = M$, contrairement à (6).

De même, l'égalité (9) implique en vertu de (7) que l'on a $K + N = C$, d'où on conclut, en raisonnant comme auparavant, que $\overline{C-K} = N$, contrairement à (6). C. Q. F. D.

Ainsi, l'étude des sous-continus saturés se ramène à celle de certains types de continus indécomposables.

Or, on sait qu'un continu indécomposable est formé d'une infinité indénombrable de composants [2]. S'il est borné, chacun de

[1] Nous nous appuyons sur le théorème général suivant: $K$ étant un sous-continu d'un continu $C$, si $\overline{C-K}$ est une somme de deux ensembles fermés $P$ et $Q$ sans points communs, les ensembles $K+P$ et $K+Q$ sont des continus. Voir: Knaster et Kuratowski, l. c. p. 212, théor. VI'.

[2] Cf. Janiszewski et Kuratowski, l. c. p. 218.

ses composants est dense dans lui. Dans le cas de continu non-borné, il n'en est rien.

En effet, si $K$ est un sous-continu saturé d'un continu indécomposable $C$, $K$ est un composant de $C$. Cependant il est non-dense dans $C$, puisque chaque vrai sous-continu d'un continu indécomposable est non-dense dans lui[1]).

Inversement, si un composant $K$ d'un continu indécomposable $C$ n'est pas dense dans $C$, il est nécessairement un sous-continu saturé de $C$. Car $\overline{K}$ est encore un vrai sous-continu de $C$ et, par définition du composant on a: $\overline{K} \subset K$, d'où $\overline{K} = K$.

Le théorème de ce N° donne le corollaire suivant:

*Un continu $C$ qui contient deux* (au moins) *sous-continus saturés disjoints est indécomposable.*

En effet, si $K_1$ et $K_2$ sont deux sous-continus saturés de $C$ et $K_1 \times K_2 = 0$, on a $K_1 \subset C - K_2 \subset \overline{C - K_2}$ et, comme $\overline{C - K_2}$ est d'après le théorème mentionné un continu indécomposable, le continu $K_1$ est non-dense dans $\overline{C - K_2}$, donc dans $C$. On a par conséquent: $C = \overline{C - K_1}$. Or $\overline{C - K_1}$ étant indécomposable en vertu du même théorème, l'égalité précédente prouve que $C$ est indécomposable.

La condition que les sous-continus saturés soient disjoints est essentielle. Car, si on ajoute au continu de la fig. II le continu, qui lui est symétrique par rapport à l'axe des $y$, on obtient un continu décomposable en deux sous-continus saturés, dont chacun est indécomposable.

**13. Théorème.** *La condition nécessaire et suffisante pour que $C$ étant un continu indécomposable non-borné, $C^* + v$ soit un continu indécomposable, est que tout au moins un composant de $C$ ne contienne aucun continu non-borné.*

**Démonstration.** Remarquons d'abord qu'en vertu du corollaire du N 8, l'ensemble $C - v$ est connexe, donc l'ensemble $C^* = (C - v)^*$ l'est également et, comme $C$ est non-borné, $C^* + v$ est un continu.

I. La condition est nécessaire. Supposons, en effet, que chaque composant de $C$ contient un continu non-borné. Posons: $S = 0$ en cas où $v$ non $\varepsilon$ $C$, et $S =$ le composant de $C$ qui contient $v$, en cas

[1]) Théorème II de Janiszewski et Kuratowski, ibid. Un ensemble $E$ est dit non-dense dans $C$ si $E \subset C$ et si dans le voisinage de chaque point de $C$ il existe des points de $C$ qui n'appartiennent pas à $\overline{E}$.

contraire. Nous allons prouver que, si $C^* + v$ est supposé indécomposable et si $V$ désigne le composant de $C^* + v$ qui contient $v$, on a

$$(C - S)^* \subset V. \tag{10}$$

Soit, en effet, $p \varepsilon C - S$. Il existe par hypothèse, un continu non-borné $K$ tel que

$$p \varepsilon K,\ K \subset C,\ K \neq C. \tag{11}$$

Les deux dernières formules entraînent, par définition de composant, $K \subset C - S$, d'où $v \text{ non } \varepsilon K$. Par conséquent, le continu $K$ étant non-borné, $K^* + v$ est un continu. De plus, la condition (11) implique que $K^* + v$ est un vrai sous continu de $C^* + v$ contenant $p^*$. Donc $p^* \varepsilon V$, d'où l'inclusion (10).

Tout composant d'un continu indécomposable étant de première catégorie dans ce continu [1]), on en conclut que $V$ et, selon (10), $(C - S)^*$ est de première catégorie dans $C^* + v$. De même, $S$ étant de première catégorie dans $C$, $S^*$ l'est [2]) dans $C^* + v$. On arrive ainsi, en vertu de la décomposition

$$C^* + v = (C - S)^* + S^* + v,$$

à la conclusion que le continu $C^* + v$ est de première catégorie dans lui-même. Cette conclusion contredisant le théorème de Baire (d'après lequel aucun ensemble fermé non-vide n'est de première catégorie dans lui même), on en déduit que le continu $C^* + v$ est décomposable.

II. La condition est suffisante. Supposons qu'un composant $A$ de $C$ ne contient aucun continu non-borné. Il s'agit de prouver que le continu $C^* + v$ est indécomposable.

Soit

$$u \text{ non } \varepsilon\ C^* + v. \tag{12}$$

Transformons l'espace par inversion de centre $u$ et désignons l'image d'un ensemble arbitraire $X$ ainsi transformé par $X^0$. L'opé-

[1]) Théorème de M. Mazurkiewicz, Fund. Math. I, p. 36. Un ensemble est dit de première catégorie dans $C$, s'il est somme d'une infinité dénombrable d'ensembles non-denses dans $C$.

[2]) Si $E$ est non-dense dans $C$, il l'est également dans $C - v$. Par conséquent $E^*$ est non-dense dans $C^* = (C - v)^*$. On en conclut que, s $A$ es de première catégorie dans $C$, $A^*$ l'est dans $C^*$.

ration $X^0$ jouit donc par rapport à $u$ des mêmes propriétés que $X^*$ par rapport à $v$.

Posons: $D=(C^*+v)^0$ si $C^*$ est borné, et $D=(C^*+v)^0+u$ en cas contraire (c'est-à-dire: si $v \varepsilon C$). $D$ est donc, en tout cas, un continu borné contenant le point $v^0$. Or,

$$D^0=(C^*+v)^{00}=(C^*+v)-u=C^*+v. \tag{13}$$

Supposons que le continu $C^*+v$ soit décomposable. En raison du théorème du N° 11 et de l'égalité $D^0=C^*+v$, qui résulte de (13), on conclut que le continu $D$ est aussi décomposable. Par conséquent [1], l'ensemble de points $x$ tels que $D$ soit irréductible entre $v^0$ et $x$ n'est pas dense dans $D$. D'autre part, l'ensemble $A^{*0}$ est dense dans $D$. Car, le composant $A$ ne contenant aucun continu non-borné, $A$ ne peut être lui-même un continu. Or, chaque composant qui n'est pas un continu étant dense dans $C$ (voir p. 46), $A$ est dense dans $C$, et par suite $A^*$ est dense dans $C^*$ et $A^{*0}$ dans $C^{*0}$ donc dans $D$.

Il existe, par conséquent, un point $p(\neq v)$ de $A$ tel que $D$ est réductible entre $v^0$ et $p^{*0}$. $D$ étant borné, il existe un sous-continu $K$ de $D$ irréductible entre $v^0$ et $p^{*0}$ et tel que

$$K \neq D. \tag{14}$$

Deux cas peuvent se présenter suivant que $K-u$ est connexe ou non. Nous allons prouver que les deux cas impliquent une contradiction.

(i) $K-u$ e s t c o n n e x e. D'après le lemme du N 8, l'ensemble $K-u-v^0$ est connexe. L'ensemble $(K-u-v^0)^0$ l'est également, puisque $u$ non $\varepsilon$ $K-u-v^0$. Or,

$$(K-u-v^0)^0=K^0-u^0-v^{00}=K^0-v^{00}.$$

Mais

$$v^{00}=v-u=v,$$

car $v \neq u$ selon (12). Donc

$$(K-u-v^0)^0=K^0-v,$$

[1]) Cf. J a n i s z e w s k i et K u r a t o w s k i, l. c. p. 215.

ce qui prouve que $K^0 - v$ est connexe. On en conclut que l'ensemble $K^{0*} = (K^0 - v)^*$ est aussi connexe. $\overline{K^{0*}}$ est donc un continu. En outre, l'hypothèse $p^{*0} \varepsilon K$ entraîne que $p^{*00*} \varepsilon K^{0*}$ Mais $p^{*00} = p^* - u = p^*$ (selon (12)), d'où $p^{*00*} = p^{**} = p - v = p$, puisque par hypothèse $p \neq v$. Ainsi

$$(15) \qquad p \, \varepsilon \, K^{0*}.$$

$K$ étant fermé et borné, $K^0$ est fermé Par conséquent [1], les ensembles $K^{0*}$ et $\overline{K^{0*}}$ ne diffèrent que, tout au plus, par le point $v$. Il en résulte, selon (14), que $\overline{K^{0*}} \neq C$, c'est-à-dire que $K^{0*}$ est un vrai sous-continu de $C$. D'après la formule (15) et par définition de composant, on a

$$(16) \qquad \overline{K^{0*}} \subset A.$$

Le composant $A$ ne contenant, par hypothèse, aucun continu non-borné, le continu $\overline{K^{0*}}$ et, a fortiori, l'ensemble $K^{0*}$ est borné, en vertu de l'inclusion (16).

D'autre part, on peut prouver que $K^{0*}$ est non-borné, car $v^0$ appartenant au continu $K$, on a $v^0 \varepsilon K'$, d'où $v \varepsilon K^{0\prime}$.ce qui prouve [2]) que $K^{0*}$ est non-borné.

(ii) $K - u$ n'est pas connexe. Selon le lemme du N⁰ 8, $K$ est donc réductible entre $u$ et chaque autre de ses points. Il existe donc, en particulier, ($K$ étant borné) deux sous-continus $L$ et $M$ de $K$ irréductibles respectivement entre $v^0$ et $u$ et entre $u$ et $p^{*0}$. $K$ étant par définition irréductible entre $v^0$ et $p^{*0}$, on a donc

$$(17) \qquad v^0 \; non \; \varepsilon \; M.$$

$L$ étant irréductible entre $u$ et $v^0$, l'ensemble $L - u$ est connexe (voir lemme du N⁰ 8). En raisonnant avec $L$ d'une façon tout à fait analogue qu'avec $K$ dans le cas (i), on prouve que $\overline{L^{0*}}$ est un vrai sous-continu non-borné de $C$. De plus, comme $u \varepsilon L'$; $L^0$ est non-borné, donc $v \varepsilon \overline{L^{0*}}$

Ainsi, le composant de $C$ qui contient $v$ renferme un continu non-borné (à savoir $\overline{L^{0*}}$). Ce composant est donc distinct de $A$, qui par hypothèse ne contient aucun continu non-borné. Par conséquent: $v \; non \; \varepsilon A$.

[1]) Fund. Math. IV, p. 157.
[2]) Fund. Math. IV, théor. 9, p. 157.

Les points $p$ et $v$ sont donc situés sur des composants différents de $C$. On en conclut que $C$ est irréductible entre $p$ et $v$. Mais ceci implique une contradiction, car, comme nous allons prouver, $\overline{M^{0*}}$ est un vrai sous-continu de $C$ unissant $p$ et $v$.

En effet, le continu $M$ étant irréductible entre $u$ et $p^{*0}$, $M-u$ est connexe. $M^0$ est donc un continu. En outre, comme $u \varepsilon M$, $M^0$ est non-borné, donc $v \varepsilon M^{0*}$ D'autre part, $p \varepsilon \overline{M^{0*}}$, car $p^{*0} \varepsilon M$. L'ensemble $\overline{M^{0*}}$ unit donc les points $p$ et $v$. Cet ensemble est un continu, car d'après (17) $v \,\text{non}\, \varepsilon M^0$ et, $M^0$ étant connexe, $M^{0*}$ est aussi connexe, donc $\overline{M^{0*}}$ est un continu. Enfin $\overline{M^{0*}}$ est un vrai sous-continu de $C$, car l'inégalité $M \neq D$ entraîne $\overline{M^{0*}} \neq C$.

**Corollaire.** *L'ensemble-somme de tous les vrais sous-continus non bornés d'un continu indécomposable $C$ est, ou bien identique à $C$, ou bien de première catégorie dans $C$.*

**Démonstration.** Désignons par $S$ l'ensemble formé par tous les composants de $C$ qui contiennent des continus non-bornés. Posons:

$$0 \neq S \neq C. \tag{18}$$

Il s'agit de prouver que $S$ est de première catégorie dans $C$.

Soit $v \,\text{non}\, \varepsilon C$. D'après le théorème et la formule (18), $C^* + v$ est un continu indécomposable. Soit $V$ le composant de ce continu tel que $v \varepsilon V$. $V$ étant de première catégorie dans $C$, il suffit de prouver que

$$S^* \subset V. \tag{19}$$

Or, soit $K$ un vrai sous-continu non-borné de $C$. Comme $v \,\text{non}\, \varepsilon K$, $\overline{K^*}$ est un vrai sous-continu de $C^* + v$ contenant $v$. Donc

$$\overline{K^*} \subset V \quad \text{et} \quad K^* \subset V,$$

d'où on déduit l'inclusion (19). C. Q. F. D.

Le corollaire qui vient d'être établi montre que dans un continu indécomposable *les composants ne contenant que des continus bornés — à moins d'être complètement absents* (comme dans le continu $\mathcal{H}$ du § 4 par exemple) *— se présentent toujours en infinité indénombrable.*

Par contre, *il se trouve*, en vertu du théorème du N° 8, *dans tout continu indécomposable non-borné au moins un composant qui contient des continus non-bornés.* D'ailleurs, il peut y avoir un seul composant pareil, ou un nombre fini, ou une infinité dénombrable ou indénombrable.

### § 4. Exemple d'un continu composé de sous-continus saturés disjoints

**14.** Le problème de l'existence d'un tel continu peur en vertu des théorèmes du N⁰ 12. s'énoncer aussi de la facon suivante: existe-t-il un continu indécomposable dont chaque composant soit un continu?

Le continu $\mathcal{H}$, que nous allons définir dans ce §, repond au problème. Il est à 3 dimensions; cependant la partie essentielle du procédé, par lequel nous allons l'obtenir, consiste a construire un continu auxiliaire plan et borne, qui est représenté à la fig. III Ce continu — appelons le $\mathcal{G}$ — est indécomposable et ne constitue qu'une déformation du continu $\mathcal{B}$ (du N⁰ 10) ayant pour but de pouvoir en enlever un ensemble fermé qui le coupe en parties connexes et relativement fermées dans le reste, sans que ce reste cesse d'être connexe. Or, $\mathcal{H}$ s'obtenant de ce dernier comme image homéomorphe et fermée, on peut s'arranger de façon que, tout en étant un continu, il conserve la dissociation en parties disjointes et fermées, qui en sont autant de composants

Telle est l'idee directrice de la construction. Nous allons la réaliser de facon que la modification topologique porte uniquement sur le composant $S$ de $\mathcal{B}$, les autres composants de ce continu n'étant soumis qu à une transformation homéomorphe. La modification de $S$ consiste à munir ce composant d'une infinité de points d'arrêt et de ramification situés sur l'axe des $x$

Nous continuons a nous servir des notations du N⁰ 10 sans en modifier la signification.

**Définition au continu** $\mathcal{G}$. Soit $i \varepsilon I$. Si $i$ est l'extrémité gauche d'un intervalle de longueur $\frac{1}{3^n}$ contigu à $\mathfrak{N}$, désignons par $F(e, i)$, pour $e \varepsilon N_{n+1}$, la ligne polygonale tracée successivement par les points:

$$\left(i - \frac{1}{3^n}, e\right), \quad \left(i + e - \frac{2}{3^{n+1}}, e\right),$$

$$\left(i + e - \frac{2}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n} - e\right) \quad \text{et} \quad \left(i, \frac{1}{3^n} - e\right)$$

Si $i$ est l'extrémité droite de cet intervalle, désignons par $F(e, i)$ la ligne symétrique à $F\left(e, i-\frac{1}{3^n}\right)$ par rapport à la droite $x=i+\frac{1}{2\,.\,3^n}$. Les points $i=0$ et $i=1$ sont regardés respectivement comme les extrémités droite et gauche d'un intervalle de longueur 1 „contigu" à $\partial\mathfrak{T}$. Posons:

$$G(i)=\sum_{e\,\varepsilon\,N_{n+1}} F(e, i) \quad \text{et} \quad E_0=\sum_{i\,\varepsilon\,I} G(i).$$

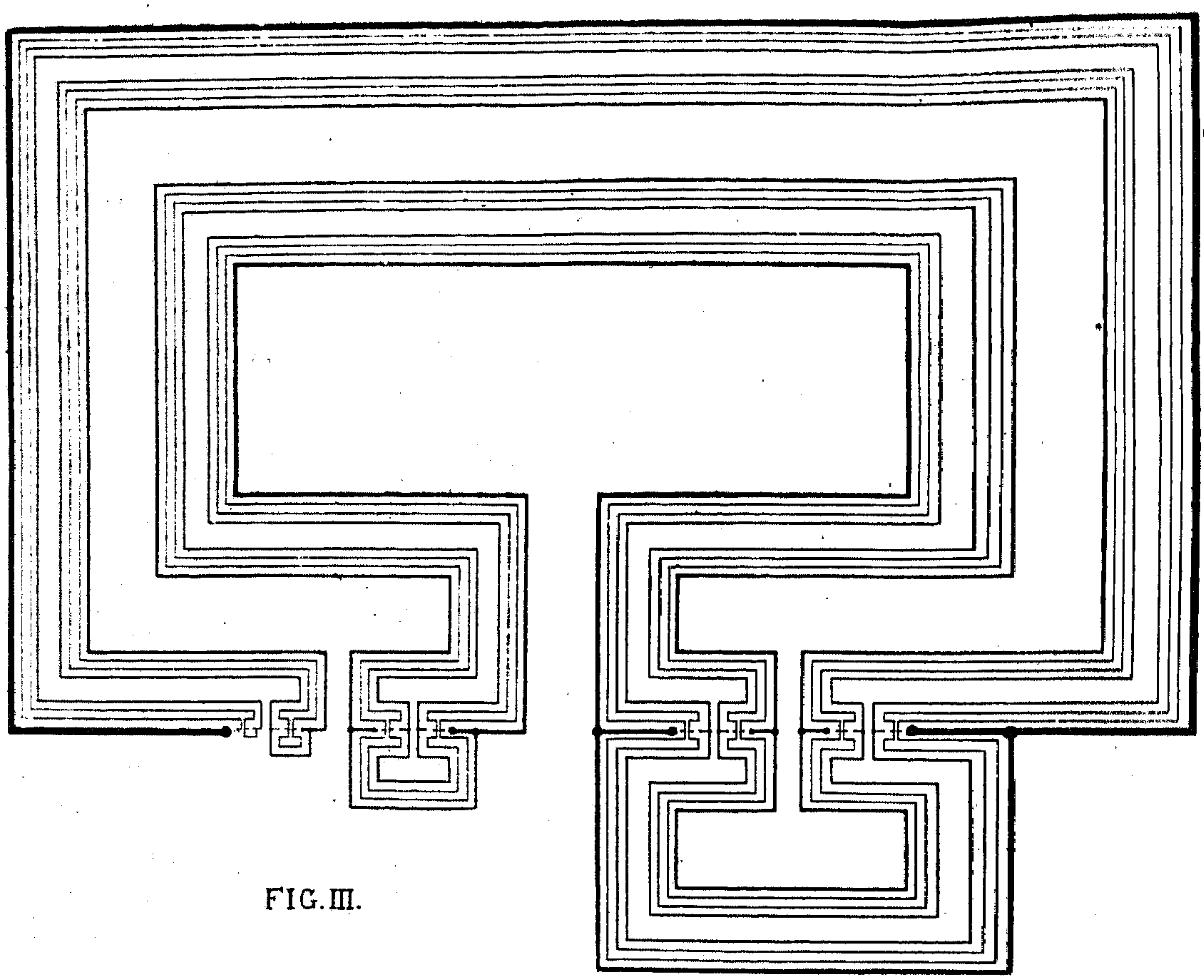

FIG. III.

Le continu $\mathcal{G}$ s'obtient de $E_0$ de la même manière que $\mathcal{B}$ de $D_0$. Plus précisément: $E_n$ désignant l'ensemble des points

$$\left(\frac{x+2}{3^n}, \frac{-y}{3^n}\right) \quad \text{où} \quad (x, y)\,\varepsilon\, E_0,$$

$$\mathcal{G}=\sum_{n=0}^{\infty} E_n.$$

On voit que la transformation de $D_0$ en $E_0$ a pour effet immédiat de mettre certains de ses segments (par exemple, le segment $(1, 0), (^4/_3, 0))$ en contact avec l'axe des $x$ par toute leur étendue, de sorte que les ensembles $E_n (n > 0)$ viennent s'appliquer contre $E_0$ suivant une infinité de segments de cet axe et non plus suivant l'ensemble punctiforme $\mathfrak{N}$, comme ce fut le cas de $\mathfrak{B}$.

En conséquence, on voit apparaitre sur $\mathcal{G}$ une infinité de points d'arrêt (ce sont ceux de $J$) et une infinité de points de ramification, également situés sur l'axe des $x$ et convergeant vers $\mathfrak{N}$ (ces derniers points peuvent être mis sous une des quatre formes suivantes:

$$\frac{10}{3^n}, \frac{5}{3^n}, j + \frac{1}{3^{n+1}} \quad \text{et} \quad j + \frac{2}{3^{n+1}}$$

où $n \geqslant 2$ et $j$ désigne l'extrémité gauche d'un intervalle de longueur $\frac{1}{3^n}$ contigu à $\mathfrak{N}$, distincte toutefois de $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$). Ils sont représentés à la fig. III par des petits disques noirs.

**Définition de $\mathcal{H}$.** En désignant par $V$ l'ensemble linéaire composé de points de ramification de $\mathcal{G}$ et de ceux qui appartiennent à $\mathfrak{N}$, faisons correspondre à chaque point $(x, y)$ de l'ensemble $\mathcal{G} - V$ un point à 3 coordonnées $x, y, z$, où $z$ est le nombre inverse de la distance entre le point $(x, y)$ et l'ensemble $V$. En symboles:

$$z = \frac{1}{\varrho[(x, y), V]}.$$

$\mathcal{H}$ est l'ensemble des points ainsi obtenus.

**15.** La transformation de $\mathcal{G} - V$, que nous venons d'exécuter, étant — comme on voit — biunivoque et bicontinue, les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G} - V$ sont homéomorphes. Cela nous permet de baser la démonstration des propriétés de $\mathcal{H}$ sur celles de $\mathcal{G}$ et de $V$. Nous en utiliserons les suivantes:

(I) *$\mathcal{G}$ est un continu indécomposable.*

Soit, en effet, dans $\mathcal{G}$

$$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$$

la suite des lignes polygonales, analogue à $\{S_n\}$ et définie par les conditions suivantes:

1° la ligne $T_1$, composée de 4 segments, unit le point $(0, 0)$ au point $(^{10}/_9, 0)$,

2° pour tout $n \geqslant 1$, $T_n \times T_{n+1}$ est l'extrémité commune de $T_n$ et $T_{n+1}$,

3° l'ensemble des extrémités des $\{T_n\}$ où $n \geqslant 1$ coïncide avec celui des points d'arrêt et de ramification de $\mathcal{G}$.

Envisageons la somme $T=\sum_{n=1}^{\infty} T_n$.

On prouve, de la même manière que pour $S$, que:

($\varrho$) *$K$ étant un continu assujetti aux conditions*

$$K \subset \mathcal{G},\ K \neq \mathcal{G} \quad et \quad K \times T \neq 0,$$

*il existe un $n$ tel que $K \subset T_1 + T_2 + \ldots + T_n$.*

Il en résulte, tout comme pour $\mathfrak{B}$, que $\mathcal{G}$ est un continu irréductible entre $(0,0)$ et chaque point de l'ensemble $\mathcal{G}-T$, qui est dense dans $\mathcal{G}$. On en conclut que le continu $\mathcal{G}$ est indécomposable.

(II) *L'ensemble $\mathcal{G}-V$ est composé d'arcs simples sans extrémités; ils n'ont deux à deux aucun point commun; leurs extrémités forment l'ensemble $V$.*

On, voit, en effet, que chacun des ensembles $T_n - V$ est, en vertu des conditions 2° et 3°, un arc simple sans extrémités; ces dernières forment l'ensemble $V-(\mathfrak{N}-I)$.

D'autre part, l'ensemble $\mathcal{G}-V-T$ est également composé d'arcs simples sans extrémités; l'ensemble de leurs extrémités est $\mathfrak{N}-I$. On peut s'en convaincre, en se basant sur les analogies entre $\mathcal{G}-V-T$ et $\mathfrak{B}-\mathfrak{N}-S$, qui se compose de demi-circonférences disjointes à extrémités situées sur l'axe des $x$ dans l'ensemble $\mathfrak{N}-I$. La seule différence, qui se présente ici, est que toute demi-circonférence de $\mathfrak{B}-S$ est remplacée dans $\mathcal{G}-T$ par un arc simple étant une espèce de ligne brisée qui effectue une infinité d'oscillations de plus en plus petites à mesure qu'elle s'approche de ses extrémités.

Désignons par $A$ un de ces arcs sans extrémités, qui forment l'ensemble $\mathcal{G}-V$. Nous allons prouver que

(III) *Il n'existe aucun ensemble $B$ connexe et relativement fermé dans $\mathcal{G}-V$ qui remplisse les conditions*

(1) $$A \subset B \subset \mathcal{G}-V$$

et

(2) $$A \neq B \neq \mathcal{G}-V.$$

Supposons, en effet, qu'un tel $B$ existe. $B$ étant donc connexe et relativement fermé dans $\mathcal{G}-V$, l'ensemble $\overline{B}$ est un continu et on a

(3) $$B=\overline{B}-V.$$

Cette égalité implique que $B \neq \mathcal{G}$, car on aurait en cas contraire $B=\mathcal{G}-V$, contrairement à (2).

Deux cas peuvent se présenter;

1° $B \times T \neq 0$. D'après ($\varrho$) il existe donc un $n$ tel que

$$B \subset T_1 + T_2 + \ldots + T_n,$$

d'où on tire en vertu de (3):

$$B \subset (T_1 - V) + (T_2 - V) + \ldots + (T_n - V),$$

les sommandes du membre droit étant selon (II) disjoints et relativement fermés dans $\mathcal{G} - V$. En vertu de la connexité de $B$ on en conclut que $B$ est contenu entièrement dans un de ces sommandes. Soit $B \subset T_i - V$, d'où selon (1) $A \subset B \subset T_i - V$ et, par définition de $A$, $A = T_i - V$. On a par suite $A = B$, contrairement à (2).

2° $B \times T = 0$. On a dans ce cas $B \subset \mathcal{G} - V - T$. Comme tous les points de $\mathcal{G}$ qui sont situés sur l'axe des $x$ appartiennent à $V + T$, on conclut que $B$ est disjoint de cet axe. Il existe donc un $n$ tel que $B \subset E_n$.

Soit $p \varepsilon B - A$ Soit $L$ l'arc simple extrait de $E_n$ contenant $p$ et ayant les extrémités sur l'axe des $x$. En désignant respectivement par $a_1$, $a_2$ et $l_1$, $l_2$ les extrémités de $A$ et de $L$, on a évidemment $a_1 < l_1 < l_2 < a_2$ ou bien $l_1 < a_1 < a_2 < l_2$. Ces points étant situés dans $\mathfrak{N} - I$, soit $[i_1, i_2]$ un intervalle contigu à $\mathfrak{N}$ et interposé entre $a_1$ et $l_1$ Il existe par conséquent un $T_k$ dont une extrémité se trouve interposée entre $a_1$ et $l_1$ et l'autre entre $l_2$ et $a_2$ (ces extrémités, désignons les par $t_1$ et $t_2$, sont:

$$t_1 = \frac{i_1 + 2i_2}{3} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{5}{3^n} - \frac{i_1 + 2i_2}{3} \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{i_1 + 2i_2}{3},$$

suivant que $n > 0$ ou $n = 0$).

Or, le polygone composé de $T_k$ et du segment $[t_1', t_2]$ coupe le plan en deux régions, dont l'une contient $A$ et l'autre l'arc simple $L$ avec le point $p$. L'ensemble $B$ étant connexe et n'ayant avec ce polygone aucun point commun, la formule (1) entraîne que $p$ *non-*$\varepsilon$ $B$, contrairement à l'hypothèse que $p \varepsilon B - A$.

Il est donc établi que chacun des cas 1° et 2° implique une contradiction. La propriété (III) est ainsi démontrée.

(IV) *L'ensemble $\mathcal{G} - V$ est connexe.*

Pour le prouver il suffit de montrer que les conditions

$$(4) \qquad \mathcal{G} - V = M + N, \; M \times \overline{N} + \overline{M} \times N = 0 \quad \text{et} \quad M \times T_1 \neq 0$$

entraînent l'égalité $N = 0$.

Or, $T_1 - V$ étant connexe. l'inégalité $M \times T_1 \neq 0$ implique que

$$(5) \qquad T_1 - V \subset M, \text{ d'où } T_1 \subset M + V.$$

On peut prouver par induction que

$$(6) \qquad T_n \subset M + V, \text{ d'où } T \subset M + V.$$

En effet, les formules (4) et (5) donnent:

$$(7) \qquad 0 = M \times \overline{N} = (T_1 - V) \times \overline{N}$$

Or, $T_1 + T_2$ étant l'ensemble limite des arcs simples

$$T_5, \ T_{13}, \dots, \ T_{2^k-3}, \dots \qquad (k > 2),$$

la formule (7) implique qu'à partir d'un certain $k$ on a $T_{2^k-3} \times \overline{N} = 0$, d'où $T_{2^k-3} \subset M + V$. On a par conséquent pour la limite des $T_{2^k-3}$ $(k = 3, 4, \dots)$:

$$T_1 + T_2 \subset \overline{M + V} = \overline{M} + V = (\overline{M} - V) + V$$

d'où, en y substituant $\overline{M} \times \mathcal{G}$ à $\overline{M}$,

$$T_2 \subset \overline{M} \times (\mathcal{G} - V) + V,$$

ce qui entraîne selon (4) que

$$T_2 \subset \overline{M} \times (M + N) + V = M + V$$

D'une façon générale $T_{2n} + T_{2n+1} + T_{2n+2}$ $(n \geqslant 1)$ étant l'ensemble limite de la suite $\{T_{2^k-2n-3}\}$ où $k \geqslant n+2$, on montre par un raisonnement analogue que l'inclusion $T_{2n} \subset M + V$ entraine les inclusions

$$T_{2n+1} \subset M + V \quad \text{et} \quad T_{2n+2} \subset M + V.$$

La formule (6) est ainsi établie.

D'après (6) on a $\overline{T} \subset \overline{M} + V$, d'où $\mathcal{G} = \overline{T} \subset \overline{M} + V$ et par conséquent $\mathcal{G} - V \subset \overline{M}$. On a donc selon (4): $N \subset \overline{M}$, d'où $N = N \times \overline{M} = 0$, c. q. f. d.

**16.** Ceci établi, passons à la démonstration des propriétés de $\mathcal{H}$.

*$\mathcal{H}$ est un continu.* En effet, $\mathcal{H}$ est par définition une image homéomorphe et fermée de $\mathcal{G} - V$, qui est un ensemble connexe d'après (IV).

*$\mathcal{H}$ est une somme des sous-continus saturés disjoints.* En effet, selon (II) les arcs simples sans extrémités dont se compose l'ensemble $\mathcal{G}-V$ étant disjoints, il en est de même de leurs images dans $\mathcal{H}$. Comme ces arcs sont par définition connexes et relativement fermés dans $\mathcal{G}-V$, leurs images dans $\mathcal{H}$ sont des continus. De plus elles sont des sous-continus saturés de $\mathcal{H}$, car s'il existait pour une image $A_1$ de $A$ un sous-continu $B_1$ de $\mathcal{H}$ tel que l'on ait:

$$A_1 \subset B_1 \subset \mathcal{H} \quad \text{et} \quad A_1 \neq B_1 \neq \mathcal{H},$$

le sous-ensemble $B$ de $\mathcal{G}-V$ (dont $B_1$ est l'image) serait connexe, relativement fermé dans $\mathcal{G}-V$ et satisferait aux conditions (1) et (2), contrairement à (III).

Il est, peut être, intéressant de noter que *tous les composants de $\mathcal{H}$ ont un même type topologique,* à savoir, celui *de la ligne droite.* Comme continu indécomposable, $\mathcal{H}$ est, bien entendu, irréductible entre tous deux points situés respectivement sur deux quelconques de ces lignes.

**17.** $\mathcal{H}$ possède, en outre, la propriété suivante, qui fut signalée dans le No 11:

*$\mathcal{H}$ constitue un exemple d'un continu indécomposable qui se transforme par inversion en un continu décomposable $\mathcal{H}^* + v$, quel que soit le point $v$ choisi comme centre de l'inversion.*

Cette propriété de $\mathcal{H}$ résulte du théorème du No 13, chaque composant de $\mathcal{H}$ contenant un continu non-borné (puisqu'il en est lui-même un).

Il est cependant facile de voir qu'un continu possédant cette propriété ne doit pas être nécessairement composé exclusivement de sous-continus saturés. En effet, *si — sans altérer la définition de $\mathcal{G}$ — on remplace dans celle de $\mathcal{H}$ l'ensemble $V$ par l'ensemble $\mathfrak{N}$, le continu indécomposable ainsi obtenu se transforme par inversion en un continu décomposable, tout en contenant un composant non-fermé* (donc dense dans lui), à savoir l'image de $T$.

**18.** Le problème qui reste ouvert est de savoir si les continus présentant les singularités analogues à celles des exemples de ce § existent sur le plan. La transformation, que nous avons exécutée sur le continu $\mathcal{G}$ pour en obtenir l'ensemble $\mathcal{H}$, ne permet en effet que d'en affirmer l'existence sur une surface homéomorphe à un plan, dont on a enlevé un ensemble punctiforme.

Or, il nous semble néanmoins que cette transformation mérite d'être envisagée ici à un point de vue plus général, car elle se prête bien à la réduction de plusieurs problèmes concernant les ensembles non-bornés de l'espace $R_{n+1}$ (à $n+1$ dimensions) à l'étude des ensembles bornés situés dans l'espace $R_n$.

Soit, en effet, dans l'espace $R_n$ un ensemble fermé quelconque $F$. Faisons correspondre à chaque point $p$ de $R_n - F$ un point $f(p)$ de l'espace $R_{n+1}$, dont les $n$ premières coordonnées coïncident avec celles de $p$ et dont la $(n+1)$-ème est le nombre inverse de la distance entre $p$ et $F$.

La fonction $f(p)$ est évidemment biunivoque et bicontinue dans l'ensemble $R_n - F$. En outre, si $F$ contient des points d'accumulation d'un ensemble $A$ disjoint de $F$, l'ensemble $f(A)$ est non-borné, quel que soit $A$. Ce sont ces deux propriétés de $f(A)$ qui en déterminent les applications. Nous les avons vues intervenir, en particulier, dans la transformation de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{H}$[1]).

Voici une autre application bien simple de l'opération $f(p)$. M. Sierpiński a défini dans l'espace à 3 dimensions un continu non-borné qui se décompose en une infinité dénombrable de continus disjoints[2]). Il a défini aussi à un autre propos un ensemble plan connexe et borné jouissant de la même propriété[3]).

Or, une légère modification de ce dernier exemple donne un ensemble $E$ plan et borné tel que $f(E)$ est un continu à propriété désirée.

Soit $E$ l'ensemble formé

1° des segments $x = \frac{1}{2^n}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, où $n \geqslant 0$

2° du segment $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

3° des arcs de circonférences à 270°, qui unissent le point $\left(\frac{1}{2^n}, 0\right)$ au point $\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$.

Désignons par $F$ l'ensemble composé du point $(0, 0)$ et des points $\left(0, \frac{3}{2^n}\right)$ $(n \geqslant 2)$.

L'ensemble $E - F$ étant connexe, l'ensemble $f(E-F)$ est un continu. De plus $E - F$ étant une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles connexes, relativement fermés dans lui et disjoints, le continu $f(E - F)$ se décompose en une infinité dénombrable de continus disjoints.

[1]) Il en est de même de l'application de cette méthode à la démonstration du théorème, d'après lequel une différence de deux ensembles fermés situés dans $R_n$ est toujours homéomorphe d'un ensemble fermé situé dans $R_{n+1}$ (voir: Kuratowski et Sierpiński, Tôhoku Math. Journ. 1921).

[2]) Tohôku Math. Journ. 1918.

[3]) Fund. Math. IV, p. 5.