Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen.

Von

Stefan Straszewicz (Warschau).

Eine abgeschlossene ebene Menge A zerschneidet die Ebene, wenn ihre Komplementärmenge $C(A)$ nicht zusammenhängend ist. Insbesondere heisst A ein Schnitt zwischen den Punkten a und b oder ein $S(a, b)$, wenn a und b verschiedenen Komponenten von $C(A)$ angehören.

In Bezug auf die Zerschneidung der Ebene bestehen zwischen zwei abgeschlossenen Mengen A und B, sowie deren Summe $A + B$ und Durchschnitt $A B$ gewisse Beziehungen; die Untersuchung derselben bildet den Inhalt dieses Aufsatzes.

Dieser Gegenstand wurde zuerst von Janiszewski[1]) behandelt; seine Ergebnisse sind in den folgenden zwei Sätzen zusammengefasst, wo A und B beschränkte[2]) abgeschlossene Punktmengen und a, b Punkte der Ebene bedeuten:

A. *Ist weder A noch B ein $S(a, b)$ und ist $A B$ zusammenhängend oder leer, so ist auch $A + B$ kein $S(a, b)$.*

B. *Sind A und B Kontinua und $A B$ nicht zusammenhängend, so zerschneidet $A + B$ die Ebene.*

Im Folgenden wird gezeigt, dass diese beiden Sätze einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig sind; und zwar treten an ihre Stelle die Sätze:

[1]) *Sur les coupures du plan faites par des continus.* Prace matem.-fizyczne tom XXVI 1913. Vgl. auch A. Mullikin, Trans. Amer. Soc. 1922.

[2]) Wegen der Ausdehnung dieser Sätze auf nicht beschränkte Mengen vgl. Knaster et Kuratowski. Sur les continus non-bornés, *Fund. Math.* V. S. 35.

I. Ist weder A noch B ein Schnitt zwischen irgend zweien der Punkte $a_1, a_2, \dots, a_m$ und ist AB eine Summe von $n < m$ Komponenten, so gibt es unter den Punkten a_i mindestens ein Paar a_r, a_s, so dass auch $A+B$ keinen Schnitt zwischen a_r und a_s bildet[1].

II. Sind A und B Kontinua und lässt sich AB in $n \geqq 2$ abgeschlossene paarweise fremde Punktmengen zerlegen, so zerschneidet $A+B$ die Ebene mindestens in n Gebiete.

Dabei lässt sich der Beweis von II auf den Satz I gründen, so dass I als der eigentliche Hauptsatz angesehen werden darf. Der Satz I bleibt richtig, wenn nur eine der Mengen A, B beschränkt ist, bei II genügt die Beschränktheit von AB.

Die allgemeine Gültigkeit des Satzes I ergibt sich schon, wenn man ihn in dem Spezialfall ermittelt, wo sowohl die Mengen A, B als auch ihre Komplementärmengen $C(A)$, $C(B)$ von endlicher Komponentenzahl sind. Für solche Mengen lassen sich die betrachteten Beziehungen in eine besonders übersichtliche Form bringen.

Bezeichnet nämlich h_A die Komponentenzahl von A und I_A die Differenz $h_{C(A)} - h_A$, so sind bei endlichem h_{AB} mit I_A und I_B auch I_{AB} und I_{A+B} wohldefinierte Zahlen und es besteht die Identität

$$I_A + I_B = I_{A+B} + I_{AB}.$$

I. Vorbereitende Sätze.

Bezeichnungen und Definitionen. A und B bedeuten abgeschlossene, und, wenn nicht anders bemerkt, auch beschränkte Punktmengen in der euklidischen Ebene. Mit $\bar{M}$ wird die abgeschlossene Hülle, mit $C(M)$ die Komplementärmenge der Punktmenge M in Bezug auf die Ebene bezeichnet. Komponente von M heisst eine zusammenhängende Teilmenge von M, die nicht echter Teil einer anderen zusammenhängenden Teilmenge von M ist. Mit h_M wird die Komponentenzahl von M bezeichnet. Ein Gebiet ist eine zusammenhängende offene Punktmenge. Sind A und M abgeschlossene Punktmengen und a, b Punkte von M, so heisst A ein Schnitt zwischen a und b in M, oder ein $S(a, b, M)$, wenn a und b verschiedenen Komponenten von $M - AM$ angehören. Ist M die ganze Ebene, so wird statt $S(a, b, M)$ kurz $S(a, b)$ geschrieben.

Unter einem Polygon wird stets ein einfaches geschlossenes Polygon verstanden, unter einem Polygonbereich — die Summe eines von einem Polygon begrenzten Gebietes und seiner Begrenzung. Ein einfacher Streckenzug, dessen

[1] Für $n = 2$ ist der Beweis in einer Note des Verf. in Fund. Math. IV. mitgeteilt worden. Vgl. auch die zitierte Arbeit von A. Mullikin, wo ein mit diesem Spezialfalle im wesentlichen äquivalenter Satz sich befindet.

Endpunkte auf dem Rande, und die übrigen Punkte im Innern eines Polygonbereiches π liegen soll ein Querschnitt von π heissen. Ein Streckenzug, der Teil eines Polygons ist, wird ein Stück desselben genannt.

1. Im I Abschnitte werden zwecks einer besseren Übersicht einige bekannte Tatsachen erörtert. Von den topologischen Eigenschaften der Ebene werden dabei als Grundlage vorausgesetzt:

1) Der Jordan'sche Satz für Polygone mit seinen einfachsten Folgerungen, insbesondere dem Satz, dass ein Polygonbereich durch einen Querschnitt in zwei Teilbereiche zerlegt wird, und

2) der Satz, dass zwei punktfremde abgeschlossene Mengen A, B, von denen mindestens eine beschränkt ist, durch eine Summe von endlichvielen miteinander fremden Polygonen getrennt werden können (d. h. es gibt eine Polygonsumme, die ein $S(a, b)$ für jedes $a \varepsilon A$ und $b \varepsilon B$ ist).

Aus 2) folgt, dass es für $a \varepsilon A$ und $b \varepsilon B$ ein Polygon P gibt, welches mit $A + B$ fremd und ein $S(a, b)$ ist. In der Tat, wenn $R = P_1 + P_2 + \ldots + P_r$ eine A und B trennende Polygonsumme bezeichnet, so gibt es zwei Komponenten G und H von $C(R)$, sodass $a \varepsilon G$, $b \varepsilon H$ ist. Von den Gebieten G, H ist wenigstens eines, etwa G beschränkt. Die Begrenzung von G ist eine Summe der Polygone P_{i_r} unter diesen gibt es ein äusseres P_1, welches alle übrigen umschliesst. Liegt b im Äussern von P_1, so liefert P_1 das verlangte Polygon. Gehört aber b, also auch H, dem Inneren von P_1 an, so gibt es unter den Polygonen, welche die Begrenzung von H bilden, ein äusseres P_2. Dann liegt b im Innern von P_2, a dagegen muss im Äussern von P_2 liegen, da man sonst von a nicht zu P_1 gelangen könnte, ohne P_2 zu treffen. P_2 ist dann das verlangte Polygon.

Wir heben einige Folgerungen des obigen Satzes hervor.

Es sei A eine abgeschlossene Menge, F die Begrenzung einer Komponente G von $C(A)$, F sei beschränkt. Dann gilt:

Jede Komponente von A enthält höchstens eine Komponente von F.

Denn sind a_1, a_2 Punkte verschiedener Komponenten von F, so gibt es eine Zerlegung $F = F_1 + F_2$ wo F_1, F_2 abgeschlossen und fremd sind und $a_1 \varepsilon F_1$, $a_2 \varepsilon F_2$ ist. Ist P ein Polygon, welches mit F fremd ist und a_1 und a_2 trennt, so liegt P in G; denn sowohl das Innere wie das Äussere von P enthält Punkte von F, also auch Punkte von G, somit ist $PG \neq 0$ und weil $PF = 0$ ist, so muss

$P \subset G$ sein. Somit ist $PA = 0$ und a_1, a_2 gehören verschiedenen Komponenten von A an.

Daraus folgt weiter:

Hat A endlichviele Komponenten, so hat auch F endlichviele Komponenten. Ist insbesondere A ein Kontinuum, so ist auch F ein Kontinuum. Hat F endlichviele Komponenten, so ist, da jede Komponente von $C(G)$ Punkte von F enthält, $h_F = h_{C(G)}$.

2. Wir beweisen einen sich auf Polygone beziehenden

Hilfssatz. *Es seien a und b Punkte eines Polygons P, welche P in zwei Stücke L_1, L_2 mit den Endpunkten a, b zerlegen. Einer der von P bestimmten Polygonbereiche heisse π.*

Wenn ein Polygon Q ein $S(a, b)$ ist, so enthält Q mindestens einen Querschnitt von π, dessen ein Endpunkt auf L_1 und der andere auf L_2 liegt.

Beweis. Der Durchschnitt PQ hat endlichviele Komponenten, deren Anzahl $\geqq 2$ ist. Hat PQ nur 2 Komponenten, so liegt, weil Q ein $S(a, b)$ ist, eine von ihnen in L_1, die andere in L_2. Die Menge $Q - PQ$ besteht aus zwei zusammenhängenden Teilen, deren einer in π liegen muss und somit den gesuchten Querschnitt bestimmt.

Hat PQ mehr als 2 Komponenten, so schliessen wir durch Induktion. Es sei s ein Punkt von Q im Innern von π; s bestimmt ein Stück K von Q, das einen Querschnitt von π mit den Endpunkten p, q bildet. Gehören p und q zu verschiedenen der Mengen L_1, L_2, so ist K ein Querschnitt der verlangten Art. Ist aber etwa $p \varepsilon L_1$, $q \varepsilon L_1$, so sei R das durch p und q bestimmte Stück von L_1. Wir setzen $L_1' = (L_1 - R) + K$ und betrachten die Polygone $P' = L_1' + L_2$ und Q. Es hat $P'Q$ weniger Komponenten als PQ. Denn es ist $P'Q = PQ - RQ + K$, d. h. $P'Q$ ensteht aus PQ, indem man RQ durch das Kontinuum K ersetzt; RQ enthält aber Punkte verschiedener Komponenten von PQ. Solche sind z. B. sicher p und q; andernfalls wäre ja $R \subset Q$ und Q müsste mit dem Polygon $R + K \subset \pi$ identisch sein.

Wir nehmen für P' und Q den Satz als bewiesen an; es sei $T \subset Q$ ein Querschnitt desjenigen Bereiches vom Rande P', der innerhalb π liegt, wobei die Endpunkte von T $m \varepsilon L_1'$ und $n \varepsilon L_2$ sind. Nun ist $TK = TL_1' = \{m\}$, also ist m kein innerer Punkt von K, weil sonst TK wegen $T \subset Q$, $K \subset Q$ ein Kontinuum enthalten müsste, d. h. es ist $m \varepsilon L_1$ und T bildet einen Querschnitt der verlangten Art in π, w. z. b. w.

3. Satz. *Haben L_1, L_2, a, b, P, π, die gleiche Bedeutung wie in § 2, und gelten für die abgeschlossenen und beschränkten Mengen A und B die Bedingungen*

$$A L_2 = 0, \quad B L_1 = 0, \quad \pi A B = 0,$$

so ist $A + B$ kein $S(a, b, \pi)$.

Beweis. Das Polygon P zerlegen wir in vier paarweise fremde Teile

$$P = I_1 + I_2 + K_1 + K_2.$$

Hier bedeuten I_1 und I_2 die zu a bzw. b gehörenden Intervalle von $P - (PA + PB)$; $K_1 \subset L_1$ und $K_2 \subset L_2$ sind die beiden Stücke der Restmenge $P - (I_1 + I_2)$, die sich eventuell auf Punkte reduziren können. Den Fall, wo $L_1 A$ oder $L_2 B$ leer ist, können wir ausschliessen, dann ist ja der Satz selbstverständlich.

Wir setzen

$$M = A\pi + K_1, \quad N = B\pi + K_2$$

und es seien $m_1 \varepsilon K_1$ und $m_2 \varepsilon K_2$ die Endpunkte von I_1; wegen $MN = 0$ können m und n durch ein Polygon Q getrennt werden (§ 1), welches mit $M + N$ fremd ist. Dann enthält Q nach dem Hilfssatz von § 2 einen Querschnitt T von π mit den Endpunkten p, q derart, dass

$$p \varepsilon I_1, \quad q \varepsilon I_2 + K_1 + K_2$$

ist. Wegen $T(M + N) = 0$ ist auch $T(K_1 + K_2) = 0$, folglich $q \varepsilon I_2$. Es ist also $A + B$ kein $S(p, q, \pi)$. Da aber $A + B$ auch kein $S(a, p, \pi)$ und kein $S(q, b, \pi)$ ist, so ist es auch kein $S(a, b, \pi)$ w. z. b. w.

4. Satz. Es sei π ein Polygonbereich, a und b zwei Punkte in π. *Ist weder A noch B ein $S(a, b, \pi)$ und ist $\pi A B = 0$, so ist auch $A + B$ kein $S(a, b, \pi)$.*

Beweis. Es seien K_1 und K_2 zwei Streckenzüge in π, welche die Punkte a und b verbinden, derart dass

$$K_2 A = 0, \quad K_1 B = 0$$

ist. Der Durchschnitt $K_1 K_2$ besteht aus einer endlichen Anzahl Komponenten (Punkten oder Streckenzügen). Wir ordnen dieselben, indem wir etwa K_1 von a nach b orientieren. Die einzelnen Punkte von

$K_1 K_2$ sowie die Endpunkte der Streckenzüge von $K_1 K_2$ seien in dieser Anordnung $a = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n = b$. Dann ist zunächst $A + B$ kein $S(a_i, a_{i+1}, \pi)$ für $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Denn entweder sind a_i und a_{i+1} Endpunkte der gleichen Komponente von $K_1 K_2$; dieselbe stellt dann einen mit $A + B$ fremden Weg von a_i nach a_{i+1} in π dar. Oder sie bestimmen auf K_1 und K_2 zwei Stücke L_1 und L_2, welche nur a_i und a_{i+1} gemeinsam haben und somit ein Polygon P bilden. Wegen $P \subset \pi$ liegt einer von den durch P bestimmten Polygonbereichen innerhalb π; er heisse π_1. Für π_1 sind dann die Voraussetzungen des vorigen Satzes (§ 3) erfüllt. Es ist also $A + B$ kein $S(a_i, a_{i+1}, \pi_1)$ und wegen $\pi_1 \subset \pi$ auch kein $S(a_i, a_{i+1}, \pi)$ $(i = 1, 2, \ldots (n-1))$. Dann ist $A + B$ kein $S(a_1, a_n, \pi)$, d. h. kein $S(a, b, \pi)$.

5. Der Satz von § 3 also auch der von § 4 bleibt richtig, wenn nur eine der Mengen A, B, beschränkt ist. Dies geht daraus hervor, dass in diesem Falle der Satz von der Trennung von A und B durch eine Polygonsumme bestehen bleibt.

Ferner bleibt der Satz von § 4 und dessen Beweis gültig, wenn an Stelle von π die ganze Ebene tritt. In diesem Falle braucht man die Beschränktheit keiner der Mengen A, B vorauszusetzen. Der Bereich π_1 des Beweises wird dann einfach durch das Innere des Polygons P bestimmt.

6. **Satz.** (J a n i s z e w s k i) [1]) Es seien a und b Punkte der Ebene. *Ist weder A noch B ein $S(a, b)$ und ist AB zusammenhängend so ist auch $A + B$ kein $S(a, b)$.*

Beweis. Es seien K_1 und K_2 Wege, welche die Punkte a und b verbinden derart, dass

$$K_2 A = 0, \quad K_1 B = 0$$

ist. Es sei ferner P ein Polygon, welches die beiden zusammenhängenden, abgeschlossenen und miteinander fremden Mengen AB und $K_1 + K_2$ trennt (§ 1). Derjenige der durch P bestimmten Bereiche, welcher $K_1 + K_2$, folglich auch a und b enthält, heisse π. Wegen $K_1 \subset \pi$, $K_2 \subset \pi$ ist weder B noch A ein $S(a, b, \pi)$; es ist ferner $\pi AB = 0$. Nach § 4 ist also $A + B$ kein $S(a, b, \pi)$ und umsomehr kein $S(a, b)$.

Auch dieser Satz bleibt bestehen, wenn nur eine der Mengen A, B beschränkt ist.

[1]) l. c.

7. Aus dem Satze von § 6 folgt:

Ein einfacher Bogen (arc simple) J *zerschneidet die Ebene nicht.*

Es seien nämlich a und b Punkte von $C(J)$. Zu jedem Punkte p von J gibt es Intervalle von J, die p enthalten und die Ebene zwischen a und b nicht zerschneiden. Denn ist T etwa eine dreieckige Umgebung von p die a und b ausschliesst, so ist diejenige Komponente von TJ welche p enthält, ein derartiges Intervall. Nach dem Borel'schen Überdeckungssatze ist J in einer Summe von endlichvielen dieser Intervalle enthalten, etwa $J \subset J_1 + J_2 + \dots J_r$. Dieselben können so angeordnet werden, dass $J_k J_{k+1} \neq 0$ ist. Da zwei nicht fremde Intervalle eines einfachen Bogens einen zusammenhängenden Durchschnitt haben und ihre Summe wieder ein Intervall dieses Bogens ist so folgt durch successive Anwendung des Satzes von J a n i s z e w s k i (§ 6), dass J kein $S(a, b)$ ist w. z. b. w.

8. Als eine unmittelbare Folgerung des Satzes von § 4 ergibt sich der

Satz. I s t d i e b e s c h r ä n k t e a b g e s c h l o s s e n e M e n g e A e i n $S(a, b, \pi)$, w o a, b, π d i e g l e i c h e B e d e u t u n g w i e i n § 4 h a b e n, u n d i s t d i e K o m p o n e n t e n z a h l v o n A e n d l i c h [1]), s o i s t m i n d e s t e n s e i n e v o n d e n K o m p o n e n t e n v o n A e i n $S(a, b, \pi)$.

Nach § 5 bleibt dieser Satz richtig, wenn π durch die ganze Ebene ersetzt wird, wobei dann die Voraussetzung, dass A beschränkt ist, wegfällt.

II. Der Hauptsatz.

9. Es seien wieder A und B abgeschlossene und beschränkte Punktmengen in der Ebene. In den Überlegungen des ersten Abschnittes traten als wesentliches Hilfsmittel Polygone auf, die je aus einem mit A fremden und einem mit B fremden Streckenzug zusammengesetzt waren. Will man weiter gehen, so ist es zweckmässig. Polygone allgemeinerer Art zu benutzen.

Trifft ein Polygon D sowohl A als B, aber nicht AB, so soll jeder von den durch D begrenzten Polygonbereichen als ein *A-Bereich* bezeichnet werden.

[1]) Diese Behauptung trifft auch zu ohne Einschränkung auf endlichviele Komponenten; doch erfordert dann der Beweis die Heranziehung weiterer Hilfsmittel Vgl. Zitate in § 23.

Das Polygon D zerlegen wir in drei paarweise fremde Teilmengen:

$$D = D_A + D_B + S. \tag{1}$$

Hier bedeutet D_A die Summe von DA und derjenigen Intervalle von $D - (DA + DB)$, deren Endpunkte zu A gehören, analog wird D_B mittels DB gebildet. Die Punktmengen D_A und D_B sind abgeschlossen und aus $DAB = 0$ folgt, dass jede von ihnen Summe endlichvieler Komponenten (Punkten oder Stücken von D) ist. Die Restmenge S ist eine Summe endlichvieler offener Intervalle $I_1, I_2, \dots$ von D; der eine Endpunkt eines jeden I_k gehört zu A, der andere zu B. Wir wollen sie *Scheitelintervalle* von D nennen. Es ist

$$D_A B = 0, \quad D_B A = 0, \quad SA = SB = 0. \tag{2}$$

10. Für Δ-Bereiche gilt der folgende Satz, der den Satz von § 3 als Spezialfall enthält und analog wie jener bewiesen wird.

Satz. *Enthält ein Δ-Bereich keinen Punkt von AB, so gibt es zu jedem Scheitelintervall I_1 seines Randes D mindestens ein weiteres Scheitelintervall I_2 derart, dass beide Intervalle derselben Komponente von $C(A+B)$ angehören,* d. h. durch $A + B$ nicht getrennt werden.

Beweis. Wir bezeichnen den gegebenen Δ-Bereich kurz mit Δ und setzen

$$M = A\Delta + D_A \quad N = B\Delta + D_B. \tag{3}$$

Es seien $m_1 \varepsilon DA$, $m_2 \varepsilon DB$ die Endpunkte von I_1; Wegen $m_1 \varepsilon M$, $m_2 \varepsilon N$, $MN = 0$ können m_1 und m_2 nach § 1 durch ein Polygon Q getrennt werden, welches $M + N$ nicht trifft. Dann enthält Q nach § 2 einen Querschnitt T von Δ mit den Endpunkten p und q derart, dass $p \varepsilon I_1$, $q \varepsilon D - I_1$ ist. Aus $T(M+N) = 0$, (1) und (3) folgt $q \varepsilon S$ also $q \varepsilon I_2$, wo I_2 ein von I_1 verschiedenes Scheitelintervall von D ist.

Dem obigen Satze geben wir noch eine andere Formulierung, die im Folgenden benutzt wird. Hat ein Scheitelintervall I_ϱ von D die Eigenschaft, dass es von jedem anderen Scheitelintervall von D durch $A + B$ getrennt wird. so heisse I_ϱ ein „ausgezeichnetes" Scheitelintervall. von D.

Der obige Satz lautet dann:

Besitzt der Rand von Δ ausgezeichnete Scheitelintervalle, so ist $AB\Delta \neq 0$.

11. Es sei $D = D_A + D_B + S$ der Rand eines Δ-Bereiches und L ein Querschnitt desselben, der ihn in die Teilbereiche Δ', Δ'' mit den Rändern D', D'' zerlegt. Die Endpunkte von L seien p und q. Wir wollen folgende Fälle näher betrachten:

α) $p \varepsilon D_A$, $q \varepsilon D_B$, $LA = 0$. Dann sind Δ' und Δ'' ebenfalls Δ-Bereiche. Die Scheitelintervalle von D' sind die in D' enthaltenen Intervalle von S, sowie ein Intervall um den Punkt p. Analoges gilt für D''.

β) $p \varepsilon D_A$, $q \varepsilon D_A$, $LA = 0$, aber $LB \neq 0$. Dann sind Δ', Δ'' wieder Δ-Bereiche. Die Scheitelintervalle von D' und D'' werden gebildet durch die in D' bzw. D'' fallenden Intervalle von S, ausserdem hat sowohl D', als D'' noch zwei weitere Scheitelintervalle, eines um p und eines um q.

γ) $p \varepsilon D_A$, $q \varepsilon S$, $LA = 0$, $LB \neq 0$. Auch jetzt sind Δ', Δ'' Δ-Bereiche. Das Intervall von S welchem q angehört, heisse I. Dann werden die Scheitelintervalle von D' und D'' gebildet durch die Intervalle von $S - I$, sowie je ein Intervall um den Punkt p, ausserdem enthält eines der Polygone D', D'' noch ein Scheitelintervall um den Punkt q.

12. Es seien Δ_1, Δ_2 zwei Δ Bereiche mit dem gemeinsamen Rande D. In einem von diesen Bereichen ziehen wir einen mit AB fremden Querschnitt L_1, dann in einem der drei durch $D + L_1$ gebildeten Bereiche einen mit AB fremden Querschnitt L_2 und fahren in der gleichen Weise fort. Nachdem r mit AB fremde Querschnitte $L_1, L_2, \ldots L_r$ gelegt worden sind, erhalten wir eine Zerlegung der Ebene in $r+2$ nicht übereinandergreifende Polygonbereiche. Sind die L_k so beschaffen, dass der Rand jedes Bereiches weder mit A noch mit B fremd ist, so sind es sämtlich Δ-Bereiche; die Summe ihrer Ränder sei $R = D + \sum\limits_1^r L_k$.

Wir zerlegen R in drei paarweise fremde Teilmengen

$$R = R_A + R_B + V. \tag{4}$$

Es bedeutet hier R_A die Summe von RA und derjenigen Komponenten der relativ zu R offenen Punktmenge $R - (RA + RB)$, deren relative Begrenzungspunkte (deren Anzahl endlich ist) zu RA gehören; analog wird R_B mittels RB erklärt. Die Mengen R_A und R_B sind abgeschlossen und sind wegen $RAB = 0$ Summen endlichvieler Komponenten. Die Restmenge V hat ebenfalls endlichviele

Komponenten und ist offen relativ zu R; sie kann auch definiert werden als Summe derjenigen Komponenten von $R-(RA+RB)$, deren relative Begrenzungen sowohl Punkte von RA als von RB enthalten. V enthält alle Scheitelintervalle der Ränder der gebildeten Δ-Bereiche. Wir werden sie kurz als die *Scheitelmenge* von R bezeichnen. Es gelten die Formeln:

(5) $$R_A B = 0, \quad R_B A = 0, \quad VA = VB = 0.$$

13. Nach diesen Vorbereitungen können wir den Beweis des Hauptsatzes dieser Arbeit in Angriff nehmen. Wir sprechen ihn in einer Formulierung aus, die gegenüber derjenigen der Einleitung etwas verändert, ihr jedoch völlig äquivalent ist.

Satz I. *Ist für jedes Paar a_i, a_k, von den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ weder A noch B, wohl aber $A+B$ ein $S(a_i, a_k)$, so hat der Durchschnitt AB mindestens m Komponenten*, d. h. es gibt eine Zerlegung

$$AB = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,$$

wo die C_i abgeschlossene, nichtleere, paarweise fremde Mengen sind und

$$n \geqslant m$$

ist.

14. Es seien $G_1, G_2, \ldots, G_m$ diejenigen Komponenten der Komplementärmenge $C(A+B)$ welche resp. die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ enthalten. Die Voraussetzung, dass $A+B$ ein $S(a_i, a_k)$ ist, besagt, dass die Gebiete G_i sämtlich voneinander verschieden sind. Die Begrenzung von G_i heisse F_i und die Menge $\{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ heisse Γ.

15. Nehmen wir den Satz I als richtig an, so folgt der

Satz. *Unter den Voraussetzungen des Satzes I enthält die Summe*

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_{m-1}$$

der Begrenzungen der Gebiete $G_1, G_2, \ldots, G_{m-1}$ Punkte von mindestens m Komponenten von AB.

Beweis. Enthält FAB Punkte von nur endlichvielen Komponenten von AB, so sei C die Summe dieser Komponenten, sodass

(6) $$FAB \subseteq C$$

ist. Wir betrachten die Punktmenge

$$\Phi = F + C = (FA + C) + (FB + C)$$

und setzen

(7) $$\Phi' = FA + C, \quad \Phi'' = FB + C.$$

Dann ist

$$\Phi' \subset A, \quad \Phi'' \subset B \tag{8}$$

und

$$\Phi' \Phi'' = C \tag{9}$$

Aus (8) folgt, dass weder Φ' noch Φ'' ein Schnitt zwischen irgend zweien der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ist. Wohl aber bildet $\Phi = \Phi' + \Phi''$ einen Schnitt zwischen je zweien dieser Punkte, da es ja die volle Begrenzung eines jeden der Gebiete $G_1, G_2, \ldots, G_{m-1}$ enthält. Setzen wir den Satz I als gültig voraus, so folgt nach (9), dass C mindestens m Komponenten besitzt.

16. Beweis des Satzes I. (§ 13).

Für $m = 2$ ist der Satz richtig, seine Aussage ist dann derjenigen des Satzes von Janiszewski (§ 6) äquivalent. Wir werden daher den Beweis für $m > 2$ unter der Voraussetzung führen, dass der Satz I und folglich auch der Satz von § 15 für jedes $m' < m$ richtig ist.

Wir verbinden die Punkte a_1 und a_2 durch 2 Wege L_1 und L_2 derart, dass

$$A L_2 = 0, \quad B L_1 = 0$$

ist. Wir dürfen annehmen, dass L_1 und L_2 ausser a_1 und a_2 keine weiteren Schnittpunkte haben. Denn trifft das nicht zu, so kann folgende Transformation vorgenommen werden. Man orientiere L_1 von a_1 nach a_2 und es sei b_2 der erste Schnittpunkt von L_1 mit L_2, der nicht in Gebiete G_1 liegt, ferner b_1 der unmittelbar vorangehende Punkt von $L_1 L_2$. An Stelle der Punkte $a_1, a_2, \ldots a_m$, werden die Punkte $a'_1, a'_2, \ldots, a'_m$ gesetzt, die folgendermassen definiert sind;

1) Ist $b_2 \varepsilon G_2$ so ist

$$a'_1 = b_1, \quad a'_2 = b_2, \quad a'_i = a_i \text{ für } i > 2;$$

2) Ist $b_2 \varepsilon G_r$ wo $r > 2$, so setze man

$$a'_1 = b_1, \quad a'_r = b_2, \quad a'_i = a_i \text{ für } 1 < i < r \text{ und } i \geqq r+1$$

3) Gehört b_2 zu keinem Gebiete G_i aus Γ, so werden die a'_i wie unter 1) erklärt.

Das System der a'_i erfüllt dieselben Bedingungen bezüglich A und B, wie das der a_i. In den Fällen 1) und 2) ist das evident, im Falle 3) genügt die Bemerkung, dass weder A noch B ein

$S(a_1', a_r')$ ist, weil a_1' mit a_r' durch ein Stück von L_1 und auch durch ein Stück von L_2 verbunden ist. Daraus folgt dass weder A noch B auch für $i > 2$ ein $S(a_i' a_r')$ ist.

Für die a_i' gilt aber die oben erwähnte Vereinfachung.

Wir nehmen also an, die Wege L_1 und L_2 bilden ein Polygon D und bestimmen in die Ebene zwei Δ-Bereiche Δ_1, Δ_2. Das Polygon D besitzt nur zwei Scheitelintervalle (§ 9); es sind diejenigen welche durch a_1 und a_2 bestimmt sind. Offenbar sind es ausgezeichnete Scheitelintervalle, sodass sowohl Δ_1, als Δ_2 nach § 10 Punkte von AB enthält.

Die Gebiete G_i der Menge $T = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ können in drei Gruppen eingeteilt werden: *a*) Die Gebiete G_1 und G_2, welche die Scheitelintervalle von D enthalten, *b*) die übrigen Gebiete, welche Punkte von D enthalten und *c*) Gebiete, die ganz innerhalb eines der Bereiche Δ_1, Δ_2 liegen.

Wäre die Gruppe *b*) leer, so würde sich die Behauptung unseres Satzes ohne weiteres aus dem Satz von § 15 ergeben. Der Grundgedanke des Beweises besteht nun darin, dass man ausgehend von dem Polygon D durch successive Einführung passender Querschnitte zu einem System von s Δ-Bereichen gelangt, derart, dass jeder dieser Bereiche Punkte von AB enthält und dass genau s Gebiete aus Γ Punkte der Rändersumme der Δ-Bereiche enthalten, während jedes der übrigen G_i im Inneren eines der Δ-Bereiche liegt. Die Anwendung des Satzes von § 15 ergibt dann sofort den behaupteten Satz.

Um gleich allgemein zu schliessen, nehmen wir etwa an, dass nach Einführung von $r-2$ $(r \geqq 2)$ Querschnitten die Ebene in r nicht übereinandergreifende Δ-Bereiche mit der Rändersumme

$$R = R_A + R_B + V. \tag{10}$$

wo die Symbole auf der rechten Seite wie in § 12 zu verstehen, sind, zerlegt wurde derart, dass jeder Bereich Punkte von AB enthält und dass r Gebiete aus T, etwa $G_1, G_2, \dots G_r$, Punkte der Scheitelmenge V enthalten.

Es sei

$$H = G_{r+1} + G_{r+2} + \dots + G_m \tag{11}$$

die Summe der übrigen Gebiete aus Γ. Es ist also $HV = 0$ und wegen (10)

$$HR = HR_A + HR_B. \tag{12}$$

Wir machen nun die Annahme, dass die Menge HR nichtleer ist, also etwa

(13) $$HR_A \neq 0$$

ist. Es sei $c \varepsilon HR_A$; da c nach (11) einem der G_t angehört, so ist A kein $S(a_1, c)$ und es lässt sich c mit a_1 durch einen Streckenzug L verbinden, sodass

(14) $$LA = 0$$

ist. Bemerken wir, dass $R = RH + RC(H)$ ist, so folgt aus (12)

(15) $$LR = LR_A H + LR_B H + LRC(H).$$

Wir setzen

(16) $$\begin{cases} M = LR_A H \\ N = LR_B H + LRC(H). \end{cases}$$

Dann ist nach (15)

(17) $$LR = M + N$$

Die Punktmengen M und N sind wegen $c \varepsilon M$, $a_1 \varepsilon N$ nichtleer, ferner folgt aus $R_A R_B = 0$. $HC(H) = 0$ und (16) dass $MN = 0$ ist. Wir zeigen, dass M und N abgeschlossen sind. In der Tat ist $\overline{H} \subset H + A + B$. also

$$LR_A \overline{H} \subset LR_A H + LR_A A + LR_A B,$$

woraus wegen (5) und (14)

$$M = LR_A \overline{H}$$

folgt. Des weiteren folgt aus $\overline{H} \subset H + C(H)$, $R_B \subset R$, dass

$$LR_B \overline{H} \subset LR_B H + LRC(H) = N$$

ist, und folglich ist

$$N = LR_B \overline{H} + LRC(H)$$

Aus den Eigenschaften der Mengen M und N folgt, dass es in $L - (M + N)$ mindestens im Intervall mit den Endpunkten p, q gibt, sodass $p \varepsilon M$, $q \varepsilon N$ ist Orientieren wir L von c nach a_1, so können wir als p den letzten Punkt von M (der Wegen $a_1 \varepsilon N$ von a_1 verschieden ist) und als q den zunächst nach p folgenden Punkt von N wählen.

Das durch p und q bestimmte Stück K von L ist dann ein Querschnitt eines der $\varDelta$-Bereiche, etwa von $\varDelta'$ und zerlegt es in zwei Teilbereiche Δ_1', Δ_2'. Für den Rand D' von Δ' gilt die in § 10 definierte Zerlegung $D' = D_A' + D_B' + S'$, wobei $D' R_A \subset D_A'$, $D' R_B \subset D_B'$, $S' \subset V$ ist. Zwei Fälle sind möglich:

1) $q \varepsilon R_B$. Dann ist $p \varepsilon D_A'$, $q \varepsilon D_B'$ und wir haben den Fall α) von § 11. Das Randpolygon D_1' von Δ_1' enthält dann ein Scheitelintervall um den Punkt p. Und zwar ist es ein ausgezeichnetes Scheitelintervall von D_1', denn es ist wegen $p \varepsilon H$ in H enthalten, während jedes der übrigen Scheitelintervalle von D_1' in S' also wegen $S' \subset V$. $HV = 0$ in $C(H)$ enthalten ist. Analoges gilt für den Rand D_2' von Δ_2'.

2) $q \varepsilon R_A + V$. Dann ist nach (16) $q \varepsilon C(H)$, und weil $p \varepsilon H$ und (14) gilt, so muss $KB \neq 0$ sein. Wir haben den Fall β) oder γ) von § 11. Dann enthält wieder das Polygon D_1' bzw. D_2' ein Scheitelintervall um p. Dieses ist wieder ein ausgezeichnetes Scheitelintervall von D_1' bzw. D_2', denn es ist wie bei 1) in H enthalten, dagegen ist jedes der übrigen Scheitelintervalle entweder in S', also wie vorhin in $C(H)$ enthalten, oder es ist ein Intervall um $q \varepsilon C(H)$ und dann ist es ebenfalls in $C(H)$ enthalten.

In beiden Fällen 1) und 2) muss nach § 10 sowohl Δ_1' als Δ_2' Punkte von AB enthalten.

Wir erhalten somit $r+1$ Δ-Bereiche, deren jeder Punkte von AB enthält, wobei $r+1$ Gebiete aus Γ Punkte der Scheitelmenge des neuen Systems enthalten.

Die soeben auseinandergesetzte Querschnittkonstruktion kann nun auf das ursprüngliche System der Bereiche Δ_1, Δ_2 angewandt und so lange wiederholt werden, als es in Γ Gebiete gibt, die im jeweiligen System der Δ-Bereiche Punkte ihrer Rändersumme, aber keine Punkte der zugehörigen Scheitelmenge enthalten. Da Γ endlichviele Gebiete enthält, so muss dieses Verfahren nach endlichvielen Schritten seinen Abschluss finden. Wir kommen dann zu einer Zerlegung der Ebene in $s \leqq m$ nicht übereinandergreifende Δ-Bereiche Δ', Δ'', ..., $\Delta^{(s)}$ mit den Eigenschaften:

a) s Gebiete aus Γ enthalten Randpunkte der $\Delta^{(\nu)}$, dagegen liegt jedes der übrigen $m-s$ Gebiete ganz innerhalb eines $\Delta^{(\nu)}$;

b) jedes $\Delta^{(\nu)}$ enthält Punkte von AB.

Es sei h_ν die Anzahl der Gebiete aus Γ, die innerhalb des Bereiches $\Delta^{(\nu)}$ liegen. Dann ist

(18) $$m = s + \sum_{\nu=1}^{s} h_\nu .$$

Da $h_\nu \leqq m-2$ ist, so folgt aus dem Satze von § 15 dass $\Delta^{(\nu)}$ mindestens $h_\nu + 1$ Komponenten von AB enthält. Also muss AB nach (18) mindestens m Komponenten besitzen w. z. b. w.

17. Satz II. *Wenn der Durchschnitt von 2 Kontinuen A und B beschränkt ist und in $n \geqq 2$ abgeschlossene paarweise fremde Teilmengen zerlegt werden kann, so besitzt die Komplementärmenge von $A+B$ mindestens n Komponenten.*

Beweis[1]. Nach Voraussetzung ist

$$AB = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,$$

wobei C_i abgeschlossen, beschränkt und für $i \neq k$ $C_i C_k = 0$ ist.

Es sei $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ ein Punktsystem, derart, dass $a_i \varepsilon C_i$ und $R = P^{(1)} + P^{(2)} + \ldots + P^{(r)}$ eine Summe von paarweise fremden Polygonen $P^{(i)}$, welche mit AB fremd ist und je zwei der Punkte a_i voneinander trennt. Die Menge R kann etwa folgendermassen bestimmt werden: man ordne die Menge der $\dfrac{n(n-1)}{2}$ Punktepaare $\{a_i, a_k\}$ und bestimme successive die Polygone $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$ so, dass wenn $\{a_i, a_k\}$ das l-te Punktepaar ist, das Polygon $P^{(l)}$ die Punkte a_i, a_k trennt und weder AB noch die Summe der schon konstruirten Polygone $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(l-1)}$ trifft. Das Polygon $P^{(l)}$ muss dann sowohl A wie B treffen. In jedem der Scheitelintervalle $I_\nu^{(l)}$ von $P^{(l)}$ (§ 9) wählen wir einen Punkt $p_\nu^{(l)}$, diese Punkte zerlegen $P^{(l)}$ in (abgeschlossene) Stücke, die abwechselnd Punkte von A und von B enthalten; die Summe der ersteren sei $P_1^{(l)}$ die der letzteren $P_2^{(l)}$, sodass

$$P^{(l)} = P_1^{(l)} + P_2^{(l)}, \quad P_1^{(l)} B = P_2^{(l)} A = 0, \quad P_1^{(l)} \cdot P_2^{(l)} = \sum_\nu \{p_\nu^{(l)}\}$$

ist. Wir definieren nun die Mengen

$$R_1 = \sum_{l=1}^{r} P_1^{(l)}; \qquad R_2 = \sum_{l=1}^{r} P_2^{(l)};$$

R_1 und R_2 sind abgeschlossene Mengen und es gilt

$$(19) \qquad R = R_1 + R_2, \quad R_1 B = R_2 A = 0, \quad R_1 R_2 = \text{endlich}.$$

Jeder Punkt von $R_1 R_2$ gehört einem Gebiete von $C(A+B)$ an. Es seien $G_1, G_2, \ldots G_m$ diejenigen Komponenten von $C(A+B)$,

[1] Ich verdanke Herrn C. Kuratowski eine Bemerkung, die mir erlaubt hat, eine ursprüngliche Fassung des Beweises erheblich abzukürzen.

welche Punkte von $R_1 R_2$ enthalten. Sämtliche Punkte von $R_1 R_2$, die im gleichen Gebiete G_i liegen, seien miteinander durch einen in G_i verlaufenden Streckenzug L_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ verbunden. Enthält ein G_i nur einen Punkt von $R_1 R_2$, so soll unter L_i eben dieser Punkt verstanden werden.

Wir betrachten die Punktmengen

$$M = R_1 + \sum_{i=1}^{m} L_i, \qquad N = R_2 + \sum_{i=1}^{m} L_i; \tag{20}$$

M und N sind abgeschlossene und beschränkte Mengen; es folgt aus (20)

$$MN = \sum_{i=1}^{m} L_i,$$

und weil die L_i untereinander fremd sind, so hat MN genau m Komponenten, Ferner folgt aus (19) und (20)

$$MB = 0, \quad NA = 0,$$

also ist weder M noch N ein $S(a_i, a_k)$ für irgend ein $i \neq k$; die Summe $M + N$ ist aber ein $S(a_i, a_k)$ für jedes $i \neq k$, da nach (20) $M + N \supset R_1 + R_2 = R$ gilt.

Die Anwendung des Satzes I ergibt daher

$$m \geqq n$$

und diese Ungleichung enthält die Behauptung unseres Satzes.

18. Aus den Sätzen I und II folgt unmittelbar:

Satz III. *Die Summe von zwei beschränkten Kontinuen, deren keines die Ebene zerschneidet und deren Durchschnitt $n \geqq 1$ Kompoponenten besitzt, zerschneidet die Ebene in n Gebiete* [1]).

Satz III'. *Hat der beschränkte Durchschnitt von zwei Kontinuen unendlichviele Komponenten, so zerschneidet ihre Summe die Ebene in unendlichviele Gebiete.*

19. Die Sätze I, III und die Sätze in § 10 und § 15 und ihre Beweise bleiben gültig, wenn nur eine der beiden betrachteten Mengen beschränkt ist, vgl. § 5. Dieser Fall lässt sich auch durch die Methode der Inversion [2]) auf den Fall der beschränkten Mengen zurückführen.

[1]) Hieraus folgt in Verbindung mit § 7 der Jordan'sche Kurvensatz.

[2]) Vgl. Kuratowski: „Sur la méthode d'inversion..." Fundam. Math. IV.

20. Satz. Es sei G ein Gebiet, dessen Begrenzung F ein beschränktes Kontinuum ist, ferner B ein beschränktes Kontinuum, welches die Ebene nicht zerschneidet und in $G+F$ liegt. Besteht der Durchschnitt BF aus $n \geqq 1$ Komponenten, so wird G durch B in n Teilgebiete zerschnitten, d. h. $G-BG$ ist Summe von n Komponenten.

Beweis. Es ist

$$G-BG = C(B)\,G = C[B+C(G)];$$

hier sind B und $C(G)$ Kontinua, wovon B beschränkt, deren keines die Ebene zerschneidet und deren Durchschnitt $B\,C(G) = BF$ n Komponenten besitzt. Nach § 18. und § 19. hat also $G-BG$ ebenfalls n Komponenten.

III. Einige Hilfssätze.

21. Es seien A, B, C drei abgeschlossene Mengen mit den Eigenschaften: 1) B ist beschränkt, 2) $AC=0$, 3) $A+B+C$ ist ein Kontinuum.

Dann gibt es eine Komponente von B, die sowohl A als C trifft.

Beweis. Es kann B keine mit A und C fremde Komponente besitzen. Denn wäre H eine solche, so hätte sie von $A+C$ einen positiven Abstand δ. In der Umgebung $\frac{\delta}{2}$ von H gäbe es dann ein Kontinuum H', welches H als echte Teilmenge enthält und in $A+B+C$ also in B enthalten ist [1]). Das widerspricht aber der Annahme, dass H eine Komponente von B ist.

Es seien B_1 und B_2 die Mengen derjenigen Punkte von B, deren Komponenten die Menge A bzw. C treffen; es sind abgeschlossene Mengen. Denn sei $p=\lim p_n$ wo $p_n \,\varepsilon\, B_1$; die zu p_n gehörige Komponente von B heisse K_n. Die Folge der zusammenhängenden Mengen K_n hat einen nichtleeren unteren abgeschlossenen Limes (p ist ein Punkt davon) also ist ihr oberer abgeschlossener Limes K zusammenhängend [2]). Aus $K_n A \neq 0$ folgt $KA \neq 0$ und da $p \,\varepsilon\, K$, so ist auch $p \,\varepsilon\, B_1$.

[1]) Janiszewski, Journal de l'Ecole Polyt. II. 16. 1912, Théorème IV.
[2]) Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre S. 302

Wären nun die Mengen B_1 und B_2 fremd, so hätten wir eine Zerlegung

$$A + B + C = (A + B_1) + (C + B_2)$$

des Kontinuums $A + B + C$ in zwei abgeschlossene und punktfremde Teilmengen. Somit ist $B_1 B_2 \neq 0$; wenn aber $a \varepsilon B_1 B_2$, so trifft die zu a gehörende Komponente von B sowohl A als C.

22. Satz. Es sei A ein beschränktes Kontinuum und B eine beschränkte abgeschlossene Menge. Weder A noch B sei ein Schnitt zwischen den Punkten a, b der Ebene.

Ist $A + B$ ein $S(a, b)$, so gibt es eine Komponente B_1 von B derart, dass $A + B_1$ ein $S(a, b)$ ist

Beweis. Die Eigenschaft einer abgeschlossenen Menge *a)* Teilmenge von B zu sein, und *b)* mit A zusammen einen $S(a, b)$ zu liefern ist i n d u k t i v, also gibt es eine i r r e d u z i b l e Menge H von dieser Eigenschaft [1]. H ist ein Kontinuum; denn wäre $H = M + N$, wo $M \neq 0$, $N \neq 0$ abgeschlossen sind und $MN = 0$ ist, so wäre $A + H = A + M) + (A + N)$ ein $S(a, b)$, während weder $A + M$ noch $A + N$ es ist und $(A + M)(A + N) = A$ zusammenhängend ist im Widerspruche mit dem Satze I.

Ist B_1 diejenige Komponente von B die H enthält, so ist auch $A + B_1$ ein $S(a, b)$ w. z. b. w.

Der Satz lässt sich auf den Fall ausdehnen, wo A ein nichtbeschränktes Kontinuum ist [2].

23. Satz. Es seien A und B abgeschlossene und beschränkte Punktmengen, deren keine ein $S(a. b)$ ist. Ist $A + B$ ein $S(a, b)$, so gibt es eine Komponente von B, deren Durchschnitt mit A unzusammenhängend ist.

Beweis. Ist $A + B$ ein $S(a, b)$, so gibt es ein Kontinuum $M \subset A + B$, welches ein $S(a, b)$ ist [3]. Es ist $M = MA + MB$, wobei 2 Fälle eintreten können:

a) MA ist in einer Komponente A_1 von A enthalten. Dann ist $M \subset A_1 + B$, also ist $A_1 + B$ ein $S(a, b)$; A_1 und B erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von § 22, es gibt folglich eine Komponente B_1 von B, so dass auch $A_1 + B_1$ ein $S(a, b)$ ist. Dann ist

[1] L. E. J. Brouwer, Amsterd. Akad. Versl. Bd. 18 u. 19.

[2] Etwa mittels der Inversion.

[3] Mazurkiewicz, Fundam. Math. I S. 62 ff., Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre S. 343.

nach § 6 der Durchschnitt $A_1 B_1$, also auch $A B_1$ nicht zusammenhängend.

b) Es gibt eine Zerlegung $A = A' + A''$ sodass A', A'' abgeschlossen und punktfremd sind und $MA' \neq 0$, $MA'' \neq 0$ ist. Die Mengen MA', MA'' und MB erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von § 21, es gibt folglich eine Komponente von MB und folglich auch eine Komponente B_1 von B, derart, dass $A' B_1 \neq 0$ und $A'' B_1 \neq 0$, also $A B_1$ nicht zusammenhängend ist.

Der Satz bleibt gültig auch wenn A nicht beschränkt ist. Dies kann durch Inversion oder auch folgendermassen eingesehen werden. Es sei π ein beschränkter Polygonbereich mit dem Rande P, der die Punkte a, b einen a und b verbindenden und mit A fremden Weg L, sowie die Menge B im Innern enthält. Dann erfüllen die Mengen $A^* = A\pi + P$ und B die Voraussetzungen des Satzes, also gibt es eine Komponente B_1 von B die mit A^*, also wegen $A^* B = AB$ auch mit A einen nichtzusammenhängenden Durchschnitt hat.

Dem obigen Satze kann noch folgende Form gegeben werden: Ist weder A noch B ein $S(a, b)$ und ist der Durchschnitt einer jeden Komponente von B mit A zusammenhängend oder leer, so ist auch $A + B$ kein $S(a, b)$.

24. Satz. Es seien A und B abgeschlossene und beschränkte Mengen mit den Eigenschaften: 1) A hat endlichviele Komponenten, 2) weder A noch B zerschneidet die Ebene, 3) $A + B$ zerschneidet die Ebene in endlichviele Gebiete.

Dann besitzt B nur endlichviele Komponenten $B_1, B_2, \dots B_r$, welche mit A unzusammenhängende Durchschnitte haben. Ist $B^* = \sum_1^r B_\nu$, so besteht die Gleichung.

$$h_{C(A+B)} = h_{C(A+B^*)}$$

Beweis. Es seien $B_1, B_2 \dots B_r$ Komponenten von B derart, dass die Durchschnitte $A B_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots r)$ nicht zusammenhängend sind, und sei $B^* = \sum_1^r B_\nu$. Es ist $C(A + B) \subset C(A + B^*)$. Jede Komponente H von $C(A + B^*)$ enthält sicher Punkte von $C(A + B)$. Denn für die Begrenzung F von H gilt, weil A die Ebene nicht zerschneidet, $FB^* \neq 0$, also gibt es ein B_ϱ. sodass $FB_\varrho \neq 0$ ist. Wäre um $H \subset A + B$, also wegen $H \subset C(A)$ auch $H \subset B$ und

$\overline{H} \subset B$, so wäre $\overline{H} + B_\varrho$ ein Kontinuum über B_ϱ in B gegen die Annahme, dass B_ϱ Komponente von B ist. Daher ist $h_{C(A+B^*)}$ endlich und

$$h_{C(A+B)} \geqq h_{C(A+B^*)}.$$

Es sei M die Summe derjenigen Komponenten von A, welche B^* treffen. Dann ist $h_{C(A+B^*)} \geqq h_{C(M+B^*)}$. Denn es ist $C(A+B^*) \subset \subset C(M+B^*)$, jede Komponente G von $C(M+B^*)$ muss aber Punkte von $C(A+B^*)$ enthalten, da $A-M$ abgeschlossen und mit der Begrenzung von G fremd ist.

Ist $h_{B^*} > h_M$, so gibt es ein B_ϱ, welches nur eine Komponente von $N = M + B^* - B_\varrho$ trifft. Dann zerschneidet B_ϱ nach § 20 (vgl. auch § 26) mindestens eine Komponente von $C(N)$, sodass $h_{C(M+B^*)} > > h_{C(N)}$ und schliesslich $h_{C(M+B^*)} > h_{B^*} - h_M$ ist. Also gilt stets $r < < h_A + h_{C(A+B)}$ d. h. die Anzahl der Komponenten von B mit nichtzusammenhängenden Durchschnitten mit A ist endlich.

Umfasst B^* alle derartigen Komponenten von B so ist

$$h_{C(A+B^*)} \geqq h_{C(A+B)}.$$

Wegen $B^* \subset B$ liegt nämlich jede Komponente von $C(A+B)$ in einer Komponente von $C(A+B^*)$. Es seien a und b Punkte von $C(A+B)$, die der nämlichen Komponente von $C(A+B^*)$ angehören. Dann ist keine der Mengen $A+B^*$ und B ein $S(a, b)$, ferner hat jede Komponente von B einen zusammenhängenden oder leeren Durchschnitt mit $A+B^*$, somit ist nach § 23 auch ihre Summe $A+B$ kein $S(a, b)$, d. h. a und b gehören der nämlichen Komponente von $C(A+B)$ an. Also folgt $h_{C(A+B)} = h_{C(A+B^*)}$.

Der Satz ist richtig auch für nichtbeschränktes A, wie man durch Inversion aus einem Punkte von $C(A+B)$ erkennt.

Folgerung. Ist G ein Gebiet, dessen Begrenzung beschränkt ist und endlichviele Komponenten besitzt, und B eine abgeschlossene und beschränkte Punktmenge in $\overline{G}$, welche die Ebene nicht zerschneidet, ist ferner $G\,C(B)$ Summe endlichvieler Komponenten, so gibt es unter den Komponenten von B nur endlichviele, etwa $B_1, B_2, \ldots B_r$, welche mit der Begrenzung von G nichtzusammenhängende Durchschnitte haben und es gilt die Gleichung

$$h_{GC(B)} = h_{GC(B^*)}$$

wenn $B^* = \sum_1^r B_\nu$ bedeutet.

Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich aus der Bemerkung, dass $C(G)$ und B die Bedingungen des obigen Satzes erfüllen.

IV. Die Indexformel.

25. In diesem Abschnitte sollen die bisher gewonnenen Resultate auf einen Spezialfall angewendet werden. Es seien A und B abgeschlossene und beschränkte Punktmengen. Wir setzen voraus, dass die Komponentenzahlen h_A, h_B, $h_{C(A)}$, $h_{C(B)}$ und, falls $AB \neq 0$, auch h_{AB} endlich sind. Dann sind auch h_{A+B}, $h_{C(AB)}$, $h_{C(A+B)}$ endlich; denn es ist: $h_{A+B} \leqq h_A + h_B$, $h_{C(AB)} = h_{C(A)+C(B)} \leqq h_{C(A)} + h_{A(B)}$; ferner ist im Falle $AB \neq 0$ der Durchschnitt einer Komponente von $C(A)$ mit einer Komponente von $C(B)$ nach dem Satze I Summe von höchstens h_{AB} Gebieten, sodass $h_{C(A+B)} = h_{C(A)\,C(B)} \leqq h_{C(A)}\, h_{C(B)}\, h_{AB}$ ist.

Im Falle $AB = 0$ ist $h_{C(A+B)} \leqq h_{C(A)}\, h_{C(B)}$.

Unter dieser Voraussetzung werden wir die Zahl $h_{C(A+B)}$ der Gebiete, in welche die Menge $A+B$ die Ebene zerschneidet; berechnen. Zunächst werden drei spezielle Fälle erledigt.

26. Hilfssatz I. *Sind A und B fremd, so ist*

$$h_{C(A+B)} = h_{C(A)} + h_{C(B)} - 1 \tag{21}$$

und zwar gilt das auch für nichtbeschränkte A und B.

Beweis. a) B sei zusammenhängend. Setzen wir

$$C(A) = G_1 + G_2 + \ldots + G_m$$
$$C(B) = H_1 + H_2 + \ldots + H_n,$$

wo die G_i und H_k Komponenten von $C(A)$ bzw. $C(B)$ sind, so folgt

$$C(A+B) = C(A)\,C(B) = \sum_{i,k} G_i H_k. \tag{22}$$

Die Mengen $G_i H_k$ sind paarweise fremd, ferner ist jede von ihnen, die nichtleer ist, zusammenhängend, d. h. Komponente von $A+B$. Denn aus $a \varepsilon G_i H_k$, $b \varepsilon G_i H_k$ folgt, dass weder A noch B ein $S(a,b)$ ist, also ist nach § 5 auch $A+B$ kein $S(a,b)$. Da nach Voraussetzung B zusammenhängend ist, so ist es in einem der G_i enthalten, etwa $B \subset G_1$. Daraus folgt, dass für $i > 1$ jedes G_i in einem der H_k liegt, m. a. W. es ist für $i > 1$ eine der Mengen $G_i H_k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ identisch mit G_i; die übrigen sind leer und die Formel (22) ergibt

$$C(A+B) = G_1 \sum_{k=1}^{n} H_k + G_2 + \ldots + G_m. \tag{23}$$

Keine der Mengen $G_1 H_k$ ist leer, denn aus $G_1 H_k = 0$ würde folgen $H_k \subset C(G_1)$, also $\overline{H}_k \subset C(G_1)$ und somit $B\,C(G_1) \neq 0$ gegen die Annahme. Die Formel (23) zeigt, dass $C(A+B)$ in der Tat $m+n-1$ Komponenten besitzt.

b) Es sei $h_B > 1$; wir nehmen die Gültigkeit des Satzes für jedes $h_{B'} < h_B$ an. Es sei K eine Komponente von B und $B = K + B_1$, also $h_B = 1 + h_{B_1}$; wir haben dann $h_{C(A+B_1)} = h_{C(A)} + h_{C(B_1)} - 1$, $h_{C(B)} = h_{C(K)} + h_{C(B_1)} - 1$, somit

$$h_{C(A+B_1)} = h_{C(A)} + h_{C(B)} - h_{C(K)}. \tag{24}$$

Nun ist $A+B = (A+B_1)+K$, also nach a) $h_{C(A+B)} = h_{C(A+B_1)} + h_{C(K)} - 1$. Einsetzung in (24) liefert den behaupteten Satz.

27. Der obige Satz bleibt gültig auch ohne die Voraussetzung der Endlichkeit von h_A und h_B. Wenn nur h_A unendlich ist, so bleibt der obige Beweis bestehen. Sind beide Komponentenzahlen unendlich, so sei wieder $C(B) = \sum_1^n H_i$ und $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ ein Punktsystem derart, dass $b_i \varepsilon H_i$ ist. Es sei $B_{ik} \subset B$ eine Komponente von B, die ein **Schnitt** zwischen b_i und b_k ist [1]); wir setzen $B^* = \sum_{i \neq k}^{1 \ldots n} B_{ik}$. Dann hat B^* endlichviele Komponenten; ferner hat $C(B^*)$ die gleiche Komponentenzahl wie $C(B)$. Es ist nämlich $C(B) \subset C(B^*)$, dabei enthält jede Komponente von $C(B^*)$ Punkte von $C(B)$ (Vgl. die Schlussweise in § 24), also ist $h_{C(B)} \geqq h_{C(B^*)}$; andererseits ist B^* für jedes $i \neq k$ ein $S(b_i, b_k)$, folglich $h_{C(B^*)} \geqq n = h_{C(B)}$, somit ist $h_{C(B^*)} = h_{C(B)}$.

Wir haben also

$$h_{C(A+B^*)} = h_{C(A)} + h_{C(B)} - 1. \tag{25}$$

Es ist aber $h_{C(A+B^*)} = h_{C(A+B)}$. Denn es folgt zunächst wegen $AB = 0$ dass jede Komponente von $C(A+B^*)$ Punkte von $C(A+B)$ enthält, dann aber müssen zwei Punkte, die verschiedenen Komponenten von $C(A+B)$, d. h. verschiedenen G_i H_k angehören, auch durch $A+B^*$ getrennt werden. Sie gehören nämlich entweder zu verschiedenen G_i und dann werden sie bereits durch A getrennt, oder zu verschiedenen H_k und dann werden sie durch B^* getrennt.

Somit enthält (25) den behaupteten Satz.

[1]) Vgl. **Knaster** et **Kuratowski** l. c. S. 34.

28. Hilfssatz II. *Wenn weder A noch B die Ebene zerschneidet d. h. wenn $h_{C(A)} = h_{C(B)} = 1$ ist, so gilt*

$$h_{C(A+B)} = h_{AB} - (h_A + h_B - h_{A+B}) + 1. \tag{26}$$

Diese Formel bleibt gültig, wenn A oder B eine unbeschränkte Komponente besitzt und $C(A+B) \neq 0$ ist (Inversion aus einem Punkte von $C(A+B)$).

Beweis. Es sei zunächst $A+B$ ein Kontinuum, d. h. $h_{A+B} = 1$. Für $h_A + h_B = 2$ d. h. $h_A = h_B = 1$ ist der Satz richtig (Satz III § 18). Wir nehmen $h_A + h_B > 2$, also etwa $h_A \geqq 2$ an und setzen den Satz für kleinere Werte von $h_A + h_B$ als gültig voraus.

Gibt es eine Komponente A_ϱ von A derart, dass $A_\varrho B$ zusammenhängend ist, so setzen wir

$$A^* = A - A_\varrho, \quad B^* = B + A_\varrho;$$

Dann ist $h_{A^*} = h_A - 1$, $h_{B^*} = h_B$, $h_{A^*B^*} = h_{AB} - 1$, $A^* + B^* = A + B$. Für $A^* + B^*$ gilt der Satz nach Voraussetzung und § 6; berücksichtigt man die obigen Relationen, so folgt die Formel (26).

Wenn keiner der Durchschnitte der Komponenten A_i mit B zusammenhängend ist, so muss, weil wegen $h_{A+B} = 1$ kein $A_i B$ leer ist, jedes $A_i B$ unzusammenhängend und somit $A_i C(B) \neq 0$ sein. Es sei $p \varepsilon A_1 C(B)$, $q \varepsilon A_2 C(B)$ und es bezeichne L einen Streckenzug, der p mit q verbindet und mit B fremd ist. Wir dürfen annehmen, dass $AL = \{p\} + \{q\}$ ist: sonst würde man L durch ein Teilstück von L ersetzen, das zwei benachbarte Punkte verschiedener Komponenten von A verbindet. L liegt dann in einem der Gebiete von $C(A+B)$ und zerlegt dasselbe, weil $A+B =$ Kontinuum ist in 2 Teilgebiete (§ 20). Wir setzen

$$A^* = A + L.$$

Dann ist $h_{A^*} = h_A - 1$, $h_{C(A^*+B)} = h_{C(A+B)} + 1$, $h_{A^*B} = h_{AB}$. Für $A^* + B$ gilt unser Satz nach Voraussetzung und § 6; berücksichtigt man die obigen Relationen zwischen den h, so folgt die Behauptung (26) des Satzes.

Ist $A+B$ kein Kontinuum, so ergibt sich die Formel (26) indem man für die einzelnen Komponenten von $A+B$ die Komponentenzahlen ihrer Komplementärmengen nach (26) berechnet und darauf den Satz von § 26 anwendet.

29. Aus dem obigen Hilfssatze II leiten wir eine Folgerung ab. Es sei G ein Gebiet, dessen Begrenzung F beschränkt ist und endlichviele Komponenten besitzt, und $B \subset \overline{G}$ eine abgeschlossene und beschränkte Punktmenge endlicher Komponentenzahl, welche die Ebene nicht zerschneidet. Ferner sei FB von endlicher Komponentenzahl und $G\,C(B) \neq 0$. Dann wird G durch B in

$$h_{G\,C(B)} = h_{FB} - (h_F + h_B - h_{F+B}) + 1 \tag{27}$$

Gebiete zerlegt.

Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich aus der Bemerkung, dass $G\,C(B)$ Komplementärmenge von $C(G)+B$ ist und dass $C(G)$ und B die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllen (§ 1).

30. Hilfssatz III. *Sind A und B zusammenhängend, also $h_A = h_B = 1$, und ist $AB \neq 0$, so gilt*

$$h_{C(A+B)} = h_{C(A)} + h_{C(B)} + h_{AB} - h_{C(AB)} - 1. \tag{28}$$

Beweis. Der behauptete Satz ist richtig, wenn $h_{C(A)} + h_{C(B)} = 2$, d. h. wenn $h_{C(A)} = h_{C(B)} = 1$ ist; dann ist nämlich auch $h_{C(AB)} = 1$ [1]) und wir erhalten den Satz III (§ 18). Es genügt daher den Induktionschluss bezüglich des Wertes von $h_A + h_B$ durchzuführen.

Es sei G_1 eine Komponente von $C(A)$; man bilde eine Folge (die eventuell nur ein Element enthält)

$$G_1 \supset H_1 \supset G_2 \supset H_2 \supset \ldots . \tag{29}$$

wo $G_1, G_2, \ldots$ Komponenten von $C(A)$ und $H_1, H_2, \ldots$ Komponenten von $C(B)$.

Kann diese Folge unbegrenzt fortgesetzt werden, so müssen alle Glieder von einem bestimmten an, miteinander gleich, also z. B. $G_\varrho = H_\varrho$ sein. Man setze $A_1 = A + G_\varrho$, dann ist $h_{C(A+B)} = h_{C(A_1+B)} - 1$, $h_{C(A_1)} = h_{C(A)} - 1$, $A_1 B = AB$. Wendet man die Formel (28) auf A_1 und B an, so folgt sie für A und B.

Lässt sich die Folge (29) nicht unbegrenzt fortsetzen, so sei etwa die Komponente $G_\varrho = G$ von $C(A)$ ihr letztes Element. Keine der Komponenten von $C(B)$ ist dann eine Teilmenge von G, d. h. $B\overline{G}$ zerschneidet die Ebene nicht. Wir setzen $A_1 = A + G$, dann ist

$$h_{C(A_1)} = h_{C(A)} - 1 \tag{30}$$

also gilt die Formel (28) für A_1 und B, sodass

[1]) Ist $C(A)\,C(B) \neq 0$ so gilt wegen $C(AB) = C(A) + C(B)$ die Ungleichung $h_{C(AB)} \leq h_{C(A)} + h_{C(B)} - 1$.

(31) $$h_{C(A_1+B)} = h_{C(A_1)} + h_{C(B)} + h_{A_1 B} - h_{C(A_1 B)} - 1$$

gilt. Ist $G\,C(B)=0$, so folgt (28) direkt aus (31), wir nehmen also $G\,C(B) \neq 0$ an.

Es ist $C(A+B) = C(A)\,C(B) = [C(A)-G]\,C(B) + G\,C(B) = C(A_1)\,C(B) + G\,C(B) = C(A_1+B) + G\,C(B)$. Da $G\,C(A_1)=0$ ist, so sind $C(A_1+B)$ und $G\,C(B)$ fremd, folglich ist die Komponentenzahl von $G\,C(B)$ endlich und es gilt

(32) $$h_{C(A+B)} = h_{C(A_1+B)} + h_{G\,C(B)}.$$

Aus (30), (31) und (32) folgt

(33) $$h_{C(A+B)} = h_{C(A)} + h_{C(B)} + h_{G\,C(B)} + h_{A_1 B} - h_{C(A_1 B)} - 2.$$

Um $h_{G\,C(B)}$ zu bestimmen, beachten wir, dass $B\overline{G}$ nach § 24 nur endlichviele Komponenten besitzt, die mit der Begrenzung F von G, die ein Kontinuum ist (§ 1) nicht zusammenhängende Durchschnitte haben. Diese Komponenten mögen $K_1, K_2, \ldots K_r$ heissen und es sei $M = \sum\limits_{1}^{r} K_\nu$. Nach § 24 ist $h_{G\,C(M)}$ endlich und

$$h_{G\,C(B)} = h_{G\,C(M)}.$$

Daraus folgt weiter nach § 20, dass MF eine endliche Komponentenzahl besitzt; sie heisse m, dann ist (§ 20)

(34) $$h_{G\,C(M)} = m - r + 1.$$

Die Bestimmung von $h_{C(A_1 B)}$ ergibt sich aus der Gleichung $A_1 B = AB + B\overline{G}$, wenn man berücksichtigt, dass $A\,B\,G=0$ ist, also G und folglich auch BG in einer Komponente Γ von $C(AB)$ liegt. Somit ist $h_{\Gamma\,C(B\overline{G})}$ endlich und $h_{C(A_1 B)} = h_{C(AB)} + h_{\Gamma . C(B\overline{G})} - 1$.

Ist Φ die Begrenzung von Γ, so hat Φ nach § 1 endlichviele Komponenten, ferner ist (wegen $F \subset A$) $\Phi\,B\,\overline{G} = F\,B\,\overline{G}$. Wendet man auf Γ und $B\,\overline{G}$ die Sätze der §§ 24 und 29 an, so folgt

$$h_{\Gamma\,C(B\overline{G})} = h_{\Gamma\,C(M)} = h_{\Phi\,M} - (h_\Phi + h_M - h_{\Phi+M}) + 1.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die obige Formel für $h_{C(A_1 B)}$ ein und beachtet, dass $\Phi\,M = F\,M$ ist, so folgt

(35) $$h_{C(A_1 B)} = h_{C(AB)} + m - (h_\Phi + r - h_{\Phi+M})$$

Was schliesslich die Komponentenzahl von $A_1 B = AB + B\overline{G}$ anbetrifft, so ist sie gleich derjenigen von $A\,B + M$. Bezeichnet Φ_1

die Summe derjenigen Komponenten von AB, die Punkte von Φ enthalten, so ist $AB+M=(AB-\Phi_1)+(\Phi_1+M)$, wo die beiden Summanden auf der rechten Seite abgeschlossen und fremd sind und daraus folgt wegen $h_{\Phi_1}=h_\Phi$ (§ 1)

$$h_{A_1B}=h_{AB}-h_\Phi+h_{\Phi+M}. \tag{36}$$

Aus (33) bis (36) folgt die behauptete Formel

$$h_{C(A+B)}=h_{C(A)}+h_{C(B)}+h_{AB}-h_{C(AB)}-1.$$

31. Die in den §§ 26, 28 und 30 abgeleiteten Formeln sind Spezialfälle einer allgemeinen Beziehung, welche die Lösung der in § 25 angedeuteten Aufgabe liefert. Um sie bequemer ausdrücken zu können bezeichnen wir die Differenz

$$I_A=h_{C(A)}-\dot{h}_A$$

als den *Index* der Punktmenge A. Der Index einer leeren Menge wird gleich 1, derjenige der ganzen Ebene gleich -1 gesetzt. Wir beweisen den

Satz. *Erfüllen A und B die Voraussetzungen von § 25, so ist die Summe ihrer Indices gleich dem Index ihrer Summe, vermehrt um den Index ihres Durchschnittes*, d. h.

$$I_A+I_B=I_{A+B}+I_{AB}. \tag{37}$$

Beweis. Für punktfremde Mengen ist der Satz richtig; wegen $h_{A+B}=h_A+h_B$ reduziert sich dann nämlich (37) auf (21).

Es sei also $AB\neq 0$ vorausgesetzt.

Für $h_A+h_B=2$, d. h. $h_A=h_B=1$ ist der Satz schon bewiesen worden (§ 30). Es sei also $h_A+h_B=n>2$ und nehmen wir (37) für $h_A+h_B<n$ als richtig an. Wenn etwa $h_A\geqq 2$ ist, so sei $A=A_1+A_2$ wo A_1, A_2 nichtleere, abgeschlossene und fremde Mengen sind. Wegen $AB\neq 0$. dürfen wir etwa $A_2B\neq 0$ annehmen. Es ist $h_{A_2}+h_B<n$ folglich gilt für $B'=A_2+B$

$$I_{B'}=I_{A_2+B}=I_{A_2}+I_B-I_{A_2B} \tag{38}$$

Wegen $A_2B\neq 0$ ist $h_{B'}<h_{A_2}+h_B$, somit $h_{A_1}+h_{B'}<h_{A_1}+h_{A_2}+h_B=n$; infolgedessen ist

$$I_{A+B}=I_{A_1+B'}=I_{A_1}+I_{B'}-I_{A_1B'}. \tag{39}$$

Aus (38) und (39) folgt wegen $A_1B'=A_1B$

$$I_{A+B}=I_{A_1}+I_{A_2}+I_B-(I_{A_1B}+I_{A_2B}) \tag{40}$$

da $A_1 A_2 = 0$ ist, so hat man $I_{A_1} + I_{A_2} = I_A + 1$, $I_{A_1 B} + I_{A_2 B} = I_{AB} + 1$. Setzt man diese Ausdrücke in (40) ein, so folgt

$$I_{A+B} = I_A + I_B - I_{AB}. \qquad \text{w. z. b. w.}$$

32. Der Gültigkeitsbereich der Indexformel (37) lässt sich etwas erweitern.

Sie bleibt richtig, wenn eine von den Komponenten von A oder von B unbeschränkt ist. Für diesen Fall bleiben die angegebenen Beweise im wesentlichen in Kraft.

Des weiteren bleibt (37) richtig, wenn A und B unbeschränkt, aber $C(A)$ und $C(B)$ beschränkt sind, d. h. wenn sowohl A als B das Äussere eines Polygons P enthält. Dies lässt sich durch Inversion oder auch folgendermassen beweisen: Es sei π der durch das Innere von P bestimmte Polygonbereich. Dann gilt die Indexformel für $M = A\pi$ und $N = B\pi$ und da die Mengen M, N, $M+N$, MN entsprechend um 1 grössere Indizes haben als A, B, $A+B$, AB, so ist sie auch für A und B richtig.

33. Die Formel (37) lässt Spezialfälle zu, die unter viel allgemeineren Voraussetzungen richtig bleiben.

Ist z. B. $AB = 0$ so gilt sie für beliebige abgeschlossene A, B wie in § 27 gezeigt worden ist.

Als zweites Beispiel sei die Ungleichung

$$h_{C(A+B)} < h_{C(A)} + h_{C(B)} + h_{AB} - 1 \tag{41}$$

angeführt, die im Falle $AB \neq 0$ aus (37) wegen $h_{A+B} < h_A + h_B$ folgt. Sie bleibt richtig, auch wenn A und B unendlichviele Komponenten haben. Denn seien A' bzw. B' die Summen derjenigen Komponenten von A' bzw. B' die entweder die Ebene zerschneiden oder Punkte von AB enthalten, so ist $A'B' = AB$, $h_{C(A')} = h_{C(A)}$, $h_{C(B')} = h_{C(B)}$, $h_{C(A'+B')} = h_{C(A+B)}$ (§ 23). Nun haben A' und B' endliche Komponentenzahlen also gilt für sie die Formel (41), somit auch für A und B.

34. Es sei schliesslich noch bemerkt, dass aus der Formel (37) der Satz I (§ 13) gefolgert werden kann. Es seien die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt. Wir nehmen zunächst noch an, dass A und B endlichviele Komponenten haben und dass keine Komponente von A mit B und keine Komponente von B mit A fremd ist. Es seien G und H diejenigen Komponenten von $C(A)$ bzw. $C(B)$, welche die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ enthalten; ihre Begrenzungen und somit auch $C(G)$ und $C(H)$ haben (§ 1) endlichviele Komponenten.

Es ist zu beweisen, dass h_{AB} nicht kleiner als m sein kann. Ist nun h_{AB} endlich, so ist auch $h_{C(G)\,C(H)}$ endlich. Denn einerseits ist $AB \subset C(G)\,C(H)$, andererseits enthält jede Komponente K von $C(G)\,C(H)$ sicher Punkte von AB. Sei nämlich p ein Randpunkt von K, etwa $p \varepsilon A$ und A_1 die zu p gehörende Komponente von A. Es ist entweder $A_1 \subset K$ und also wegen $A_1 B \neq 0$ auch $KAB \neq 0$, oder $A \not\subset K$, dann ist $A_1 K . \overline{K - A_1 K} \subset AB$. Es folgt somit

$$h_{C(G)\,C(H)} \leqq h_{AB}.$$

Auf $C(G)$ und $C(H)$ darf also die Indexformel angewandt werden (§ 33); berücksichtigt man, dass $h_G = h_H = h_{G+H} = 1$ und, wegen $C(G)\,C(H) \neq 0$, $h_{C(G)+C(H)} \leqq h_{C(G)} + h_{C(H)} - 1$ ist, so folgt

$$h_{C(G)\,C(H)} \geqq h_{GH} \geqq m$$

und in Verbindung mit der ersten Ungleichung

$$h_{AB} \geqq m.$$

Es seien jetzt A, B beliebige abgeschlossene und beschränkte Mengen, welche den Voraussetzungen von § 13 genügen. Ist AB, von endlicher Komponentenzahl, so seien A' bzw. B' die Summen derjenigen Komponenten von A bzw. B, welche Punkte von AB enthalten. Dann erfüllen A' B' bezüglich der Punkte $a_1, a_i, \ldots a_m$ die gleichen Bedingungen wie A, B. Es ist nämlich $A' + B'$ ein $S(a_i, a_k)$; denn ist $M \subset A + B$ ein irreduktibler Schnitt zwischen a_i und a_k, so ist M ein Kontinuum und $MAB \neq 0$, folglich muss $M \subset A' + B'$ sein. Ausserdem genügen A', B' den vorhin gestellten Bedingungen, somit ist $h_{A'B'} \geqq m$ und wegen $A'B' = AB$ auch $h_{AB} \geqq m$, w. z. b. w.

Nachtrag.

Leider erst nach Drucklegung der vorstehenden Arbeit habe ich die Abhandlung von A. Rosenthal „Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua" (Sitzber. Bayer. Akad. 1919) kennen gelernt, die mit dem obigen manche Berührungspunkte besitzt.

Ich erlaube mir, kurz darzulegen, wie der Hauptsatz von Hrn. Rosenthal, der von ihm mit Hilfe der Carathéodory'schen Theorie der Randelemente begründet wurde, aus den Resultaten dieser Arbeit gefolgert werden kann. Der Satz lautet:

Die Summe von zwei beschränkten Kontinuen A, B, die zwischen den Punkten a und b irreduzibel sind und ausser a und b keine Punkte gemeinsam haben, bestimmt in der Ebene genau zwei Gebiete, die von dem ganzen Kontinuum $A+B$ begrenzt werden. Jedes der übrigen eventuell vorhandenen Gebiete von $C(A+B)$ wird von einer Teilmenge von A oder von B begrenzt.

Beweis. Aus der Irreduzibilität von A und B folgt zunächst (Rosenthal l. c. S. 103), dass $A-\{a\}-\{b\}$ in einer Komponente H von $C(B)$ und $B-\{a\}-\{b\}$ in einer Komponente G von $C(A)$ liegt. Daher ist jede Komponente $G' \neq G$ von $C(A)$ mit jeder Komponente $H' \neq H$ fremd. Wir betrachten nun die Mengen:

$$A^* = C(G), \quad B^* = C(H);$$

A^* und B^* sind Kontinua, keines von ihnen zerschneidet die Ebene und es ist $A^* B^* = \{a\} + \{b\}$. Ferner ist mindestens eine der Mengen A^*, B^* beschränkt. Denn sei Q eine Kreisfläche, die $A+B$ in Innern enthält und R der Rand von Q. Ist $R A^* \neq 0$, so muss, weil R keinen Randpunkt von A^* enthält $R \subset A^*$ und daher $R B^* = 0$ sein, sodass $B \subset Q$ ist.

Somit zerschneidet $A^* + B^*$ die Ebene in genau zwei Gebiete Δ_1, Δ_2 (§ 18 u. 19) mit den Begrenzungen F_1, F_2. Nach § 15 muss sowohl F_1 als F_2 die Punkte a und b enthalten. Es bleibt zu zeigen, dass F_1 und F_2 mit $A+B$ identisch sind. Es ist $F_1 = F_1 A + F_1 B$, es genügt zu zeigen, dass $F_1 A = A$ ist. Es müssen nun a und b derselben Komponente von $F_1 A$ angehören. Denn wäre $F_1 A = K_1 + K_2$, wo K_1, K_2 abgeschlossen sind und $K_1 K_2 = 0$, $a \varepsilon K_1$, $b \varepsilon K_2$ ist, so wäre

$$F_1 = K_1 + (K_2 + F_1 B).$$

Sei $m \varepsilon \Delta_1$, $n \varepsilon \Delta_2$; wegen $\Delta_1 + \Delta_2 = GH$ ist keine der Mengen $K_1, K_2, F_1 B$ ein $S(m, n)$, ferner ist $F_1 B K_1 = \{a\}$, $F_1 B K_2 = \{b\}$, also wäre F_1 nach § 6 kein $S(m, n)$, während es doch die Begrenzung von Δ_1 ist.

Da A irreduzibel zwischen a und b ist, so folgt hieraus $F_1 A = A$ w. z. b. w.