

## Quelques coupures singulières du plan.

Par

Bronisław Knaster (Varsovie).

Je me propose dans cette Note de définir les exemples et de démontrer les propriétés sous-indiquées de suivantes coupures du plan:

- I. Coupure ne contenant aucune coupure irréductible (exemple  $\mathcal{Q}$ ).
- II. Frontière commune à un nombre fini arbitraire ou à une infinité de régions du plan (exemples  $\mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{C}_n$ , resp.  $\mathcal{B}_\infty$  et  $\mathcal{C}_\infty$ ).
- III. Famille de  $\mathcal{C}$  coupures irréductibles disjointes dont aucune n'est une ligne de Jordan (exemple  $\mathcal{D}$ ).

Ces exemples se rattachent aux résultats établis par M. Kuratowski dans son ouvrage sur les coupures irréductibles <sup>1)</sup>. Ils en complètent certains théorèmes importants: l'existence des exemples en question prouve notamment que ces théorèmes ne sont pas remplis dans le vide.

C'est ainsi que le continu  $\mathcal{Q}$  <sup>2)</sup> répond aux théorèmes suivants (qui en déterminent, par conséquent, les propriétés): toute coupure du plan qui ne contient aucune coupure irréductible coupe le plan en une infinité de régions <sup>3)</sup>; tout continu qu'elle contient et qui coupe le plan est un continu non-jordanien <sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> *Fund. Math.* VI, p. 130. J'en emprunte les notations et la terminologie.

<sup>2)</sup> Un autre exemple d'un tel continu a été construit il y a quelques années par M. O. Nikodym, mais n'a pas été publié.

<sup>3)</sup> *l. c.*, p. 135, th. IV.

<sup>4)</sup> *l. c.*, p. 140, corollaire. On en déduit notamment par la méthode d'inversion (C. Kuratowski, *Sur la méthode d'inversion dans l'Analysis Situs*, *Fund. Math.* IV, B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les continus non-bornés*, *Fund. Math.* V, § 1, p. 25) le théorème suivant:

*Tout continu de Jordan qui coupe le plan contient une coupure irréductible (complète).*

Le second problème d'existence correspond aux théorèmes: une frontière commune à toutes les régions en lesquelles elle coupe le plan est une coupure irréductible <sup>1)</sup>. Une coupure irréductible qui coupe le plan en plus de 2 régions est ou bien un continu indécomposable ou bien une somme de 2 continus indécomposables <sup>2)</sup>. Or, le problème d'existence de telles coupures trouve dans les exemples  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  la solution affirmative pour toutes les deux alternatives du théorème <sup>3)</sup>.

Enfin, étant donnée une famille non-dénombrable de coupures disjointes et bornées, toutes ces coupures, sauf un nombre fini ou une infinité dénombrable, sont irréductibles et coupent le plan en 2 régions <sup>4)</sup>. L'exemple d'une telle famille de coupures est fourni d'ailleurs par n'importe quel ensemble non dénombrable de circonférences concentriques. Mais ce sont des continus de Jordan: il se présente donc un problème plus spécial, notamment celui d'existence d'une famille non-dénombrable de coupures disjointes non-jordanienne et c'est l'exemple  $\mathcal{D}$  qui répond à ce problème.

Dans l'étude de tous ces exemples je donne sans démonstration leurs propriétés numériques et en général celles qui résultent de leurs définitions par le calcul élémentaire ou par l'induction; j'insiste, par contre, sur les conséquences topologiques de ces propriétés, autant qu'elles interviennent dans les raisonnements.

## I.

Le continu  $\mathcal{A}$  va être construit entièrement à l'aide de demi-circonférences. Il se compose — comme on va le voir — d'une suite infinie de lignes

$$(1) \quad A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

qui coupent le plan et qui sont superposables par translation. Or,

<sup>1)</sup> et inversement (l. c., p. 134, corollaire). M. Kuratowski appelle „coupure irréductible complète“ ou tout court „coupure irréductible“ toute coupure dont aucun vrai sous-ensemble fermé ne coupe le plan.

<sup>2)</sup> dont aucun, par conséquent, ne coupe le plan (l. c., p. 138, th. VI).

<sup>3)</sup> Les coupures signalées par M. L. E. J. Brouwer (Math. Ann. 68, 1910 et Proceed. Akad. Sc. v. Amsterdam 1911, 1912) et par M. Denjoy (Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. 151, Paris 1910) ne visent que le cas du continu indécomposable seul et reposent sur d'autres idées de construction.

<sup>4)</sup> l. c., p. 145, th. VIII.

chacune de ces lignes tend asymptotiquement, par des oscillations de plus en plus longues et serrées, vers la suivante toute entière, et partant vers toutes les suivantes (voir fig. I, p. 269) — sans se condenser toutefois sur elle-même, comme c'est le cas, par exemple, des lignes dites *composants* des continus indécomposables (que l'on observera dans l'exemple  $\mathcal{B}$ ).

Les propriétés topologiques du continu  $\mathcal{A}$  seront déduites de celles d'une suite des points d'intersection de la ligne  $A_0$  avec l'axe  $X$ ; c'est pourquoi je définis  $\mathcal{A}$  à l'aide de cette suite. Il existe, en outre, une relation intime de structure entre  $\mathcal{A}$  et les continus  $\mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{C}_n$ , ce qui permet de passer des propriétés topologiques du premier à celles des deux derniers, malgré qu'elles en soient si différentes.

$\mathcal{A}_n$ : désignant l'ensemble parfait non-dense composé de nombres  $(x + n)$  où  $0 \leq x \leq 1$  puisse être écrit dans le système de numération à base 5 sans chiffres 1 et 3, soit  $N_{m,n}$ , (où  $m > 0 \leq n$ ) l'ensemble des nombres  $x \in \mathcal{A}_n$  satisfaisant à la condition:

$$n + 1 - 1/5^{m-1} \leq x \leq n + 1 - 1/5^m.$$

Ainsi définis,

(2) les ensembles  $N_{m,n}$ , n'ont aucun élément commun, lorsque leurs indices diffèrent par la valeur de  $m$  ou de  $n$ ,

et on a pour tout  $n$  fixe

$$\mathcal{A}_n = (n + 1) + \sum_{m=0}^{\infty} N_{m,n}.$$

Tout ensemble  $N_{m,n}$ , est symétrique par rapport au point  $(n + 1 - 1/2 \cdot 5^{-m})$  que j'appellerai son *centre*. Enfin, je désignerai par  $I_n$  l'ensemble composé de points  $n$  et  $n + 1$  et d'extrémités des intervalles de l'axe  $X$  contigus à  $\mathcal{A}_n$ .

Ceci posé, considérons sur l'axe  $X$  la suite de points  $U_0 = \{x_i\}_{i=0}^{\infty}$  où

(3)  $x_0 = 0, \quad x_1 = 2$

(4)  $x_{2i}$  ( $i > 0$ ) est symétrique à  $x_{2i-1}$  par rapport au centre de l'intervalle impair de l'axe  $X$  le plus rapproché

(c'est à dire, par rapport à  $2E \frac{2x_{2i-1} + 1}{4} + 1/2$ )

(5)  $x_{3i+1}$  ( $i > 0$ ) est symétrique à  $x_{3i}$  par rapport au centre de l'ensemble  $N_{m,n}$ , qui le contient

On constate par recurrence que

$$(6) \quad \text{si } x \in U_0, \text{ on a } x - \epsilon \in I_0,$$

de sorte que pour tout  $i \geq 0$  il existe un indice  $m, n$  tel que  $x_{2i} \in N_{m, n}$  et il est unique en vertu de (2). La suite  $U_0$  est par conséquent définie.

Je ferai passer par tous les points de cette suite la ligne  $A_0$  de façon que  $U_0$  forme l'ensemble des points d'intersection de  $A_0$  avec les segments pairs de l'axe  $X$ . Posons notamment:

$$(7) \quad A_0 = \sum_{i \geq 0} D_i,$$

où

(8)  $D_0$  est la demi-circonférence qui relie les points  $x_0$  et  $x_1$  en passant au-dessous de l'axe  $X$ .

(9)  $D_{2i+1}$  ( $i \geq 0$ ) est la demi-circonférence qui unit les points  $x_{2i}$  et  $x_{2i+1}$  de  $U_0$  en passant au-dessus de l'axe  $X$ .

(10)  $D_{2i}$  ( $i > 0$ ) est un arc simple composé de trois demi-circonférences dont la première (qui peut se réduire à un point par coïncidence de ses extrémités) et la troisième, décrites au-dessous de l'axe  $X$ , unissent respectivement les points  $x_{2i-1}$  et  $x_{2i}$  de  $U_0$  aux points qui leur sont symétriques par rapport au point impair le plus proche (c'est le point  $E$   $x_{2i}$ ), tandis que la deuxième unit ces derniers, en passant au-dessus de cet axe.

La définition de  $\mathcal{A}$  est donnée alors par l'égalité

$$(11) \quad \mathcal{A} = \overline{A_0}.$$

On voit par induction que l'on a  $D_i \cap D_{i+1} = (x_{i+1})$  et que, pour tout  $j > 1$ ,  $D_i$  est disjoint de  $D_{i+j}$ . En conséquence:

$$(12) \quad \sum_{i=0}^k D_i \text{ est un arc simple, quel que soit } k \geq 0.$$

Il en résulte en vertu de (7) que  $A_0$  est un semi-continu et de là, en vertu de (11), que  $\mathcal{A}$  est un continu. Il est non-borné, comme sur-ensemble de la suite non-bornée  $U_0 \subset A_0 \subset \mathcal{A}$ .

Les autres propriétés du continu  $\mathcal{A}$  seront déduites des considérations suivantes, qui concernent la suite auxiliaire  $U_0$ .

On a en vertu de (6)  $U_0 \subset \sum_{i \geq 0} I_n$ . Or, les points  $x_{2i}$  et  $x_{2i+1}$  de  $U_0$  étant situés d'après (5) toujours sur un même  $I_n$  et  $x_{2i+1}$  appartenant alors, selon (4), à  $I_{n+2}$ , on peut préciser que

$$(13) \quad U_0 = (0) + \sum_{i \geq 0} U_0 \cdot I_{2i+1}.$$

Il est à remarquer à ce propos que

(14) la correspondance (6) range en une suite tous les points de  $I_0$ , qui est un ensemble dense en soi, tandis que l'ensemble  $U_0$  est clairsemé.

On prouve par induction que

(15) pour tout  $n > 0$  l'ensemble  $\overline{U_0 \cdot I_{2n+1}}$  est la somme disjointe d'ensembles obtenus de  $U_0 \cdot I_{2k+1}$  ( $0 \leq k \leq n$ ) par translation à droite de longueur  $2n + 1 - 2k$ .

Il en résulte que,  $U_n$  désignant d'une façon générale l'ensemble des points  $(x + 2n)$  où  $x \in U_0$ , on a pour tout  $n > 0$ :

$$\overline{U_0 \cdot I_{2n+1}} = \sum_{k=0}^n U_k \cdot I_{2n+1},$$

d'où, en vertu de (13),  $\overline{U_0} = \sum_{n \geq 0} U_n$  et par translation:

$$(16) \quad \overline{U_n} = \sum_{p \geq 0} U_{n+p} = \sum_{p \geq 0} \overline{U_{n+p}}.$$

On a, en outre, quel que soit  $n \geq 0$ :

$$(17) \quad U_n \cdot U_{n+1} = U_n \cdot \overline{U_{n+1}} = (2n + 2)$$

et

$$(18) \quad U_n \cdot U_{n+p} = U_n \cdot \overline{U_{n+p}} = \text{ensemble vide},$$

pour tout  $p > 1$ .

Considérons, en effet, le cas de  $U_0$ , tel qu'il se présente selon la formule (13). Chacune des parties  $U_0 \cdot I_{2n+1}$  (ou  $n > 0$ ) est disjointe en vertu de (15) de toutes les parties des ensembles  $U_1, U_2, \dots$  qui sont situées sur le même  $I_{2n+1}$  et, à plus forte raison, des autres parties de ces ensembles.

D'après (13) il ne reste donc à examiner que la partie  $U_0 \cdot I_1$  de  $U_0$ , le point (0) n'appartenant à aucun  $U_n$  ( $n > 0$ ). Or, on a:  $U_0 \cdot I_1 = (2)$  et ce point appartient par définition à  $U_1$ , c. q. f. d.

Ce raisonnement s'applique par translation à tout  $U_n \cdot U_{n+p}$  ( $n \geq 0 < p$ ) et il peut être étendu en raison de (16) à  $U_n \cdot \overline{U_{n+p}}$ . Les formules (17) et (18) sont ainsi établies.

Il en résulte en vertu de (16) que

(19)  $F$  désignant une suite finie arbitrairement extraite de  $U_n$ , on a:

$$\sum_{p > 0} U_{n+p} \subset \overline{U_n - F}.$$

On remarquera enfin que la proposition (14) entraîne l'inclusion:

$$(20) \quad I_{2n+1} \subset \sum_{i \leq n} U_i$$

pour tout  $n \geq 0$ .

Ceci établi, envisageons la structure du continu  $\mathcal{A}$ . Désignons d'une façon générale par  $A_n$  la ligne composée de points  $(x + 2n, y)$  où  $(x, y) \in A_0$ .

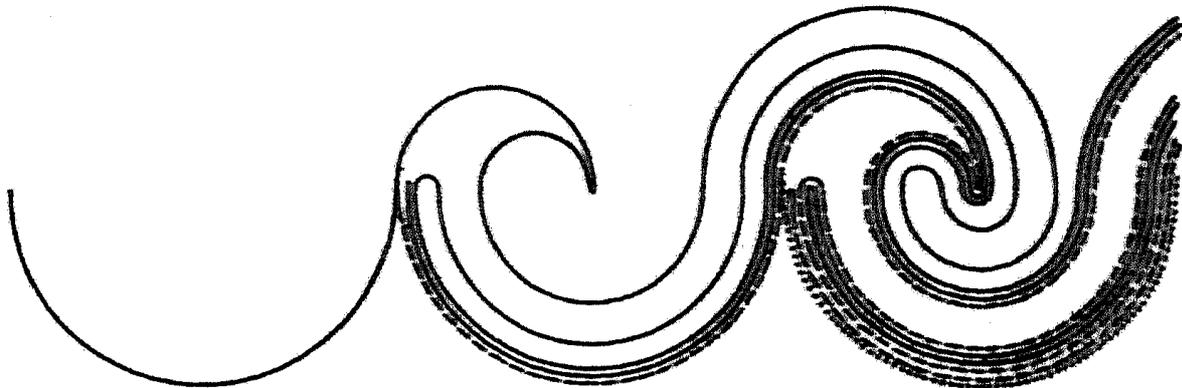


FIG. I

Cette figure représente une partie du continu  $\mathcal{A}$ . La ligne  $A_0$  y est représentée par un trait continu,  $A_1$  par un trait discontinu et  $A_2$  en pointillé.

La propriété (16) de  $U_n$  donne lieu à la propriété suivante de  $A_n$ :

$$(21) \quad \overline{A_n} = \sum_{r \geq 0} A_{n+r} = \sum_{r \geq 0} \overline{A_{n+r}},$$

d'où, en particulier, d'après (11):

$$(22) \quad \mathcal{A} = \sum_{n \geq 0} A_n,$$

comme je l'ai signalé au début.

De même, les formules (17) et (18) permettent d'établir les formules analogues pour  $A_n$ :

$$(23) \quad A_n \cdot A_{n+1} = A_n \cdot \overline{A_{n+1}} = (2n + 2)$$

et

$$(24) \quad A_n \cdot A_{n+p} = A_n \cdot \overline{A_{n+p}} = \text{ensemble vide}$$

quel que soit  $p > 1$ .

$\mathcal{A}$  contient par conséquent un rayon topologique <sup>1)</sup> formé de demi-circonférences initiales de tous les  $A_n$  ( $n \geq 0$ ). En le désignant par  $L$ , on a donc  $A_n \cdot \overline{A_{n+p}} \subset L$ , d'où

$$(25) \quad (A_n - L) \cdot \overline{A_{n+p}} = \text{ens. vide pour tous } n \geq 0 < p.$$

Enfin, on déduit de (19) que

$$(26) \quad \sum_{n > 0} A_n \subset \overline{A_0} - \sum_{n \geq 0} D_n,$$

<sup>1)</sup> c'est à dire, un ensemble non-borné homéomorphe d'une demi-droite

quel que soit  $k \geq 0$ , et on voit par induction que la propriété analogue subsiste pour tous les  $A_n$ . Elle interviendra dans la suite sous la forme plus générale que je vais établir à présent:

(27) *Etant donné un arc simple  $S$  à extrémités  $a$  et  $b$  situé sur la partie quelconque  $\sum_{i=1}^k D_i$  de  $A_0$ , tout sous-continu  $K$  de  $\mathcal{Q}$  qui relie  $a$  à  $b$  sans passer par d'autres points de  $S$  contient  $\sum_{i>k} D_i$ .*

Supposons en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe donc un tel indice  $k_1 > k$  et un tel point  $q$  que  $q \in D_{k_1} - K$ . Soit d'autre part  $p$  un point arbitraire de  $S - (a) - (b)$ . En désignant par  $T$  l'arc simple à extrémités  $p$  et  $q$  contenu dans  $A_0$ , on a donc par hypothèse  $(p) + (q) \subset A_0 - D_0$ , d'où  $T \subset A_0 - L$ , ce qui implique en vertu de (25) que  $T \cdot \bar{A}_1 = 0$ .

Soit maintenant  $d$  un nombre naturel tel que les distances de  $T$  à  $\bar{A}_1$ , de  $p$  à  $K$  et de  $q$  à  $K$ , ainsi que la longueur de l'intervalle contigu à  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n$  et ayant pour extrémité le point  $x_{k_1}$  de  $D_{k_1}$ , dépassent  $5^{-d}$ .

Entourons chaque point de  $T$  d'un cercle de rayon  $r = \frac{1}{5^{d+2}}$  et désignons par  $R$  la région composée d'intérieurs de tous ces cercles. On a donc (en supposant désigné par  $b$  celui des points  $a$  et  $b$  qui appartient à  $T$ ):

$$(28) \quad a \in K \cdot C(R) \text{ et } b \in K \cdot R.$$

Or, la frontière  $F(R)$  se compose par conséquent:

1° de deux lignes parallèles à  $T$ ; ces lignes sont disjointes de  $A_0$ , puisque leurs points d'intersection avec l'axe  $X$  (s'il y en a) sont situés à l'intérieur des intervalles contigus aux ensembles  $\mathcal{I}_n$ , la longueur de ces derniers dépassant en tout cas le rayon  $r$ . Elles sont disjointes d'autre part de  $A_1$ , la distance de  $T$  à  $\bar{A}_1$  étant également supérieure à  $r$ . Ces deux lignes sont donc disjointes, selon (21) et (22), de  $\mathcal{Q}$ , d'où, à plus forte raison, de  $K$ .

2° de deux demi-circonférences ayant respectivement pour centres les points  $p$  et  $q$ . Elles sont donc également disjointes de  $K$ , puisque la distance de leurs centres à  $K$  dépasse leur rayon  $r$ .

Ainsi on a  $K \cdot F(R) = 0$ , ce qui est impossible d'après (28). Notre supposition implique donc une contradiction.

La proposition (27), qui vient d'être démontrée, s'applique *mutatis mutandis* à tout  $A_n$  ( $n > 0$ ).

Ceci établi, je passe à l'examen des coupures contenues dans  $\mathcal{Q}$ .

Considérons la ligne  $A_0$  (abstraction faite des points qui précèdent  $D_1$ ) comme somme d'une suite infinie d'arcs simples croissants  $P_j$  ( $j > 0$ ) ayant pour extrémités les points (2) et  $(2 + 5^{-j})$  de l'axe  $X$ . Soit d'autre part  $Q_j$  la demi-circonférence passant a u-

dessus de cet axe et unissant les extrémités de  $P_j$ . La courbe simple fermée  $P_j + Q_j$  coupe le plan en deux régions et, en désignant par  $G_j$  celle d'entre elles qui contient le point  $a_0 = 2^2/10$ , on a  $G_j \subset G_{j+1}$ , quel que soit  $j$ .

L'ensemble  $R_0 = \sum_{j>0} G_j$  est donc lui aussi une région. On a  $R_0 \neq 0$ , puisque  $a_0 \in R_0$ , et  $R_0 \subset C(\mathcal{A})$ , puisque  $G_j \subset C(\mathcal{A})$  pour tout  $j$ . J'affirme, en outre, que

$$F(R_0) = \overline{A_0 - D_0} \text{ } ^1).$$

Envisageons, en effet, l'identité

$$(29) \quad F(\sum_{j>0} G_j) = \overline{\sum_{j>0} F(G_j)} - \sum_{j>0} G_j \text{ } ^2)$$

Par définition de  $G_j$  on a:  $F(G_j) = P_j + Q_j = P_j + (Q_j - P_j)$ , de sorte que, en tenant compte de la définition de  $R_0$ , l'identité (29) devient:

$$F(R_0) = \overline{\sum_{j>0} P_j} + \overline{\sum_{j>0} (Q_j - P_j)} - R_0.$$

Or,  $\overline{\sum_{j>0} P_j} \subset \overline{A_0 - D_0}$ . D'autre part, le point (2) de l'axe  $X$  étant le seul point d'accumulation de la suite  $\{Q_j - P_j\}_{j>0}$ , on a:  $\overline{\sum_{j>0} (Q_j - P_j)} = (2) + \sum_{j>0} (Q_j - P_j)$ . donc:

$$F(R_0) \subset \overline{A_0 - D_0} + (2) + \sum_{j>0} (Q_j - P_j) - R_0.$$

<sup>1)</sup> Je ferai appel à cette égalité aussi dans l'étude des exemples  $\mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{C}_n$ .

<sup>2)</sup> valable pour toute famille de domaines ouverts d'un espace euclidien.

Démonstration. Etant donné un point arbitraire  $p \in \sum_{j>0} F(G_j)$ , il existe dans tout entourage de  $p$  un point  $q \in \sum_{j>0} F(G_j)$  et, par suite, un point de  $\sum_{j>0} G_j$  voisin de  $q$ . On a donc:  $p \in F(\sum_{j>0} G_j)$ , à moins que  $p$  n'appartienne à  $\sum_{j>0} G_j$ , ce qui prouve que le premier membre de l'égalité (29) en contient le second.

Soit, inversement,  $p \in F(\sum_{j>0} G_j)$ . Si  $p \notin \sum_{j>0} F(G_j)$ , il existe une suite de points  $\{q_j\}_{j>0}$  convergeant vers  $p$  et appartenant à une infinité de domaines  $G_j$  différents. Les segments rectilignes à extrémités  $q_j$  et  $q_{j+1}$  traversent donc les frontières de ces domaines en une infinité de points tendant vers  $p$ , ce qui prouve que  $p \in \overline{\sum_{j>0} F(G_j)}$ . Cette dernière relation est vraie à plus forte raison, si  $p \in \sum_{j>0} F(G_j)$ , de sorte que dans les deux cas à envisager on trouve  $F(\sum_{j>0} G_j) \subset \overline{\sum_{j>0} F(G_j)}$ . Il en résulte par définition de frontière que le premier membre de l'égalité (29) est contenu dans le second, c. q. f. d.

Comme: (2)  $\varepsilon \overline{A_0 - D_0}$  et  $(Q_j - P_j) \subset G_{j+1} \subset R_0$ , quel que soit  $j > 0$ , on obtient finalement:

$$F(R_0) \subset \overline{A_0 - D_0} - R_0 \subset \overline{A_0 - D_0}.$$

L'inclusion inverse peut être établie comme suit. Par définition de  $G_j$  et de  $R_0$  on a  $P_j \subset F(G_j) - R_0$ , quel que soit  $j$ . Il en résulte que  $\sum_{j>0} P_j \subset \sum_{j>0} F(G_j) - R_0$ .

Le premier membre de cette inclusion étant égal à  $A_0 - D_0 + (2)$  et le second membre étant selon (29) contenu dans  $F(R_0)$ , on a:  $A_0 - D_0 + (2) \subset F(R_0)$ , d'où

$$\overline{A_0 - D_0 + (2)} = \overline{A_0 - D_0} \subset F(R_0).$$

c. q. f. d.

D'une façon analogue, en désignant par  $R_n$  la région composée de points  $(x + 2n, y)$  où  $(x, y) \varepsilon R_0$ , par  $D_n$  la première demi-circonférence de la ligne  $A_n$  et par  $a_n$  le point  $(2^{2n}/10 + 2n, 0)$ , on trouve par induction que

$$(30) \quad a_n \varepsilon R_n, R_n \subset C(\mathcal{A})$$

et

$$(31) \quad F(R_n) = \overline{A_n - D_n},$$

quel que soit  $n$ .

Or, le point  $a_n$  pour  $n > 0$  n'appartenant à aucun  $G_j$ , on a  $a_n \varepsilon C(R_0)$  et ainsi de suite. Il en résulte en vertu de (30) et (31) que

$$(32) \quad \mathcal{A} \text{ coupe le plan entre les régions } R_0, R_1, \dots, R_n, \dots$$

Tout  $\overline{A_n}$  étant superposable avec  $\mathcal{A}$ , la proposition (32) prouve en même temps que

$$(33) \quad \text{tout } A_n \text{ est une coupure du plan}$$

Ceci établi, je vais démontrer que

$$(34) \quad \text{toute coupure contenue dans } \mathcal{A} \text{ est réductible.}$$

Étant donnée, en effet, une coupure quelconque  $K \subset \mathcal{A}$ , soit  $n$  le plus petit nombre naturel pour lequel l'ensemble  $K \cdot A_n$  n'est pas vide et ne se réduit pas au point  $(2n + 2, 0)$ . Il en résulte en vertu de (23) que

$$(35) \quad \text{l'ensemble } K \cdot A_n - \overline{A_{n+1}} \text{ n'est pas vide}$$

et d'après (21) que  $K \subset A_n + \overline{A_{n+1}}$ , d'où la décomposition:

$$(36) \quad K = K \cdot A_n + K \cdot \overline{A_{n+1}}.$$

Je vais prouver que le second de ces sommandes, qui est fermé et, selon (35), plus petit que  $K$ , est une coupure; c'est ainsi que la propriété (34) de  $\mathcal{G}$  se trouvera établie.

Envisageons, en effet, l'ensemble  $K \cdot A_n$ . Deux cas peuvent se présenter:

1° Il existe un tel  $k > 0$  que  $K$  contient toutes les demi-circonférences de  $A_n$  à partir de la  $k$ -ème (en les supposant rangées en une suite comme celles de  $A_0$ ).

On a dans ce cas, d'après (26),  $\sum_{p>0} A_{n+p} \subset K$ , d'où selon (21)  $\overline{A_{n+1}} \subset K$  et par conséquent  $K \cdot \overline{A_{n+1}} = \overline{A_{n+1}}$ . Or, cet ensemble coupe le plan en vertu de (33).

2° Un tel  $k$  n'existe pas. En vertu de (27) l'ensemble  $K \cdot A_n$  contient donc pour chaque couple de ses points l'arc simple qui les relie sur  $A_n$ , de sorte que les points de  $K$  ne peuvent être repartis sur une infinité de demi-circonférences de  $A_n$ , sans que  $K$  en contienne en même temps toutes les intermédiaires — ce qui serait contraire à l'hypothèse de tout à l'heure.

L'ensemble  $K \cdot A_n$  est situé par conséquent sur un nombre fini de ces demi-circonférences, donc, selon (12), sur un arc simple. Il est par conséquent borné, fermé et ne coupe pas le plan. Ainsi la coupure  $K$  est d'après (36) une somme de deux ensembles fermés  $K \cdot A_n$  et  $K \cdot \overline{A_{n+1}}$  ayant selon (23) tout au plus un point commun. Le premier d'entre eux étant borné et ne coupant pas le plan, le second est une coupure<sup>1)</sup>, c q f. d.

Les propriétés (32) et (34) de  $\mathcal{G}$  subsistent, si on le transforme par inversion en un continu borné  $\mathcal{G}^* + v$ , où  $v$  désigne un point arbitraire de  $C(\mathcal{G})$  pris comme centre d'inversion<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> en vertu du théorème suivant de Janiszewski:

Si  $A$  et  $B$  sont des ensembles fermés,  $A$  est borné,  $A \cdot B$  est vide ou connexe et ni  $A$  ni  $B$  ne coupe le plan, leur somme  $A + B$  ne le coupe non plus (S. Janiszewski, Sur les coupures du plan faites par les continus, Prace Mat. Fiz. 1913; cf. S. Straszewicz, ce volume, p. 164).

<sup>2)</sup> B. Knaster et C. Kuratowski. Sur les continus non-bornés, Fund. Math. V, p. 32.

II<sup>1)</sup>.

1. Soit  $n \geq 2$  un nombre naturel quelconque donné d'avance.

Les notations précédentes étant conservées, posons:

$$(37) \quad \mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^n E_k + \sum_{k=0}^{n-1} F_k,$$

où les ensembles  $E_0$ ,  $E_k$  ( $0 < k < n$ ) et  $E_n$  se composent d'arcs de circonférences définis respectivement par les conditions:

$$\left. \begin{aligned} (38) \quad & (x - 2^{1/2})^2 + y^2 = r^2, \quad x \leq 1^{1/2}, \\ (39) \quad & (x - 2k - 1/2)^2 + y^2 = r^2, \\ & \quad \quad \quad 2k - 1/2 \leq x \leq 2k + 1^{1/2}, \\ (40) \quad & (x - 2n + 1^{1/2})^2 + y^2 = r^2, \quad x \geq 2n - 1^{1/2} \end{aligned} \right\} y \geq 0, (r - 1/2) \in \mathcal{A}_0$$

et  $F_k$  se compose, quel que soit  $k$ , de deux espèces de demi-circonférences:

$$(41) \quad (x - 2k - 1)^2 + y^2 = r^2, \quad y \leq 0, \text{ pour tout } (r) \in \mathcal{A}_0$$

$$(42) \quad (x - 2k + 1/2 \cdot 5^{-m})^2 + y^2 = r^2, \\ y > 0, \text{ pour tout } (5^m r - 1/2) \in \mathcal{A}_0 \text{ et } m > 0.$$

Je définis  $\mathcal{C}_n$  comme somme de deux ensembles symétriques par rapport à la droite  $y = -1$ :

$$(43) \quad \mathcal{C}_n = \mathcal{B}'_n + \mathcal{B}''_n,$$

où  $\mathcal{B}'_n$  s'obtient de  $\mathcal{B}_n$  en remplaçant dans la formule (37) chaque ensemble  $F_k$  par un ensemble  $F'_k$  composé d'arcs de  $90^\circ$ :

$$(44) \quad (x - 2k - 1)^2 + y^2 = r^2, \quad x \geq 2k + 1, \quad y \leq 0, \quad (r) \in \mathcal{A}_0$$

et de demi-circonférences:

$$(45) \quad (x - 2k - 1)^2 + (y + 1 - 1/2 \cdot 5^{-m})^2 = r^2, \quad x \leq 2k + 1, \\ (5^m r - 1/2) \in \mathcal{A}_0, \quad m > 0.$$

Pour examiner la structure des ensembles  $\mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{C}_n$  ainsi définis, nous allons suivre sur  $\mathcal{B}_n$  (resp. sur  $\mathcal{B}'_n$ ) le trajet de la ligne partant du point  $(0, 0)$ , resp.  $(1, -1)$ , et formée par une suite d'arcs simples réunis bout à bout, situés alternativement dans  $\sum_{k=0}^n E_k$  et

<sup>1)</sup> Je dois à M. Kuratowski plusieurs perfectionnements à la rédaction de ce chapitre.

$\sum_{k=0}^{n-1} F_k$  (resp.  $F_k$ ), le premier de ces arcs se terminant au point  $(2, 0)$ .

Désignons par  $B_0$  (resp. par  $B'_0$ ) la ligne considérée et par  $V_0$  la suite des extrémités successives des arcs simples formant cette ligne.

Or, on voit par induction que  $V_0$  peut être représenté en fonction de la suite  $U_0$  moyennant la condition:

(46) *le  $(i + 1)$ -ème élément de  $V_0$  est le point  $(x_i - 2nt)$  de l'axe  $X$ , le nombre  $t$  étant donné par les formules:*

$$(x_i \in U_0 \cdot I_{2k+1}, \quad nt \leq k < n(t + 1).$$

En d'autres termes: la suite  $V_0$  s'obtient de la suite  $U_0$  en substituant à l'ordre linéaire des ensembles  $U_0 \cdot I_{2k+1}$  ( $k \geq 0$ ) sur l'axe  $X$  un ordre cyclique (à période  $2n$ ) de leurs images dans  $V_0$ . Ainsi, par exemple, l'image de l'ensemble  $U_0 \cdot I_{2n+1}$  dans  $V_0$  vient se placer à nouveau sur  $I_1$  et ainsi de suite. On verra cette périodicité subsister dans le trajet des images de  $A_0, A_1, A_2, \dots$  dans  $\mathcal{B}_n$ , où elle ne fait correspondre à cette infinité de lignes de  $\mathcal{Q}$  (ainsi qu'aux régions qu'elles délimitent) que  $n$  lignes de  $\mathcal{B}_n$  (et autant de régions de  $C(\mathcal{B}_n)$ ). Chacune de ces lignes, en revenant périodiquement au voisinage de son origine, s'approche asymptotiquement d'elle-même en même temps que de toutes les autres (par quoi elle se distingue des lignes  $A_0, A_1, \dots$ ); l'effet en est que le tout, c'est à dire  $\overline{B_0}$ , devient frontière commune à toutes les régions qui composent son complémentaire.

C'est ainsi que la relation (46) entre  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{B}_n$  détermine des propriétés de ce dernier. J'y conformerai la marche de leur démonstration.

En vertu de (46) on a l'égalité analogue à (13):

$$V_0 = (0) + \sum_{k=0}^{n-1} V_0 \cdot I_{2k+1}$$

où

$$(47) \quad V_0 \cdot I_{2k+1} = \sum_{l=0}^{\infty} U_{nl} \cdot I_{2k+1}$$

quel que soit  $0 \leq k < n$ .

Ces égalités restent applicables si, par analogie avec les suites  $U_1, U_2, \dots$ , qui s'obtenaient de  $U_0$  par translations linéaires de longueur  $2, 4, \dots$ , on désigne par  $V_l$  (où  $0 \leq l < n$ ) la suite obtenue de  $V_0$  par une translation cyclique de la même longueur et de période  $2n$  (ce sera donc la suite des points  $(x_i + 2l - 2n \text{ E } \frac{x_i + 2l}{2n})$  où  $(x_i) \in V_0$ ). En particulier, la formule

(47) prend alors la forme:

$$(48) \quad V_l \cdot I_{2k+1} = \sum_{i \leq 0} U_{n+l} \cdot I_{2k+1}$$

pour tous  $0 \leq \frac{k}{l} < n$ .

A la même transformation se prêtent les propriétés (15) — (20) de  $U_n$ , ainsi que leurs démonstrations, ce qui conduit aux formules correspondantes — mais pas toujours parfaitement analogues — pour les suites  $V_l$ . On a, par exemple, tout comme pour  $U_l$ :

$$V_l \cdot V_{l+1} = (2l + 2)$$

et pour tout  $p > 0$ :

$$V_l \cdot V_{l+p} = \text{ens. vide,}$$

quel que soit  $0 \leq l < n - 1$ ; dans d'autres formules cependant il faut avoir soin de remplacer, en outre, le signe d'égalité par celui d'inclusion. Ainsi on aura au lieu de (16):

$$(49) \quad \sum_{i=0}^{n-1} V_i \subset \bar{V}_l \text{ pour tout } 0 \leq l < n.$$

Les suites  $V_l$  possèdent en conséquence la nouvelle propriété suivante:

$$(50) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{N}_{2k+1} \subset V_l \text{ pour tout } 0 \leq l < n.$$

On a, en effet, d'après (20) pour tout  $k$  fixe:

$$I_{2k+1} \subset \sum_{\substack{i=0 \\ i \leq 0}}^{n-1} U_{n+l}$$

En multipliant par  $I_{2k+1}$  les deux membres de cette inclusion et en appliquant la formule (48), on en déduit que  $I_{2k+1} \subset \sum_{i=0}^{n-1} V_l$ , d'où

$$(51) \quad \sum_{k=0}^{n-1} I_{2k+1} \subset \sum_{i=0}^{n-1} V_l,$$

ce qui donne en vertu de (49):  $\sum_{k=0}^{n-1} I_{2k+1} \subset \bar{V}_l$ , donc  $\overline{\sum_{k=0}^{n-1} I_{2k+1}} \subset \bar{V}_l$ .

Or, tout  $I_{2k+1}$  étant dense dans  $\mathcal{N}_{2k+1}$ , la dernière inclusion prouve la formule (50).

Ceci établi, soit d'une façon générale  $B_l$  ( $0 \leq l < n$ ) la ligne que l'on obtient, lorsqu'on remplace dans la définition de  $B_0$  les

nombres 0 et 2 respectivement par  $2l$  et  $2l + 2$  (voir fig. II). On a donc  $B_l \subset \mathcal{B}_n$ .

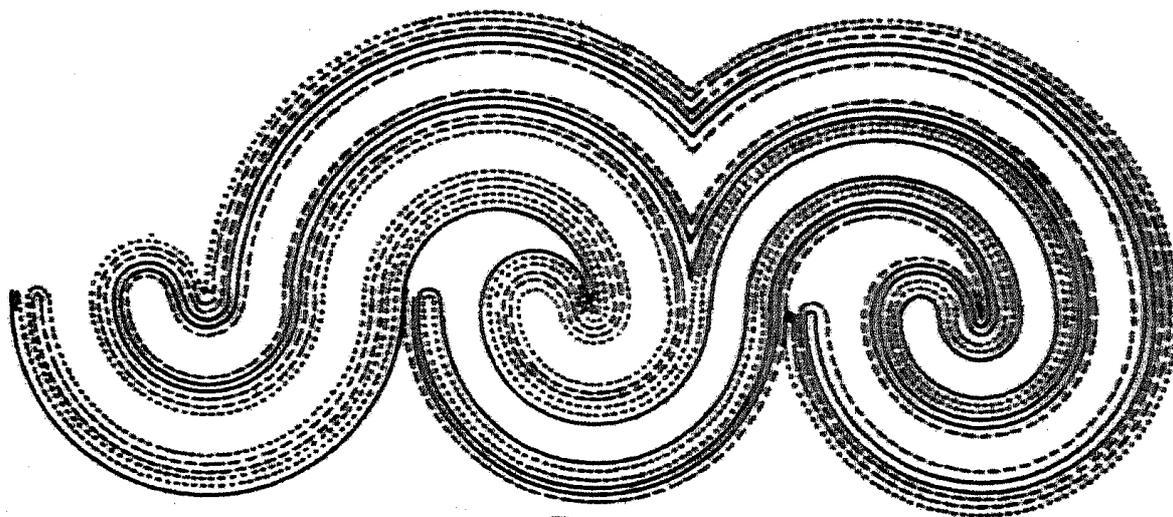


FIG. II

Cette figure représente le continu  $\mathcal{B}_3$ ; la description graphique en est analogue à celle de la fig. I.

Les propriétés des suites  $V_l$  permettent d'établir pour les lignes  $B_l$  des propositions analogues à celles qui ont été établies pour les lignes  $A_n$  à l'aide des suites  $U_n$ .

La propriété (50) de  $V_l$  montre en outre que l'ensemble des extrémités d'arcs simples formant  $B_l$  est dense dans celui de tous les arcs simples qui forment les sommandes  $E_n$  et  $F_n$  de  $\mathcal{B}_n$ .

Ces arcs étant parallèles en vertu des formules (38) — (42), chaque ligne  $B_l$  est dense dans  $\mathcal{B}_n$ ; on a donc:

$$(52) \quad \overline{B_0} = \overline{B_1} = \dots = \overline{B_{n-1}} = \overline{\sum_{i=0}^{n-1} B_i} = \mathcal{B}_n.$$

$B_0$  étant par définition un semi-continu, l'égalité (52) implique que l'ensemble  $\mathcal{B}_n$  est un continu.

On pourrait par conséquent définir le continu  $\mathcal{B}_n$  par l'égalité  $\mathcal{B}_n = \overline{B_0}$ , la ligne  $B_0$  étant construite au moyen de la suite de points  $V_0$ , donc, en relation directe avec le continu  $\mathcal{A}$ .

Or, cette relation de structure dans les deux exemples est réciproque. Il est à noter, en effet, que le continu  $\mathcal{A}$  peut être extrait de l'ensemble fermé et non-borné

$$(53) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{inf. } \mathcal{B}_n \text{ } ^1)$$

comme l'ensemble de tous ses points qui s'y laissent relier au point (0, 0) par des arcs simples. L'ensemble (53) d'ailleurs n'est pas connexe.

<sup>1)</sup> au sens de M. F. Hausdorff.

Le continu analogue à  $\mathcal{A}$ , mais extrait de l'ensemble  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{inf. } \mathcal{C}_n$  est également une coupure et présente la singularité (34). Il se compose de deux continus symétriques par rapport à la droite  $y = -1$ , dont aucun ne coupe le plan.

Les propriétés (26) et (27) de  $A_0$  étant applicables à tout  $B_l$ , tout vrai sous-continu de  $\mathcal{B}_n$  ne peut se trouver situé que hors d'une infinité d'arcs de circonférence successifs d'un  $B_l$ . En vertu de (52) il est donc un continu de condensation de  $\mathcal{B}_n$ , ce qui prouve <sup>1)</sup> que

(54)  $\mathcal{B}_n$  est un continu indécomposable.

Parmi les composants <sup>2)</sup> de ce continu deux se distinguent de tous les autres par leurs points de ramification; ce sont: le composant de  $(0, 0)$ , qui en a  $n - 1$  de forme  $(2k, 0)$  où  $0 < k < n$  et celui de  $(\frac{1}{2}, 0)$ , qui en a  $n - 2$  de forme  $(2k + \frac{1}{2}, 0)$  où  $0 < k < n - 1$ . Tous ces points de ramification sont triples. Ils sont — comme on vient de voir — situés sur l'axe  $X$ .

Je vais montrer à présent que le continu  $\mathcal{B}_n$  coupe le plan en  $n$  régions dont il est la frontière commune.

Soit, par analogie avec  $\mathcal{A}$ ,  $P_{j,l}$  l'arc simple contenu dans  $B_l$  et ayant pour extrémités les points de l'axe  $X$ :

$$(2l + 2) \text{ et } (2l + 5^{-j}) \text{ pour } l < n - 1$$

et

$$(0) \text{ et } (5^{-j}) \text{ pour } l = n - 1.$$

$Q_{j,l}$  désignant la demi-circonférence qui relie au-dessus de cet axe les extrémités de  $P_{j,l}$ , la somme  $P_{j,l} + Q_{j,l}$  coupe le plan en deux régions. Soit  $G_{j,l}$  celle d'entre elles qui renferme le point  $a_l$ , c'est à dire le point

$$(2^{3/10} + 2l) \text{ pour } l < n - 1$$

et

$$(3/10) \text{ pour } l = n - 1.$$

On démontre alors, tout comme pour  $\mathcal{A}$ , que chacune des régions  $R_l = \sum_{j>0} G_{j,l}$  satisfait aux formules:

$$(55) \quad a_l \in R_l, \quad R_l \subset C(\mathcal{B}_n)$$

et

$$F(R_l) = \overline{B_l - D_l}.$$

<sup>1)</sup> en vertu du th. II de l'ouvrage „Sur les continus indécomposables“ de S. Janiszewski et C. Krratowski (Fund. Math. I, p. 212).

<sup>2)</sup> l. c., p. 218.

Or,  $B_l$  satisfaisant également à la propriété (26) de  $A_n$ , la dernière égalité donne  $F(R_l) = \overline{B}_l$ , d'où, selon (52):

$$(56) \quad F(R_l) = \mathcal{B}_n$$

quel que soit  $0 \leq l < n - 1$ . Il est donc établi, en vertu de (55) et (56) que

(57)  $\mathcal{B}_n$  est la frontière commune des régions non-vides  $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$  entre lesquelles elle coupe le plan.

Il ne reste, par conséquent, qu'à montrer que ce sont bien toutes les régions-composantes du complémentaire de  $\mathcal{B}_n$ .

En effet, suivant les définitions de  $V_l$  et  $R_l$ , si l'extrémité d'un intervalle de l'axe  $X$  contigu à  $\mathcal{N}_{2l+1}$  appartient à  $V_l$ , cet intervalle (sans extrémités) est contenu dans la région  $R_l$  et l'intervalle composé de points  $(x+2)$  où  $(x) \in R_l$  se trouve situé dans  $R_{l+1}$  (dans  $R_0$  en cas de  $l = n - 1$ ). Or, chaque point de  $L_{2l+1}$  appartenant d'après (51) à un  $V_l$ , donc à un  $B_l$ , tout intervalle contigu à  $\mathcal{N}_{2l+1}$  est situé dans un  $R_l$ . Il en est de même des intervalles contigus aux ensembles  $\mathcal{N}_{2k}$  ( $k \geq 0$ ), car les arcs de  $B_l$  qui font partie de  $\sum_{k=0}^{n-1} F_k$  passent par tous les points de l'axe  $X$  symétriques à ceux de  $V_l$  par rapport aux points impairs de cet axe (cf. la condition (10)). Enfin, tous les points de l'axe  $X$  qui sont situés à droite ou à gauche de ceux du continu  $\mathcal{B}_n$  appartiennent à  $R_{n-1}$ , puisqu'ils peuvent être reliés au point  $a_{n-1}$  de cette région par des demi-circonférences passant en dehors de  $\mathcal{B}_n$  (à savoir, au-dessus de l'axe  $X$ ).

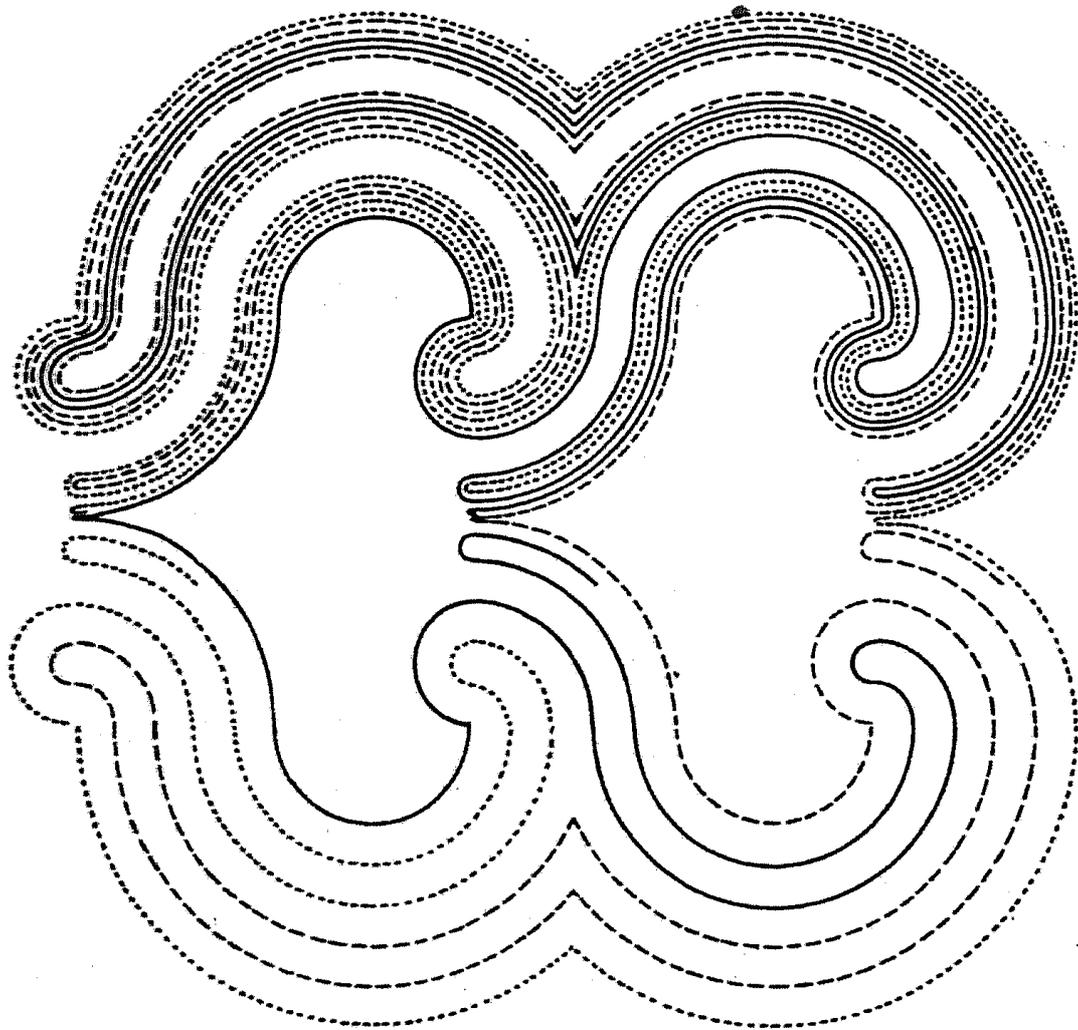
Ainsi tout point de  $C(\mathcal{B}_n)$  à ordonnée 0 appartient à un  $R_l$ . Or, il en est de même de tous les autres points de  $C(\mathcal{B}_n)$ , puisqu'ils se laissent relier à l'axe  $X$ , sans traverser  $\mathcal{B}_n$ .

Soit, en effet,  $p$  un point quelconque de  $C(\mathcal{B}_n)$ ,  $q$  le point de  $\mathcal{B}_n$  le plus proche de  $p$  et  $T \subset \mathcal{B}_n$  le plus grand arc simple qui contient  $q$  sans contenir aucun point situé du côté opposé de l'axe  $X$ . Le trajet de  $T$  étant, par définition de  $\mathcal{B}_n$ , parallèle à celui de tous les autres arcs de ce continu qui se trouvent du même côté de l'axe  $X$  que  $T$ , il s'en suit que la ligne parallèle à  $T$ , par laquelle on peut joindre  $p$  à l'axe  $X$ , ne peut rencontrer  $\mathcal{B}_n$ .

Il en résulte que  $C(\mathcal{B}_n) = \sum_{l=0}^{n-1} R_l$ , c. q. f. d.

Passons à présent à l'étude de l'exemple  $\mathcal{C}_n$ . La formule analogue à (52), ainsi que sa démonstration, étant valables également

pour  $\mathcal{A}'_x$  et  $B'_0$  étant par définition un semi-continu. l'ensemble  $\mathcal{B}'_x$  — et par conséquent l'ensemble  $\mathcal{B}''_x$ , qui lui est symétrique — sont des continus. Les deux ensembles en question ayant des points communs sur la droite  $y = -1$ , on conclut de (43) que  $\mathcal{C}_x$  est aussi un continu.



**FIG. III**

Cette figure représente le continu  $\mathcal{C}_x$ .

Conformément aux formules (44) et (45) toute ligne  $B'_l$  s'obtient de  $B_l$ , dont elle n'est qu'une modification, en remplaçant les arcs de  $\sum_{k=0}^{n-1} F_k$  par d'autres plus courts, situés entièrement au-dessous de l'axe  $X$ , de sorte que les lignes  $B'_l$  ne coupent cet axe qu'aux points de la suite  $V_l$ . Ces lignes étant ainsi disjointes l'une de l'autre (voir la moitié supérieure de fig. III), tous les points  $\alpha_l$  ( $0 \leq l < n$ ) se laissent relier en conséquence par des segments verticaux à une droite quelconque  $y < -1$ , et par là l'un à l'autre, sans toucher  $\mathcal{B}'_x$ . Par raison de symétrie il en est de même

de  $\mathcal{B}_n''$ . Il en résulte que

(58) aucun des continus  $\mathcal{B}_n'$  et  $\mathcal{B}_n''$  ne coupe le plan.

D'autre part,  $\mathcal{B}_n'$  (et par conséquent  $\mathcal{B}_n''$ ) a selon (44) et (45) exactement  $n$  points (d'abscisse  $2l + 1$  pour  $0 \leq l < n$ ) situés sur la droite  $y = -1$ , de sorte que le produit  $\mathcal{B}_n' \cdot \mathcal{B}_n''$  est formé de  $n$  composantes. Il en résulte en vertu de (43) et (58)<sup>1)</sup> que

(59)  $\mathcal{C}_n$  coupe le plan en  $n$  régions.

Or, les raisonnements employés pour  $\mathcal{B}_n$  permettent — avec les modifications évidentes — de montrer que

(60)  $\mathcal{C}_n$  est la frontière commune des toutes les régions qu'elle découpe dans le plan.

C'est ainsi que l'on désignera par  $P_{j,l}$  la somme de l'arc simple contenu dans  $\mathcal{B}_n'$  à extrémités

$$(2l + 3, -1) \text{ et } (2l + 3, 5^{-j} - 1) \text{ pour } l < n - 1$$

et

$$(1, -1) \text{ et } (1, 5^{-j} - 1) \text{ pour } l = n - 1$$

avec l'arc symétrique situé dans  $\mathcal{B}_n''$ . De même  $Q_{j,l}$  désignera la demi-circonférence qui unit les extrémités de  $P_{j,l}$ , en passant à gauche d'elles, et ainsi de de suite.

Le continu  $\mathcal{C}_n$  étant d'après (43) décomposable, la proposition (60) implique en vertu du théorème de M. Kuratowski<sup>2)</sup> que

(61) les continus  $\mathcal{B}_n'$  et  $\mathcal{B}_n''$  sont indécomposables.

Au composant du point  $(0, 0)$  de  $\mathcal{B}_n$  viennent correspondre dans  $\mathcal{B}_n'$   $n$  composants différents: ce sont ceux des points  $(2l + 1, -1)$  pour  $0 \leq l < n$ . Ils n'ont pas de points de ramification, mais chacun d'eux admet un point initial.

Le continu  $\mathcal{B}_n'$ , en particulier, équivaut au sens d'Analysis Situs au continu  $\mathcal{N}_1$  décrit dans ma Thèse<sup>3)</sup> et au continu  $D(0, 1)$  défini d'une façon très simple dans celle de M. Kuratowski<sup>4)</sup>.

2. Les procédés de construction employés jusqu'ici ne se présentent pas — comme je l'ai fait observer — à la généralisation immédiate au cas de la frontière commune à une infinité de régions.

On peut cependant modifier les continus  $\mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{C}_n$  de façon à supprimer cet inconvénient et sans abandonner l'idée directrice de leur construction. Je me bornerai donc à donner ici les défini-

<sup>1)</sup> selon le théorème de M. Straszewicz, ce volume, p. 174, th. III.

<sup>2)</sup> voir p. 265, note 2).

<sup>3)</sup> Fund. Math. III, p. 269.

<sup>4)</sup> Fund. Math. III, p. 216.

tions des exemples en question et ne discuterai que sommairement leurs propriétés topologiques. Soit:

$$(62) \quad \mathcal{B}_\infty = (1, 0) + \sum_{n=0}^{\infty} L_n + M_n,$$

où tout  $L_n$  se compose d'arcs de circonférence définis par les conditions:

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } n = 0: \\ (x - 3/10)^2 + y^2 = r^2, \quad 0 \leq x \leq 29/50, \quad (5r - 1/2) \in \mathcal{A}_0 \\ \\ \text{pour } n \text{ impairs:} \\ (x - 1 + 3/2 \cdot 5^{-\frac{1-n}{2}})^2 + y^2 = r^2, \\ 1 - 21/2 \cdot 5^{\frac{1-n}{2}} \leq x \leq 1 - 9/2 \cdot 5^{\frac{1-n}{2}}, \quad (5^{\frac{n+3}{2}} \cdot r - 5/2) \in \mathcal{A}_0 \\ \\ \text{et pour } n \text{ pairs:} \\ (x - 1 + 7/2 \cdot 5^{-\frac{2-n}{2}})^2 + y^2 = r^2, \\ 1 - 9/2 \cdot 5^{\frac{2-n}{2}} \leq x \leq 1 - 21/2 \cdot 5^{\frac{2-n}{2}}, \quad (5^{\frac{n+2}{2}} \cdot r - 1/2) \in \mathcal{A}_0 \end{array} \right\} y \geq 0$$

et tout  $M_n$  est formé de deux espèces de demi-circonférences:

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ \text{ pour } n = 0: \\ x^2 + y^2 = r^2, \quad (5r) \in \mathcal{A}_0 \\ \\ \text{pour } n \text{ impairs:} \\ (x - 1 + 7 \cdot 5^{-\frac{3-n}{2}})^2 + y^2 = r^2, \quad (5^{\frac{n+1}{2}} \cdot r) \in \mathcal{A}_0 \\ \\ \text{et pour } n \text{ pairs:} \\ (x - 1 + 3 \cdot 5^{-\frac{2-n}{2}})^2 + y^2 = r^2, \quad (5^{\frac{n+4}{2}} \cdot r - 2) \in \mathcal{A}_0 \end{array} \right\} y \leq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^\circ \text{ pour } n = 0: \\ (x + 1/5 - 7/2 \cdot 5^{-1-m})^2 + y^2 = r^2, \quad m > 0; \\ \\ \text{pour } n \text{ impairs:} \\ (x - 1 + 4 \cdot 5^{-\frac{1-n}{2}} - 7/2 \cdot 5^{-1-m})^2 + y^2 = r^2, \\ m > \frac{n-1}{2}, \\ \\ \text{et pour } n \text{ pairs:} \\ (x - 1 + 2 \cdot 5^{-\frac{n}{2}} - 7/2 \cdot 5^{-1-m})^2 + y^2 = r^2, \\ m > \frac{n}{2}, \end{array} \right\} y > 0, (5^{m+1} \cdot r - 1/2) \in \mathcal{A}_0.$$

Je définis  $\mathcal{C}_\infty$  comme somme de deux ensembles symétriques par rapport à la droite  $y = -1$ :

$$(63) \quad \mathcal{C}_\infty = \mathcal{B}'_\infty + \mathcal{B}''_\infty,$$

où  $\mathcal{B}'_\infty$  s'obtient de  $\mathcal{B}_\infty$  en remplaçant dans la formule (62) tout ensemble  $M_n$  par un ensemble  $M'_n$  composé

1° de demi-circonférences:

pour  $n = 0$ :

$$x^2 + (y - 1/5 + 1/2 \cdot 5^{-1-m})^2 = r^2, \quad m > 0$$

pour  $n$  impairs:

$$(x - 1/5 + 2 \cdot 5^{-\frac{n-1}{2}})^2 + (y + 1/5 - 1/2 \cdot 5^{-1-m})^2 = r^2,$$

$$m > \frac{n-1}{2}.$$

et pour  $n$  pairs:

$$(x - 1/5 + 4 \cdot 5^{-\frac{n-2}{2}})^2 + (y + 1/5 - 1/2 \cdot 5^{-1-m})^2 = r^2,$$

$$m > \frac{n}{2},$$

$x < 0, (5^{m+1} \cdot r - 1/2) \in \mathcal{B}'_0.$

2° de segments rectilignes unissant à l'axe  $X$  leurs extrémités, ainsi que leurs points d'accumulation, parallèlement à la droite  $y = x$  (voir fig. IV).

Le continu  $\mathcal{B}_\infty$  ainsi défini est la frontière commune à l'infinité de régions, qui composent son complémentaire. Il est un continu indécomposable.

Le continu  $\mathcal{B}'_\infty$  ne coupe pas le plan. Il a une infinité dénombrable de points communs avec  $\mathcal{B}_\infty$ .

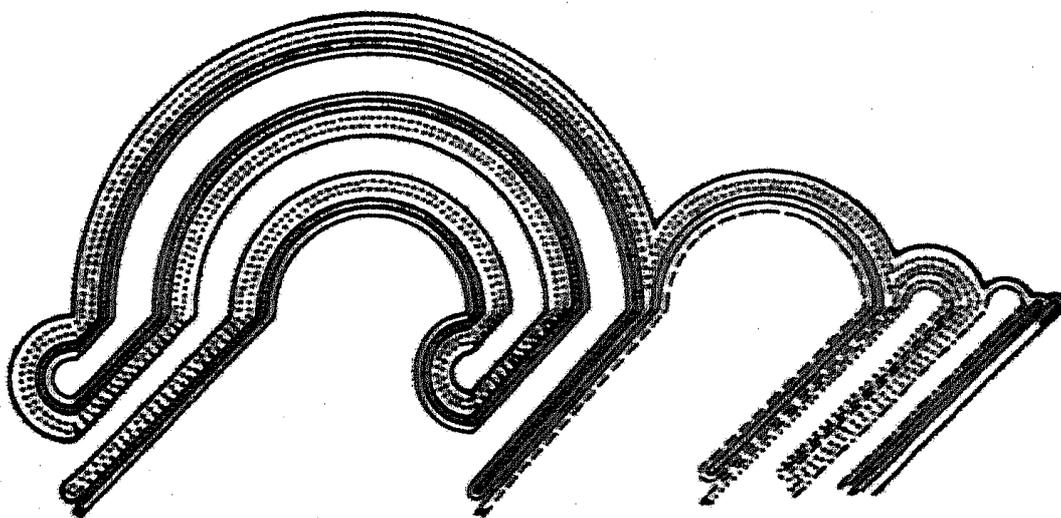


FIG. IV

Cette figure représente la moitié supérieure du continu  $\mathcal{C}_\infty$ .

Il en résulte <sup>1)</sup> d'après (65) que  $\mathcal{C}_\infty$  coupe le plan en une infinité de régions. Comme il en est la frontière commune, les continus  $\mathcal{B}'_\infty$  et  $\mathcal{B}''_\infty$  sont, en vertu du théorème précité de M. Kuratowski, indécomposables.

La relation entre la structure de ces derniers exemples et celle d'exemples précédents est la suivante. Il a été aisé d'observer que dans le cas des continus  $\mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{C}_n$  toute région  $R_l$  ( $0 < l < n - 1$ ) s'insinait entre les suivantes par une infinité de (ce que j'appellerai ici) impasses terminés en cul de sac et de plus en plus effilés. Ils se dirigeaient d'abord en avant, et n'arrivaient au voisinage d'impasses analogues des régions précédentes qu'après avoir contournés ceux de toutes les suivantes — ce qui est impossible dans le cas de l'infinité de régions de plus en plus lointaines.

Or, on réussit à rétablir la disposition dense de ces impasses (afin qu'ils aient la frontière commune), en en dirigeant de temps en temps un directement en arrière, vers ceux des régions précédentes. C'est précisément le cas des continus  $\mathcal{B}_\infty$  et  $\mathcal{C}_\infty$ , où le premier impasse de chaque région impaire se dirige, sans contourner les suivantes, vers son point  $(7/2 \cdot 5^{-\frac{1-n}{2}} - 1)$  de l'axe  $Y$ ,  $n$  désignant le numéro de cette région.

Les exemples des frontières communes à un nombre fini de régions pourraient d'ailleurs être construits aussi bien par ce dernier procédé.

### III.

L'exemple  $\mathcal{D}$  sera formé par une famille de  $c$  coupures homéomorphes à la ligne qui s'obtient en remplaçant l'arc  $1 \geq x \geq 0$ ,  $0 \geq y \geq -1$ , de la circonférence  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$  par la courbe

$$y = \sin \frac{\pi}{x} \quad (0 < x \leq 1)$$

et son continu de condensation

$$-1 \leq y \leq 1 \quad (x = 0).$$

Soit  $\mathcal{N}$  l'ensemble parfait non-dense de Cantor, c'est à dire l'ensemble des nombres réels  $0 \leq t \leq 1$  qui peuvent être écrits dans le système de numération à base 3 sans faire usage de chiffre 1.

<sup>1)</sup> S. Straszewicz, l. c., p. 174, th. III'.

A tout nombre  $t$  de  $\mathcal{N}$  (supposé écrit de cette façon) faisons correspondre la suite:

$$(64) \quad t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$$

de ses valeurs approchées, que l'on obtient en annulant tous les chiffres de  $t$  à partir de son  $n$ -ème 2. En symboles:  $m_n$  désignant le nombre de chiffres qui le précèdent dans  $t$ , on a  $t_n = \sum_{i=1}^n \frac{2}{3^{m_i}}$ .

Soit, en outre,  $t_0 = 0$ . La suite  $\{t_n\}_{n \geq 0}$  ainsi définie est toujours croissante: elle est infinie et convergeante vers  $t$ , sauf un ensemble dénombrable  $I$  de valeurs de  $t$ , où elle est finie et admet  $t$  comme son dernier élément.

Ceci dit, soit  $\mathcal{D}$  la famille d'ensembles  $D_t$  définis par l'égalité (voir Fig. V):

$$(65) \quad D_t = K_t + L_t + M_t,$$

où  $t \in \mathcal{N} - I$ .  $K_t$  désigne l'arc de  $270^\circ$  tendu entre les points

$$(1, t) \quad \text{et} \quad (1 - t, 0),$$

$L_t$  désigne le segment vertical qui joint ce dernier au point  $(1 - t, t)$  et  $M_t$  désigne la ligne polygonale qui s'obtient du segment horizontal à extrémités

$$(1 - t, t) \quad \text{et} \quad (1, t),$$

lorsqu'on y remplace tout segment reliant les points

$$(1 - t_n, t) \quad \text{et} \quad (1 - t_n + 3^{-m_n}, t)$$

par deux segments rectilignes qui les unissent respectivement au point

$$(1 - t_n + 2^{-1} \cdot 3^{-m_n}, t - t_n).$$

Ainsi définie

$$(66) \quad \text{la famille } \mathcal{D} \text{ a la puissance du continu.}$$

l'ensemble des valeurs de  $t$  ne différant que par une infinité dénombrable de l'ensemble parfait  $\mathcal{N}$ .

Les considérations élémentaires permettent de voir d'autre part que pour toutes deux valeurs distinctes  $t_1$  et  $t_2$  de  $t$  les définitions de  $K_t$ ,  $L_t$  et  $M_t$  impliquent en vertu de (65) que

$$(67) \quad \text{les ensembles } D_{t_1} \text{ et } D_{t_2} \text{ n'ont aucun point commun.}$$

On a, en outre, pour tout  $t \in \mathcal{N} - I$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - t_n + 2^{-1} \cdot 3^{-m_n}, t - t_n) = (1 - t, 0)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - t_n, t) = (1 - t, t).$$

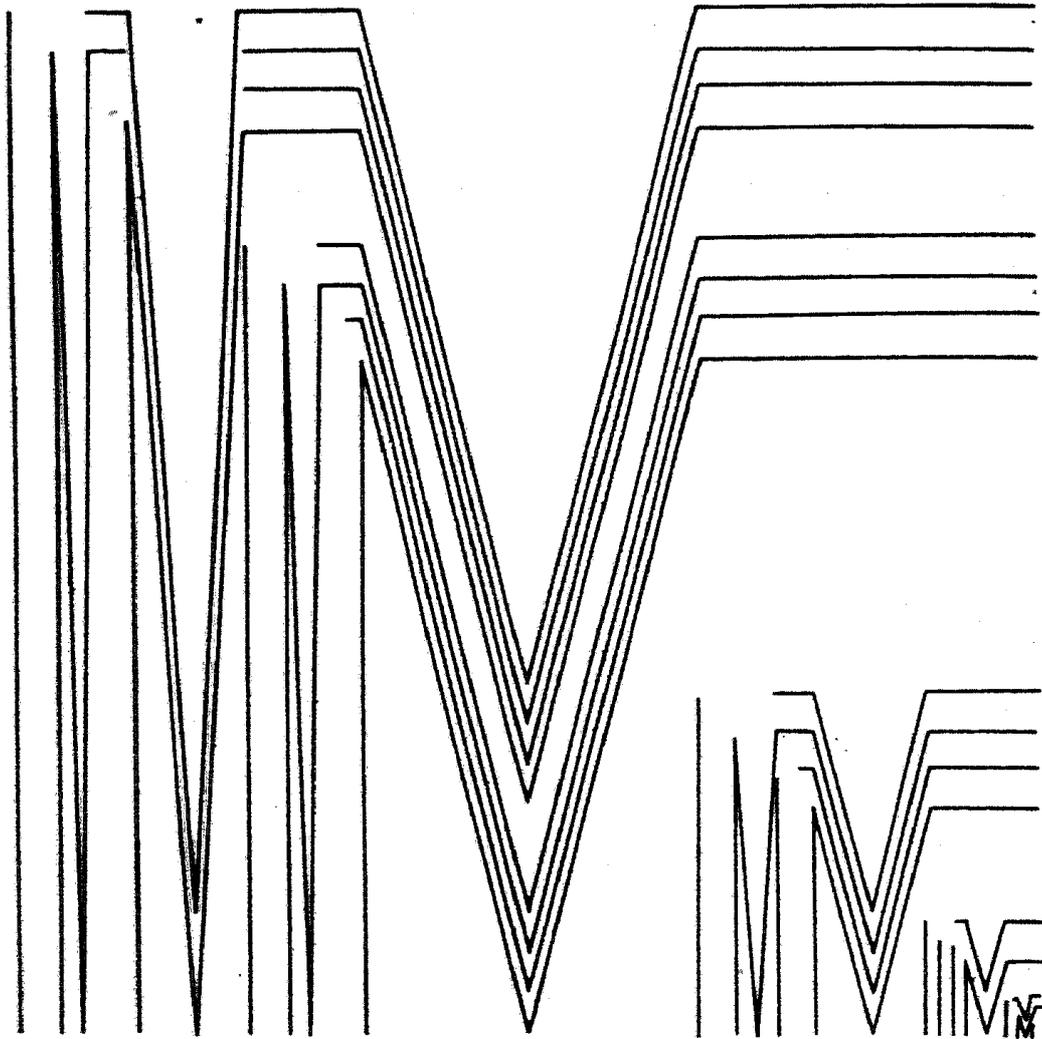


FIG.V.

Cette figure représente la famille des continus  $L_t + M_t$ , où  $t \in \mathcal{N}$ : pour  $t \in \mathcal{N} - I$ , l'ensemble  $L_t + M_t$  est homéomorphe au continu composé de la courbe  $y = \sin \frac{\pi}{x}$ ,  $0 < x \leq 1$ , et de son continu de condensation  $-1 \leq y \leq 1$ ; pour  $t \in I$ , c'est une ligne brisée.

Nos formules montrent que les extrémités inférieure et supérieure de  $L_t$  sont respectivement les points d'accumulation de celles des segments obliques de la ligne  $M_t$  et que, en même temps, l'extrémité supérieure de  $L_t$  est le point limite des segments horizontaux de cette ligne.  $L_t$  constitue en conséquence l'ensemble d'accumulation

de  $M_i$ , de sorte que l'on a:

$$(68) \quad \overline{M_i - L_i} = \overline{M_i} = M_i + L_i.$$

Cette formule montre que  $L_i$  est un continu de condensation de  $\overline{M_i}$  et que  $\overline{M_i}$  contient les extrémités  $(1 - t, 0)$  et  $(1, t)$  de  $K_i$ , qui appartiennent par définition à  $L_i$  et  $M_i$ . Or,  $M_i$  étant par définition un semi-continu,  $\overline{M_i}$  est un continu et j'affirme que

(69)  $\overline{M_i}$  est un continu irréductible entre les extrémités de  $K_i$ .

Étant donné, en effet, un point quelconque  $p \in M_i - L_i - K_i$ , la droite verticale passant par  $p$  coupe le continu  $\overline{M_i}$  en deux ensembles séparés dont chacun admet une extrémité de  $K_i$  comme élément. Il est donc impossible de les joindre par un sous-continu  $C$  de  $\overline{M_i}$ , sans que l'on ait  $p \in C$ , d'où  $M_i \subset C$  et par conséquent  $\overline{M_i} \subset C$ , c. q. f. d.

Comme continu irréductible qui admet un continu de condensation,

$$(70) \quad \overline{M_i} \text{ est un continu non-jordanien } ^1).$$

Enfin,

$$(71) \quad \overline{M_i} \text{ ne coupe pas le plan,}$$

puisque tout point de son complémentaire peut y être joint par un segment vertical avec l'extérieur du carré

$$1 - t \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq t$$

qui renferme  $\overline{M_i}$ .

Ces propriétés du continu  $\overline{M_i}$ , étant établies, remarquons que l'on a d'après (65) et (68):

$$(72) \quad D_i = K_i + \overline{M_i}.$$

Or, l'arc  $K_i$  étant par définition un continu irréductible entre ses extrémités, qui n'admet avec  $\overline{M_i}$  que ces deux points en commun et qui ne coupe pas le plan, la dernière égalité implique selon (69) et (71) que  $D_i$  est une somme de deux continus, dont aucun ne coupe le plan, qui n'ont que deux points communs et qui sont irréductibles entre eux.

<sup>1)</sup> Théorème de M. Mazurkiewicz (C. R. Soc. Sc. Varsovie 1916 et Fund. Math. II p. 205).

Il en résulte <sup>1)</sup> que l'ensemble  $D_i$  coupe le plan en 2 régions et constitue leur frontière commune.

Par conséquent

(73)  $D_i$  est une coupure irréductible

et l'égalité (72) implique en vertu de (70) que

(74)  $D_i$  n'est pas un continu de Jordan.

Les propositions (66), (67), (73) et (74) montrent que la famille  $\mathcal{D}$  se compose de  $c$  coupures irréductibles, disjointes et non-jordaniennes, c. q. f. d.

Il est à remarquer que l'ensemble  $\sum_{t \in N-1} D_t$  formé par la famille  $\mathcal{D}$  n'est pas lui-même une coupure, puisqu'il n'est pas un ensemble fermé. D'autre part l'ensemble fermé  $\sum_{t \in N} D_t$  contient l'infinité dénombrable de courbes simples fermées (donc de lignes de Jordan)  $D_t$  où  $t \in I$ , puisque la ligne  $L_t + M_t$  se compose dans ces coupures d'un nombre fini de segments (voir fig. V).

On peut toutefois construire un exemple de famille composée de  $c$  coupures irréductibles non-jordaniennes dont la somme soit aussi une coupure.

Je me servirai à ce but de la famille  $\mathcal{M}$  formée de tous les continus  $(L_t + M_t)$  où  $t \in \mathcal{N}$ <sup>2)</sup>.  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}''$  désignant respectivement les familles symétriques: à  $\mathcal{M}$  par rapport au point  $(1, 1/2)$  et à  $\mathcal{M}'$  par rapport à la droite  $J = 1 - x$  soit  $\mathcal{K}$  la famille d'arcs de  $270^\circ$  de centre  $(0, 1)$  tendus entre les points  $(1 + t, 1)$  et  $(0, -t)$  pour tout  $t \in \mathcal{N}$ .

La somme  $\mathcal{K} + \mathcal{M} + \mathcal{M}' + \mathcal{M}''$  donne l'exemple cherché. En effet, il est fermé et chacune de ses coupures qui contient l'arc simple  $L_t + M_t$  de  $\mathcal{M}$  où  $t \in I$ , renferme en même temps les images (situées dans  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}''$ ) du continu  $L_{1-t} + M_{1-t}$ , qui est non-jordanien, car les formules  $t \in I$  et  $1 - t \in I$  s'excluent mutuellement.

Parmi les différentes applications que l'on peut faire de la famille  $\mathcal{M}$  envisagée ici, il est à signaler celle qui permet de construire un continu indécomposable ayant des continus non-jordaniens sur chacun de ses composants.

Soit, en effet  $\mathcal{B}$  le continu indécomposable <sup>3)</sup> formé d'une famille  $\mathcal{B}_0$  de de-

<sup>1)</sup> en vertu d'un théorème de M. Rosenthal (*Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua*, Sitzungsberichte der Bayer. Acad. der Wissenschaften, München 1919, p. 106).

<sup>2)</sup> cf. Fund. Math. III, p. 282, où je me suis occupé d'autres familles composées de  $c$  continus plans, disjoints et non-jordaniens.

<sup>3)</sup> décrit par M. Kuratowski et moi dans la Note *Sur les continus non-bornés*, Fund. Math. V, p. 40.

mi-circonférences de centre  $(\frac{1}{2}, 0)$  décrites au-dessus de l'axe  $X$  par chaque point  $t$  de  $\mathcal{N}$  et de toutes les familles  $\mathcal{B}_n$  ( $n \geq 1$ ) de demi-circonférences de centre  $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$  décrites au-dessous de cet axe par chaque point  $\frac{2}{3^n} \leq t \leq \frac{1}{3^{n-1}}$  de  $\mathcal{N}$ .

Or, faisons subir à la famille  $\mathcal{B}_0$  la rotation de  $90^\circ$  dans le sens négatif autour du point  $(1, 0)$  et interposons  $\mathcal{M}$  entre  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{B}_0$  ainsi transformé. Le continu indécomposable obtenu de cette façon présente la singularité en question, chacun de ses composants passant par une infinité de continus homéomorphes au continu :  $y = \sin \frac{\pi}{x}$  ( $0 < x \leq 1$ ),  $-1 \leq y \leq 1$  ( $x = 0$ ).