Sur les coupures du plan faites par les ensembles connexes et les continus.

Par

Stanisława Nikodym (Varsovie).

Notations. $\overline{A}$ désigne l'ensemble composé des points limites de A et des points de A . Un ensemble A est dit *connexe*¹⁾ s'il n'admet pas de décomposition $A = M + N$ telle que $\overline{MN} + \overline{MN} = 0$, $M \neq 0 \neq N$. Un ensemble connexe et fermé est dit un *continu*. $a \in A$ veut dire que le point a appartient à l'ensemble A . Un ensemble A *décompose*²⁾ l'ensemble connexe B , si $B - A$ n'est pas connexe. Un ensemble A *décompose* l'ensemble connexe B *entre* des points m et n s'il existe deux ensembles M et N tels que $m \in M$, $n \in N$ et $B - A = M + N$, $\overline{MN} + \overline{MN} = 0$. Un ensemble A *coupe* l'ensemble B *entre* des points m et n , si pour chaque continu C tel que $C \subset B$, $m \in C$, $n \in C$ on a $CA \neq 0$.

Tout ensemble fermé A décompose le plan en un nombre fini ≥ 1 ou infini de *régions*, qui seront dites *déterminées par A*.

Théorèmes auxiliaires: (α)³⁾ Si l'ensemble fermé A ne décompose pas le plan et $a \text{ non } \in A$ et $b \text{ non } \in A$, il existe un continu C tel que

$$a \in C, b \in C, CA = 0.$$

Ainsi les propositions „l'ensemble fermé A décompose le plan“ „l'ensemble fermé A coupe le plan“ sont équivalentes.

(β)⁴⁾ A et B étant des continus, dont un au moins est borné,

¹⁾ Cf. Lennes: Amer. Journ. of Math. XXXIII, 1911.

²⁾ Cf. M. Mullikin: Trans. Amer. Math. Soc. XXIV. No. 2, 1922.

³⁾ Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 333.

⁴⁾ Janiszewski: *Sur les coupures du plan faites par les continus* (en polonais) Prace Mat. Fiz. XXVI Varsovie 1913. Théor. A et B .

Cf. Knaster et Kuratowski: *Sur les continus non bornés*. Fund. Math. V p. 35.

I si AB est un continu et ni A ni B ne décompose le plan entre les points p et q , la somme $A+B$ ne le décompose non plus entre ces points;

II si AB n'est pas un continu, la somme $A+B$ décompose le plan.

(γ)¹⁾ A étant connexe, si $AZ \neq 0 \neq A-Z$, l'ensemble A admet des points communs avec la frontière de Z .

(δ)²⁾ R étant une région déterminée par un continu et L une ligne polygonale dont tout point, sauf les extrémités, appartient à R , la ligne L décompose la région R en deux régions et est contenue dans la frontière de chacune d'elles.

1. Lemme 1. Si 1°: S est connexe, 2°: K fermé, 3°: K décompose $\bar{S}$; alors: K décompose S .

Démonstration³⁾ Par hypothèse (3°) il existe deux ensembles M et N tels que

$$(1) \quad \begin{cases} a) \quad \bar{S} - K = M + N \\ b) \quad M \neq 0 \quad N \neq 0 \\ c) \quad \overline{MN} + M\bar{N} = 0 \end{cases}$$

D'après (1a):

$$(2) \quad \bar{S} = M + N + K\bar{S}$$

et en multipliant par S , on a, en vertu de $S \subset \bar{S}$:

$$(3) \quad S = SM + SN + SK$$

Nous allons prouver que $SM \neq 0$ et $SN \neq 0$.

En effet, si $SN = 0$, on tire de (3), que $S = SM + SK$, d'où $\bar{S} = \overline{SM} + \overline{SK} \subset \overline{M} + K$. Donc, selon (2): $N \subset \overline{M} + K$, d'où

$$(4) \quad N = N\bar{M} + NK.$$

Mais (1a) entraîne $NK = 0$ et (1c): $N\bar{M} = 0$.

La formule (4) donne ainsi $N = 0$ contrairement à (1b). Nous avons ainsi établi l'inégalité $SN \neq 0$. D'une façon analogue $SM \neq 0$.

¹⁾ Hausdorff, ibid. p. 247.

²⁾ Hausdorff, ibid. p. 350.

³⁾ La démonstration de ce théorème est valable pour l'espace à n dimensions.

En multipliant l'égalité (1a) par S , nous arrivons ainsi aux formules:

$$S - K = SM + SN, \quad SM \neq 0 \neq SN \\ \overline{SM} \overline{SN} + SM \overline{SN} = 0,$$

qui prouvent que $S - K$ n'est pas connexe.

Lemme 2. Si 1°: K est un continu, 2°: ab un arc simple n'ayant que les extrémités en commun avec K , 3°: G une des deux régions déterminées par ab dans le complémentaire de K (voir δ), 4°: C un continu borné tel que $CK = 0$; alors on peut unir a et b par un continu Q tel que:

$$Q \subset \overline{G}, \quad QC = 0, \quad QK = \text{l'ensemble } (a, b).$$

Démonstration. On peut poser

$$(1) \quad C.ab \neq 0$$

car autrement le théorème est manifestement réalisé en posant $Q = ab$.

D'après les hypothèses (2°) et (4°) il existe donc sur ab le premier et le dernier point de C (qui sont, tous les deux, différents de a et b); soient a_1 et b_1 ces points¹⁾. Donc:

$$(2) \quad C.ab \subset a_1 b_1 \text{ et } K.a_1 b_1 = 0.$$

Si p est un point de $a a_1$ distinct des extrémités, on a selon l'hypothèse (4°): $p \text{ non } \varepsilon (K + C)$ et, de même, si q est un point de $b_1 b$ distinct des extrémités, on a $q \text{ non } \varepsilon (K + C)$.

On peut donc entourer p d'un cercle S tel que:

$$(3) \quad S(K + C + a_1 b) = 0.$$

Or, p étant, selon (δ), un point frontière de la région G , $SG \neq 0$; soit m un point tel que $m \varepsilon SG$.

Soit mp le segment de droite aux extrémités m et p . Soit r le premier point de mp situé sur $a_1 a$ (le segment mp étant orienté de m à p). Donc $mr \subset mp \subset S$ et $mr - r \subset G$.

Fig. 1.

¹⁾ a_1 et b_1 peuvent être identiques.

Par conséquent le continu $Q_1 = mr + ra$ sasisfait (en raison de (2)) aux conditions:

$$(4) \quad Q_1 \cdot a_1 b = 0, \quad Q_1 \subset \bar{G}, \quad Q_1 C = 0, \quad Q_1 K = a$$

D'une façon analogue, on peut unir b à un point n de G par un continu Q_2 tel que:

$$(5) \quad Q_2 \cdot a b_1 = 0, \quad Q_2 \subset \bar{G}, \quad Q_2 C = 0, \quad Q_2 K = b$$

Envisageons deux continus:

$$K_1 = K + a b$$

$$K_2 = C + a_1 b_1.$$

Ni K_1 ni K_2 ne décompose le plan entré les points m et n . En effet, K_1 ne décompose pas le plan entre m et n , car ces points sont d'après leurs définitions situés dans la région G , qui est (selon l'hypothèse 3^o) une région déterminée par $K + a b$. K_2 ne décompose pas le plan entre m et n et satisfait (en vertu de (4), 4^o et (5)) à l'égalité

$$L(C + a_1 b_1) = 0.$$

Or, $K_1 K_2 = K C + K \cdot a_1 b_1 + a_1 b_1 + C \cdot a b$, ce qui donne, suivant 4^o et (2): $K_1 K_2 = a_1 b_1$. Le produit $K_1 K_2$ étant ainsi un continu, on en conclut (selon β I) que leur somme $K_1 + K_2$ ne décompose pas le plan.

$K_1 + K_2$ ne décompose pas le plan entre les points m et n . On peut donc unir ces points par un continu Q_3 tel que:

$$(6) \quad Q_3 (K_1 + K_2) = 0.$$

Je dis que

$$(7) \quad Q_3 \subset G.$$

Car autrement le continu Q_3 aurait des points communs avec la frontière de G . Mais celle-ci étant contenue dans K_1 on serait en contradiction avec (6).

De plus

$$(8) \quad Q_3 C = 0.$$

Ainsi $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ est un continu qui unit les points a et b .

Selon les formules (4)–(7), Q est le continu demandé.

2. Théorème 1. Si 1^o: C_1, C_2, K sont des continus, 2^o: C_2 est

borné, 3°: ni C_1 ni C_2 ne décompose le plan entre les points a et b , 4°: $C_1 + C_2$ décompose le plan entre a et b , 5°: $a, b \in K$, 6°: $K C_2 = 0$. Alors: K décompose C_1 .

Démonstration: Soient G_1 et G_2 deux régions déterminées par $C_1 + C_2$ et telle que $a \in G_1$ et $b \in G_2$.

D'après l'hypothèse 3° il existe une ligne polygonale ab telle que:

$$(1) \quad ab.C_1 = 0$$

Soit a_1 le dernier point sur ab appartenant à $K.\overline{G_1}$.

On a: $a_1 \in G_1$, car d'après 6° et (1): $(ab).K(\overline{G_1} - G_1) \subset (ab)K(C_1 + C_2) = 0^1$, donc $(ab)K\overline{G_1} = (ab)KG_1$.

Soit b_1 le premier point de K situé sur a_1b et distinct de a_1 . (En particulier on peut avoir $a_1 = a$ et $b_1 = b$).

Il suit de la définition des points a_1 et b_1 que $C_1 + C_2$ décompose le plan entre a_1 et b_1 , donc en vertu de (1) on a:

$$(2) \quad a_1b.C_2 \neq 0.$$

D'autre part, l'arc simple a_1b_1 contenu dans ab remplit la condition:

$$(3) \quad a_1b_1.K = \text{l'ensemble composé de } a_1 \text{ et } b_1.$$

Ainsi a_1b_1 est situé entièrement dans une des régions déterminées par K ; désignons la par R .

Selon le théorème (δ) a_1b_1 décompose R en deux régions R_1 et R_2 . Or les hypothèses du lemme 2, étant en vertu de 6° et (3) réalisées (lorsqu'on remplace: ab par a_1b_1 , G par R_1 et C par C_1), on en conclut qu'il existe un continu Q_1 tel que

$$(4) \quad Q_1C_2 = 0$$

$$(5) \quad Q_1K = \text{l'ensemble } (a_1, b_1)$$

$$(6) \quad Q_1 \subset \overline{R_1}$$

et un continu Q_2 tel que:

$$(7) \quad Q_2C_2 = 0$$

$$(8) \quad Q_2K = \text{l'ensemble } (a_1, b_1)$$

$$(9) \quad Q_2 \subset \overline{R_2}.$$

¹⁾ $\overline{G_1} - G_1 \subset C_1 + C_2$, car $\overline{G_1} - G_1$ est la frontière de la région G_1 „déterminée“ par $C_1 + C_2$.

Nous allons prouver que $C_1.R_1 \neq 0 \neq C_1.R_2$. Car, si l'on suppose $C_1.R_1 = 0$, on a en vertu de (6):

$$C_1.Q_1 \subset \bar{R}_1 \text{ -- } R_1 \subset K \vdash a_1.b_1$$

done:

$$C_1.Q_1 = C_1.Q_1.K + C_1.Q_1.a_1.b_1$$

ce qui donne en raison de (5) et. (1):

$$(10) \quad C_1.Q_1 = 0.$$

On arrive ainsi, selon (4) et (10) à la formule: $(C_1 + C_2).Q_1 = 0$, qui contredit la proposition antérieure, que $C_1 + C_2$ décompose le plan entre a_1 et b_1 .

Il est donc établi que $C_1.R_1 \neq 0$ et de même $C_1.R_2 \neq 0$.

Comme $K.R_1 = 0 = K.R_2$ on en déduit: $(C_1 - K).R_1 \neq 0 \neq (C_1 - K).R_2$. Donc si $C_1 - K$ était connexe on aurait, en raison du théorème (γ): $(C_1 - K)(\bar{R}_1 - R_1) \neq 0$, mais $\bar{R}_1 - R_2 \subset K + a_1.b_1$ et d'après (1) $C_1.a_1.b_1 = 0$, donc $(C_1 - K)(\bar{R}_1 - R_1) = 0$. Cela prouve que $C_1 - K$ n'est pas connexe donc que K décompose C_1 .

Ce théorème présente une généralisation de la propriété que le continu qui unit des points entre lesquels $C_1 + C_2$ décompose le plan et qui est disjoint d'un d'eux, a le produit non-vide avec l'autre.

3. Théorème 2. Si 1^o: C est un continu borné, 2^o: S est un ensemble connexe, 3^o: $\bar{S}.C$ ne coupent pas le plan; alors les deux propositions suivantes sont équivalentes:

I. $S + C$ coupe le plan entre des points extérieurs de $S + C$.

II. $\bar{S}.C$ est non-connexe.

Démonstration. 1. Supposons que I est rempli. Soient donc a et b deux points tels que $a \text{ non } \varepsilon \bar{S} + C$ et $b \text{ non } \varepsilon \bar{S} + C$ et que $S + C$ coupe le plan entre ces points.

Je dis que $\bar{S}.C$ n'est pas un continu. Car, autrement il existe en vertu du théorème (β I) un continu qui unit a et b et qui est disjoint de $\bar{S} + C$, donc à plus forte raison de $(S + C)$. L'ensemble $S + C$ ne pourrait donc couper le plan entre ces points. Donc I entraîne II.

2. II entraîne I. Supposons que $\bar{S}.C$ n'est pas connexe. Il suit du théorème (β II) que $(\bar{S} + C)$ coupe le plan entre deux points,

soient a et b . Soit K un continu arbitraire tel que:

$$a \in K, b \in K.$$

D'après le théorème 1, si le continu K satisfait à la condition

Fig. 2.

$K.C = 0$, alors K décompose $\bar{S}$ donc, conformément au lemme 1:
 K décompose S d'où $K.S \neq 0$.

Ainsi tout continu K qui unit les points a et b satisfait à la formule $K(C + S) \neq 0$, ce qui prouve que $(S + C)$ coupe le plan entre a et b .

Remarques. 1. L'hypothèse, que $\bar{S}$ ne coupe pas le plan est essentielle. En effet, soit $\bar{S}$ la circonférence d'un cercle sans un seul point a , C le rayon qui passe par a , alors $(S + C)$ coupe le plan, bien que $\bar{S}.C$ étant composé du seul point a est un ensemble connexe.

2. La condition pour que la somme de deux continus (dont aucun ne décompose le plan) décompose le plan, donnée par Janiszewski dans les théorèmes (β) est *intrinsèque*¹⁾ par rapport à la somme de ces ensembles, c. à. d. elle n'utilise pas de relations entre la somme envisagée et les points qui en sont

Fig. 3.

situés en dehors. Dans le cas de la somme de deux ensembles *connexes* il n'existe pas de condition *intrinsèque*, car la propriété de *couper* le plan par la somme de deux ensembles connexes n'est pas un invariant de l'Analysis Situs.

Nous définirons, en effet, un ensemble S qui est la somme de deux ensembles connexes S_1 et S_2 dont aucun ne coupe le plan et, d'autre part, nous définirons un ensemble T , satisfaisant aux mêmes conditions et homéomorphe à S , en même temps S ne coupe pas le plan bien que T le coupe entre des points extérieurs. Soit S l'ensemble formé des courbes:

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad \varphi(x) = \sin \frac{1}{x} + x \quad \text{pour } 0 < x \leq 1$$

¹⁾ au sens de M. Urysohn (ce volume p. 31).

et des points $(0,1)$ et $(0,-1)$ (Fig. 2). Soit T l'ensemble formé des courbes:

$$y = \sin \frac{1}{\varrho - 1} \text{ pour } 1 < \varrho \leq 1\frac{1}{2}$$

et des points $(0,1)$ et $(0,-1)$. (Fig. 3):

Le théorème 2 montre qu'il existe une condition intrinsèque encore pour la somme d'un ensemble connexe et d'un continu.

3°. En appliquant la méthode d'inversion et en s'appuyant sur les théorèmes démontrés dans l'ouvrage cité „*Sur les ensembles non bornés*“ on peut généraliser le théorème 2 de cette façon:

Si 1°. S, C sont des ensembles non-bornés, 2°. S un ensemble connexe, 3°. C un continu, 4°. $\bar{S}, C$ ne coupent pas le plan; alors les propositions suivantes sont équivalentes:

I $S + C$ coupe le plan entre des points extérieurs de $S + C$.

II $\bar{S}.C$ contient tout au moins une composante bornée.

Remarquons enfin, qu'en s'appuyant sur les théorèmes de M. Straszewicz (ce volume), on peut préciser le nombre de parties en lesquelles $\bar{S} + C$ décompose le plan si on connaît le nombre des composants du produit $\bar{S}C$.