Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes.

Par

Paul Urysohn (Moscou).

Introduction.

I. Le problème, la méthode, les résultats.

1. La Topologie (*Analysis Situs*) est, par définition, la branche de la Géométrie qui étudie les propriétés des ensembles invariantes par rapport à toute transformation homéomorphe (c. à d. biunivoque et bicontinue). Il résulte de cette définition que les notions fondamentales des autres branches de la Géométrie, telles que droite, plan etc., sont sans importance pour la Topologie: elles ne possèdent pas, en effet, l'invariance en question. On devra donc les remplacer par d'autres, telles que ligne, surface etc.; il s'agit ainsi, en premier lieu, de définir ce qu'on entend par là. Plus précisément, il s'agit de définir. p. ex., une classe d'ensembles qui soit topologiquement invariante, comprenne tout ce que nous sommes habitués d'appeler „ligne", et ne comprenne aucun ensemble auquel il nous serait impossible d'accorder ce nom. L'idée qui se présente la première à l'esprit, est d'appeler „ligne" tout ensemble homéomorphe à un segment; „surface", tout ensemble homéomorphe à un carré (fermé)[1]. On dira de même, n étant quelconque, qu'un ensemble homéomorphe à un cube n-dimensionnel est une *multiplicité Jordanienne n-dimensionnelle*[2]. L'utilité de cette notion est incontestable:

[1] Pour éviter toute complication qui serait inutile ici, je n'envisage que ce qu'on pourrait appeler „morceau élémentaire" d'une ligne (arc simple) ou d'une surface (calotte simple).

[2] J'emploie l'épithète „Jordanienne" (que nous attacherons aussi aux lignes et surfaces tout-à-l'heure définies, c. à d. aux multiplicités de dimension 1 et 2),

l suffit de ce rappeler que les remarquables travaux de M. Brouwer sont entièrement basés sur elle. La classe d'ensembles ainsi définie est donc bonne; mais la *définition* même est, par contre, mauvaise. Et cela pour deux raisons: elle n'est pas, tout d'abord, *géométrique*, car elle affirme la possibilité d'une certaine correspondance, c. à d. d'une *fonction*; puis, le cube n-dimensionnel qu'elle utilise n'est pas un *être topologique*. On est ainsi amené à poser le

Problème J_n. *Donner une définition purement géométrique des multiplicités Jordaniennes n-dimensionnelles.*

Le problème J_1 (définition géométrique des lignes Jordaniennes) à été résolu par Janiszewski dans sa thèse [1]). Ce même auteur, ainsi que plusieurs autres, ont abordé le problème J_2, mais sans succès. Janiszewski voulait définir les surfaces Jordaniennes comme il suit [2]). Il envisageais les arcs simples d'un espace E comme „points" d'un nouvel espace $\mathcal{E}$. Une surface (dans E) était alors une somme d'arcs simples (sans points communs deux à deux) formant un arc simple dans $\mathcal{E}$. Cette élégante définition ne définit cependant pas une *surface* mais bien *une surface décomposée d'une manière déterminée en lignes:* en effet, si l'on décompose une même surface de deux manières différentes, on obtient, d'après cette définition, *deux êtres distincts*. Les autres définitions (p. ex. celle de M. Yoneyama [3]) et de M. Moore [4]) ne sont que des modifications de la précédente [5]). Quant au problème J_n général, il n'a même pas été abordé.

Il est d'ailleurs à remarquer que l'intérêt purement mathématique

---

pour éviter tout malentendu. J'indique d'ailleurs par ce nom que le rapport entre les multiplicités Jordaniennes et les *multiplicités Cantoriennes*, auxquelles est consacré le présent mémoire, est le même qu'entre les lignes Jordaniennes (sans points multiples) et les lignes Cantoriennes.

[1]) Thèse de Paris (1911), réimprimée dans le *Journ. éc. Polytechnique*, II série, 16ème cahier (1912). Les renvois que je ferai se rapportent à la pagination du tirage à part.

[2]) „Über die Begriffe „Linie" und „Fläche". *V Internat. Congress of Mathematicians*. Cambridge. 1912.

[3]) Theory of continuous sets of points. *Tôhoku Math. Journ.*, vol. XIII (1918).

[4]) On the generation of a simple surface... *Fund. Math.* IV, p. 106.

[5]) On pourrait peut-être déduire la résolution de J_2 des recherches de M. Moore relatives à la définition purement topologique des espaces homéomorphes au plan Euclidien (*Trans. Amer. Math. Soc.* 1916 & 1919); il n'y a malheureusement en Russie aucun exemplaire de ces mémoires.

de ces problèmes est bien moindre que leur intérêt philosophique (qui est très considérable): tant qu'on n'a pas trouvé de bonne définition, on emploie, et avec succès, la mauvaise qui est *logiquement irréprochable.*

Les circonstances varient lorsque l'on retourne au problème mentionné au début:

Indiquer les ensembles les plus généraux qui méritent encore d'être appelés lignes, surfaces etc.

Ici il nous manque toute définition; on voit donc que ces problèmes-là (que nous appellerons respectivement problème K_1, K_2 etc.) sont bien autrement importants. Le problème K_1 a été résolu *pour les ensembles plans* par Cantor: on appelle ligne Cantorienne tout continu plan privé de points intérieurs. Or cette définition ne s'applique plus à l'espace tridimensionnel E_3: l'absence des points intérieurs n'exclut, en effet, que les volumes; et il n'existait jusqu'à présent aucun moyen de discerner parmis les ensembles situés dans E_3 entre les lignes et les surfaces. M. Zoretti a d'ailleurs proposé la définition suivante [1]):

„Je dirai qu'un continu à trois dimensions est une ligne, si en chacun de ses points on peut trouver un plan au moins qui n'a pas avec l'ensemble un continu commun. Dans le cas contraire, l'ensemble sera une surface si en chaque point il existe des droites n'ayant pas avec l'ensemble un continu commun, un volume dans le cas contraire".

Mais on voit immédiatement que toute surface convexe fermée serait, d'après cette définition, une ligne.

Les problèmes K_n (problème de la définition des *multiplicités Cantoriennes*) restent donc entiers même pour l'espace tridimensionnel.

2. Nous aurons donc, en particulier, à résoudre le problème K_1, c. à d. de donner une nouvelle définition des lignes Cantoriennes, l'ancienne définition étant, nous l'avons tout-à-l'heure vu, insuffisante. Arrêtons-nous pour un moment sur la cause de ce dernier fait; son examen nous fournira, peut-être, quelques indications importantes. Cette cause est, d'ailleurs, évidente: elle consiste en ce que la définition Cantorienne n'est pas *intrinsèque*, c. à d. qu'elle utilise les relations entre l'ensemble envisagé et les points qui lui sont étrangers. Or il est évident qu'une classe d'ensembles obtenue à l'aide d'une

[1]) Contribution à l'étude des lignes Cantoriennes. *Acta Math.* 36 (1912), p. 267.

telle définition varie avec l'espace considéré: *un même ensemble* peut appartenir à cette classe lorsqu'il est situé dans un espace, et lui être étranger lorsqu'il fait partie d'un autre espace.

Le terme „un même ensemble“ que j'emploie ici, ne produira, je l'espère, aucun équivoque: il s'agit, bien entendu, de deux ensembles distincts mais topologiquement identiques. C'est tout comme en Géométrie métrique: on parle d'une même figure située dans différentes régions de l'espace pour désigner des figures distinctes mais *métriquement* identiques, c. à d. congruentes. En Topologie on remplacera évidemment l'identité métrique par l'identité topologique. Or que doit-on entendre par là? Il me semble que ce ne peut être que l'homéomorphie; et c'est à tort que M. L. Antoine affirme dans sa thèse que „l'identité des deux figures apparaît comme plus parfaite, lorsqu'il est possible d'étendre la correspondance entre ces figures à des points qui n'en font pas partie“. Si l'on exige p. ex. que la correspondance puisse être étendue à tout l'espace, ce n'est pas seulement l'identité des ensembles que l'on exige: on postule par là que les deux ensembles sont *situés* de la même manière dans l'espace considéré. Et si la correspondance ne peut être étendue, cela ne veut pas dire que les ensembles diffèrent (topologiquement) l'un de l'autre: ils sont identiques, mais leur situation ne l'est pas. Ici encore nous avons des analogues métriques bien connus: deux courbes congruentes peuvent être situées de manières différentes sur une même surface.

Si l'on accepte ce point de vue, on est amené à identifier *tous* les ensembles homéomorphes quels que soient les espaces auxquels ils appartiennent. Il en résulte que toute propriété topologique d'un *ensemble.* c. à d. toute propriété qui caractérise l'ensemble et non sa situation, est nécessairement une propriété *intrinsèque*. Cela ne veut pas dire, d'ailleurs, que la *définition* correspondante soit intrinsèque, c. à d. n'utilise que les rapports entre les points de l'ensemble en question: il arrive, en effet, qu'une même notion est susceptible de deux définitions différentes dont l'une seulement est intrinsèque. Ainsi p. ex. M. Fréchet [1]) définissait un ensemble *extrémal* comme *fermé* et *compact* [2]) (définition non intrinsèque), tandis qu'il suffit de dire qu'il est *compact en soi* (définition intrinsèque).

[1]) Thèse *Rend. Palermo* 22 (1906).

[2]) Nous reviendrons bientôt sur ces notions; il est donc inutile de rappeler ici leurs définitions.

C'est bien entendu la définition intrinsèque qu'on choisira, car on préfèrera toujours la définition qui révèle immédiatement les principales propriétés de la notion à définir. L'origine de cette préférence est, d'ailleurs, plutôt esthétique que mathématique, les deux définitions étant absolument équivalentes. Il en est tout autrement lorsqu'on a deux *notions* qui ne coïncident que dans le cas d'un espace *spécial*, comme p. ex. celles d'un ensemble *compact en soi* (*extrémal*) et d'un ensemble *fermé* et *borné*: ces deux notions se confondent, en effet, dans les espaces Euclidiens, mais sont distinctes dans d'autres cas (p. ex. dans l'espace Hilbertien). Ici, même si l'on n'a affaire qu'aux ensembles Euclidiens, le choix de la définition intrinsèque a un sens *mathématique* bien clair: ce n'est que celle-ci qui définit une vraie notion topologique; elle nous montre donc que nous considérons les représentants Euclidiens d'une *classe topologique* [1]).

Ce qui précède suffit, il me semble, pour justifier la condition supplémentaire suivante: *toutes les définitions cherchées doivent être intrinsèques.*

Rappelons, en terminant, que c'est Janiszewski qui accepta le premier ce point de vue [2]), sans indiquer, d'ailleurs, les raisons qui l'amenèrent à préférer les propriétés que nous avons appelées

[1]) Ces considérations expliquent, il me semble, l'origine du rôle si important que jouent les ensembles fermés et *bornés* de l'espace Euclidien. Quant à la classe de *tous* les ensembles fermés (Euclidiens), elle n'est même pas invariante. On ne s'étonnera donc pas que l'extension des théorèmes bien connus au cas des ensembles non bornés fournit souvent des irrégularités assez bizarres et l'on consentira peut-être, qu'une telle extension est à peu près dénuée d'intérêt. Plus précisément, et pour éviter tout malentendu: l'etude des propriétés topologiques des ensembles fermés non bornés (qui est, en réalité. l'étude d'une classe plus vaste: celle des $\mathfrak{F}_\varrho$ — voir le § 19) peut fournir certains résultats intéressants (d'importance secondaire); mais on ne pourrait dire qu'un théorème concernant les ensembles fermés bornés est incomplet s'il n'a pas été étendu aux ensembles non bornés (même lorsqu'une telle extension est possible): autant vaudrait dire qu'un théorème concernant les fonctions sommables est incomplet si l'on ne l'a pas étendu aux fonctions admettant une intégrale déterminée (finie ou infinie).
La remarque précédente ne s'applique d'ailleurs qu'aux propriétés *intrinsèques* et non à la *situation* des ensembles en question (la propriété d'être fermé appartenant à la situation, et non à l'ensemble): l'étude de leur situation (coupures du plan etc.) présente, par contre, un intérêt incontestable. Cependant c'est justement cette étude-là que l'on a presque complètement négligée jusqu'ici: le seul résultat qui me soit connu est celui de M. Mazurkiewicz (Extension du théorème de Phragmèn-Brouwer aux ensembles non bornés, *Fund. Math.* III, p. 20).

[2]) Thèse, p. 2.

intrinsèques [1]. Et c'est. peut-être, ce manque de motifs qui causa le peu d'attention que les Géomètres accordent à ce principe si fécond [2].

3. Nous allons encore indiquer une autre condition supplémentaire de nature toute différente. Parmi les définitions topologiques il y a lieu de distinguer entre les *définition intégrales* (concernant les propriétés intégrales, c. à d. celles de l'ensemble tout entier) et les *définitions locales* (relatives aux propriétés d'un ensemble au voisinage de l'un de ses points). Or il existe outre les *vraies* propriétés intégrales, des propriétés qu'on pourrait appeler *propriétés intégrales d'origine locale*: ce sont celles qu'on obtient lorsqu'on exige qu'un ensemble possède une certaine propriété locale en chacun de ses points. Il se comprend que ces propriétés-là peuvent toujours être définies comme telles, c. à. d *localement*; mais il arrive bien souvent qu'on les définit, par contre, *intégralement* [3]. On préférera, cependant pour des raisons analogues à celles que nous avons exposées au § précédent, les définitions de la première sorte; nous nous proposons donc de *n'employer que les définitions locales dans tous les cas où ces définitions-là sont possibles*.

Le rôle de ce principe dans les questions que nous allons étudier est très considérable; c'est ce qui ressort immédiatement de la remarque évidente suivante: la notion (non définie jusqu'à présent) qu'on appelle dans le cas d'une multiplicité Jordanienne son *nombre de dimensions*, et dont la définition générale permettrait de discer-

[1] Janiszewski ne leur donne aucun nom

[2] C'est M. D. Egoroff qui, dans un entretien personnel (en été 1921), attira mon attention sur l'extrème importance des définitions intrinsèques. A cette époque-là je m'intéressais surtout au problème J_2; c'est encore M. Egoroff qui me fit voir tout l'intérêt que présente le problème K_2.

[3] Voici un exemple emprunté à la Theorie des fonctions. La propriété d'une fonction (définie sur un *segment*) d'être continue est, bien entendu, une propriété intégrale d'origine locale: c'est ce qu'on voit d'après la définition ordinaire due à Cauchy. Or on peut la définir intégralement comme *continuité uniforme*. Remarquons d'ailleurs qu'il n'existe que bien peu de propriétés (d'une fonction) qui soient de vraies propriétés intégrales Citons, comme exemple, celle d'être orthogonale à une fonction donnée.

Mentionnons encore quelques exemples topologiques. La propriété d'un continu d'être irréductible est une vraie propriété intégrale. Par contre, celle d'être un arc simple ou une ligne simple fermée, est d'origine locale, quoique toutes les définitions jusqu'à présent connues de ces notions soient intégrales (nous obtiendrons des définitions locales dans la deuxième partie du présent mémoire).

ner entre les lignes, les surfaces, les volumes etc., cette notion [1]) est, on s'en rend compte aisément, une notion intégrale d'origine locale [2]).

4. Nous allons donc nous laisser guider par les deux principes cités. Nous y ajouterons encore le suivant: *même lorsqu'on n'étudie que les ensembles fermés, on examinera avec profit leurs parties non fermées.*

Commençons par un exemple. On trouve souvent (p. ex. chez Janiszewski) des conditions telles que la suivante:

le continu K est la somme de deux continus dont la partie commune se réduit à un point x (donné d'avance).

Or on voit sans peine que cette condition peut être remplacée par une autre, savoir

le continu K peut être décomposé, après la suppression du point x, en une somme de deux ensembles satisfaisant à la condition de Lennes-Hausdorff, c. à d. dont aucun ne contient de points-limites de l'autre.

Les deux conditions sont équivalentes, mais la seconde est, nous allons le voir, beaucoup plus maniable.

La condition de Lennes-Hausdorff, qui est la première qu'on rencontre dans cet ordre d'idées, avait été inventée pour définir la *connexité* [3]) (un ensemble étant connexe lorsqu'il ne peut être décomposé en deux ensembles satisfaisant à cette condition); on l'avait d'ailleurs employé depuis dans bien d'autres buts. Nous allons l'utiliser de la façon suivante: nous dirons qu'un ensemble B sépare les sous-ensembles P et Q de l'ensemble C, si l'ensemble $C-B$ est la somme de deux ensembles, A et D, satisfaisant à la condition de Lennes-Hausdorff, et dont le premier contient P et le second Q. Cette notion de *séparation* [4])

[1]) Il s'agit, bien entendu, de l'image intuitive de cette notion, image que nous possédons en quelque sorte, tandis que la notion elle-même nous est encore inconnue.

[2]) C'est M. Paul Alexandroff qui attira mon attention sur le rôle que joue le principe des définitions locales dans mes recherches: inconsciemment je le respectais de tout temps, mais je ne m'en apercevais pas.

[3]) Voir Lennes, Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations, Amer. Journ. of Math. 33 (1911), p. 303; Hausdorff, „*Grundzüge der Mengenlehre*“, p. 244.

[4]) On ne la confondra pas avec la notion de *coupure*: nous dirons que l'ensemble fermé B *découpe* le continu C entre P et Q lorsqu'il n'existe aucun *continu* F situé sur C et étranger à B qui ait des points communs avec chacun des deux ensembles P et Q.

que nous aurons encore à modifier de maintes façons (en la rendant, en particulier, *locale*), est comme nous le verrons dans un moment, la vraie base de toutes les recherches qui suivent [1]).

5. Cette notion nous permet, en premier lieu de définir la dimension des ensembles, — notion qui se réduit dans le cas des multiplicités Jordaniennes à leur nombre de dimension; puis, de faire une étude approfondie de la structure des ensembles fermés au point de vue de leur dimension. Cette même notion de séparation nous permet de résoudre complètement tous les problèmes K_n et de faire une étude très complète des lignes Cantoriennes ainsi définies. Elle permet encore d'obtenir uue nouvelle solution du problème J_1 qui n'utilise que les définitions locales; et il est bien probable qu'on pourra obtenir, toujours par la même méthode, la résolution des autres problémes J_n.

J'ai déja énoncé (sans démonstration) les principaux résultats qu'on obtient ainsi dans deux notes insérées dans les *Comptes Rendus* [2]). Je me propose maintenant d'en donner un exposé complet Cet exposé est, malheureusement, beaucoup plus volumineux que je ne le désirais; mais je ne suis arrivé à le raccourcir sans sacrifier, soit la clarté, soit la rigueur des raisonnements, soit enfin une partie des résultats que j'avais acquis. Il me reste donc à espérer que l'importance des questions traitées rendra le lecteur indulgent envers l'imperfection technique (qui est, je ne puis le nier, très considérable) de ce mémoire.

Notons, en particulier, que les résultats obtenus permettent pour la première fois d'élucider quelque peu la question jusqu'à présent si obscure de *ce que c'est que le nombre de dimensions* [3]). Il me

[1]) Il est à remarquer que la notion de *connexite* qui fut mon point de départ, n'intervient pas (ou, du moins, peu s'en faut) dans l'exposé actuel. En particulier, tous les principaux résultats s'appliquent tout aussi bien aux ensembles fermés non continus qu'aux continus La raison en est, il me semble, celle que la continuité d'un ensemble n'entraîne nullement la continuité de son *noyau dimensionnel* (sa partie la plus massive au point de vue de la dimension; voir pour la définition précise le Ch. IV), *vice versa*: il suffit, pour le voir, d'examiner 1) deux cercles reliés par un segment, et 2) un ensemble composé d'un cercle et d'un segment sans points communs.

[2]) Tome 175. pp. 440 et 481 (1922).

[3]) Ce mémoire était déjà terminé quand j'ai pris connaissance d'un article de M. Brouwer (Über den natürlichen Dimensionsbegriff. *Journ. de Crelle*, t. 142, voir aussi une correction à cet article dans le même journal, t. 153) où il résout cette question par une méthode qui paraît être (au premier abord, du moins) très voisine

semble, en effet, que la réponse que je propose est bien conforme aux souhaits de Henri Poincaré [1]).

Notons encore que c'est pour la première fois que nous allons, en Topologie *intrinsèque* [2]), sortir du plan Euclidien [3]).

Cette derniére assertion paraîtra, peut-être, assez paradoxale: le nombre de dimensions n'est, en effet, limité par aucune restriction ni dans la thèse de Janiszewski ni dans la plupart des recherches ultérieures. Or il est aisé à voir que les faits qu'on y étudie ne varient pas lorsqu'on passe du plan à l'espace tridimensionnel, p. ex.; c. à d. qu'on étudie des faits *plans* qui se généralisent sans peine à un nombre quelconque de dimensions. En d'autres mots, on ne visitait jusqu'à présent l'espace que pour voir qu'on n'y trouve rien de nouveau. Nous allons. tout au contraire. obtenir des *faits* essentiellement nouveaux, des faits qui ne peuvent avoir lieu dans le plan.

II. Hypothèses sur l'espace

6. Nous aurons à examiner des espaces Euclidiens à un nombre quelconque de dimensions, et même des espaces plus généraux. Il s'agit donc, en premier lieu. de bien préciser les espaces que nous admettons. Il est d'ailleurs à remarquer qu'en Topologie intrinsèque la nature de l'espace est, à proprement parler, sans importance: c'est ce qui résulte de la définition même des propriétés intrinsèques. On pourrait donc ne soumettre l'espace à aucune restriction Or nous allons surtout porter notre attention aux ensembles *compacts en soi*; nous ne restreindrons donc en rien les *ensembles* étudiés si nous supposons que l'espace est compact lui aussi. Cette restriction (qui

---

de la mienne. J'espère revenir sur les relations entre ces méthodes. Je mentionne encore le travail de M. Menger (Monatshefte für Math. u. Phys. 23 (1923)), dont le point de départ est à peu près le même que celui de mes notes citées et du présent mémoire, et qui n'est venu à ma connaissance qu'au printemps de 1924.

[1]) Pourquoi l'espace a trois dimensions. *Revue de Métaphysique et de Morale.* T. 20 (1912), p. 484.

[2]) J'entends par là l'ensemble de toutes les recherches topologiques qui n'emploient que les définitions intrinsèques.

[3]) Ce n'est, bien entendu, que la Topologie moderne (basée sur la notion de point-limite) que j'ai en vue, et non *l'Analysis Situs* classique qui n'est, d'après une remarque de MM. Dehn et Heegaard. qu'une branche de l'Analyse Combinatoire. Dans cette dernière on ne s'occupait, par contre, que des espaces à $\geqslant 3$ dimensions. On examinait, de même, souvent des espaces à plus de deux dimensions dans les recherches non intrinsèques (travaux de MM. Brouwer et Lebesgue).

n'est qu'apparente dans notre cas) permettra de simplifier les énoncés et les démonstrations de certains théorèmes: de ceux notamment qui concernent les *suites* d'ensembles. Elle permettra aussi de remplacer le terme „ensemble compact en soi“ par „ensemble fermé“ qui nous est plus familier.

Voici les définitions que nous allons utiliser:

Déf. 1. *Un ensemble E est dit un espace métrique si l'on y a défini une fonction $\varrho(x, y)$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) *elle est définie pour tout couple (x, y) d'éléments de E (distincts ou non);*

2) *elle est non-négative:* $\varrho(x, y) \geqslant 0$;

3) $\varrho(x, y)$ *est symétrique:* $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$;

4) *cette fonction s'annule lorsque $x = y$, et dans ce cas seulement;*

5) *on a, quels que soient x, y et z,*

$$\varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z). \tag{1}$$

Les éléments de E sont appelés „points“, et la fonction $\varrho(x, y)$ la „distance entre x et y“ [1]).

La distance $\varrho(x, y)$ permet de définir de la manière habituelle les points-limites d'un ensemble C situé dans E, la convergence d'une suite etc. [2]).

Déf. 2. *Un espace métrique E est dit compact si chaque ensemble infini C y possède au moins un point-limite x.*

Nous allons toujours supposer (sauf mention contraire expresse) *que nous avons affaire à un espace métrique compact.*

Voici quelques conséquences de cette hypothèse dont nous aurons à nous servir constamment dans la suite [3]):

I. On peut extraire de toute suite infinie une suite convergente.

[1]) Cette définition est due a M. Fréchet. de même que celle de la compacticité et beaucoup d'autres: c'est en effet, M. Fréchet qui s'aperçut le premier de ce fait, si important, que la théorie des ensembles n'utilise que peu de propriétés de l'espace Euclidien. Il en conclut, par une abstraction hardie, que cette théorie s'applique à des formations beaucoup plus générales. dont il indiqua plusieurs. L'une de ses définitions les plus heureuses est justement celle des espaces métriques. Il est d'ailleurs à remarquer que le terme que j'emploie, est dû à M. Hausdorff; je le préfère à celui de M. Fréchet (classe $(\mathfrak{D})$) qui me semble peu suggestif.

[2]) Voir, pour les détails, le § 19.

[3]) Voir, pour les démonstrations et l'explication des termes qui suivent, Hausdorff, *„Grundzüge der Mengenlehre“*. On trouvera d'ailleurs toutes les définitions dans la troisième section de cette introduction.

II[1]). Il existe des ensembles dénombrables denses dans E.

De même, quel que soit l'ensemble (infini) C de E, cet ensemble possède des sous-ensembles dénombrables qui sont denses sur lui.

III. (Théorème de Borel-Lebesgue)[2]). Soit F un ensemble fermé; de toute famille de domaines dont la somme recouvre F complètement, on peut extraire une suite *finie* possédant la même propriété.

Ce théorème subsiste encore pour les *domaines relatifs* (par rapport à F)[3]).

7. L'hypothèse que nous avons adoptée, celle des espaces métriques compacts. peut prêter à certaines objections que nous allons maintenant examiner.

On pourrait tout d'abord croire que notre condition est trop restrictive car elle exclut les espaces Euclidiens: ceux-ci ne sont pas, en effet, compacts. Or ce sont, bien entendu, les ensembles Euclidiens qui nous intéressent le plus.

Cet inconvénient est d'ailleurs bien moindre qu'il ne le paraît au premier abord. Toute partie bornée et fermée d'un espace Euclidien étant compacte en soi, on peut donc l'envisager comme formant, *à elle seule*, un espace métrique compact; il en résulte que tout ensemble Euclidien borné fait partie d'un certain espace admissible. Tous nos raisonnements seront, par conséquent, applicables aux ensembles Euclidiens *bornés* ou bien (lorsqu'il y en a plusieurs), *bornés dans leur ensemble.* C'est ce que nous supposerons dans presque tous les cas où nous aurons affaire aux ensembles Euclidiens[4]).

L'espace Euclidien n-dimensionnel E_n est, d'ailleurs, homéomorphe à une sphère n-dimensionnelle (ouverte), c. à d. à un ensemble *borné*[5]). Nous pourrons donc appliquer nos résultats même aux en-

[1]) Voir l. c. p. 274, X.

[2]) Ibid. p. 272, VI.

[3]) C'est au théorème de Borel-Lebesgue qu'est due l'origine locale de certaines notions intégrales (voir le § 3).

[4]) On remarquera que cette condition est toujours remplie pour les ensembles compacts en soi.

[5]) Il est parfois utile d'observer que E_n est homéomorphe à un espace métrique compact diminué d'un seul point: on considère notamment l'espace hypersphérique n-dimensionnel, ou bien, ce qui revient au même, la surface d'une sphère $(n+1)$-dimensionnelle

sembles Euclidiens non bornés[1]), à condition de ne pas oublier que les ensembles fermés non bornés ne sont plus fermés lorsqu'on les envisage comme faisant partie d'un espace compact. Ce n'est donc pas à la classe $\mathfrak{F}$ (classe des ensembles fermés situés dans des espaces compacts, c. à d. des ensembles compacts en soi) que ces ensembles appartiennent, mais à la classe plus vaste des $\mathfrak{F}_\varrho$ (voir le § 19)[2]).

8 On serait, peut-être, tenté de croire que nos hypothèses sont par contre, trop peu restrictives; qu'il serait préférable de se limiter p. ex. aux espaces Euclidiens (c. à d. à leurs parties bornées) et de ne pas se laisser entraîner vers des généralisations superflues et gênantes. Il n'en est rien. Tous nous raisonnements étant basés uniquement sur la compacticité (et ses trois conséquences indiquées au § 6), toute nouvelle restriction imposée à l'espace ne simplifierait d'aucune manière ni les énoncés ni les démonstrations: elle resterait tout simplement sans emploi. Or l'introduction d'une restriction qui n'intervient nulle part me semble assez mal motivée[3]).

[1]) C'est ce que nous ferons, p. ex., au § 4 du Ch. II.

[2]) C. à d. que chaque ensemble Euclidien fermé non borné est homéomorphe à un $\mathfrak{F}_\varrho$ situé dans un espace admissible.

[3]) C'est là, il me semble, un fait général: toute théorie mathématique possède *un domaine naturel d'existence*, c. à d. une classe d'individus auxquels ses résultats s'étendent d'eux-mêmes, tandis que toute généralisation ultérieure n'est que partielle et demande des recherches nouvelles et presque toujours bien compliquées. Telle est p. ex. la classe des fonctions sommables (ou à carré sommable) pour la plupart des théories ayant affaire à l'intégration (séries de Fourier, fonctions orthogonales, équations intégrales etc); la classe des ensembles (A), das les théories déscriptives; la classe des fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz, pour les équations différentielles. Quant à la Topologie intrinsèque, c'est justement la classe des espaces métriques compacts qui constitue son domaine naturel d'existence.

Dans tous ces cas l'hypothèse la plus simple et la plus naturelle qu'on puisse faire, est, il me semble, d'adopter le domaine correspondant. On pourrait, bien entendu, l'élargir dans les cas (d'ailleurs assez fréquents) où la généralisation ainsi obtenue suffit à justifier les complications qu'elle entraîne; mais il sérait tout-à-fait inutile de le restreindre. C'est ainsi p. ex. que l'emploi des séries de Fourier-Riemann (qu'on trouve encore parfois) me semble toot-à fait inexplicable.

Ce fut Janiszewski qui adopta le premier (dans sa thèse) ce point de vue pour les recherches topologiques. Seulement ses hypothèses étaient assez mal choisies (celles qu'on trouve dans sa thèse excluent, en effet, tous les espaces indénombrables); Janiszewski se corrigea en partie dans le 17ième cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, mais le système de conditions qu'il y donne est assez

9. Voici une troisième objection qui est plus sérieuse que les deux précédentes: la notion de *distance* étant étrangère à la Topologie, il vaudrait donc mieux de ne pas en faire usage, c. à d. d'accepter une certaine classe d'*espaces topologiques* [1]) comme base de nos recherches. Or c'est justement ce que nous faisons en réalité car *la classe des espaces métriques compacts coïncide*, comme je l'ai indiqué récemment [2]), *avec la classe des espaces topologiques compacts admettant un système déterminant dénombrable* [3]). Nous pouvons ainsi nous baser sur des hypothèses *purement topologiques* et *définir* la distance [4]) qui devient alors un simple *instrument* et non le *base* de nos recherches. On pourrait même se débarasser entièrement de cette notion en suivant une méthode de démonstration purement topologique que j'ai esquissée [5]); si je ne le fais pas ici, ce n'est que pour la raison suivante: il me semble préférable de ne pas obscurcir l'exposé des faits nouveaux par une méthode inaccoutumée et ne présentant, après tout, qu'un intérêt méthodologique; il vaut mieux étudier les faits nouvaux par des méthodes habituelles, et les méthodes nouvelles, sur des faits connus. Notons d'ailleurs que la traduction du présent mémoire du „langage métrique" en „langage topologique" ne présente aucune difficulté sérieuse.

10. Nous terminerons cette section par quelques considérations relatives à *l'axiome de choix* de M. Zermelo.

Il est bien connu que l'emploi de cet axiome est superflu dans la plupart des études topologiques; dans celles notamment qui ont affaire aux classes d'ensembles (Euclidiens) qu'on recontre le plus souvent: continus, ensembles fermés, domaines etc. [6]).

---

compliqué et contient des conditions superflues; ce fut peut-être la cause qui l'amena à rejeter le cas général dans une note et à se borner aux ensembles Euclidiens dans le texte même; et ce ne furent que ces derniers qu'on examina dans les recherches ultérieures.

[1]) Au sens de M. Hausdorff.

[2]) *Math. Ann.* 92, p. 275 — 293: voir aussi „Zum Metrisationsproblem", actuellement sous presse dans le même journal.

[3]) la coïncidence est, bien entendu, topologique. c. à d. que chaque espace de l'une des deux classes en possède un homéomorphe dans l'autre.

[4]) de la manière indiquée dans la note citée.

[5]) dans un mémoire qui paraîtra prochainement dans le *Recueil Mathématique de la Société Math. de Moscou.*

[6]) L'emploi de l'axiome de Zermelo devient, par contre, indispensable lorsqu'on examine des classes plus vastes, p. ex. celle des ensembles connexes, celle des sémi-continus. etc.

Cela résulte, dans le cas d'un espace *Euclidien*, de la possibilité d'indiquer d'une manière *effective* des procédés qui permettent:

A) de choisir un point déterminé dans chaque ensemble fermé;

B) de choisir un point déterminé dans chaque domaine;

C) de choisir une suite de points qui est dense dans l'espace considéré.

Or lorsqu'on définit l'espace de la manière abstraite que nous avons choisie, l'indication effective de tels procédés devient évidemment impossible.

Si l'on ne veut pas avoir recours à l'axiome de Zermelo, on devra donc *postuler* la possibilité des opérations A, B, C; c. à d. qu'on devra examiner seulement les espaces pour lesquels on connait de tels procédés. Nous dirons que ces espaces-là sont *effectivement compacts.*

Citons, comme exemple, que toute partie bornée et fermée d'un espace Euclidien est un espace effectivement compact; il en est de même pour l'espace de dimension infinie que nous allons construire dans le Ch. V. Je ne crois pas, d'ailleurs, qu'on puisse indiquer (effectivement) *un* espace compact qui ne soit pas effectivement compact.

Il est, d'ailleurs, à remarquer qu'il suffit de postuler la possibilité de l'une quelconque des trois opérations citées: nous allons, en effet, demontrer que la possibilité de C entraîne celle de B; B, celle de A; et A, celle de C.

Montrons tout d'abord que la propriété I (§ 6) des espaces métriques compacts est toujours effective, c. à d. qu'on n'a besoin d'aucune hypothèse complémentaire pour pouvoir indiquer un procédé permettant d'extraire une suite convergente *déterminée* de toute suite infinie.

Soit, en effet,

(2) $$a_1,\ a_2 \ldots\ldots a_n, \ldots$$

une suite infinie quelconque (elle peut contenir des points coïncidents). ε étant un nombre positif arbitraire, soit a_{n_1} le premier point de (2) qui est extérieur à $S(a_1, \varepsilon)$[1]; a_{n_2}, le premier point extérieur à $S(a_1, \varepsilon) + S(a_{n_1}, \varepsilon)$; et ainsi de suite: a_{n_i} sera le premier point de (2) qui n'appartient pas à

$$S(a_1, \varepsilon) + S(a_{n_1}, \varepsilon) + \ldots + S(a_{n_{i-1}}, \varepsilon).$$

On obtient ainsi une suite

(3) $$a_1,\ a_{n_1} .\ a_{n_2} \ldots,\ a_{n_k}$$

nécessairement *finie*, car on a

$$\varrho(a_{n_i},\ a_{n_j}) \geqslant \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite (3) ne saurait avoir un point-limite si elle était infinie; or toute suite infinie possède au moins un point-limite: cela résulte de la compacticité lorsque la suite contient une infinité de points distincts; et de la répétition infinie d'un même point, dans le cas contraire.

Nous voyons donc que tous les points (2) rentrent dans la somme finie

$$S(a_1, \varepsilon) + S(a_{n_1}, \varepsilon) + \ldots + S(a_{n_k}, \varepsilon);$$

[1]) Voir la section suivante pour les notions que j'emploie ici.

l'un au moins des termes de cette somme en contient donc une infinité. Choisissons le premier terme de cette sorte, et envisageons la suite des points a_n qui lui appartiennent. C'est une suite infinie dont le diamètre ne surpasse pas 2ε. Nous avons ainsi obtenu un procédé déterminé qui permet d'extraire de toute suite infinie une autre suite, également infinie, et dont le diamètre est arbitrairement petit.

Ceci fait, extrayons de (2) une suite

$$(2') \qquad a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$$

de diamètre $\leqslant 1$; de celle-ci une suite

$$(2'') \qquad a''_1, a''_2, \ldots, a''_n, \ldots$$

de diamètre $\leqslant \frac{1}{2}$, et ainsi de suite. La suite

$$(2^{(k)}) \qquad a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}, \ldots$$

aura un diamètre ne surpassant pas $\frac{1}{k}$.

La suite *diagonale*

$$(4) \qquad a'_1, a''_2, a'''_3, \ldots, a_n^{(n)}, \ldots$$

vérifie la condition

$$\varrho(a_n^{(n)}, a_{n+\nu}^{(n+\nu)}) \leqslant \frac{1}{n};$$

elle ne peut donc avoir plus d'un point-limite. Il résulte alors de la compacticité qu'elle en possède exactement un; et l'on voit sans peine qu'elle *converge* vers ce point. Or la suite (4) est extraite de (2) par un procédé univoquement déterminé: ce qui justifie notre énoncé.

11. Montrons maintenant l'équivalence de A, B et C. On voit immédiatement que C entraîne B:

$$5) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

étant la suite définie d'après C et G un domaine quelconque, on n'a qu'à choisir le premier point de (5) qui est agrégé à G.

Il est aussi facile de voir que B entraîne A. Soit, en effet, F un ensemble fermé arbitraire. Choisissons (d'après B) un point a_n dans chacun des domaines

$$S\left(F, \frac{1}{n}\right);$$

puis extrayons de la suite (2) qu'on obtient ainsi, la suite (bien déterminée) (4). On voit aisément que le point-limite b de cette dernière suite fait partie de F.

Reste donc à montrer que A entraîne C. E étant fermé, nous y choisissons d'après A un point déterminé y_1. Nous choisissons ensuite un point y_2 dans l'ensemble fermé $E - S(y_1, \varepsilon)$ (ε étant un nombre positif arbitraire); puis un point y_3 dans $E - [S(y_1, \varepsilon) + S(y_2, \varepsilon)]$, et ainsi de suite. Nous obtenons une suite

$$(6) \qquad y_1, y_2, \ldots, y_k$$

qui est nécessairement finie en vertu de l'inégalité

$$\varrho(y_i, y_j) \geqslant \varepsilon.$$

Or on voit sans peine que la suite (6) a une densité ε dans E. c. à d. que tout point x de E est à une distance $\leqslant \varepsilon$ de l'un moins des points de cette suite.

Ceci fait, choisissons de la manière indiquée une suite

$$(7_1) \qquad x_1, x_2, \dots, x_{k_1}$$

qui a une densité 1 dans E, puis une suite

$$(7_2) \qquad x_{k_1+1}, x_{k_1+2}, \dots, x_{k_2}$$

ayant densité $\frac{1}{2}$ dans E. et ainsi de suite . La somme

$$x_1, x_2, \dots, x_{k_1}, \dots, x_{k_n}, \dots$$

de toutes les suites (7_n) sera évidemment dense dans E.

Nous voyons ainsi qu'il suffit de postuler la possibilité de l'une des opérations A. B et C pour définir les espaces effectivement compacts.

Les conditions A [1]) et B sont d'ailleurs à préférer à la condition C, cette dernière étant en partie tautologique: elle affirme, en effet, l'existence d'un ensemble dénombrable dense, tandis que cette existence résulte déjà de la compacticité (§ 6).

Si l'on accepte cependant la condition C, on pourra remplacer *la condition de compacticité* par une autre qui est moins restrictive; c. à d. qu'on peut définir les espaces effectivement compacts comme il suit:

Un espace métrique E est dit effectivement compact si l'on peut y indiquer une suite de points qui soit dense et compacte dans E.

Nous ne supposons donc plus que *l'espace* est compact, mais seulement qu'une certaine suite y est compacte (compacte *dans* E, et non *en soi*: cela veut dire que toute suite partielle de cette suite possède au moins un point-limite qui peut, d'ailleurs, être étranger à la suite primitive).

J'omets ici la démonstration de l'équivalence de cette dernière définition à la précédente; on trouvera cette démonstration dans la deuxième partie du présent mémoire où j'aurai l'occasion d'utiliser la dernière définition.

12. On peut supposer, dans tout ce qui suit, qu'on a affaire à un espace *effectivement* compact. Toutes nos démonstrations (à quelques exceptions près) peuvent alors être rendues effectives. Une telle transformation est, dans la plupart des cas, a peu près évidente, je me dispenserai donc de la faire. Je n'indiquerai le moyen d'obtenir des choix effectifs que dans les cas les plus difficiles (Ch. IV et V de la première partie); je mentionnerai, par contre, explicitement tous les cas où la démonstration est essentiellement non-effective.

Comme nous aurons à nous servir fréquemment des propriétés I — III (§ 6) des espaces compacts, il s'agit donc en premier lieu d'en indiquer des démonstra-

[1]) Je dis „condition A" pour „condition de possibilité de l'opération A".

tions effectives. C'est ce que nous avons fait au § 10 pour la propriété I. Quant à la propriété II (existence d'un sous-ensemble dénombrable dense), il faut examiner séparément les différentes classes d'ensembles auxquels il y a lieu de l'appliquer. Le cas de l'espace entier a déjà été traité au § 11. Le cas d'un ensemble fermé n'en diffère pas essentiellement car tout ensemble fermé (dans un espace compact) est compact en soi et peut donc être envisagé comme formant à lui seul un espace compact; cet espace sera de plus effectivement compact s'il en était ainsi pour l'espace primitif: c'est ce qui résulte immédiatement de la condition A. Puis, la suite (5) dense dans E nous fournit immédiatement une suite dense dans un domaine G quelconque: c'est la suite partielle des points x_n agrégés à G. La même remarque s'applique aux domaines relatifs (par rapport à des ensembles fermés). Or tout ensemble Q apprtenant à la classe des $\mathfrak{F}_\varrho$ est un domaine relativement à l'ensemble fermé $\overline{Q}$ Nous possédons ainsi un procédé bien déterminé qui permet de choisir une suite dense dans tout $\mathfrak{F}_\varrho$; c. à d. que la démonstration de II est effective (indépendante de l'axiome de Zermelo) non seulement pour *un* F_ϱ, mais même pour *toute la classe* des $\mathfrak{F}_\varrho$ [1]).

Ce ne sont, d'ailleurs, que les ensembles de cette dernière classe que nous aurons à envisager dans la plupart des cas. Il est à remarquer, d'autre part, que la démonstration de la propriété II ne peut être rendue effective pour *tous* les ensembles, même lorsqu'il s'agit d'un espace Euclidien.

13. Passons maintenant à la propriété III (théorème de Borel-Lebesgue). On peut, tout d'abord, la démontrer par une méthode qui n'exige qu'*un nombre fini* de choix arbitraires. En d'autres termes, cette démonstration est indépendante de l'axiome de Zermelo lorsqu'il s'agit d'*un* ensemble fermé F et d'*un* système $\mathfrak{S}$ de domaines.

Numérotons à cet effet toutes les sphères $S(x_n, r_i)$ dont les centres font partie de la suite (5) (dense dans E), et dont les rayons sont rationnels; soit

$$S_1, S_2, \dots, S_j, \dots \tag{8}$$

la suite ainsi obtenue (elle ne dépend ni de F ni de $\mathfrak{S}$). A chaque point y de F nous faisons correspondre la première sphère de la suite (8) qui satisfait aux deux conditions suivantes:

1) elle contient le point y, et

2) elle est contenue dans l'un au moins des domaines du système $\mathfrak{S}$.

Envisageons toutes les sphères ainsi obtenues:

$$S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_k}, \dots;$$

on a évidemment (d'après la première condition)

$$F \subset \sum_{k=1}^{\infty} S_{j_k}$$

[1]) Ce qui n'ést pas la même chose Ainsi, la démonstration de II est effective pour *un* ensemble Φ appartenant à la classe $\mathfrak{F}_\sigma$ (cette démonstration n'exige qu'un seul choix arbitraire: celui d'une décomposition de Φ en une suite d'ensembles fermés), tandis qu'elle n'est pas effective pour *toute la classe* $\mathfrak{F}_\sigma$ (*chaque* ensemble de cette classe exigeant un choix arbtraire).

Or il existe un indice $\varkappa$ tel que

(9) $$F \subset \sum_{k=1}^{\varkappa} S_{j_k};$$

l'hypothèse contraire nous permettrait, en effet, de choisir un point $z_\varkappa$ dans chacun des ensembles fermès

$$F - \sum_{k=1}^{\varkappa} S_{j_k},$$

et la suite

$$z_1, z_2, \dots, z_\varkappa, \dots$$

ne pourrait alors (on le voit sans peine) avoir un point-limite agrégé à F, ce qui est impossible, F étant fermé. Soit donc $\varkappa$ le premier indice satisfaisant à la relation (9).

Ceci fait, nous allons effectuer $\varkappa$ choix arbitraires: nous allons notamment choisir $\varkappa$ domaines

(10) $$G_1, G_2, \dots, G_\varkappa$$

appartenant au système $\mathfrak{S}$ et tels que

$$S_{j_k} \subset G_k \qquad (k = 1, 2, \dots, \varkappa);$$

de tels domaines existent d'après la condition 2. Or la suite finie (10) est celle que nous voulions obtenir:

$$F \subset \sum_{k=1}^{\varkappa} G_k.$$

14. Le résultat que nous venons d'obtenir ne suffit pas à nos buts. Il nous faut un procédé n'utilisant *aucun* choix arbitraire; c. à d. une démonstration qui reste effective même si l'on l'applique à toute la classe des ensembles fermés et à toute la classe des systèmes de domaines. Nous obtiendrons une telle démonstration moyennant une condition supplémentaire qui sera d'ailleurs remplie dans la suite. Nous supposerons notamment que l'ensemble fermé F est *effectivement recouvert* par le système de domaines $\mathfrak{S}$, c. à d. que nous connaissons une loi qui fait correspondre à chaque point z de F un domaine déterminé G_z (de $\mathfrak{S}$) contenant ce point. C'est ce qui a lieu, p. ex., lorsque $\mathfrak{S}$ est une suite (on désignera par G_z le premier domaine de cette suite qui contient z).

Nous allons donc indiquer un procédé *général* qui permettra d'extraire de *tout* système $\mathfrak{S} = \{G_z\}$ de domaines recouvrant effectivement un ensemble fermé F *arbitraire*, une suite finie *bien déterminée* (c. à d. ne dépendant que de F et de $\mathfrak{S}$) dont la somme contient encore F.

Nous commençons par la définition d'une certaine suite transfinie

(11) $$z_0, z_1, \dots, z_\alpha, \dots$$

de points de F. z_0 est un point de F choisi d'après A (§ 10). Soit ensuite α un nombre ordinal quelconque ($< \Omega$). Les points d'indices $< \alpha$ étant supposés définis, et $G z_\beta$ désignant le domaine de $\mathfrak{S}$ correspondant au point z_β, examinons l'ensemble fermé

$$F - \sum_{\beta<\alpha} G_{z_\beta}.$$

Si cet ensemble est vide, la suite (11) sera de type α. Dans le cas contraire nous choisirons (à l'aide de l'opération A) un point déterminé z_α de cet ensemble.

La suite (11) ainsi définie aura nécessairement un type $< \Omega$. En effet, chaque domaine G_{z_α} de la suite correspondante

$$G_{z_0},\ G_{z_1}, \ldots,\ G_{z_\alpha}, \ldots$$

contient au moins un point (le point z_α) qui n'appartient à aucun des domaines précédents. Il existe donc une sphère de la suite (8) (§ 13) qui appartient à G_{z_α} mais n'appartient pas à $\sum\limits_{\beta<\alpha} G_{z_\beta}$. Soit $S_{n(\alpha)}$ la première sphère de cette sorte. On voit aisément que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ entraîne $n(\alpha_1) \neq n(\alpha_2)$; il en résulte que la suite (11) est au plus dénombrable. Désignons son type par γ; puis, posons

$$G_{z_\alpha} = G^{n(\alpha)}.$$

Cette dernière convention nous permet d'énumérer la suite (11) d'après la grandeur des entiers $n(\alpha)$. Nous obtenons ainsi une suite simple

$$G^{n_1},\ G^{n_2}, \ldots,\ G^{n_k}, \ldots \qquad (n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$$

de domaines faisant partie de $\mathfrak{S}$. La somme de ces domaines recouvre F; on a en effet,

$$F - \sum_{k=1}^{\infty} G^{n_k} = F - \sum_{\beta<\gamma} G_{z_\beta},$$

et ce dernier ensemble est vide d'après la définition de la suite (11). Ainsi:

$$F \subset \sum_{k=1}^{\infty} G^{n_k}.$$

Or on démontre comme ci-dessus qu'il existe un indice $\varkappa$ tel que

$$F \subset \sum_{k=1}^{\varkappa} G^{n_k};$$

$\varkappa$ étant le plus petit indice de cette sorte,

$$G^{n_1},\ G^{n_2}, \ldots,\ G^{n_\varkappa}$$

sera la suite finie que nous voulions obtenir [1]).

[1]) On pourrait affranchir cette démonstration de l'emploi des nombres transfinis en s'appuyant sur une méthode générale indiquée par M. Kuratowski (*Fund. Math.* III, p. 76). Cela me semble d'ailleurs inutile, car il résulte des dernières recherches de M. Lusin (non publiées encore) qu'on peut construire la théorie des nombres ordinaux de la IIme classe sans faire appel à un nouvel axiome

III. Notations et nomenclature.

15. J'adopte dans ce qui suit des notations qui ne diffèrent pas beaucoup de celles de la thèse de Janiszewski. Quant à la terminologie, je préfère celle de M. Hausdorff[1]) qui est plus systématique et très complète. Je supposerai d'ailleurs que le lecteur connaît les deux ouvrages cités.

Il importe de remarquer que nous pouvons utiliser tous les théorèmes de la thèse de Janiszewski (à l'exception du Th. II du Ch. II, qui ne s'applique qu'aux espaces Euclidiens), on voit, en effet sans peine que les hypothèses que nous avons faites sur l'espace, suffisent pour toutes les démonstrations. Seule la démonstration du Th. I du Ch. II (existence d'un continu irréductible) doit être modifiée[2]).

Quant au livre de M. Hausdorff, nous pourrons y emprunter tous les résultats du Ch. VIII et des §§ 1—9 du Ch. VIII (les deux derniers §§ de ce chapitre ne s'appliquent qu'aux espaces Euclidiens à un nombre quelconque (§ 10) ou à deux (§ 11) dimensions)[3]).

16. J'indique ici pour éviter toute confusion dans la suite, tous les termes et notations que je vais employer; à l'exception, bien entendu, de ceux qui sont nouveaux, et que je n'introduirai que lorsque nous en aurons besoin[4]).

Les points seront toujours désignés par des minuscules romaines (a, b, c, x, ..); les ensembles de points, par des majuscules ro-

[1]) *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig, Veit, 1914. Ce livre sera cité „Hausdorff" tout court.

[2]) On la remplacera p. ex. par celle qu'on trouve dans la II note de la thèse de Janiszewski. Il est d'ailleurs assez facile d'indiquer une démonstration effective, n'utilisant pas les nombres transfinis et applicable à tous les espaces métriques effectivement compacts.

[3]) En effet, les résultats du Ch. VII s'appliquent à tous les espaces topologiques, donc, *à fortiori*, aux espaces métriques; ceux des §§ 1—5 du Ch. VIII, aux espaces satisfaisant au *II Abzählbarkeitsaxiom*, donc, en particulier, aux espaces métriques admettant des ensembles dénombrables denses (v. Hausdorff, p. 262, (4)). Les §§ 6—8 ont affaire aux espaces métriques, et le § 9, aux espaces métriques *complets*, dont les espaces métriques compacts ne sont qu'un cas particulier.

[4]) On trouvera une liste complète des notations à la fin de la première partie de ce mémoire.

maines ou grecques (A, B, C,..., Γ, Π,...). Un ensemble arbitraire sera presque toujours désigné par C; un point arbitraire, par x.

Il est d'ailleurs à remarquer que nous allons considérer *les points* et *les ensembles de points* comme des *êtres géométriques*. donc comme des individus de même nature. Nous ne ferons, par conséquent, aucune distinction entre le point x et l'ensemble dont l'unique élément est le point x: ce qui ne peut prêter, dans notre cas, à aucun malentendu.

L'ensemble vide sera désigné par 0; l'espace entier, par E. Nous écrirons E_n lorsqu'il s'agit d'un espace Euclidien à n dimensions (E_2 désignera donc le plan Euclidien; E_1, une ligne droite).

Nous emploierons encore les lettres romaines et grècques pour désigner les nombres (une confusion avec les points et les ensembles n'étant pas à craindre dans ce cas): ainsi, les entiers positifs seront ordinairement désignés par i, j, k, l, m, n, etc.; ε signifiera un nombre positif arbitrairement petit; de même δ, η, ϑ, etc. Les minuscules grècques (α, β, ξ,...) désignerons aussi parfois des nombres ordinaux; en particulier, ω désignera toujours le premier nombre de la deuxième classe, et Ω, le premier de la troisième classe.

Les puissances seront désignées par des minuscules allemandes ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$,...); $\mathfrak{c}$ est, en particulier, la puissance du continu. Nous désignerons cependant, selon l'usage, par $\aleph_0$ la puissance d'un ensemble dénombrable, et par $\aleph_1$, celle de l'ensemble des nombres de la deuxième classe

Nous emploierons enfin les majuscules allemandes ($\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$,...) pour désigner les classes (logiques) d'ensembles. Ainsi, p. ex., $\mathfrak{F}$ désignera la classe des ensembles fermés (v. ci-dessous).

17. R e l a t i o n s e n t r e l e s e n s e m b l e s. O p é r a t i o n s. Les égalités

$$A = B, \quad C = x$$

signifient que les ensembles A et B coïncident, et que l'ensemble C ne contient que le seul point x.

Nous écrirons

$$A \supset B \text{ ou } B \subset A$$

pour indiquer que l'ensemble A contient l'ensemble B (NB: *ce qui n'exclut pas l'égalité*). Nous dirons aussi dans ce cas que A renferme B; B est contenu dans A, appartient à A, fait partie de A, est un sous-ensemble de A (un *vrai* sous-ensemble lorsque les deux ensembles ne peuvent être égaux).

Nous allons employer le même symbole

$$x \subset C$$

pour indiquer que x est un point de C (x est contenu dans C, appartient à C, etc; nous dirons aussi que x est agrégé à C). L'emploi d'un symbole différent ($x \varepsilon C$) qui est tout-à-fait indispensable en Logique Mathématique[1]. me semble, par contre. inutile en Topologie; surtout si l'on adopte le point de vue mentionné ci-dessus (les points et les ensembles sont des êtres géométriques).

J'emploierai d'ailleurs ce symbole-là (ε) pour dire qu'un ensemble fait partie d'une certaine classe logique (c. à d. *est un* élément de cette classe); ainsi, p. ex.,

$$F \varepsilon \mathfrak{F}$$

veut dire que „F est un ensemble fermé".

Lorsque le point x n'appartient pas à C, nous dirons qu'il n'en fait pas partie, etc.; ou bien encore que x est étranger à C. Ces locutions sont, par contre, à distinguer lorsqu'il s'agit de deux ensembles: „A ne fait pas partie de B", etc. veut dire qu'il existe au moins un point x de A qui est étranger à B; tandis que „A est étranger à B" signifie que ces deux ensembles n'ont aucun point commun. Nous verrons dans un moment le moyen d'exprimer ce dernier fait par une formule.

S o m m e. Soient A et B deux ensembles quelconques (NB: ils peuvent avoir des points communs). Leur somme

$$A + B$$

est, par définition, l'ensemble des points appartenant à l'un au moins des ensembles donnés. On définit de la même façon la somme d'une classe quelconque d'ensembles. Lorsque cette classe est finie, sa somme sera désignée par

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n,$$

ou bien par

$$\sum_{i=1}^{n} C_i;$$

[1]) $x \varepsilon C$ signifie: l'objet x est un élément de la classe C; $A \subset B$ veut dire; tout élément de la classe A est, en même temps, un élément de la classe B.

4*

lorsqu'elle est dénombrable, on emploiera l'un des deux symboles

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n + \ldots$$

ou

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i.$$

S'il s'agit, enfin, d'une classe indénombrable (ou de puissance inconnue), on emploiera le signe Σ et l'on écrira sous ce signe la condition qui définit la classe en question. Ainsi, p. ex., si nous avons une correspondance biunivoque entre tous les points x de C et les ensembles A_x d'une certaine classe $\{A_x\}$, le symbole

$$\sum_{x \subset C} A_x,$$

désignera la somme des ensembles A_x correspondant aux points de l'ensemble C. De même,

$$\sum_{\alpha < \Omega} B_\alpha$$

est la somme de tous les ensembles B_α dont les indices sont des nombres ordinaux de la deuxième classe.

Produit. Le produit (partie commune, intersection) d'une classe d'ensembles est l'ensemble des points appartenant à tous les ensembles de cette classe. Un produit sera désigné par l'un des symboles suivaints:

$$A \times B, \quad \prod_{i=1}^{n} C_i, \quad \prod_{i=1}^{\infty} C_i, \quad \prod_{x \subset C} A_x, \quad \text{etc.}$$

La relation

$$A \times B = 0$$

signifie ainsi que A et B n'ont aucun point commun.

Différence. L'ensemble

$$A - B$$

est, par définition, l'ensemble des points de A qui sont étrangers à B (NB: B n'est pas nécessairement contenu dans A). Dans le cas où B fait partie de A, on dit parfois que $A - B$ est le *complémentaire* de B par rapport à A. L'ensemble

$$E - C$$

est appelé „complémentaire de C" tout court.

Je renvois à la thèse de Janiszewski[1]) pour les relations entre les opérations que nous venons de définir.

17. Notions d'ordre métrique. Le symbole

$$\varrho(x, y)$$

désignera toujours la distance entre les deux points x et y. Nous emploierons un symbole analogue

$$\varrho(x, C)$$

pour désigner la distance entre le point x et l'ensemble C; nous entendons par là la borne inférieure de la distance entre x et un point variable de C:

$$(12) \qquad \varrho(x, C) = \underset{y \subset C}{\text{bor. inf.}}\, \varrho(x, y).$$

On définit de la même facon la distance $\varrho(A, B)$ entre deux ensembles A et B quelconques:

$$(13) \quad \varrho(A, B) = \underset{x \subset A}{\text{bor. inf.}}\, \varrho(x, B) = \underset{y \subset B}{\text{bor. inf}}\, \varrho(A, y) = \underset{\substack{x \subset A \\ y \subset B}}{\text{bor. inf.}}\, \varrho(x, y)\ ^{2)}.$$

La diamètre $\delta(C)$ d'un ensemble C est, par définition, la borne supérieure de la distance entre deux points de cet ensemble[3]):

$$(14) \qquad \delta(C) = \underset{x+y \subset C}{\text{bor. sup.}}\, \varrho(x, y).$$

Notons l'inégalité suivante qui nous sera souvent utile:

$$(15) \qquad \varrho(A, C) \leqslant \varrho(A, B) + \delta(B) + \varrho(B, C);$$

on l'obtient sans peine en rapprochant l'inégalité (1) (§ 6) des définitions (13) et (14).

J'appele *sphère* $S(x, \varepsilon)$ de centre x et de rayon ε l'ensemble des points dont la distance du point x est inférieure à ε (égalité exclue)[4]):

$$(16) \qquad S(x, \varepsilon) = \sum_{\varrho(x, y) < \varepsilon} y.$$

[1]) Ch. I, section II.

[2]) Il est à remarquer que $\varrho(A, B)$ peut s'annuler sans que les ensembles A et B coïncident: c'est ce qui à lieu, p. ex., lorsque $A \times B \neq 0$.

[3]) Le diamètre d'un ensemble contenant plus d'un point ne peut donc être nul.

[4]) Il est à noter que l'égalité $S(x, \varepsilon) = S(y, \vartheta)$ n'entraine aucune des deux égalités $x = y$ ou $\varepsilon = \vartheta$; c. à d. que dans les espaces que nous considérons, une même sphère peut posséder plusieurs centres et plusieurs rayons.

J'emploie un symbole analogue

$$S(C, \varepsilon)$$

pour désigner l'ensemble des points dont la distance de l'ensemble C est inférieure à ε:

$$S(C, \varepsilon) = \sum_{\varrho(C, x) < \varepsilon} x; \tag{17}$$

on a d'ailleurs évidemment

$$S(C, \varepsilon) = \sum_{z \subset C} S(z, \varepsilon). \tag{18}$$

Il est à remarquer qu'on peut toujours permuter les symboles S et Σ, c. à d. qu'on a, p. ex.,

$$\sum_{i=1}^{\infty} S(C_i, \varepsilon) = S\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i, \varepsilon\right);$$

tandis que les symboles S et Π ne sont pas permutables [1]).

19. Notions élémentaires d'ordre topologique. Soit

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{19}$$

une suite de points. Tout point x vérifiant la condition

$$\underline{\lim}_{n=\infty} \varrho(x, a_n) = 0$$

est dit un *point-limite* de la suite (19). Lorsqu'une suite (19) ne possède qu'un seul point-limite x, on aura, en vertu de la compacticité de l'espace,

$$\lim_{n=\infty} \varrho(x, a_n) = 0; \tag{20}$$

nous dirons alors que la suite (19) est convergente et qu'elle converge vers le point x, et nous écrirons

$$\lim_{n=\infty} a_n = x$$

[1]) Soient, p. ex., (dans E_2)

$$A = \{y = 0, |x| < 1\}, \quad B = \{x = 0, |y| < 1\};$$

en ce cas

$$S(A, 1) \times S(B, 1) \neq S(A \times B, 1):$$

le premier ensemble est, en effet, un carré, et le second, un cerle.

ou bien

$$a_n \to x \text{ [1]}.$$

On peut définir d'une manière analogue les points-limites d'un ensemble C: ce sont les points vérifiant la condition

$$\varrho(x, C - x) = 0; \tag{21}$$

on voit, en effet. sans peine que cette définition est équivalente à la définition habituelle [2]).

On appelle ordinairement *ensemble dérivé* C' d'un ensemble C, l'ensemble des points-limites de C; et l'on pose

$$\overline{C} = C + C'.$$

Or l'opération $\overline{C}$ est l'opération topologique fondamentale [3]), tandis que l'opération C' (dérivation) est sans importance pour la Topologie [4]); il me semble donc préférable de définir $\overline{C}$ directement comme il suit:

[1]) C'est la condition (20) qui définit la convergence dans le cas d'un espace métrique non compact: et il est à remarquer qu'une suite possédant un seul point-limite n'est pas nécessairement convergente dans ce dernier cas.

Notons encore qu'on emploie le terme „suite divergente" pour désigner deux notions tout-à-fait différentes:

1) une suite non convergente (**Fréchet**), et

2) une suite ne possédant aucun point-limite (**Hausdorff**).

C'est ce dernier sens que nous adoptons. Il n'existe donc aucune suite divergente dans les espaces que nous considérons dans ce mémoire.

[2]) M. Sierpiński a donné („L'axiome de M. Zermelo .. *Bull. Acad. Cracovie*, 1918) deux noms différents (*point-limite* et *point d'accumulation*) à deux notions qui ne diffèrent qu'au point de vue de l'effectivité C'est avec les points d'accumulation de M. Sierpiński que coïncident nos points-limites la condition (21) exprime, en effet, ce fait qu'il existe dans tout voisinage du point x des points de C distincts de x.

[3]) Toute opération topologique est une combinaison de celle-ci et des opérations formelles du § 17.

[4]) Il en est d'ailleurs de même pour la Théorie des fonctions Ce fait étant très peu connu, je m'y arrête pour un moment. Désignons par $C[']$ l'ensemble des points non isolés de l'ensemble C (on a donc $C['] = C \times C'$); l opération C' est alors une simple superposition des opérations $\overline{C}$ et $C[']$:

$$C' = (\overline{C})['];$$

et ce n'est, en réalité, que les deux dernières opérations qu'on emploie, tandis que

$\overline{C}$ est l'ensemble des points vérifiant la condition

$$\varrho(x, C) = 0, \tag{22}$$

c. à d. que

$$\overline{C} = \sum_{\varrho(x, C)=0} x, \tag{23}$$

ou bien

$$\overline{C} = \prod_{n=1}^{\infty} S\left(C, \frac{1}{n}\right) = \prod_{\varepsilon>0} S(C, \varepsilon). \tag{24}$$

On trouvera dans la thèse de Janiszewski [1]) les relations qui subsistent entre l'opération $\overline{C}$ et les opérations que nous avons définies au § 17.

Classes spéciales d'ensembles. Un ensemble F vérifiant la condition

$$\overline{F} = F$$

est dit un ensemble *fermé* [2]). L'ensemble vide, les ensembles composés d'un nombre fini de points, l'espace E sont des ensembles fermés Nous désignerons la classe des ensembles fermés par $\mathfrak{F}$; cette classe coïncide dans notre cas avec celle des ensembles compacts en soi La coïncidance n'a plus lieu dans un espace non compact; et c'est la classe des ensembles compacts en soi que nous désignérons par $\mathfrak{F}$ dans ce dernier cas. Dans un espace Euclidien la classe $\mathfrak{F}$ est donc celle des ensembles fermés et bornés; les ensembles fermés non bornés n'en font plus partie (ils appartiennent à une classe plus vaste, p. ex. à celle des $\mathfrak{F}_\sigma$ que nous allons définir dans un moment).

Un ensemble G dont le complémentaire $E - G$ est fermé, est

---

leur combinaison C' n'est employée que par habitude, et toujours à tort En effet, l'emploi de $C(')$ au lieu de C' permet d'obtenir des résultats plus précis (et souvent définitifs): c'est ainsi qu'on peut remplacer les ensembles réductibles par les ensembles clairsemés dans une foule d'énoncés bien connus (la relation entre $C(')$ et les ensembles clairsemés étant la même qu'entre C' et les ensembles réductibles) Citons comme exemple le théorème de Cantor sur l'unicité des séries trigonométriques.

[1]) Ch. I, section III.

[2]) La notion d'un ensemble *parfait* est sans importance pour la Topologie.

appelé un *domaine*[1]). La classe des domaines sera désignée par $\mathfrak{G}$ L'espace E et l'ensemble vide appartiennent donc à la classe $\mathfrak{G}$[2]).

Soit $\mathfrak{A}$ une classe d'ensembles quelconque. Nous désignerons par $\mathfrak{A}_\sigma$, $\mathfrak{A}_\delta$ et $\mathfrak{A}_\varrho$ les classes d'ensembles qui sont respectivement

1) des sommes (finies ou dénombrables) d'ensembles de la classe $\mathfrak{A}$,

2) des produits (finis ou dénombrables) d'ensembles de la classe $\mathfrak{A}$,

3) des différences de deux ensembles de la classe $\mathfrak{A}$.

Chacune de ces trois classes contient la classe $\mathfrak{A}$.

Nous aurons affaire dans ce mémoire aux classes $\mathfrak{F}_\sigma$, $\mathfrak{G}_\delta$. $\mathfrak{F}_\varrho$, $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$. $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$, $\mathfrak{G}_{\delta\sigma}$. On remarquera d'ailleurs que la classe $\mathfrak{F}_\delta$ coïncide avec $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{G}_\sigma$ avec $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}_\varrho$ avec $\mathfrak{F}_\varrho$; puis que la classe $\mathfrak{F}_\sigma$ contient les classes $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{F}_\varrho$, $\mathfrak{G}_\delta$ contient les classes $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_\varrho$, etc[3])

Points intérieurs et extérieurs Frontière. Nous dirons qu'un point x est un point intérieur de l'ensemble C s'il existe un domaine G tel qu'on ait

$$x \subset G \subset C;$$

ou bien, ce qui revient au même, si x est étranger à l'ensemble $\overline{E-C}$.

Un point y qui est intérieur à l'ensemble complémentaire $E-C$ (c. à d. que y ne fait pas partie de $\overline{C}$), est dit un point extérieur à l'ensemble C[4]).

Un point z qui n'est ni intérieur ni extérieur à C (il est donc agrégé à chacun des deux ensembles $\overline{C}$ et $\overline{E-C}$), est dit un *point-frontière* de C. L'ensemble des points-frontières d'un en-

[1]) On appelle souvent ces ensembles là *ensembles ouverts* en réservant le terme „domaine" pour les domaines *connexes* (v. le § suivant). Je mentionnerai, par contre, explicitement tous le cas où les domaines seront supposés connexes.

[2]) Un ensemble fini est un domaine dans le cas, et dans le cas seulement où tous ses points sont des points isolés de l'espace.

Il est à remarquer que le complémentaire d'un domaine Euclidien est toujours fermé, mais n'appartient pas toujours à la classe $\mathfrak{F}$.

[3]) Voir Hausdorff p. 216, I; p. 225, I; p. 306. On déduit immédiatement toutes les relations citées de celles qu'on y trouve.

[4]) Nous emploierons les termes *intérieur* et *extérieur* dans un sens différent lorsqu'il s'agit d'un polygone Π_2 (dans E_2) ou d'un polyèdre Π_3 (dans E_3). Π_n ($n = 2$ ou 3) décompose E_n en deux domaines connexes: le domaine intérieur G et le domaine extérieur H. Nous dirons que x est intérieur à Π_n s'il appartient à G, et qu'il est intérieur à Π_n si $x \subset H$. „Intérieur à Π_n" voudra donc dire, en réalité, „intérieur à G_n". Il est à remarquer qu'il n'existe aucun point qui soit intérieur à Π_n dans le sens général de ce terme

semble C est appelé *la frontière* de C; nous la désignerons par $Fr(C)$. On a

(25) $$Fr(C) = \overline{C} \times \overline{E - C};$$

c'est donc toujours un ensemble fermé. Les seuls ensembles qui n'ont aucun point commun avec leurs frontières sont les domaines.

S'il n'existe aucun point extérieur à un ensemble C (c. à d. si l'on a $\overline{C} = E$), cet ensemble est appellé *dense*[1]) (nous dirons souvent „dense dans E" pour éviter toute confusion possible).

Si l'ensemble C ne possède aucun point intérieur (c. à d. si son complémentaire est dense), nous dirons que c'est un *ensemble-frontière*. Un ensemble-frontière peut être dense; $\overline{C}$ n'est pas alors un ensemble frontière.

Dans le cas où $\overline{C}$ est, lui aussi, un ensemble-frontière, l'ensemble C sera dit *non dense*[2]) (nous dirons aussi „non dense dans E").

Notions relatives[3]). Soit A un ensemble quelconque; B, un sous-ensemble de A. B sera dit un ensemble *fermé relativement à* A si l'on a

(26) $$\overline{B} \times A = B;$$

nous écrirons alors que

(27) $$B \,\varepsilon\, \mathfrak{F} \text{ (rel. } A).$$

Un ensemble H contenu dans A dont le complémentaire (par rapport à A) est fermé relativement à A sera appelé un *domaine relatif* (par rapport à A); en signes:

(28) $$H \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \text{ (rel. } A)$$

Une somme (finie ou dénombrable) d'ensembles fermés relativement à A sera, par définition un $\mathfrak{F}_\sigma$ (rel. A). On définit de la même façon les classes $\mathfrak{G}_\delta$ (rel. A), $\mathfrak{F}_\varrho$ (rel. A), etc.

Soit B un sous-ensemble de A et x, un point de A. x sera dit un point *relativement intérieur* à B (par rapport à A) s'il existe un ensemble H vérifiant la relation (28) et tel qu'on ait

$$x \subset H \subset B.$$

[1]) On emploie souvent le terme „partout dense".

[2]) On trouve souvent le terme „nulle part dense" (*Nirgendsdicht* chez M. Hausdorff). Il est à remarquer que „non dense" n'est pas une simple négation de „dense".

[3]) Hausdorff, Ch. VII, § 6 (*Relativbegriffe*).

La définition des points *relativement extérieurs* et *relativement frontières* est évidente. L'ensemble des points relativement frontières de B (par rapport à A) est *la frontière relative* de B (par rapport à A).

S'il n'existe aucun point relativement extérieur à B (par rapport à A), B est dit *dense sur* A (ou dans A). Les notions d'un ensemble dense sur A et d'un ensemble non dense sur A sont d'ailleurs d'une importance extrême; je préfère donc de les définir directement comme il suit:

Un sous-ensemble B de A est dit *dense sur* A lorsqu'on a

$$\overline{B} \supset A$$

Un ensemble C quelconque sera dit dense sur A si l'ensemble $C \times A$ (qui est un sous-ensemble de A) est dense dans A, c. à d. si l'on a

$$\overline{C \times A} \supset A \text{ [1]).}$$

M sera appelé un ensemble *non dense sur* A, (ou dans A) s'il n'existe aucun domaine relatif (par rapport à A) sur lequel l'ensemble M soit dense [2]). La condition

$$(29) \qquad \overline{A - \overline{M}} \supset A$$

est nécessaire et suffisante pour que le sous-ensemble M de A soit non dense dans A [3]).

[1]) Cette notion est à distinguer de celle de „dense *par rapport* à A" de M. Hausdorff (p. 249) qui est caractérisée par la relation $\overline{C} \supset A$. Les deux notions coïncident donc dans le cas où $C \subset A$.

[2]) Cette définition ne suppose pas que $M \subset A$. Ce n'est d'ailleurs que ce dernier cas que nous rencontrerons dans la suite.

[3]) Démonstration. 1) Nécessité. Supposons que la condition (29) n'est pas remplie. En ce cas l'ensemble

$$H = A - \overline{A - \overline{M}}$$

est un $\mathfrak{G}$ (rel. A) non vide. Il vient

$$H \times (A - \overline{M}) \subset H \times \overline{A - \overline{M}} = 0,$$

$$H \subset \overline{M} = \overline{M} \times H + \overline{M} - H \subset \overline{M \times H} + \overline{A - H};$$

or $A - H$ est un $\mathfrak{F}$ (rel. A), donc

$$H \times \overline{A - H} = H \times A \times \overline{A - H} = H \times (A - H) = 0.$$

20. Cennexité. Nous posons

$$H(A, B) = A \times \overline{B} + \overline{A} \times B \text{ [1]}; \tag{30}$$

la relation

$$H(A, B) = 0 \tag{31}$$

sera appelée *„la relation de Hausdorff“* ou „la condition de Hausdorff“.

Un ensemble C est dit *connexe* lorsqu'il ne peut être décomposé en une somme de deux ensembles non vides satisfaisant à cette conditon. Un point est connexe; il en est de même de l'ensemble vide.

Nous appellerons *continu* tout ensemble connexe contenant plus d'un point qui est compact en soi (appartient à la classe $\mathfrak{F}$) [2]. $\mathfrak{C}$ désignera la classe des continus; un continu arbitraire sera ordinairement désigné par K.

Un ensemble S est appelé *semicontinu* si tout couple x, y de ses points appartient à un continu $K_{x,y}$ situé sur S:

$$x + y \subset K_{x,y} \subset S.$$

Nous dirons d'ailleurs qu'un point est aussi un semi-continu [3]. Un semicontinu est toujours connexe [4].

Il en résulte que

$$H \subset \overline{M \times H},$$

c. à d. que M est dense sur H.

2) Sufisance. Supposons que M est dense sur un domaine relatif H; on a alors

$$H \subset \overline{M \times H} \subset \overline{M},$$

$$\overline{A - \overline{M}} \subset \overline{A - H}.$$

Or $A - H$ étant un $\mathfrak{F}$ (rel A), il vient

$$A \times \overline{A - \overline{M}} \subset A \times \overline{A - H} = A - H,$$

ce qui est incompatible avec la condition (29)

On remarquera qu'un ensemble M qui est non dense sur A, ne peut contenir aucun point *isolé* de A.

[1]) Il est à remarquer que les relations $A \subset A_1$ et $B \subset B_1$ entraînent la relation $K(A, B) \subset K(A_1, B_1)$.

[2]) Un ensemble Euclidien connexe qui est fermé mais non borné, n'est donc pas un continu d'après cette définition; ce n'est même pas toujours un semi-continu (v. ci-dessus).

[3]) Cette convention est nécessaire pour la définition des *constituants* (v. ci-dessous).

[4]) Hausdorff, p. 244, I.

Soit C un ensemble quelconque; x, l'un de ses points. Le plus grand ensemble *connexe* L vérifiant la condition

$$x \subset L \subset C \tag{32}$$

sera appelé „*le composant* de C relatif au point x", ou bien encore (dans le cas ou la mention de C est superflue), „le composant du point x"; nous le désignerons par $\mathrm{Comp}_x(C)$ [1].

Le plus grand *semicontinu* L vérifiant cette même condition (32) sera appelé *constituant* et désigné par $\mathrm{Const}_x(C)$. On a toujours

$$\mathrm{Const}_x(C) \subset \mathrm{Comp}_x(C); \tag{33}$$

on remarquera d'ailleurs que

$$\mathrm{Const}_x(G) = \mathrm{Comp}_x(G) \tag{34}$$

dans le cas où G est un domaine Euclidien [2].

Soient F et B deux ensembles fermés dont le second fait partie du premier; soient ensuite x et y deux points de $F-B$. Nous dirons que B ***découpe*** F (ou bien „est une coupure de F") entre x et y si l'on a

$$\mathrm{Const}_x(F-B) \neq \mathrm{Const}_y(F-B);$$

c. à d. s'il n'existe aucun continu K tel qu'on ait

$$x+y \subset K \subset F-B\ [3].$$

Il est à noter que x et y peuvent appartenir à un même *composant* de $F-B$ (B étant une coupure de F entre x et y); ce dernier fait ne saurait, cependant, avoir lieu dans le cas où F se réduit à un espace Euclidien E_n [4].

[1]) Pour l'existence des composants et pour leurs propriétés voir Hausdorff, Ch. VII, § 7.

[2]) Hausdorff, p. 330, II; p. 332, VII.

[3]) La seconde définition peut être étendue au cas où l'on remplace x et y par deux *ensembles* A et D sans points communs faisant partie de $F-B$; la condition $x+y \subset K$ est alors à remplacer par $A \times K \neq 0$, $D \times K \neq 0$.

[4]) Les deux propositions suivantes sont donc equivalentes „B découpe E_n entre x et y", et „x et y appartiennent à différents composants de $E_n - B$".

$E_n - B$ étant un domaine Euclidien, ce fait est une conséquence immédiate de l'égalité (34).

Un *continu irréductible* entre les points a et b[1]) sera désigné par $\overline{\overline{ab}}$; a et b seront appelés *points finals* de $\overline{\overline{ab}}$. Un continu irréductible peut posséder plus d'un couple de points finals.

Dans le cas particulier où $\overline{\overline{ab}}$ se réduit à un *arc simple*[2]), nous le désignerons par $\overline{ab}$. a est *le premier*, b *le dernier* point de $\overline{ab}$; nous écrirons

$$x \prec y$$

pour indiquer que x *précède* y.

Une *ligne simple fermée*[3]) sera souvent désignée par le symbole analogue $\overline{abca}$.

Les ensembles

$$\overline{ab} - (a+b) \text{ et } \overline{abca} - a$$

seront appelés *arcs ouverts* et désignés respectivement par $\widehat{ab}$ et $\widehat{abca}$.

Un arc simple *linéaire* (c. à d. situé sur une droite $\varDelta$) sera appelé *segment*; un arc ouvert linéaire, *intervalle*[4]). Nous désignerons les segments et les intervalles par les mêmes symboles ($\overline{ab}$ et $\widehat{ab}$) que les arcs arbitraires; nous emploierons d'ailleurs, des symboles différents ($[u, v]$ et (u, v)) dans le cas où un segment ou un intervalle est défini par les *coordonnées* de ses extrémités:

$$[u, v] = \{u \leqslant x \leqslant v\},$$
$$(u, v) = \{u < x < v\}.$$

Nous posons, de même,

$$[u, v) = \{u \leqslant x < v\},$$
$$(u, v] = \{u < x \leqslant v\},$$

21. Homéomorphie. Je renvois au livre de M. Hausdorff pour les différentes définitions d'une correspondance biunivoque et *bicontinue* entre deux ensembles C et C_1[5]). On choisira p. ex. la suivante:

[1]) Janiszewski, thèse, p. 20.

[2]) Ibid., p. 51.

[3]) Ibid., p. 59.

[4]) Cette terminologie due à M. Denjoy me semble préférable à celle (»intervalle fermé« et »intervalle ouvert«) qu'on emploie le plus souvent.

[5]) p. 359, *Définition*; p. 360, I et II; p. 361, III. M. Hausdorff y défini d'ailleurs les correspondances univoques et continues *dans un sens*; on doit donc ajouter les conditions inverses à celles qu'il donne.

Il est à remarquer que toutes les définitions de M. Hausdorff sont *effectivement* équivalentes entre elles

Une correspondance biunivoque entre C et C_1 est dite bicontinue lorsqu'elle transforme tout ensemble fermé relativement à l'un des deux ensembles donnés, en un ensemble fermé rélativement à l'autre.

Nous appellerons aussi une telle correspondance „*correspondance topologique*" ou „transformation topologique".

S'il existe entre C et C_1 une correspondance topologique, ces ensembles sont dits *homéomorphes* ou *topologiquement équivalents*. Nous écrirons alors que

$$C \sim C_1 \tag{35}$$

Nous emploierons d'ailleurs ce même symbole (35) pour indiquer *une* correspondance topologique déterminée entre C et C_1. Nous écrirons dans ce dernier cas que

$$B \sim B_1 \text{ et } x \sim x_1$$

pour indiquer que les sous-ensembles B et B_1 de C et C_1 se correspondent dans cette correspondance (35); de même les points x et x_1 de C et C_1 [1]).

Une classe d'ensembles est appelée *topologiquement invariante* si tout ensemble homéomorphe à un ensemble de cette classe, appartient lui-même à cette classe.

Citons comme exemples les classes $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{E}$ [2]).

Nous dirons aussi que *la propriété* qui définit une telle classe est un *invariant topologique*: „la connexité est un invariant topologique"; ou bien encore, par extension, qu'un ensemble possédant cette propriété est un invariant topologique: „un continu irréductible est un invariant topologique".

Supposons maintenant que $\mathfrak{A}$ est une propriété d'un sous ensemble B par rapport à l'ensemble C qui le contient; puis, que toute transformation topologique

$$C \sim C_1$$

[1]) Nous dirons aussi que B_1 et x_1 sont *les transformés* de B et x dans la transformation (35).

[2]) Il en est de même de la classe des semicontinus. Par contre, la classe des ensembles Euclidiens fermés et la classe des ensembles Euclidiens fermés et connexes (qu'on appelle souvent „continus"), ne sont pas invariantes. La classe $\mathfrak{E}$ n'est pas nécessairement invariante dans les espaces que nous considérons (elle l'est dans un espace Euclidien: v. Brouwer. Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets. Math. Ann. 71 (1912), p. 305).

transforme B en un ensemble B_1 possédant la même propriété par rapport au transformé C_1 de C. Nous dirons alors que la propriété $\mathfrak{A}$ est un *covariant topologique*; ou bien (par extension), qu'un sous-ensemble B possédant cette propriété est un covariant topologique [1]). Ainsi, la densité est topologiquement covariante; un composant est un covariant topologique [2]).

22. La première partie de mon mémoire que je présente ajourd'hui à l'indulgence du public mathématique, est consacrée à la théorie de la dimension des ensembles On trouvera dans la seconde partie une théorie complète des lignes Cantoriennes avec de nombreuses applications à diverses questions.

La première partie est divisée en six chapitres. Le premier contient les définitions fondamentales. Le deuxième, une première étude des nouvelles notions que j'introduis. Les résultats de ce chapitre ne sont (à une exception près) que des cas particuliers de ceux du Ch. V; mais ils sont indispensables pour la compréhension des définitions que je donne à la fin du Ch II.

Le Ch. III est consacré à la construction de quelques exemples et à l'étude de certaines questions connexes; il peut être omis dans une première lecture. Les chapitres IV et V contiennent les principaux résultats de mes recherches; on trouvera enfin dans le Ch. VI la résolution de certaines questions d'importance secondaire.

J'ai rejeté dans le petit texte tous les compléments, exemples etc. qu'on peut omettre sans inconvénient. Les différents morceaux connexes de petit texte sont indépendantes les uns des autres et peuvent être lus séparément.

Je donne toujours des démonstrations détaillées dans le grand texte; dans le petit, je n'en donne souvent que des esquisses, et je les omets parfois tout-à-fait.

En terminant, je me sens obligé de remercier mon ami Paul Alexandroff qui a toujours suivi mes recherches avec le plus grand intérêt et qui m'a beaucoup aidé dans le long et pénible travail de la rédaction du présent mémoire.

Moscou, le 20 mars 1923.

[1]) On dit souvent que la propriété A est un *invariant* tepologique, ce qui me semble incorrect.

[2]) Hausdorff, p. 364. Voici d'autres covariants: un ensemble relativement fermé; un domaine relatif; un constituant; un ensemble non dense, etc.

Première partie.

La dimension.

Ch. I. Définitions fondamentales.

Conséquences immédiates. Les ensembles de dimension 0.

1. Soit C un ensemble quelconque, x un point de C. Nous dirons que *la décomposition de* C

$$C = A + B + D$$

en trois ensembles sans points communs deux à deux est une ε*-séparation du point* x, *si les trois conditions suivantes sont vérifiées:*

1) $A \supset x$,
2) $H(A, D) = 0$ [1]),
3) $A + B \subset S(x, \varepsilon)$.

Nous dirons aussi que *l'ensemble* B (agrégé à C) ε*-sépare le point* x *de* C.

Il est d'ailleurs à remarquer que l'ensemble ε-séparant B ne détermine pas univoquement l'ε-séparation $C = A + B + D$ correspondante. En effet, si A, p. ex., n'est pas connexe,

$$A = A_1 + A_2, \quad H(A_1, A_2) = 0,$$

la décomposition

$$C = A_1 + B + (A_2 + D)$$

(A_1 étant celui de deux ensembles A_1 et A_2 qui contient x) est aussi une ε-séparation déterminée par B.

2. Déf. 1_0. *Si le point* x *de* C *peut être, quel que soit* ε, ε*-séparé par l'ensemble vide, ce point sera dit de dimension 0 (par rapport à* C*):*

$$\dim_x C = 0.$$

Déf. 2_0. *Si tous les points de* C *sont de dimension 0 par rapport à* C, C *aura lui-même la dimension 0:*

$$\dim C = 0 \text{ [2])}.$$

Les dimensions supérieures seront définies par induction. Supposons, en effet, que les points et les ensembles de dimension $< n$ soient déjà définis. En ce cas nous dirons que

[1]) V. l'introduction, § 20.

[2]) Les ensembles de dimension 0 ont été introduits implicitement par M. Sierpiński. Voir la fin de ce chapitre.

Déf. 1_n. *Un point x de C qui n'est pas de dimension $< n$ (par rapport à C) mais peut être, quel que soit ε, ε-séparé par un ensemble B de dimension $< n$, ce point est de dimension n:*

$$\dim_x C = n.$$

Déf. 2_n. *Un ensemble C ne contenant que des points de dimension $\leqslant n$ sera dit de dimension n*

$$\dim C = n$$

s'il contient au moins un point x tel que $\dim_x C = n$.

On définit ainsi, de proche en proche, la dimension pour tout n naturel. Il peut d'ailleurs arriver qu'un point x (ou un ensemble C) ne reçoive de cette manière aucune dimension; nous dirons alors *ce point* (ou cet ensemble) *est de dimension infinie:*

$$\dim_x C = \infty, \text{ ou } \dim C = \infty.$$

On s'aperçoit d'ailleurs immédiatement qu'on peut avoir $\dim C = \infty$ sans qu'il existe un point x de C de dimension infinie. Il suffit, en effet, que la dimension des points de C soit finie, mais non bornée [1]).

Remarque. On pourrait introduire au lieu d'une dimension infinie des dimensions transfinies (pour tous les nombres de la deuxième classe, et même, peut-être, au delà), car la dimension est (d'après sa définition) un nombre ordinal. Cette extension me semble d'ailleurs, au moins pour le moment, privée d'intérêt, d'autant plus qu'il resterait, à ce qu'il semble, même dans ce cas des ensembles ne rentrant pas dans la classification (les domaines de l'espace Hilbertien).

3. La dimension étant définie par induction, il est certain *à priori* que tout théorème général concernant la dimension ne peut être démontré que par induction. Pour faciliter ces démonstrations nous introduirons la définition suivante:

Déf. *L'ensemble vide sera dit de dimension* -1. En ce cas les définitions 1_0 et 2_0 ne seront que des cas particuliers des définitions 1_n et 2_n.

L'utilité de cette définition consiste en ce qu'elle permet de réduire à quelques mots l'étude du cas initial: en effet, les propositions vraies pour l'ensemble vide sont toujours bien évidentes

[1]) Voir l'exemple du ch. V.

Il ne reste donc que le passage de n à $n+1$.

Je souligne d'ailleurs que les raisons indiquées sont les seules qui m'ont conduit à donner cette définition, et que je ne lui attribue aucun sens intrinsèque.

4. Voici quelques propriétés immédiates de la dimension.

Théorème I. *Si* $x \subset C_1 \subset C$, *on aura*

$$\dim_x C_1 \leqslant \dim_x C,$$

$$\dim C_1 \leqslant \dim C \text{ [1]}.$$

Le cas $n = -1$ étant évident, supposons que les deux relations soient exactes pour toutes les dimensions $< n$. Il suffit de démontrer alors la première pour $\dim_x C = n$, car la seconde en résulte immédiatement [2].

Soit donc $\dim_x C = n$, ε un nombre positif donné. Il existe par définition une ε-séparation du point x

$$C = A + B + D$$

telle que $\dim B < n$.

Posons

$$A_1 = C_1 \times A,\ B_1 = C_1 \times B,\ D_1 = C_1 \times D;$$

la décomposition $C_1 = A_1 + B_1 + D_1$ sera alors une ε-séparation du point x; en effet, A_1, B_1, D_1 sont deux à deux sans points communs

$$A_1 = C_1 \times A \supset x,$$

$$H(A_1, D_1) \subset H(A, D) = 0,$$

$$A_1 + B_1 \subset A + B \subset S(x, \varepsilon).$$

Or notre théorème étant supposé exact pour les dimensions $\vee n$, la relation $B_1 \subset B$ entraîne l'inégalité $\dim B_1 \leqslant \dim B < n$. Donc, ε étant arbitraire, on aura par définition

$$\dim_x C_1 \leqslant n \qquad \text{c. q. f. d.}$$

[1]) Ce théorème, de même que ceux qui le suivent, sont valables pour toutes les dimensions, la dimension infinie y comprise; la démonstration de ce fait ne présente aucune difficulté. Nous excluons néanmoins dès maintenant la dimension infinie car les dimensions finies sont les seules qui seront étudiées dans ce mémoire. Voir, d'ailleurs, la fin du ch. V.

[2]) Parceque la dimension d'un ensemble est le maximum de la dimension de ses points.

5. Théorème II. *La dimension est un invariant topologique.*

L'ensemble vide n'étant homéomorphe qu'à lui-même, le théorème est donc vrai dans le cas initial. Supposons le vrai pour tous les points et tous les ensembles de dimensions $< n$, et soit

$$\dim_x C = n,$$
$$C \sim C_1, \quad x \sim x_1.$$

Il suffit de démontrer (comme dans le cas précédent) que $\dim_{x_1} C_1 = n$.

Soit ε_1 un nombre positif donné, ε tel que le sous-ensemble L_1 de C_1 correspondant à

$$L = C \times S(x, \varepsilon)$$

verifie l'inclusion

$$L_1 \subset S(x_1, \varepsilon_1);$$

soit, de plus, $C = A + B + D$ une ε-séparation du point x dans laquelle $\dim B < n$.

Posons

$$A \sim A_1, \quad B \sim B_1, \quad D \sim D_1.$$

En ce cas

$$A_1 + B_1 \subset L_1 \subset S(x_1, \varepsilon_1);$$

donc, la condition de Hausdorff étant un invariant topologique, la décomposition $C_1 = A_1 + B_1 + D_1$ est une ε_1-séparation de x_1. Or, d'après notre supposition $\dim B_1 = \dim B < n$; donc

$$\dim_{x_1} C \leqslant n.$$

Mais l'inégalité ne peut avoir lieu; il en résulterait, en effet, que $\dim_x C < n$. Nous avons donc

$$\dim_{x_1} C_1 = n \qquad \text{c. q. f. d.}$$

6. Nous dirons que deux ensembles C et C_1 sont *localement identiques* autour de leur point commun x, s'il existe un tel voisinage de ce point où ces deux ensembles se confondent; c. à. d. s'il existe un ε_0 tel que

$$C \times S(x, \varepsilon_0) = C_1 \times S(x, \varepsilon_0).$$

Théorème III. *Si les ensembles C et C_1 sont localement identiques autour du point x, ce point aura même dimension par rapport à chacun d'eux:*

$$\dim_x C = \dim_x C_1.$$

Il suffit pour démontrer ce théorème de remarquer que tout ensemble B ε-séparant ($\varepsilon < \varepsilon_0$) le point x par rapport à C le sera aussi par rapport à C_1, et inversement.

On peut exprimer ce théorème en disant que la dimension des points est une *propriété locale* des ensembles.

7. On serait tenté à croire d'après la définition 1_n que la détermination de la dimension d'un point x exige l'examen de *tous* les ensembles ε-séparant ce point; examen qui, bien sûr, présenterait des difficultés presque inattaquables. Il n'en est rien, comme le prouve le

Théorème IV. *La dimension n'est pas alterée si l'on restreint la classe des ensembles ε-séparant aux ensembles fermés relativement à C*, c. à d. si l'on remplace la définition 1_n par la suivante:

Déf. $1'_n$. Un point x de C qui n'est pas de dimension $< n$ (par rapport à C) mais peut être, quel que soit ε, ε-séparé par un ensemble B *fermé relativement à* C de dimension $< n$, ce point est de dimension n.

La démonstration est basée sur le lemme suivant:

8. Lemme. *Tout ensemble B ε-séparant le point x de C contient un autre ensemble B_1 ε-séparant ce même point et qui est, de plus fermé relativement à C.*

Soit, en effet, $C = A + B + D$ une des ε-séparations correspondantes; les trois conditions du § 1 sont donc vérifiées. Examinons un point arbitraire y de A. La distance $\varrho(y, D)$ doit être positive car, dans le cas contraire,

$$H(A, D) \supset A \times \overline{D} \supset y$$

ne pourrait être vide. De même le nombre

$$\varepsilon - \varrho(x, y)$$

doit être > 0; c'est une conséquence immédiate de l'inclusion

$$y \subset A + B \subset S(x, \varepsilon).$$

Soit $\delta(y)$ le plus petit de deux nombres $\frac{1}{2}\varrho(y, D)$ et $\varepsilon - \varrho(x, y)$; $\delta(y) > 0$.

Posons

$$A_1 = D \times \sum_{y \subset A} S(y, \delta(y));$$

$$B_1 = C \times \overline{A_1} - A_1;$$

$$D_1 = C - \overline{A_1}.$$

Il est aisé à voir que

$$C = A_1 + B_1 + D_1$$

est une décomposition en trois ensembles sans points communs deux à deux; il suffit donc de démontrer que c'est une ε-séparation du point x, et que, en outre,

α) $B_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{F}$ (rel. C),

β) $B_1 \subset B$.

A_1 est, d'après sa construction, un domaine relatif; de même $C \times \bar{A}_1$ est un ensemble relativement fermé. Il en résulte que

$$B_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{F} \text{ (rel. } C).$$

Pour prouver que $B_1 \subset B$ remarquons que

$$B_1 \subset C = A + B + D;$$

or, A_1 contenant A, B_1 ne peut avoir aucun point commun avec A. Reste donc à montrer que

$$B_1 \times D = 0.$$

Supposons, par contre, que $B_1 \times D \supset z$ et soit h un nombre positif arbitraire.

$$z \subset B_1 \subset \bar{A}_1;$$

il existe donc un point t de A_1 tel que

$$\varrho(t, z) < h.$$

Ce point doit appartenir à une sphère

$$S(y, \delta(y)),$$

y étant un certain point de A. Donc

$$\varrho(t, y) < \delta(y) \leqslant \frac{1}{2}\varrho(y, D).$$

z appartient à D; il en résulte que

$$\varrho(y, D) \leqslant \varrho(y, z) \leqslant \varrho(t, y) + \varrho(t, z).$$

Nous obtenons en rapprochant les deux dernières inégalités

$$\varrho(t, y) < \frac{1}{2}\varrho(t, y) + \frac{1}{2}\varrho(t, z),$$

$$\varrho(t, y) < \varrho(t, z) < h;$$

donc

$$\varrho(z, y) \leqslant \varrho(t, y) + \varrho(t, z) < 2h.$$

y est un point de A; nous voyons que la distance $\varrho(z, A)$ est arbitrairement petite, c. à d. que

$$z \subset \bar{A}.$$

Or cette inclusion entraine la relation

$$H(A, D) \supset \bar{A} \times D \supset z,$$

ce qui est impossible. Nous avons donc $B_1 \times D = 0$,

$$B_1 \subset B.$$

Montrons, enfin, que les trois conditions du § 1 sont satisfaites pour les ensembles A_1, B_1, D_1. On le voit immédiatement pour les deux premières; en effet,

1) $A_1 \supset A \supset x$,

2) A_1 et D_1 sont des domaines relatifs sans points communs; il vérifient donc la condition de Hausdorff.

Quant à la troisième, elle peut être décomposée en deux autres, à savoir

a) $B_1 \subset S(x, \varepsilon)$, qui découle de l'inclusion $B_1 \subset B \subset S(x, \varepsilon)$,

et b) $A_1 \subset S(x, \varepsilon)$ qui peut être démontrée comme il suit:

Soit t un point quelconque de A_1;

$$t \subset S(y, \delta(y)).$$

Nous voyons que

$$\varrho(t, y) < \delta(y) \leqslant \varepsilon - \varrho(x, y),$$
$$\varrho(t, x) \leqslant \varrho(t, y) + \varrho(x, y) < \varepsilon,$$

quel que soit le point t de A_1; donc

$$A_1 \subset S(x, \varepsilon),$$

et notre lemme est complètement démontré.

9. Revenons à la démonstration du théorème IV. Désignons pour le moment par $\overline{\dim}$ la dimension définie d'après 1_n. La diminution de la classe des ensembles ε-séparant admissibles ne peut, bien entendu, qu'augmenter la dimension; il s'agit donc de démontrer que

$$\overline{\dim} \leqslant \dim.$$

Cette relation est certainement vraie quand $\dim = -1$; supposons qu'il en soit de même quand $\dim < n$, et soit

$$\dim_x C = n.$$

x peut être, quel que soit ε, ε-séparé par un ensemble B de dimension $< n$; donc aussi par un ensemble B_1 contenu dans B et relativement fermé. Or $B_1 \subset B$ entraine (ch. I)

$$\dim B_1 \leqslant \dim B < n,$$

donc, d'après notre supposition,

$$\overline{\dim}\, B_1 \leqslant \dim B_1 < n.$$

Il en résulte que

$$\overline{\dim}_x\, C \leqslant n = \dim_x C, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

10. Quand il s'agit d'ensembles C fermés, les ensembles ε-séparant B peuvent donc eux aussi être supposés fermés.

$A+D$ est alors un domaine rèlatif; je dis que A et D le sont également En effet on tire de

$$A \times \overline{D} \subset H(A, D) = 0$$

et

$$\overline{D} \subset \overline{C} = C = A + B + D$$

les relations

$$\overline{D} \subset D + B$$

et

$$\overline{B+D} = \overline{B} + \overline{D} \subset B + D;$$

donc

$$(B+D)]\,\varepsilon\,\mathfrak{F},$$
$$A = [C - (B+D)]\,\varepsilon\,\mathfrak{G} \ (\text{rel. } C).$$

De même pour D.

Inversement, deux domaines relatifs sans points communs satisfont toujours à la condition de Hausdorff; il en résulte que (C étant fermé) la condition 2) du § 1 peut être remplacée par la suivante:

$$(2') \quad \begin{cases} A\,\varepsilon\,\mathfrak{G} \ (\text{rel. } C), \\ B\,\varepsilon\,\mathfrak{F}, \\ D\,\varepsilon\,\mathfrak{G} \ (\text{rel. } C). \end{cases}$$

C'est sous cette forme que nous l'emploierons presque toujours

11. L'hypothèse de la compacticité de l'espace n'est pas intervenue dans nos raisonnements. En effet, ce n'est que pour des applications ultérieures que nous l'avons introduite. Quant aux définitions et théorèmes précédents, on peut les rendre valables même pour tous les espaces topologiques [1]) moyennant les modifications suivantes:

1. La notion d'»ensemble ε-séparant le point x« doit être remplacée par la notion d'un »ensemble séparant le point x dans V« (V étant un voisinage quelconque de ce point), ce qui correspond au changement de la condition 3) (§ 1) en

3') $A + B \subset V$.

2. Dans toutes les définitions, les mots »peut être, quel que soit ε, ε-séparé par...« sont à remplacer par les mots suivants: »peut être, quel que soit le voisinage V de x, séparé dans V par...«.

12. Revenons aux espaces métriques. On démontre sans peine que la définition de la dimension ne sera pas alterée si l'on remplace la condition 3) (§ 1) par l'une des suivantes:

3_1) $\delta(A+B) < \varepsilon$;

3^0) $A \subset S(x, \varepsilon)$;

3^0_1) $\delta(A) < \varepsilon$.

Par contre, la définition 1^c_n qu'on serait peut-être tenté d'accepter n'est pas équivalente à la nôtre même dans le cas des ensembles fermés:

Déf. 1^c_n. »Si l'on n'a pas

$$\dim_x C < n,$$

et si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un ensemble B de dimension $< n$ tel que

$$\delta[\mathrm{Comp}_x(C - B)] < \varepsilon;$$

en ce cas nous dirons que x est de dimension n«.

En effet, soit C l'ensemble fermé qu'on obtient en faisant tourner la fig. 1, autour de l'axe $\overline{a_1 b_1}$ [2]).

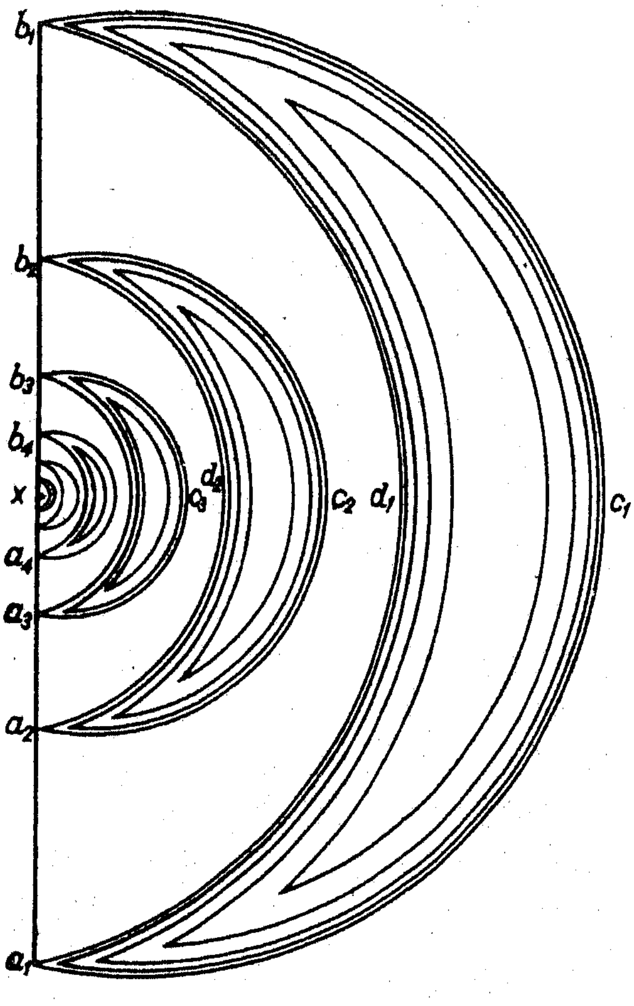

Fig. 1

[1]) Au sens de M. Hausdorff.

[2]) Les lignes fermées situées entre $\overline{a_1 c_1 b_1}$ et $\overline{a_1 d_1 b_1}$ sont en infinité dénombrable et tendent vers $\overline{a_1 c_1 b_1 d_1 a_1}$; les figures $(a_n c_n b_n d_n)$ sont homothétiques à $(a_1 c_1 b_1 d_1)$ par rapport à x, le coefficient d'homothétie tendant vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

On démontre facilement (en s'appuyant sur les résultats du chapitre suivant) que

$$\dim_x C = 2;$$

cependant la définition 1_n nous donnerait $\dim_x C = 1$, car il suffit de prendre $B = a_n + b_n$, n étant suffisamment grand.

Le disaccord entre les définitions 1_n et 1_n^c ne pourrait, évidemment, qu'augmenter si l'on remplaçait le composant du point x par le constituant correspondant[1]; nous y reviendrons à la fin de la première partie.

Les ensembles de dimension 0.

13. L'introduction des ensembles de dimension 0 nous permet de faire une classification complète des ensembles pour ainsi dire „mal enchainés". Nous avons, en effet:

1) Les ensembles *punctiformes*, c. à d. ne contenant aucun continu (Janiszewski).

2) Les ensembles *dispersés*, c. à d. ne contenant aucun sous-ensemble connexe (Hausdorff).

3) Les ensembles *séparés entre tout couple de points.*

Un ensemble C appartient, par définition, à cette classe. s'il existe, quels que soient les points x et y de C, une décomposition de C en deux ensembles X et Y tels que

$$H(X, Y) = 0,$$

$$X \supset x, \quad Y \supset y.$$

4) Les ensembles de dimension 0[2].

Tout ensemble d'une quelconque de ces classes rentre aussi dans toutes les précédentes; mais il ne rentre pas nécéssairement dans les classes suivantes comme l'ont montré par des exemples MM. Sierpiński[3]) et Kuratowski[4]).

[1]) B serait alors une coupure au sens de M. Mazurkiewicz.

[2]) M. Sierpiński a introduit implicitement (sans leur donner un nom spécial) les ensembles de ces deux dernières classes dans son mémoire „Sur les ensembles connexes et non connexes" (*Fund. Math.* t. II, p. 81); la dimension 0 lui servit de condition nécessaire et suffisante dans un théorème dont nous aurons à parler dans un moment.

[3]) l. c. Voir aussi „Sur un ensemble punctiforme connexe" (*Fund. Math.* t. I, p. 7).

[4]) Sur les ensembles connexes. *Fund. Math.* t. II, p. 206. Voir aussi l'exemple de M. Mazurkiewicz (ibid. p. 201) d'un ensemble séparé entre tout couple de points et ne contenant *aucun* point de dimension 0.

Par contre, pour les ensembles *fermés* toutes les quatre classes coïncident, c. à d. un ensemble punctiforme fermé est de dimension 0.

Comme je n'ai pu trouver nulle part une démonstration satisfaisante de ce théorème, d'ailleur bien connu [1]), je le démontrerai ici succinctement.

14. Théorème. *Tout ensemble fermé punctiforme est de dimension 0.*

Soit F cet ensemble. Il est dispersé car s'il contenait l'ensemble connexe C, il contiendrait aussi $\overline{C}$, qui serait un continu.

Soit x un point quelconque de F; d'après les résultats de M. Hausdorff [2])

$$x = \prod_{n=1}^{\infty} P_{\frac{1}{n}},$$

P_ϱ désignant le ϱ-composant du point x [3]). Or P_ϱ et $F - P_\varrho$ ont une distance mutuelle $> \varrho$; il satisfont donc à la condition de Hausdorff.

Soit ε un nombre positif arbitraire. Je dis que certain $P_{\frac{1}{n}}$ sera agrégé à $\overline{S}(x, \varepsilon)$. En effet, chaque $P_{\frac{1}{n}}$ contiendrait dans le cas contraire un point y_n tel que $\varrho(x, y_n) \geqq \varepsilon$. Tout point limite y de la suite

$$y_1\, y_2 \ldots y_n \ldots$$

(l'existence de ces points-limites étant assurée par la compacticité de l'espace) appartiendrait à chacun des ensembles de la suite décroissante

$$P_1 \supset P_{\frac{1}{2}} \supset \ldots \supset P_{\frac{1}{n}} \supset \ldots$$

donc y appartiendrait aussi à leur intersection, qui est composée du seul point x. Or cela est incompatible avec les relations

$$\varrho(x, y_n) \geqq \varepsilon, \ \{y_n\}' \supset y.$$

Supposons donc que $P_{\frac{1}{n}} \subset S(x, \varepsilon)$. La décomposition

$$F = P_{\frac{1}{n}} + (F - P_{\frac{1}{n}})$$

[1]) p ex. dans le cas des ensembles plans.

[2]) p. 303.

[3]) Hausdorff, p. 299, P_ϱ est fermé.

sera alors une ε-séparation du point x par l'ensemble vide; donc ε et x étant arbitraires,

$$\dim_x F = 0, \ \dim F = 0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

15. On voit aisément que les quatre classes du § 13 sont des invariants topologiques [1]). Il n'en est pas ainsi pour les classes analogues liées avec la notion d'ensemble bien enchaîné [2]), notion qui, elle-même, n'est pas invariante [3]). Nous laisserons donc de coté les notions correspondantes [4]) car ce ne sont que les propriétés intrinsèques des ensembles qui nous intéréssent.

16. M. Sierpiński a démontré [5]) un théorème qui peut être énoncé comme il suit:

Pour qu'un ensemble punctiforme soit homéomorphe à un ensemble linéaire il faut et il suffit qu'il soit de dimension 0 [6]).

[1]) L'espace étant compact par hypothèse. La punctiformité ne serait plus un invariant dans des espaces plus généraux.

[2]) Janiszewski. Sur les coupures de plan faites par les continus. *Prace Mat.-Fiz.* XXVI, 1913, p. 15; voir aussi M. Fréchet. Sur les ensembles abstraits; *Annales de l'école Normale*, (3) XXXVIII, 1921, p. 363.

L'ensemble C est dit bien enchaîné s'il ne peut être décomposé en deux ensembles A et B tels que $\overline{A} \times \overline{B} = 0$.

[3]) L'assertion contraire de M. Fréchet (l. c. p. 375) est due à ce que la notion d'homéomorphie qu'il emploie diffère de celle qui est généralement usitée. Selon sa terminologie deux ensembles C et C_1 sont homéomorphes dans le cas et dans le cas seulement où (d'après le langage ordinaire) $\overline{C}$ er $\overline{C_1}$ le sont. Il en résulte que deux ensembles congruents (au sens métrique) peuvent ne point être homéomorphes au sens de M. Fréchet. Prenons, p. ex. une droite privée du point (0) pour espace. Les deux ensembles

$$C = (-1, 0) + (0, 1)$$

et

$$C_1 = (1, 2) + (2, 3)$$

sont congruents; cependant le second est bien enchaîné, tandis que le premier ne l'est pas. L'espace considéré n'est pas compact. On voit d'ailleurs aisément que la notion d'ensemble bien enchaîné ne devient invariante même dans le cas d'espaces compacts.

[4]) Quelques unes de ces notions ont été introduites par Janiszewski dans sa thèse (*Journ. de l'école Polytechnique*, 1912). Notons celle d'ensemble *discret* qui nous sera utile dans la suite:

C est dit discret si $\overline{C}$ est punctiforme.

[5]) l. c. (*Fund. Math.* II, p. 89).

[6]) M. Sierpiński suppose l'espace Euclidien; cette restriction n'intervient pas dans sa démonstration.

Or un ensemble punctiforme linéaire est homéomorphe à une partie de l'ensemble des points irrationels d'un segment [1]; on voit donc aisément que le théorème cité est équivalent au suivant:

Théorème. *Les ensembles de dimension 0 sont identiques aux ensembles homéomorphes à des parties de l'espace de Baire* („espace à 0 dimension").

J'indiquerai rapidement dans les §§ suivants une démonstration simplifiée de ce théorème. Ce théorème fait d'ailleurs voir que notre terminologie n'est pas en désaccord avec celle de Baire [2]).

17. Lemme. Soit C un ensemble de dimension 0, ε un nombre positif arbitraire. C peut être décomposé en un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles C_n sans points communs deux à deux et tels que

$$C_n \,\varepsilon\, \mathfrak{F}(\text{rel } C), \quad C_n \,\varepsilon\, \mathfrak{G}(\text{rel. } C),$$
$$\delta(C_n) < \varepsilon.$$

Démonstration. Soit x un point arbitraire de C. Il existe une décomposition

$$C = A_x + D_x$$

telle que

$$A_x \supset x,$$
$$H(A_x, D_x) = 0,$$
$$A_x \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Aucun des ensembles A_x et D_x ne contenant de points-limites de l'autre ils sont tous les deux fermés par rapport à C; donc ils sont aussi des domaines relatifs.

Faisons varier le point x. C est couvert par la somme des domaines A_x; il existe donc une suite au plus dénombrable

$$A_{x_1}, A_{x_2}, \ldots, A_{x_n}, \ldots$$

qui couvre C complètement [3]).

Comme A_{x_n} est en même temps un $\mathfrak{F}$ et un $\mathfrak{G}$ par rapport à C, l'ensemble

$$C_n = A_{x_n} - \sum_{i=1}^{n-1} A_{x_i}$$

[1]) Voir p. ex. M. Fréchet. Les dimensions d'un ensemble abstrait. *Math. Annalen*, t 68 (1910), p. 154. Je tiens à noter que les types de dimension de M. Fréchet ne sont en aucune relation simple avec la dimension que j'ai introduite.

[2]) Contrairement à celle de M. Fréchet (l. c. p. 155).

[3]) Hausdorff, p. 272, V.

aura des propriétés analogues. Or on voit aisément que les C_n sont sans points communs deux à deux et que leur somme est égale à C. Enfin,

$$\delta(C_n) \leqslant \delta(A_{x_n}) \leqslant \delta\left[S\left(x_n, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right] \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon;$$

notre lemme est donc démontré.

18. Démonstration du théorème du § 16.

On s'aperçoit immédiatement que l'espace de Baire est de dimension 0; donc aussi toute partie de cet espace et tout ensemble homéomorphe à une telle partie.

Soit, inversement, C un ensemble de dimension 0. Appliquons le lemme du § 17 en posant $\varepsilon=1$. Si nous obtenons une suite finie

$$C_1, C_2, \ldots, C_n,$$

posons

$$C_{n+1} = C_{n+2} = \ldots = C_{n+h} = \ldots = 0.$$

En répétant ce procédé nous définissons les ensembles $C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$: les ensembles

$$C_{n_1 n_2 \ldots n_k 1}, \ldots, C_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}, \ldots$$

proviennent de l'ensemble $C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ quand on lui applique le lemme cité en y posant $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Le cas d'une suite finie serait traité comme ci-dessus

$$\delta(C_{n_1 n_2 \ldots n_k}) < \frac{1}{k};$$

il en résulte que la chaîne des ensembles

$$(1) \qquad C \supset C_{n_1} \supset C_{n_1 n_2} \supset \ldots \supset C_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \ldots$$

ne peut avoir plus d'un point commun (elle peut n'en avoir aucun); d'autre part deux chaînes différentes ne peuvent contenir le même point x car

$$C_{n_1 n_2 \ldots n_k r} \times C_{n_1 n_2 \ldots n_k s} = 0.$$

On voit aussi que tout point x de C appartient à une chaîne (1); posons

$$x \sim (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots),$$

le dernier symbole désignant, comme d'habitude, un point de l'espace de Baire. Nous obtenons ainsi une correspondance biunivoque entre C et une partie Γ de l'espace de Baire. Pour montrer que cette correspondance est bicontinue, il suffit de remarquer que

$$C_{n_1 n_2 \ldots n_k} \sim \Gamma \times [n_1, n_2, \ldots, n_k]\ ^{1}),$$

les deux ensembles étant des domaines relatifs (l'un par rapport à C, l'autre par rapport à Γ) de diamètre inférieur à $\frac{1}{k}$ [2])

[1]) „Groupe d'ordre k".

[2]) En adoptant p. ex. la définition de la distance de M. Hausdorff (p. 288) $\varrho[(n_1, n_2, \ldots, n_k, r, \ldots), (n_1, n_2, \ldots, n_k, s, \ldots)] = \frac{1}{k+1}$ si $r \neq s$.

19. Terminons ce chapitre par le

Théorème. *Tout ensemble de dimension* >0 *a la puissance du continu*[1]).

Il en résulte, en particulier, que les ensembles dénombrables sont de dimension 0.

Démonstration. Soit C un ensemble de dimension >0. x un point tel que $\dim_x C>0$. Il existe donc un nombre $\alpha>0$ tel qu'une décomposition

$$C=A+D,$$
$$A\supset x,$$
$$H(A,D)=0,$$

ne peut avoir lieu si

$$A\subset S(x,\alpha).$$

Désignons par $F(x,\varepsilon)$ l'ensemble des points y vérifiant l'égalité

$$\varrho(x,y)=\varepsilon;$$

on a évidemment

$$F(x,\varepsilon_1)\times F(x,\varepsilon_2)=0$$

si $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$.

Or soit

$$E(x,\varepsilon)=E-[S(x,\varepsilon)+F(x,\varepsilon)];$$

on a

$$C=C\times S(x,\varepsilon)+C\times F(x,\varepsilon)+C\times E(x,\varepsilon),$$
$$H[C\times S(x,\varepsilon),\ C\times E(x,\varepsilon)]\subset H[S(x,\varepsilon),\ E(x,\varepsilon)]=0.$$

L'ensemble $C\times F(x,\varepsilon)$ ne peut donc être vide si $\varepsilon<\alpha$. Désignons par t_ε un point quelconque de cet ensemble. L'ensemble $\{t_\varepsilon\}$ $(0<\varepsilon<\alpha)$ qui est contenu dans C, a la puissance du continu; d'autre part l'espace E a la même puissance[2]). Il en est donc de même de l'ensemble C, c. q. f. d.

Ch. II. Étude préliminaire de la dimension.

Les espaces Euclidiens à 2 et 3 dimensions.

1. Les résultats du présent chapitre ne sont presque tous que des cas particuliers des théorèmes généraux du ch. V, théorèmes

[1]) Cette puissance est d'ailleurs *non effective*. Un théorème analogue a été démontré par M. Hausdorff (p. 248) pour les ensembles connexes (qui sont tous de dimension >0.

[2]) Tout espace métrique admettant un sous-ensemble dénombrable dense a, en effet, une puissance non supérieure à celle du continu (Hausdorff p. 320).

qui seront établis par des méthodes toutes différentes. Ces théorèmes exigent, en effet, une étude approfondie des propriétés *formelles* de la dimension; or cette étude ne pourrait être justifiée que par l'utilité des nouvelles notions que nous avons introduites dans le chapitre précédent. Nous avons donc à montrer en premier lieu que nos définitions sont en bon accord avec la notion ***intuitive*** du nombre de dimensions, et qu'elles satisfont à toutes les conditions qu'il serait naturel d'imposer *à priori* aux définitions de la dimension. Nous étudierons donc la dimension des ensembles situés dans les espaces E_2 et F_2 [1]); l'étude du second cas présente d'ailleurs un interêt intrinsèque évident.

Les résultats acquis nous permettrons, en outre, de définir les l i g n e s et les m u l t i p l i c i t é s C a n t o r i e n n e s; or l'un des buts principaux de ce mémoire est d'élucider quelque peu ces notions jusqu'à présent si obscures.

2. Commençons par un examen rapide de l'espace E_1 (ligne droite).

Les seuls ensembles connexes situés dans E_1 sont les intervalles (a, b), les segments $[a, b]$ et les semi-intervalles $(a, b]$ et $[a, b)$.

Donc, si x appartient à un segment $[a, b]$ agrégé à C, on aura

$$\dim_x C > 0.$$

Je dis que $\dim_x C = 1$; en effet, x peut être ε séparé (ε étant arbitraire) par un ensemble B composé de deux points au plus $\left(\text{les points } x - \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } x + \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Inversement, si x n'appartient à aucun segment agrégé à C, on aura

$$\dim_x C = 0.$$

En effet, on peut trouver dans ce cas des points situés des deux cotés du point x, aussi voisins de celui-ci qu'on le veut, et n'appartenant pas à C; soit, p. ex.,

$$x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon,$$

$$(a + b) \times C = 0.$$

[1]) Je rappelle que les espaces Euclidiens n'étant pas compacts, nous n'y considérons que les ensembles bornés.

La décomposition

$$C = [C \times (a, b)] + [C - (a, b)]$$

sera alors une ε-séparation du point x par l'ensemble vide, c. q. f. d.

Donc *un point intérieur d'un ensemble de E_1 est de dimension* 1; *un point frontière qui n'est pas limite de points intérieurs, est de dimension* 0; *enfin un point frontière limite de points intérieurs peut être de dimension* 1 *ou* 0 [1]).

Un résultat analogue subsiste pour les espaces Euclidiens à un nombre quelconque de dimensions (les cas $n=2$ et 3 seront traités dans ce chapitre; le cas général, dans le ch. V).

3. Établissons quelques propositions, d'ailleurs incomplètes, concernant tous les E_n; ces propositions seront complétées dans le ch. V.

Théorème. *Tout ensemble situé dans E_n est de dimension au plus égale à n.*

Nous avons vu tout-à-l'heure que ce théorème est vrai quand $n = 1$. Supposons qu'il le soit encore pour tous les nombres $< n$, et soit C un ensemble de E_n Envisageons un domaine $G \supset C$ et un point x de ce domaine. Ce point peut être ε-séparé (quel que soit ε) par la frontière $F(x, \varepsilon)$ de la sphère n-dimensionnelle $S(x, \varepsilon)$.

Or cette frontière est *localement homéomorphe* à E_{n-1}; donc, d'après notre supposition,

$$\dim_y F(x, \varepsilon) \leqslant n - 1$$

quel que soit le point y de $F(x, \varepsilon)$. Il en résulte que

$$\dim F(x, \varepsilon) \leqslant n - 1,$$

donc,

$$\dim_x G \leqslant n,$$

$$\dim G \leqslant n,$$

$$\dim C \leqslant \dim G \leqslant n, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

4. Le théorème suivant présente des difficultés beaucoup plus sérieuses:

Théorème. *Tout ensemble de E_n ne contenant aucun point intérieur est de dimension au plus égale à $n - 1$.*

[1]) Selon qu'il est ou n'est pas l'extrémité d'un segment agrégé à l'ensemble en question.

Lemme. Désignons par R_n l'ensemble des points rationnels [1]) de E_n. Je dis que $\dim(E_n - R_n) \leqslant n-1$ [2]).

En effet, cette proposition étant vraie pour $n=1$, supposons qu'il en soit de même pour tous les nombres inférieurs à n. Soit ensuite x un point arbitraire de $E_n - R_n$,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Choisissons $2n$ nombres rationnels

$$a_1, a_2, \ldots, a_n; \; b_1, b_2, \ldots, b_n$$

tels que

$$a_i < x_i < b_i, \; b_i - a_i = k < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \text{ [3])}.$$

ε étant un nombre positif arbitraire.

Désignons par S le cube défini par les inégalités

$$a_i < \xi_i < b_i; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et soit F la frontière de ce cube. On voit aisément que

$$F \times (E_n - R_n) = F - R_n$$

est localement homéomorphe à $E_{n-1} - R_{n-1}$. Donc

$$\dim(F - R_n) \leqslant n-2.$$

Or

$$\delta(F - R_n) \leqslant \delta(F) = \delta(S) = k\sqrt{n} < \varepsilon;$$

donc, x étant un point de S.

$$(S - R_n) + (F - R_n) \subset S(x, \varepsilon).$$

Il en résulte en vertu de la décomposition

$$E_n - R_n = (S - R_n) + (F - R_n) + [(E_n - R_n) - (S + F)]$$

que

$$\dim_x (E_n - R_n) \leqslant n-1,$$

$$\dim (E_n - R_n) \leqslant n-1, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

1) J'entends par là les points ayant toutes leurs coordonnées rationnelles.

2) On a d'ailleurs $\dim(E_n - R_n) = n-1$ (voir Ch. V).

3) k est un nombre rationnel indépendant de i.

5. Soit maintenant C un ensemble de E_n sans points intérieurs:

$$\overline{E_n - C} = E_n.$$

Choisissons un ensemble dénombrable D dense dans $E_n - C$ [1]):

$$D \subset E_n - C,$$
$$\overline{D} = \overline{E_n - C} = E_n.$$

Nous voyons que D est dense *dans* E_n.

Comme, d'autre part, $C \subset E_n - D$, nous avons

$$\dim C \leqslant \dim (E_n - D);$$

il suffira donc de démontrer que $E_n - D$ et $E_n - R_n$ sont homéomorphes pour que le théorème du § précédent soit établi; nous aurons alors, en effet,

$$\dim C \leqslant \dim (E_n - D) = \dim (E_n - R_n) \leqslant n - 1.$$

Or la proposition en question est une conséquence immédiate du théorème suivant qui, lui-même, n'est pas privé d'intérêt:

Théorème. *Tous les ensembles dénombrables denses dans E_n sont isotopes* [2]).

Ce théorème a été énoncé pour la première fois par M. Fréchet [3]). Sa démonstration me semble d'ailleurs insuffisante [4]). J'indiquerai donc une autre méthode de démonstration.

6. La démonstration ne variant nullement avec n [5]) nous supposerons pour simplifier le langage que $n = ?$. Il est plus commode de supposer que les ensembles dénombrables denses D et R en question sont situés dans deux plans différents que nous désignerons

[1]) Hausdorff, p. 273, VIII

[2]) Deux ensembles A et B de E_n sont dits *isotopes* s'il existe une transformation biunivoque et bicontinue de E_n en soi qui transforme A en B.

[3]) *Math. Annalen*, 68 (1910), p. 159.

[4]) Nous y lisons, en effet: „On prouve d'abord qu'on peut établir entre les deux ensembles dénombrables une correspondance dans laquelle les signes des différences des coordonnées de même rang se conservent". Or cela n'est exact que dans le cas où aucune de ces différences ne s'annule. Il est vrai que cette inexactude peut être facilement corrigée (par un changement de coordonnées); mais le développement complet de la méthode de M. Fréchet (on ne peut, en effet, regarder ses brèves indications que comme un plan de démonstration) me semble assez pénible.

[5]) Le cas $n = 1$ excepté.

respectivement par E_d et E_r. Il s'agit donc de démontrer qu'il existe une correspondance

$$E_d \sim E_r$$

qui transforme D en R.

La généralité de la démonstration ne sera pas diminuée si nous supposons que R est un ensemble spécial, p. ex. l'ensemble des points rationnels [1]).

Rangeons les points de R et D en deux suites déterminées:

$$R = \{r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots\}, \tag{1}$$

$$D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots\}. \tag{2}$$

et soient $m(x, y)$ et $m'(x', y')$ deux points appartenant respectivement à E_r et à E_d.

La fonction

$$m' = \varphi(m)$$

cherchée sera définie comme la limite d'une suite de fonctions

$$\varphi_0(m) = m,\ \varphi_1(m),\ \varphi_2(m), \ldots,\ \varphi_i(m), \ldots \tag{3}$$

assujetties aux conditions suivantes $(i > 0)$:

1) $\varphi_i(m)$ fait correspondre un réseau de triangles [2]) T_i du plan E_2 à un réseau analogue T'_i de E_d. Cette correspondance est telle que

a. Les sommets de T_i et de T'_i se correspondent

b. La fonction $\varphi_i(m)$ est linéaire sur chaque triangle θ_i^j de T_i, c. à d.

$$x' = a_i^j x + b_i^j y + c_i^j,$$

$$y' = \alpha_i^j x + \beta_i^j y + \gamma_i^j,$$

si $m(x, y) \subset \theta_i^j$.

On voit donc que les différentes définitions de $\varphi_i(m)$ se raccordent le long des cotés du réseau T_i, et que les images de ces cotés sont les cotés de T'_i.

2) Tous les sommets de T_i appartiennent à R, tous les sommets de T'_i, à D.

3) On obtient T_{i+1} en ajoutant aux sommets de T_i un seul nouveau sommet ϱ_{i+1}; de même δ_{i+1} est ajouté aux sommets de T'_i,

[1]) En effet, si R est isotope à D et à D_1, D et D_1 le sont entre eux.

[2]) Dans le cas de n quelconque le triangle est à remplacer par le polytope à $n+1$ sommets que M. Brouwer appelle „*simplex*".

ϱ_{i+1} et δ_{i+1} sont intérieurs [1]) à deux triangles θ_i^j et $\theta_i^{j'}$ correspondants, ou bien il sont intérieurs respectivement à deux quadrilatères $\theta_i^j + \theta_i^{j+1}$ et $\theta_i^{j'} + \theta_i^{j+1'}$ [2]). Dans le premier cas θ_i^j est remplacé dans T_{i+1} par trois triangles, dans le second $\theta_i^j + \theta_i^{j+1}$, par quatre triangles. Tous ces triangles ont ϱ_{i+1} pour sommet. Les triangles correspondants de T'_{i+1} ont δ_{i+1} pour sommet.

4) Les points ϱ_{i+1} et δ_{i+1} sont choisis comme il suit:

a. Si $i+1$ est impair, ϱ_{i+1} sera le premier point de la suite (1) qui ne fait pas partie des sommets de T_i; δ_{i+1} doit satisfaire à la condition 3); son choix sera d'ailleurs précisé dans un moment.

b. Si $i+1$ est pair, le rôle de ϱ_{i+1} et δ_{i+1} sera interverti.

7. On voit d'après ces conventions que la suite (3) reste constante à partir d'un moment suffisamment éloigné en tout sommet de T_i; donc, en vertu de la condition 4), en tout point de R. La valeur correspondante des fonctions $\varphi_i(m)$ est un point de D; de plus 4) nous assure que tous les points de D seront obtenus de la sorte.

Si donc la fonction $\varphi(m)$, limite de la suite (3), existe et transforme biunivoquement et bicontinûment E_r en E_d, elle transformera aussi R en D; elle satisfera par suite à toute les conditions exigées.

Reste donc à montrer que les choix restés jusqu'à présent arbitraires peuvent être faits de la sorte que toutes ces conditions soient réalisées. Nous verrons bientôt qu'il en sera ainsi toutes les fois que les fonctions $\varphi_i(m)$ et leur fonctions inverses $\psi_i(m')$ satisferons uniformément à la condition de Lipschitz, c à. d. toutes les fois qu'auront lieu les inégalités

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\varrho[\varphi_i(m), \varphi_i(n)]}{\varrho(m, n)} < Q, \\ &\frac{\varrho[\psi_i(m'), \psi_i(n')]}{\varrho(m', n')} < Q, \end{aligned} \right.$$

Q étant une constante positive indépendante de i, m, n, m', n'. Choisissons pour le moment les fonctions φ_i de manière que cette dernière condition soit vérifiée. Soient M_i et M'_i les bornes supérieures

[1]) contour exclu.

[2]) θ_i^j et θ_i^{j+1} sont des triangles adjacents. La fonction φ_i fait correspondre $\theta_i^{j'}$ à θ_i^j et $\theta_i^{j+1'}$ à θ_i^{j+1}.

des deux rapports (4) [1]; il faut donc que les suites $M_1, M_2, \dots M_i, \dots$ et $M'_1, M'_2, \dots M'_i, \dots$ soient bornées.

8. Construction de la fonction $\varphi_1(m)$. Soit T_1 le réseau formé par les droites

$$x = h,\ y = k,\ x + y = l,$$

h, k, l prenant toutes les valeurs entières. T_1 est composé de triangles égaux tels que

$$\theta^j_1 = [(h, k), (h+1, k), (h, k+1)].$$

T'_1 sera défini comme il suit:

Soit $m = m(h, k)$ un sommet de T_1, $m' = m'(h', k')$ un point de E_s suffisamment rapproché de $\varphi_0(m)$ [2], p. ex. le premier point de la suite (2) qui satisfait à la relation

$$\varrho(m', \varphi_0(m)) < \varepsilon\ ^{3)}.$$

Un tel point existe, l'ensemble D étant dense dans E_d. $\varphi_1(m)$ fera correspondre, par définition, le triangle θ^j_1 à

$$\theta^{j\prime}_1 = [(h', k'), (\overline{h+1}', k'), (h', \overline{k+1}')).$$

Un calcul facile nous montre que m et n étant agrégés à un même triangle θ^j_i,

$$\frac{\varrho[\varphi_1(m), \varphi_1(n)]}{\varrho(m, n)} \leqslant (1 + 4\varepsilon)^2;$$

l'addition d'inégalités analogues nous montre d'ailleurs que cette relation est générale, c. à d. qu'elle est vraie pour tout couple de points de E_r. Il en résulte que

(5) $$M_1 \leqslant (1 + 4\varepsilon)^2.$$

On trouve de même que

(5') $$M'_1 \leqslant (1 - 4\varepsilon)^{-2}.$$

9. Construction de $\varphi_{i+1}(m)$. Supposons φ_i construite. Supposons de plus que $i + 1$ est impair (le cas contraire est parfaitement analogue). Si ϱ_{i+1} est intérieur [4] au triangle θ^j_i, nous pren-

[1] i est supposé fixe, les point m, n, m', n', variables.

[2] Je rappelle que $\varphi_0(m) = m$.

[3] ε est un nombre positif fixe (indépendent de h et k).

[4] contour exclu.

drons δ_{i+1} à l'intérieur du triangle crrrespondant $\theta_i^{j'}$; nous serons donc dans le premier cas signalé (3) § 6). Au contraire, si ϱ_{i+1} appartient à un coté du réseau T_i nous aurons nécessairement le second cas. Comme ce dernier ne présente que des complications très peu sérieuses, nous le laisserons de coté. ϱ_{i+1} est donc supposé intérieur à θ_i^j.

$\varphi_i(m)$ fait correspondre au réseau T_i le réseau T'_i, ou bien ce qui revient au même, à T_{i+1} le réseau T^*_{i+1} obtenu par l'adjonction du point $\varphi_i(\varrho_{i+1})$ au réseau T'_i. D'autre part, $\varphi_{i+1}(m)$ fait correspondre à T_{i+1} le réseau T'_{i+1} qu'on obtient de T'_i en lui adjoignant le point δ_{i+1}. On voit donc que le passage de $\varphi_i(m)$ à $\varphi_{i+1}(m)$ équivaut au déplacement du sommet $\varphi_i(\varrho_{i+1})$ en δ_{i+1}; les fonctions linéaires ne sont alterées que dans les trois triangles adjacents au sommet ϱ_{i+1} correspondant. Or l'altération de la condition de Lipschitz ne peut être provoquée que par ces triangles; et elle y sera alterée aussi peu qu'on le veut à condition de prendre le déplacement

$$\varrho[\varphi_i(\varrho_{i+1}),\ \delta_{i+1}]$$

suffisamment petit. Choisissons donc le point δ_{i+1} de manière qu'on ait

$$M_{i+1} < M_i + \frac{\varepsilon}{2^i},$$

$$M'_{i+1} < M'_i + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

On voit alors de proche en proche que tous les M_i et les M'_i satisfont, en vertu de (5) et (5'), aux inégalités

$$M_i < (1+4\varepsilon)^2 + \varepsilon < (1-4\varepsilon^{-2}) + \varepsilon,$$

$$M'_i < (1-4\varepsilon)^{-2} + \varepsilon;$$

c. à d. que les inégalités (4) sont satisfaites.

Remarquons encore que ces deux inégalités peuvent être remplacées par la suivante:

$$\frac{1}{Q} < \frac{\varrho[\varphi_i(m),\ \varphi_i(n)]}{\varrho(m,\ n)} < Q; \tag{6}$$

et passons à la démonstration des faits annoncés dans le § 7.

10. Convergence uniforme de la suite (3). Cette suite converge en tous les points de R. Montrons qu'elle converge uniformément dans tout domaine borné G du plan E_r. Soit, en effet, G un domaine donné, η un nombre positif arbitraire. Choisissons une suite finie de points rationnels

$$r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_s}, \tag{7}$$

de telle manière qu'ils forment un réseau de densité $\frac{\eta}{2Q}$ dans G [1]. La suite (3) devient constante (§ 7) en tout point r_{j_s} de R à partir d'un certain indice i_s; soit I le plus grand des indices

$$i_1, i_2, \dots, i_s.$$

Je dis que i' et i'' étant supérieurs à I, on aura

$$\varrho[\varphi_{i'}(m), \varphi_{i''}(m)] < \eta, \tag{8}$$

quel que soit le point m de G. En effet, soit r_{j_t} celui des points (7) qui est le plus rapproché de m; donc $\varrho(m, r_{j_t}) \leqslant \frac{\eta}{2Q}$. On aura

$$\varrho[\varphi_{i'}(m), \varphi_{i''}(m)] \leqslant \varrho[\varphi_{i'}(m), \varphi_{i'}(r_{j_t})] + \varrho[\varphi_{i'}(r_{j_t}), \varphi_{i''}(r_{j_t})] + \\ + \varrho[\varphi_{i''}(r_{j_t}), \varphi_{i''}(m)];$$

le second membre est nul d'après la définition de I; les deux autres s'évaluent, en tenant compte de (6), comme il suit:

$$\varrho[\varphi_{i'}(m), \varphi_{i'}(r_{j_t})] < Q \cdot \varrho(m, r_{j_t}) \leqslant \frac{\eta}{2},$$

$$\varrho[\varphi_{i''}(r_{j_t}), \varphi_{i''}(m)] < Q \cdot \varrho(r_{j_t}, m) \leqslant \frac{\eta}{2}.$$

Nous obtenons donc l'inégalité (8) qui démontre la convergence uniforme. Désignons par $\varphi(m)$ la fonction limite ainsi obtenue; elle est, bien entendu, continue.

11. Les inégalités (6) nous donnent par un passage à la limite:

$$\frac{1}{Q} \leqslant \frac{\varrho[\varphi(m), \varphi(n)]}{\varrho(m, n)} \leqslant Q. \tag{9}$$

[1] c. à d. on doit avoir pour tout point m de G l'inégalité

$$\varrho(m, r_{j_1} + r_{j_2} + \dots + r_{j_s}) \leqslant \frac{\eta}{2Q}.$$

On voit donc, $\frac{1}{Q}$ étant positif, que $\varphi(m)$ fait correspondre à des points différents de E_r des points différents de E_d. Montrons que tout point de E_d sera l'image d'un point de E_r. Soit, en effet, m' un point de E_d,

(10) $$d_{j_1},\ d_{j_2}, \ldots, d_{j_s}, \ldots$$

une suite de points appartenant à D et tendant vers m'. Or nous savons déjà que $\varphi(m)$ transforme les points de R en *tous* les points de D (§ 6); soient donc

(11) $$r_{j_1'},\ r_{j_2'}, \ldots, r_{j_s'}, \ldots$$

les points de R auxquels correspondent les points de la suite (10). Cette dernière suite est bornée car elle converge; la suite (11) est aussi bornée car, en vertu de (9),

$$\varrho(r_{j_s'}, r_{j_t'}) \leqslant Q \cdot \varrho(d_{j_s}, d_{j_t}).$$

Elle possède donc au moins un point-limite; soit m un de ces points. Je dis que $\varphi(m) = m'$. En effet, si $r_{j_s'}$ appartient à $S(m, \eta)$ (et de tels points existent quel que soit η), on aura

$$\varrho[m', \varphi(m)] \leqslant \varrho(m', d_{j_s}) = \varrho[d_{j_s}, \varphi(m)].$$

Le premier membre peut être rendu aussi petit qu'on le veut à condition de prendre l'indice s suffisamment grand (ce qui est évidemment possible). Quant au second, (9) nous donne

$$\varrho[d_{j_s}, \varphi(m)] = \varrho[\varphi(r_{j_s'}), \varphi(m)] \leqslant Q \cdot \varrho(r_{j_s'}, m) < Q\eta.$$

Nous voyons donc que $m' = \varphi(m)$, c. q. f d.

Par conséquent, la fonction continue $\varphi(m)$ donne une correspondence biunivoque entre E_r et E_d: cette correspondence est aussi bicontinue, car la continuité de la fonction inverse, $\psi(m')$, résulte immédiatement de (9), qu'on peut écrire

$$\frac{1}{Q} \leqslant \frac{\varrho[\psi(m'), \psi(n')]}{\varrho(m', n')} \leqslant Q.$$

Ainsi le théorème du § 5 est complètement démontré; de même, le théorème du § 4.

Le plan Euclidien.

12. Soit C un ensemble plan quelconque.

Théorème A_2. *Tout point intérieur de C sera de dimension 2 (par rapport à C); tout point non intérieur et non limite de points intérieurs, de dimensions* 0 *ou* 1; *enfin pour les points frontières limites de points intérieurs tous les trois cas* (0, 1, 2) *sont possibles.*

Démonstration. Soit, en premier lieu, x un point intérieur de C. La dimension étant une propriété locale, nous pouvons supposer que C est un cercle de centre x et de rayon 1, p. ex.:

$$C = \overline{S}(x, 1).$$

Nous savons déjà (§ 3) que $\dim_x C \leqslant 2$. Or si l'on avait $\dim_x C \leqslant 1$, x pourrait être ε-séparé [1]) par un ensemble fermé (Th. IV du Ch. I) de dimension 0, c. à d. par un ensemble fermé punctiforme F. On aurait donc

$$\overline{S}(x, 1) = A + F + D,$$

$$H(A, D) = 0,$$

$$A \subset S(x, \varepsilon).$$

Mais $\varrho(A, C - \overline{S}(x, 1)) \geqslant 1 - \varepsilon > 0$; par suite

$$H\{A, D + [C - \overline{S}(x, 1)]\} = 0.$$

Comme, d'autre part,

$$E_2 = A + F + \{D + [C - \overline{S}(x, 1)]\},$$

nous aurions donc un ensemble fermé punctiforme F découpant le plan, en contradiction avec lè théorème de Phragmèn. Par conséquent $\dim_x C = 2$, c. q. f. d.

On obtient immédiatement le second point de notre théorème en appliquant au théorème du § 4 la remarque que la dimension est une propriété locale. Il suffit d'ailleurs d'examiner un ensemble fermé punctiforme et un segment pour se convaincre que les deux cas (0 et 1) peuvent avoir lieu effectivement.

13. Montrons maintenant par des exemples que les points frontières limites de points intérieurs peuvent être de dimension 2, 1 et 0.

[1]) $\varepsilon < 1$.

Lemme[1]). *La somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés punctiformes est elle-même punctiforme.*

Soient $F_1, \ldots, F_i, \ldots$ les ensembles en question; et supposons que leur somme $Q = \Sigma F_i$ contienne un continu k. Chacun des ensembles $k \times F_i$ est non dense sur k, car d'après un théorème bien connu de Janiszewski[2]) un continu k contient un sous-continu dans tout voisinage de chacun de ses points. Donc la somme

$$\Sigma k \times F_i = k \times \Sigma F_i = k \times Q = k$$

est de première catégorie par rapport à k, ce qui est impossible, k étant fermé[3]). Ainsi Q ne peut contenir aucun continu c. q. f. d.

Envisageons maintenant un demicercle C, p. ex. le demicercle

$$x^2 + y^2 \leqslant 1, \; y \geqslant 0;$$

et soit a le centre du cercle correspondant, c. à d. le point (0, 0) Je dis que $\dim_a C = 2$.

Démonstration. Supposons, par contre, que $\dim_a C = 1$. Il existe en ce cas un ensemble fermé punctiforme F tel que

$$C = A + F + D,$$
$$A \supset a$$
$$H(A, D) = 0$$
$$A + F \subset S(a, \tfrac{1}{2}).$$

Désignons par C_1 le demicercle

$$x^2 + y^2 \leqslant 1, \; y \leqslant 0$$

symétrique par rapport à l'axe des x; et soit F_1 l'ensemble fermé punctiforme symétrique de F par rapport à ce même axe. $F + F_1$ est donc punctiforme et ne contient pas le point a. Cet ensemble ne peut non plus contenir toute la circonférence du cercle $C + C_1$; soit donc d un point de cette circonférence qui est étranger à $F + F_1$. On peut (d'après le théorème de Phragmèn) joindre a et d par une ligne polygonale Γ ne rencontrant pas $F + F_1$. Désignons par $a_1, a_2 \ldots$ les sommets de cette ligne, en comptant d'ailleurs parmis

[1]) Ce lemme est connu.

[2]) Thèse, p. 22.

[3]) Hausdorff, p. 328.

les sommets tous ses points d'intersection avec l'axe des x (s'il y a des segments communs à Γ et à l'axe des x, nous ne regarderons, bien entendu, que leurs extremités comme sommets de Γ). Soit, enfin, a_k le premier point de rencontre de Γ avec la circonférence de $C+C_1$. Désignons par $\overline{b_i b_{i+1}}$ $(i=0, 1, \ldots, k-1; a_0=a)$ le segment agrégé à C qui est, selon le cas, identique à $\overline{a_i a_{i+1}}$ ou symétrique à ce dernier segment par rapport à l'axe des x. Nous obtenons ainsi une ligne polygonale (non nécessairement simple) qui est agrégée à C et joint le point $a=a_0=b_0$ à un point b_k de la circonférence du cercle $C+C_1$; ligne que nous pouvons désigner par

$$\Gamma_0=\overline{b_0 b_1 \ldots b_i \ldots b_k}.$$

Or le segment $\overline{a_i a_{i+1}}$ étant étranger à $F+F_1$, le segment $\overline{b_i b_{i+1}}$ ne peut rencontrer l'ensemble F; par suite

$$\Gamma_0 \subset A+D,$$
$$\Gamma_0=\Gamma_0 \times A+\Gamma_0 \times D,$$

ce qui est impossible, Γ_0 étant connexe. En effet les deux ensembles

$$\Gamma_0 \times A \supset a=b_0$$
$$\Gamma_0 \times D \supset b_n$$

ne sont pas vides et satisfont à la condition de Hausdorff.

La contradiction à laquelle nous sommes arrivés nous montre que contrairement à notre hypothèse,

$$\dim_a C=2, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

14. Un cercle étant évidemment homéomorphe à un demicercle, nous voyons donc que *tous les points d'un cercle* (les points de la circonférence y compris) *sont de dimension 2.*

15. Dans le cas des continus les points de dimension 0 ne peuvent plus se présenter. Donc,

un point intérieur d'un continu C est de dimension 2; un point-frontière non limite de points intérieurs, de dimension 1.

Nous obtenons, comme conséquence immédiate, qu'*un continu plan est ou n'est pas une ligne Cantorienne suivant qu'il est ou n'est pas de dimension 1.*

La définition suivante semble donc bien naturelle

Déf. *Un continu de dimension 1*[1]) *sera dit une ligne Cantorienne.*

Janiszewski a énoncé[2]) les conditions suivantes auxquelles doit satisfaire toute définition admissible d'une ligne Cantorienne:

1) un continu homéomorphe à une ligne Cantorienne plane doit être lui-même une ligne Cantorienne;

2) un continu somme d'un nombre fini de lignes Cantoriennes est une ligne Cantorienne;

3) une ligne Cantorienne ne découpe aucune sphère tridimensionnelle.

On voit immédiatement (Th. II du Ch. I) que notre définition satisfait à la première de ces conditions. Nous verrons bientôt qu'il en est de même des deux autres[3]); elle ne peut donc être regardée comme artificielle.

Remarquons d'ailleurs dès maintenant que la notion d'une multiplicité Cantorienne à n dimensions ne peut être définie d'une manière aussi simple En effet, un cercle augmenté d'un segment est un continu de dimension 2; or il est évident que ce n'est pas une surface, mais bien la réunion d'une surface et d'une ligne. Nous y reviendrons dans un moment.

L'espace tridimensionnel.

16. Nous nous proposons de montrer qu'un théorème parfaitement analogue au théorème A_2 (§ 12) subsiste dans le cas de l'espace E_3 („théorème A_3"). Le premier point étant établi, la démonstration des deux autres ne présente aucune difficulté, car elle ne diffère en rien de celle relative au cas $n=2$. Nous la laisserons donc de coté, d'autant plus que nous y reviendrons dans le cas de n quelconque (Ch. V). Par contre, la démonstration directe du premier point présente des difficultés assez sérieuses. Je la reproduis, néanmoins dans ce chapitre; il est de plus à remarquer que la démonstration indirecte (et valable pour tous les n) que nous obtiendrons dans le ch. V, fournit un résultat moins complet en ce qui concerne la structure des frontières de domaines.

[1]) Situé dans un espace quelconque.

[2]) Über die Begriffe „Linie" und „Fläche". *Proc. of the Fifth Internat. Congr. of Math., Cambridge.*, v. II, section II, p. 126.

[3]) Voir le ch. IV pour la deuxième, et la fin du présent chapitre pour la troisième. Nous remplacerons même dans 2) les mots „nombre fini" par „nombre fini ou infinité dénombrable".

17. Il s'agit donc de démontrer que tout point intérieur d'un ensemble situé dans E_3 est de dimension 3. Il suffit, bien entendu, d'examiner le cas d'une sphère tridimensionnelle [1]), c. à d. de montrer que

$$\dim_x [S(x, 1)] = 3.$$

Soit

$$S(x, 1) = A + B + D$$

une ε-séparation $(\varepsilon < 1)$ telle que (§ 10 du ch. I)

$$A \,\varepsilon\, \mathfrak{G} (\text{rel } S(x, 1));$$

c. à d., $S(x, 1)$ étant un domaine, tel que

$$A \,\varepsilon\, \mathfrak{G}.$$

Il faut démontrer que $\dim B \geqslant 2$. Or la frontière du domaine A est contenue dans B. En effet,

$$A \subset S(x, \varepsilon); \qquad (\varepsilon < 1)$$

donc

$$\overline{A} \subset \overline{S}(x, \varepsilon) \subset S(x, 1) = A + B + D.$$

Comme, d'autre part,

$$\overline{A} \times D \subset H(A, D) = 0,$$

on a

$$\overline{A} \subset A + B, \; Fr(A) = \overline{A} - A \subset B.$$

Nous voyons donc qu'il suffit de démontrer la proposition suivante:

B_3. *La frontière d'un domaine tridimensionnel borné est de dimension 2.*

18. Or il n'est aucunement nécessaire d'examiner toutes les frontières de la classe indiquée. Notons, en effet, les deux sous-classes suivantes:

1) les *frontières doubles*; l'ensemble (fermé) F rentre dans cette classe s'il est la frontière commune de deux domaines (non nécessairement connexes) G et H. Si nous supposons, comme toujours, que F est borné, un des deux domaines, G p. ex est aussi borné; ils peuvent, d'ailleurs, être bornés tous les deux [2]). Il est à remar-

[1]) Il est dans ce cas préférable de n'y pas adjoindre sa frontière.

[2]) C'est le cas, p ex., pour les frontières communes de trois domaines. Voir Brouwer. Zur Analysis Situs. *Math. Annalen*, t. 68 (1910), p. 427.

quer que la connexité de l'un des deux domaines n'entraine pas la continuité de F[1]).

2) Par contre, la frontière commune de deux domaines connexes[2]) est un continu[3]). Nous réservons à ces frontières communes le nom de *frontières régulières.* Notons d'ailleurs qu'une frontière double continue n'est pas toujours régulière[4]).

Lemme. *La frontière d'un domaine Euclidien*[5]) *borné contient toujours une frontière régulière.*

Soit G un domaine borné de E_n F sa frontière. Désignons par G_0 un composant quelconque de G;

$$G \varepsilon \mathfrak{G}\ ^{6});$$

et soit F_0 la frontière de G_0. F_0 est contenu dans F[7]); c'est, d'ailleurs, un ensemble borné, car c'est la frontière du domaine borné G_0. Il en résulte que le domaine $E_n - F_0$ n'est pas borné Or G_0 est un composant de $E_n - F_0$[8]). Ce dernier domaine n'est donc pas connexe; soit G_1 l'un de ses composants distincts de G_0. C'est un

1) Exemple: $F = F(x, 1) + F(x, 2)$, $G = S(x, 2) - \overline{S}(x, 1)$, $H = S(x, 1) + [E_2 - \overline{S}(x, 2)]$.

Les domaines ayant des frontières doubles ont été introduits par M. Lebesgue („Sur les correspondances entre les points de deux espaces", *Fund. Math.* t. II, p. 274: „tout point frontière est limite de points extérieurs") et étudiés par M. Kuratowski („Sur l'opération $\overline{A}$...", *Fund. Math.* t. III: „l'ensemble des points intérieurs de G coïncide avec G").

2) Nous supposons, ici aussi, que cette frontière est bornée.

3) Théorème de Phragmèn-Brouwer. La démonstration habituelle (voir, p. ex., Hausdorff, p. 345) s'étend immédiatement au cas d'un E_n quelconque ($n > 1$). Notons, à propos, qu'il est utile d'introduire les deux classes de frontières ci-dessus dans le cas des espaces Euclidiens à un nombre quelconque (> 1) de dimensions et dans ce cas seulement. Ainsi, p ex. une frontière régulière sur la surface d'un tore n'est plus nécessairement un continu (elle peut être composée de deux circonférences disjointes).

4) Exemple. Soit $x = (0, 0, 0)$, $y = (1, 0, 0)$; posons: $F = F(x, 2) + F(y, 1)$, $G = S(x, 2) - \overline{S}(y, 1)$, $K = S(y, 1) + [E_3 - \overline{S}(x, 2)]$. F et G sont connexes, K ne l'est pas.

5) à un nombre quelconque de dimensions.

6) Hausdorff, p, 330, II.

7) Ibid., p. 332, VI.

8) Ibid., p. 330, III.

domaine[1]) connexe dont la frontière F_1 fait partie de F_0 [2]). Je dis que F_1 est une frontière régulière. Envisageons, en effet, les composants du domaine $E_n - F_1$. G_1 est un tel composant [3]). Or G_0 est un ensemble connexe étranger à $F_1 \subset F_0$, donc agrégé à $E_n - F_1$, et sans points communs avec G_1. Il fait donc partie d'un composant G_2 de $E_n - F_1$, distinct de G_1. Ainsi

$$G_2 \supset G_0,$$

$$\overline{G}_2 \supset \overline{G}_0 = G_0 + F_0 \supset F_0 \supset F_1,$$

$$Fr(G_2) = \overline{G}_2 - G_2 \supset F_1 - G_2 = F_1,$$

car G_2 étant agrégé à $E_n - F_1$ n'a aucun point commun avec F_1. Comme, d'autre part,

$$Fr(G_2) \subset F_1,$$

nous obtenons donc que F_1 est la frontière commune des domaines connexes G_2 et G_1. Notre lemme est donc démontré car

$$F_1 \subset F_0 \subset F.$$

19. Le lemme que nous venons d'établir nous permet de nous restreindre dans la démonstration de B_3 (§ 17) au cas de frontières régulières; c. à d. il suffit de montrer que *toute frontière régulière de E_3 est de dimension 2*. La méthode que nous allons suivre nous permettra, d'ailleurs, d'aboutir à un résultat beaucoup plus précis; résultat qui nous servira de base pour la définition des *surfaces Cantoriennes*.

Nous commencerons par un lemme concernant la topologie des polyèdres L'énoncé de ce lemme (qui est très restrictif et de forme métrique) a été choisi de façon à le rendre immédiatement utilisable à notre but.

20. *L'intégrale de Gauss*[4]). Soient L et A deux lignes simples fermées *rectifiables* de E_3; nous supposons, d'ailleurs, qu'elles n'ont aucun point commun. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point de L, par ξ, η, ζ, d'un point de A. L'intégrale

[1]) Hausdorff, p. 330, II.
[2]) Ibid., 332, VI.
[3]) Ibid p. 330, III.
[4]) „*Verschlingungsintegral*".

$$I(L, \Lambda) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(L)} \int\limits_{(\Lambda)} \frac{\begin{vmatrix} \xi - x & dx & d\xi \\ \eta - y & dy & d\eta \\ \zeta - z & dz & d\zeta \end{vmatrix}}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}$$

est égale à un nombre entier [1]) et reste invariable quand l'une des deux courbes se déforme d'une manière continue sans traverser la seconde [2]).

Nous aurons à nous servir de quelques cas particuliers de ces faits généraux. Commençons par établir une borne supérieure de la valeur absolue de l'intégrale $I(L, \Lambda)$. Soit s la longueur de la ligne L, σ celle de Λ; et soit

$$d = \varrho(L, \Lambda).$$

$$d \leqslant [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2};$$

$$\left| \frac{\xi - x}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}} \right| \leqslant 1, \text{ etc.,}$$

car ces dernières expressions représentent les cosinus-directeurs de la droite qui joint les points (x, y, z) et (ξ, η, ζ). Il en résulte que

$$|I(L, \Lambda)| \leqslant \frac{1}{4\pi d^2} \int\limits_{(L)} \int\limits_{(\Lambda)} |dy\,d\zeta - dz\,d\eta| + \text{etc.}$$

Or $|dx| \leqslant ds$, etc., $d\xi \leqslant d\sigma$, etc.; donc

(12) $$|I(L, \Lambda)| \leqslant \frac{\sigma s \sigma}{4\pi d^2} < \frac{s\sigma}{2d^2}.$$

21. Cas particuliers.

1) Soient L et Λ deux polygones tels que $\varrho(L, \Lambda)$ surpasse le diamètre de l'un de ces polygones, p. ex. soit

$$\delta(\Lambda) \leqslant \varrho(L, \Lambda)\ [3]).$$

[1]) *„Verschlingungszahl"*.

[2]) Je ne connais aucune démonstration de ces faits qui soit valable dans des conditions aussi générales que celles de notre énoncé. Nous n'aurons, d'ailleurs, à nous servir que de lignes élémentaires (polygones, circonférences) et de déformations simples (contractions homothétiques etc.); les exposés de nature classique nous suffiront donc complètement. Voir, p. ex., Böddicker. Erweiterungen der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen, Stuttgart 1876.

[3]) l'égalité est aussi admissible à condition que L et Λ soient sans points communs.

En ce cas

$$I(L, \Lambda) = 0.$$

Démonstration. Soit a un poit de Λ, t un nombre positif < 1. Choisissons a pour centre, t pour rayon d'homothétie, et désignons par Λ_t le polygone correspondant homothétique de Λ. Or

$$\delta(\Lambda_t) = t \,.\, \delta(\Lambda) < \delta(\Lambda) < \varrho(L, \Lambda) \leqslant \varrho(L, a);$$

donc, a étant un point de Λ_t,

$$\Lambda_t \times L = 0.$$

t décroissant de 1 à $\tau (0 < \tau < 1)$ la ligne Λ_t [1] se déforme donc de la manière exigée au § précédent. Par conséquent

$$I(L, \Lambda) = I(L, \Lambda_\tau)$$

quel que soit τ (< 1).

Or la longueur de Λ_τ est égale à $\tau\sigma$;

$$\varrho(L, \Lambda_\tau) \geqslant \varrho(L, a) - \delta(\Lambda_\tau) \geqslant \varrho(L, \Lambda) - \tau\delta(\Lambda) \geqslant$$
$$\geqslant (1-\tau)\,\varrho(L, \Lambda) = (1-\tau)\,d.$$

Appliquons la formule (12) aux lignes L et Λ_τ; nous obtenons

$$|I(L, \Lambda)| = |I(L, \Lambda_\tau)| < \frac{s\,.\,\tau\sigma}{2(1-\tau)^2 d^2}.$$

Le dernier membre tend vers 0 avec τ; donc

$$I(L, \Lambda) = 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

2) Soit Λ le contour d'un carré K, L un polygone sans points communs avec K. Nous aurons encore

$$I(L, \Lambda) = 0.$$

Même démonstration.

3) Si, par contre, L traverse *une seule fois* le carré K, on aura

$$I(L, \Lambda) = \pm 1.$$

Démonstration. Effectuons un changement de coordonnées [2]) de manière que la nouvelle origine coïncide avec le point

[1]) $\Lambda_1 = \Lambda$

[2]) $I(L, \Lambda)$ est évidemment invariante par rapport à un tel changement.

$K \times L$, et que le plan $0xy$ coïncide avec le plan du carré K. Nous pouvons (sans changer la valeur de l'intégrale I) déformer L en un polygone P composé du segment

$$S = (-1, +1)$$

de l'axe $0z$ et d'une ligne polygonale T joignant les extrémités de S; T n'a aucun point commun avec K; nous supposerons de plus que

$$\varrho(0, T) = 1.$$

Ci-après le contour Λ du carré K peut être déformé (toujours sans altération de la valeur de I) en une circonférence C_r de centre 0 et de rayon r située dans le plan $0xy$; r est un nombre inférieur à

$$\varrho(0, \Lambda),$$

d'ailleurs arbitrairement petit. Ainsi

$$I(L, \Lambda) = I(P, C_r) = I(S, C_r) + I(T, C_r)\ ^{1)}.$$

Or soit t la longueur de T; comme

$$\varrho(T, C_r) \geqslant \varrho(T, 0) - r = 1 - r,$$

la formule (12) nous donnera le résultat suivant:

$$|I(T, C_r)| < \frac{2\pi r \, . \, t}{2(1-r)^2},$$

$$\lim_{r \to 0} I(T, C_r) = 0.$$

Donc

$$I(L, \Lambda) = \lim_{r \to 0} I(S, C_r).$$

Or soient $0, 0, z$ les coordonnées d'un point de S, $\xi = r cs \varphi$, $\eta = r sn \varphi$, 0, les coordonnées d'un point de C_r. Alors

$$\begin{vmatrix} \xi - x & dx & d\xi \\ \eta - y & dy & d\eta \\ \zeta - z & dz & d\zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \, d\varphi \\ r \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \, d\varphi \\ -z & dz & 0 \end{vmatrix} = -r^2 dz \, d\varphi;$$

[1] Ces deux dernières intégrales ne sont pas de vraies intégrales de Gauss (S et T n'étant pas des lignes *fermées*). Il est d'ailleurs évident que la formule (12) subsiste pour les intégrales de cette dernière espèce.

donc

$$I(S, C_r) = \pm \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \frac{r^2 \, d\varphi \, dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} \text{ [1]} = \pm \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{r^2 \, dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \pm \frac{1}{2} \left[\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \right]_{-1}^{+1} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+r^2}};$$

$$I(L, \Lambda) = \lim_{r \to 0} I(S, C_r) = \pm 1, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

22. Notons enfin une propriété relative à l'addition des intégrales de Gauss. Soient

$$\Lambda_1 = \overline{abca}$$

et

$$\Lambda_2 = \overline{badb}$$

deux polygones ayant un segment (ou une ligne polygonale) ab commun; il n'ont, d'ailleurs, aucun autre point commun. Supposons, de plus, qu'on ait établi sur ces polygones des sens de parcours *cohérents*, c. à d. tels qu'ils soient opposés sur la partie commune des deux polygones. En ce cas

$$I(L, \Lambda_1) + I(L, \Lambda_2) = I(L, \Lambda),$$

Λ étant le polygone $\overline{bcadb}$ composé de toutes les parties de Λ_1 et Λ_2 qui n'appartiennent qu'à l'un des deux polygones. Le sens de parcours sur Λ est d'ailleurs le même que celui de Λ_1 et de Λ_2 (sur les parties appartenant respectivement à ces polygones); c. à d. il est incohérent avec les deux sens de parcours précédents.

Cette proposition s'étend immédiatement à un nombre quelconque de polygones.

23. Soit Π un polyèdre formé de carrés situés dans des plans parallels aux plans de coordonnées. Nous dirons que chaque carré [2] forme à lui seul une face de Π; donc la ligne de jonction de deux carrés adjacents (même situés dans un même plan) devra toujours être considérée comme une arête de Π. L'espace E_3 est divisé par Π en deux domaines connexes: le domaine intérieur G_i et le domaine extérieur G_e.

[1]) Le double signe provient de l'indétermination du sens de parcours sur les lignes considérées.

[2]) Nous supposons, d'ailleurs, que tous ces carrés sont congruents.

Lemme. Soient $P_1, P_2, \dots P_k$ des polygones sans points communs deux à deux. Chaque P_i est composé d'arêtes de Π et satisfait à la relation

$$\delta(P_i) \leqslant \alpha,$$

α étant un nombre positif indépendent de i. L'ensemble fermé $\sum\limits_{i=1}^{k} P_i$ divise Π en deux domaines (rel. Π) non nécessairement connexes H et H_1. Soit ensuite

$$\Lambda = \overline{h a_i h_1 a_e h}$$

un polygone tel que

1) $$h \subset H, \; h_1 \subset H_1,$$

ces deux points n'appartenant, d'ailleurs, à aucune arête de Π;

2) $$\widehat{h a_i h_1} \subset G_i;$$
$$\widehat{h_1 a_e h} \subset G_e;$$

Λ traverse donc Π en deux points et deux points seulement.

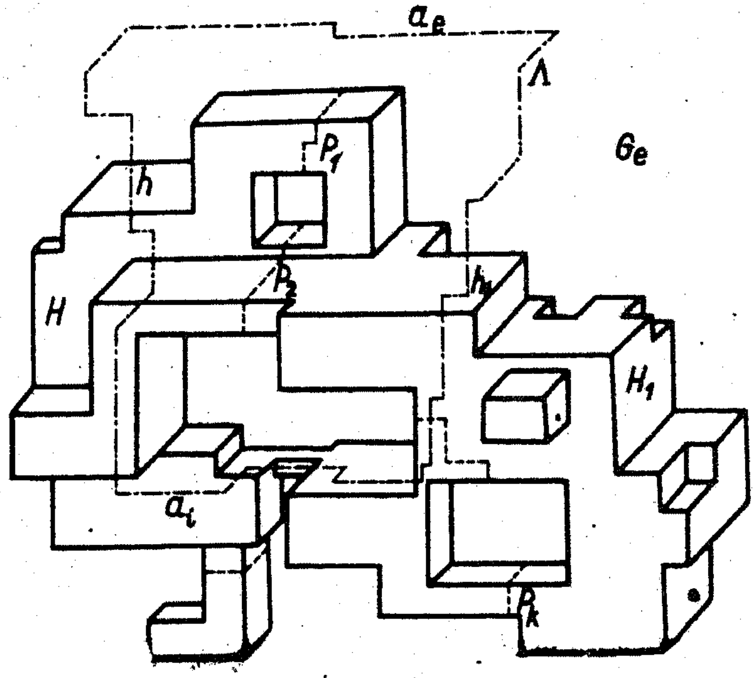

Fig. 9.

Si toutes ces hypothèses sont vérifiées, on aura

$$\varrho\left(\Lambda, \sum_{i=1}^{k} P_i\right) < \alpha.$$

24. Démonstration. On se rend aisément compte des faits suivants:

1) $\overline{H}$ est composé d'un certain nombre de faces de Π. Soient

$$K_1, K_2, \ldots, K_s$$

ces faces (carrés),

$$L_1, L_2, \ldots, L_s,$$

leurs contours. Le point h appartient à l'un de ces carrés, p. ex. à K_1. h est, par hypothèse, intérieur à K_1, c. à d. qu'il ne fait pas partie de L_1. La ligne Λ traverse donc K_1 et ne traverse aucun autre $K_j (j = 2, 3, \ldots, s)$.

2) Soit F la frontière (rel. Π) de $\overline{H}$ [1];

$$F \subset \sum_{i=1}^{k} P_i.$$

Or chaque P_i est tout entier agrégé à F ou bien lui est entièrement étrangé. Supposons, p. ex., que

$$F = \sum_{i=1}^{\varkappa} P_i. \qquad (1 \leqslant \varkappa \leqslant k)$$

De plus, quel que soit $i (\leqslant \varkappa)$, l'un et l'un seulement des deux *bords* [2]) de P_i fait partie de $\overline{H}$; l'autre appartient à H_1.

Remarque. Le fait suivant nous sera très utile dans la suite: à partir de ce moment la supposition

$$P_{i_1} \times P_{i_2} = 0$$

ne sera plus employée dans la démonstration. Il en résulte que dans le cas où ΣP_i est *à priori* définie comme la frontière d'un domaine (rel. Π) *fermé* $\overline{H}$, dans ce cas la thèse du lemme (§ 23) restera vraie même lorsque la condition $P_{i_1} \times P_{i_2} = 0$ n'est pas vérifiée. C. à d. que les polygones P_i peuvent avoir dans le cas cité des sommets communs; il est clair, en effet, que la définition indiquée des P_i ne leur permettra pas d'avoir des arêtes communes.

[1]) Cette frontière ne coïncide nullement avec la frontière (rel. Π) de H. En effet, si P_i est un polygone dont les deux bords appartiennent à H; il fera partie de la frontière de H; mais il sera intérieur à $\overline{H}$ et n'appartiendra donc pas à F. Il est à remarquer que ce dernier cas peut se présenter même si H est connexe (le genre de H étant, p. ex., égal à 2).

[2]) Le sens précis de cette locution est évident.

25. Le polyèdre Π étant une surface bilatérale, on peut établir sur tout L_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ des sens de parcours cohérents [1]). Établissons ensuite sur les P_i $(1 \leqslant i \leqslant \varkappa)$ des sens de parcours incohérents aux précédents; cela veut dire que les sens de parcours sur un L_j et sur un P_i coïncident sur tout segment commun à ces deux polygones. En ce cas (§ 22):

$$\sum_{j=1}^{s} I(L_j, \Lambda) = \sum_{i=1}^{\varkappa} I(P_i, \Lambda).$$

Or (§ 21, 3) et 2))

$$I(L_1, \Lambda) = \pm 1,$$

$$I(L_j, \Lambda) = 0; \qquad (j = 2, 3, \ldots, s)$$

donc

$$\sum_{i=1}^{\varkappa} I(P_i, \Lambda) \neq 0.$$

Il en résulte qu'il existe un indice i tel que

$$I(P_i, \Lambda) \neq 0.$$

Or $\delta(P_i) \leqslant \alpha$; donc $\varrho(P_i, \Lambda) < \alpha$, car dans le cas contraire on aurait

$$\delta(P_i) \leqslant \varrho(P_i, \Lambda),$$

relation qui entraine (§ 21, 1))

$$I(P_i, \Lambda) = 0.$$

Ainsi $\varrho(P_i, \Lambda) < \alpha$,

$$\varrho(\Lambda, \sum_{i=1}^{k} P_i) < \alpha, \text{ [2])} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

26. Revenons aux frontières régulières (dans E_3). Je dis que toute frontière régulière reste connexe quand on en supprime les points d'un ensemble fermé punctiforme arbitraire; c. à d. qu'aucun couple de points d'une frontière régulière (dans E_3)

[1]) **Möbius.** Werke t. II. p. 519.

[2]) Il est clair, d'ailleurs, que ce lemme reste vrai quelle que soit la nature du polyèdre Π, et que la partie essentielle (topologique) de sa thèse consiste en ce que $I(P_i, \Lambda) \neq 0$, c. à d. en ce que Λ est entrelacée (*verschlungen*) dans l'un des polygones P_i.

ne peut être séparé par un ensemble fermé punctiforme.

Supposons, par contre, qu'il existe une frontière régulière Φ_0 et un ensemble fermé punctiforme B_0 (agrégé à Φ_0) tels que

$$\Phi_0 - B_0 = A_0 + D_0,$$
$$H(A_0, D_0) = 0. \tag{13}$$

Les ensembles A_0 et D_0 doivent être, bien entendu, non vides; soit, p. ex., a_0 un point de A_0, d_0 un point de D_0.

Montrons tout d'abord que si cette hypothèse était réaliée pour une frontière régulière Φ_0 *quelconque*, elle le serait encore pour une frontière régulière Φ *de forme spéciale*; forme qui sera précisée dans un moment. Il suffira donc de démontrer l'impossibilité de notre hypothèse dans le cas de ces frontières spéciales.

Introduisons pour simplifier l'exposé la notion d'éléments dyadiques.

Un point, une droite, un plan (dans E_3) seront dits dyadiques, s'il sont définis respectivement par trois, deux ou une équation de la forme

$$x_i = \alpha_i, \qquad (x_i = x, y, z)$$

les α_i étant des nombres dyadiques, c. à d. des nombres de la forme $\frac{p}{2^q}$ (q — entier non négatif, p — entier quelconque).

Un segment sera dit dyadique s'il est situé sur une droite dyadique et limité par des points dyadiques. Un carré est dyadique s'il est limité par des segments dyadiques; on voit aisément qu'il est situé dans un plan dyadique. Enfin un cube sera dyadique si ses faces sont des carrés dyadiques; ses arêtes et ses sommets seront aussi dyadiques.

Il est évident que tout point de E_3 est intérieur à un cube dyadique arbitrairement petit; de même, tout point d'un plan dyadique Π est intérieur (par rapport à Π) à un carré dyadique aussi petit que l'on veut.

27. Φ_0 est, par hypothèse, la frontière commune d'au moins deux domaines connexes G_0 et H_0. Φ_0 étant borné, l'un de ces domaines le sera aussi; supposons que ce soit G_0'.

Il est aisé à voir que A_0 et D_0 sont des domaines (rel. Φ_0) [1];

[1]) Comparez le § 10 du ch. I.

donc B_0+D_0 et A_0+B_0 sont des ensembles fermés. Il en résulte que

$$\varrho(a_0, B_0+D_0)>0,$$
$$\varrho(d_0, A_0+B_0)>0;$$

soit β le plus petit de ces deux nombres. Or on peut choisir deux cubes dyadiques de diamètres $<\frac{\beta}{2}$ auxquels les points a_0 et d_0 sont respectivement intérieurs. Désignons par S_a et S_d ces cubes (frontières exclues), et soient F_a et F_d leurs frontières. Il en résulte que

$$a_0 \subset S_a,\ d_0 \subset S_d;$$

$$\overline{S}_a = S_a + F_a,\ \overline{S}_d = S_d + F_d. \tag{14}$$

De plus le choix de β entraine les relations suivantes:

$$\overline{S}_a \times \overline{S}_d = 0;$$

$$\overline{S}_a \times \Phi_0 \subset A_0,\ \overline{S}_d \times \Phi_0 \subset D_0. \tag{15}$$

Examinons le domaine

$$G_1 = G_0 - (\overline{S}_a + \overline{S}_d).$$

Il n'est pas nécessairement connexe. Mais il contient en tout cas au moins un composant G[1]) tel que sa frontière Φ a des points communs avec chacun des deux ensembles F_a et F_d.

En effet, a_0 et d_0 étant des points-frontières du domaine G_0 et appartenant respectivement aux domaines S_a et S_d, il existe des points a_1 et d_1 tels que

$$a_1 \subset S_a \times G_0,\ d_1 \subset S_d \times G_0.$$

Or G_0 est connexe; on peut donc joindre a_1 et d_1 par une ligne polygonale $\overline{a_1 d_1}$ entièrement agrégée à G_0 [2]). Le premier point de cette ligne est intérieur à S_a; le dernier, extérieur à S_a. $\overline{a_1 d_1} \times F_a$ n'est donc pas vide [3]); soit q_2 le dernier point de cet ensemble qu'on rencontre en parcourant $\overline{a_1 d_1}$. Il en résulte que la partie $\widehat{q_2 d_1}$ de $\overline{a_1 d_1}$ est étrangère à $\overline{S}_a$; elle est donc agrégée à

$$G_0 - \overline{S}_a.$$

[1]) $G \varepsilon \mathfrak{G}$.
[2]) Hausdorff, p. 332, VII.
[3]) Ibid, p. 247, VII. Cet ensemble est fermé.

Un raisonnement analogue nous montre qu'il existe sur $\overline{a_2 d_1}$ un premier point d_2 agrégé à F_d; de plus la ligne polygonale ouverte $\widehat{a_2 d_2}$ ($\subset \overline{a_2 d_1}$) est étrangère à $\overline{S_a}$; elle fait donc partie de

$$(G_0 - \overline{S_a}) - \overline{S_d} = G_1 .$$

Ainsi l'ensemble connexe $\widehat{a_2 d_2}$ appartient à G_1; il est donc entièrement agrégé à un composant de G_1. Soit G ce composant, Φ sa frontière. Le point a_2 est un point limite de $\widehat{a_2 d_2} \subset G$; donc $a_2 \subset \overline{G}$. Or a_2 est étranger à $G_1 \supset G$; il en résulte que

$$a_2 \subset \overline{G} - G = \Phi ;$$

$$\Phi \times F_a \subset a_2 \neq 0 .$$

On voit de même que

$$\Phi \times F_d \supset d_2 \neq 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

28. Il est aisé à voir que les points de F_a suffisamment rapprochés du point a_2 appartiennent tous à Φ; de même les points de F_d voisins de d_2.

En effet a_2, p. ex., est un point intérieur de G_0; il existe donc une sphère $S(a_2, \delta)$ agrégé à G_0. Nous supposons, d'ailleurs, que δ à été choisi de manière que les deux conditions suivantes soient vérifiées:

1) $\delta < \varrho(\overline{S_a}, \overline{S_d})$; il en résulte ($a_2$ étant agrégé à $\overline{S_a}$) que $\overline{S_d} \times S(a_2, \delta) = 0$;

2) δ est inférieur à la distance entre a_2 et l'ensemble des faces de F_a auxquelles a_2 n'appartient pas.

Il s'agit de démontrer que

$$F_a \times S(a_2, \delta) \subset \Phi$$

Or il est évident que chaque point de cet ensemble est un point-frontière du domaine

$$G_a = S(a_2, \delta) - \overline{S_a} .$$

Ce domaine est selon le cas:

1° une demisphère (si a_2 n'appartient à aucune arête de F_a);

2° une sphère diminuée d'un quadrant (quand a_2 appartient à une arête mais n'est pas un sommet de F_a);

3° une sphère diminuée d'un octant (si a_2 est un sommet de F_a). [1]).

[1]) Ces faits résultent immédiatement de la condition 2).

C'est en tous cas un domaine connexe. Or il fait partie de $S(a_2, \delta) \subset G_0$ et est étranger à $\overline{S_a}$ (par définition) et à $\overline{S_d}$ (d'après la condition 1)). Il en résulte que G_a est agrégé à G_1, donc à un composant de G_1. Or ce composant ne peut être autre que G, car a_2 est un point frontière de G, tandis que tous les points de G_1 suffisamment rapprochés de a_2 appartiennent à G_a.

Par conséquent

$$F_a \times S(a_2, \delta) \subset \overline{G_a} \supset \overline{G};$$

donc, F_a étant étrangé à G,

$$F_a \times S(a_2, \delta) \subset \overline{G} - G = \Phi, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On en déduit (§ 26) que $\Phi \times F_a$ contient un carré dyadique K_a; choisissons sur K_a un point a ayant deux coordonnées n o n d y a d i q u e s (la troisième est nécessairement dyadique).

De même, $\Phi \times F_d$ contient un carré dyadique K_d; soit d un point de K_d n'ayant qu'une coordonnée dyadique.

29. Ainsi, Φ contient deux carrés dyadiques. Ce sont les frontières régulières de cette forme spéciale que nous avions en vue au § 26. Il s'agit donc de démontrer en premier lieu que Φ e s t u n e f r o n t i è r e r é g u l i è r e.

Montrons tout d'abord que

$$\Phi \subset \Phi_0 + F_a + F_d.$$

En effet, G est un composant de G_1; donc

$$\Phi \subset Fr(G_1) = \overline{G_1} - G_1 \subset \overline{G_0} - G_1 = (\Phi_0 + G_0) - G_1 =$$

$$= (\Phi_0 - G_1) + (G_0 - G_1) \subset \Phi_0 + (\overline{S_a} + \overline{S_d}) =$$

$$= (\Phi_0 + F_a + F_d) + (S_a + S_d).$$

Or les domaines S_a et S_d sont étrangers à $G_1 \supset G$, donc aussi à Φ (frontière de G); par conséquent

$$\Phi \subset \Phi_0 + F_a + F_d. \tag{16}$$

Envisageons ensuite le domaine H_0. Il est étranger à $G_0 \subset G$, donc aussi à Φ. Or il est connexe; il fait donc partie d'un composant H de $E_3 - \Phi$ distinct de G. Je dis que

$$H \subset H_0 + S_a + S_d.$$

En effet $H \supset H_0$; or S_a, p. ex., est aussi un domaine connexe étranger à G et à Φ; il fait donc aussi partie d'un composant de

$E_3 - \Phi$. Or ce composant ne peut être distinct de H car S_a a des points communs avec $H_0 \subset H$; tels sont notamment tous les points de H_0 qui sont suffisamment rapprochés du point a_0 (ce point appartient à S_a et à la frontière Φ_0 de H_0). Un raisonnement analogue nous montre que $H \supset S_d$.

Les relations démontrées nous donnent immédiatement:

$$\overline{H} \supset \overline{H}_0 + \overline{S}_a + \overline{S}_d \supset \Phi_0 + F_a + F_d \supset \Phi;$$

donc, H étant étranger à Φ,

$$Fr(H) \supset \Phi.$$

D'autre part H est un composant de $E_3 - \Phi$; il en résulte que

$$Fr(H) \subset \Phi.$$

Ainsi Φ est la frontière commune des domaines connexes G et H; de plus, $G \subset G_0$ est borné. Φ est donc une frontière régulière, c. q. f. d.

30. Notons encore une propriété des carrés dyadiques K_a et K_d qui nous sera utile dans la suite.

Soit a^* un point quelconque inférieur à K_a (ou à K_d). Je dis que tous les points suffisamment rapprochés de a^* qui ne sont pas eux-mêmes situés sur K_a, ces points appartiennent nécessairement à l'un des domaines G ou H.

En effet, $a^* \subset K_a \subset S(a_2, \delta)$; il existe donc une sphère $S(a^*, \delta^*)$ qui est agrégée à $S(a_2, \delta)$. Supposons δ^* inférieur à la distance de a^* au contour de K_a. En ce cas

$$S(a^*, \delta^*) \times F_a \subset K_a.$$

Il en résulte que

$$S(a^*, \delta^*) - K_a = S(a^*, \delta^*) - F_a =$$
$$= S(a^*, \delta^*) \times S_a + [S(a^*, \delta^*) - \overline{S}_a];$$

or

$$S(a^*, \delta^*) \times S_a \subset S_a \subset H \ (\S\ 29),$$

$$S(a^*, \delta^*) - \overline{S}_a \subset S(a_2, \delta) - \overline{S}_a \subset G \ (\S\ 28), \quad \text{c. q. f. d.}^{1)}$$

[1]) Il en résulte, en particulier, qu'aucun point de K_a (en supposant que le contour de K_a ne fait pas partie de K_a) n'est un point-limite de l'ensemble $\Phi - K_a$; c. à d. que $\Phi - K_a$ est fermé. De même $\Phi - K_d$ est fermé. On peut exprimer ce fait en disant que les carrés K_a et K_d sont *libres* (voir la définition d'un *arc libre* dans la seconde partie de ce mémoire).

On voit, d'ailleurs, que les points adjacents à l'un des deux côtés de K_a appartiennent tous à G, tandis que ceux qui sont situés près de l'autre font partie de H.

Soit, en particulier, $S(a, \delta_0)$ la sphère $S(a^*, \delta^*)$ relative au point a. Choisissons deux cubes dyadiques (frontières exclues) Q_a et Q_a^1 tels que

(17 a) $$a \subset Q_a \subset \overline{Q}_a \dot{\subset} Q_a^1 \subset \overline{Q_a^1} \subset S(a, \tfrac{1}{2}\delta_0).$$

Soient de même Q_d et Q_d^1 des cubes analogues relatifs au point d. Il est évident que

(18 a) $$\overline{Q_a^1} \subset K_a + G + H,$$

(18 d) $$\overline{Q_d^1} \subset K_d + G + H.$$ [1]

31. Montrons maintenant que la frontière régulière spéciale Φ que nous avons obtenue doit posséder des propriétés analogues à celles de Φ_0 (voir § 26); nous verrons notamment que l e s p o i n t s a e t d p e u v e n t ê t r e s é p a r é s p a r u n e n s e m b l e p u n c t i f o r m e f e r m é.

En effet, posons
$$B = B_0 \times \Phi,$$
$$A = (A_0 + F_a) \times \Phi,$$
$$D = (D_0 + F_d) \times \Phi.$$

Les ensembles A, B, D sont deux à deux sans points communs; cela résulte immédiatement de la définition des ensembles A_0, B_0, D_0 (§ 26) et des relations (14) et (15) du § 27. De plus
$$A + B + D = \Phi \times (A_0 + B_0 + D_0 + F_a + F_d) =$$
$$\Phi \times (\Phi_0 + F_a + F_d) = \Phi \ ((16), \S\ 29).$$
Or (§ 28)
$$a \subset K_a \subset \Phi \times F_a \subset A,$$
$$d \subset K_d \subset \Phi \times F_d \subset D.$$
Enfin,
$$H(A, D) \subset H(A_0 + F_a, D_0 + F_d) =$$
$$= H(A_0, D_0) + H(F_a, D_0) + H(A_0, F_d) + H(F_a, F_d).$$

Le premier ensemble de la dernière ligne est vide ((13), § 26); il en est de même des trois autres [2].

[1]) On voit aisément que $\overline{Q_a^1} \times \overline{Q_d^1} = 0$.

[2]) On a, d'après la définition de F_a et F_d (§ 27), $\varrho(F_a, D_0) > 0$, $\varrho(A_0, F_d) > 0$; F_a et F_d sont des ensembles fermés sans partie commune.

Il en résulte que

$$H(A, D) = 0;$$

l'ensemble B sépare donc les points a et d. Or B est punctiforme [1]) et fermé. Notre assertion est donc démontrée.

Ainsi, si l'hypothèse du § 26 était vraie, il existerait aussi une frontière régulière Φ contenant deux carrés libres K_a et K_d, et telle que deux points a et d appartenant respectivement à ces carrés pourraient être séparés par un ensemble fermé punctiforme B.

Reste donc à démontrer qu'une telle circonstance ne peut avoir lieu. Nous nous occuperons donc de cette démonstration; toutes les notations des §§ 26—31 y seront conservées.

32. Le polygone Λ. Menons par a la droite Δ_a perpendiculaire au plan du carré K_a; et soient a_g^1 et a_h^1 ses points d'intersection avec la frontière du cube Q_a^1 (§ 30). L'un de ces points (a_g^1) est agrégé à G, l'autre (a_h^1) à H. Désignons de même par a_g et a_h ($a_g \subset G$, $a_h \subset H$) les points d'intersection de Δ_a avec la frontière de Q_a. On a

$$a_h^1 \lessgtr a_h \lessgtr a \lessgtr a_g \lessgtr a_g^1.$$

On définit de la même manière les points

$$d_g^1 \lessgtr d_g \lessgtr d \lessgtr d_h \lessgtr d_h^1.$$

Les points a_g^1 et d_g^1 étant agrégés à G, il peuvent être réunis par une ligne polygonale $\overline{a_g^1\, e_g\, d_g^1} = \Lambda_g$ située dans G. On peut d'ailleurs supposer que Λ_g n'a aucun point intérieur à l'un des cubes Q_a^1 et Q_d^1. En effet, tout morceau de Λ_g intérieur à Q_a^1 (ou à Q_d^1) peut être remplacé par une ligne polygonale située sur la partie de la frontière de Q_a^1 qui est agrégée à G [2]). On n'a ensuite qu'à supprimer les lacets peut-être obtenus pour donner à Λ_g la forme voulue.

Soit de même $\Lambda_h = \overline{d_h^1\, e_h\, a_h^1}$ une polygonale agrégée à H et qui n'a aucun point commun avec $Q_a^1 + Q_d^1$. Nous obtenons ainsi un polygone

$$\overline{a\, a_g\, a_g^1\, e_g\, d_g^1\, d_g\, d\, d_h\, d_h^1\, e_h\, a_h^1\, a_h\, a} = \Lambda$$

n'ayant que deux points communs (a et d) avec Φ; l'une

[1]) D'après $B \subset B_0$.

[2]) Cette partie forme cinq faces d'un parallélépipède.

de ses moitiés est agrégée à G, l'autre, à H:

$$\widehat{a\,e_g\,d} \subset G, \quad \widehat{d\,e_h\,a} \subset H.$$

De plus

$$\Lambda \times Q_a^1 = \widehat{a_h^1 a_g^1},$$
$$\Lambda \times Q_d^1 = \widehat{d_g^1 d_h^1}.\ [1]$$

Remarquons encore que chacun des points a_g, d_g, etc. n'a qu'une seule coordonnée dyadique (celle qui est définie par la face de Q_a ou de Q_d sur laquelle le point correspondant est situé).

33. Par définition

$$\Lambda \times \Phi = a + d;$$

or

$$a \subset Q_a, \quad d \subset Q_d;$$

il en résulte que les ensembles fermés Λ et $\Phi - (Q_a + Q_d)$ sont sans points communs.

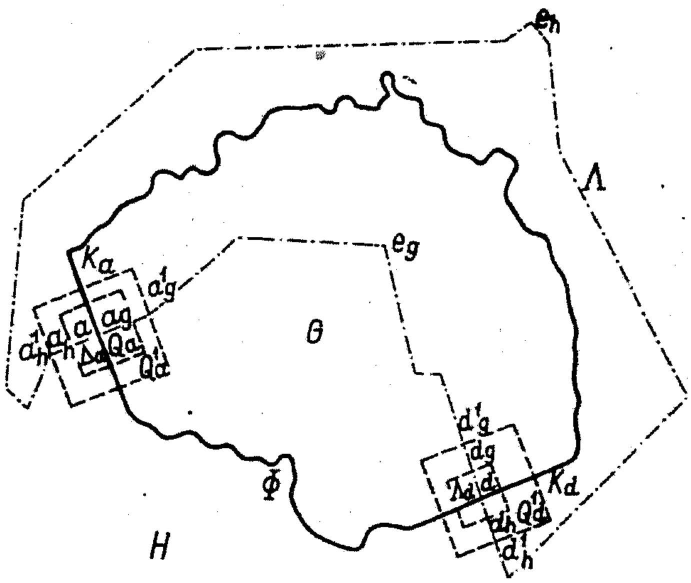

Fig. 3.

Par conséquent

$$\gamma = \varrho\,(\Lambda, [\Phi - (Q_a + Q_d)]) > 0. \tag{19}$$

L'ensemble fermé punctiforme B peut donc être décomposé en un nombre fini d'ensembles fermés

$$B_1, B_2, \ldots, B_s$$

sans points communs deux à deux et tels que

$$\delta\,(B_i) < \frac{\gamma}{4}.\ [2] \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

[1] $\widehat{a_h^1 a_g^1}$ et $\widehat{d_g^1 d_h^1}$ sont des intervalles.

[2] La démonstration de cette proposition bien connue peut être obtenue comme il suit. B est de dimension 0 (Ch 1, § 14); donc d'après le lemme du § 17 du

Soit δ un nombre positif inférieur à $\frac{\gamma}{2}$ et à toutes les distances $\varrho(B_i, B_k)$:

$$\delta < \frac{\gamma}{2}, \ \delta < \varrho(B_i, B_k) \qquad (i \neq k; i, k = 1, 2, \ldots, s)$$

Envisageons les ensembles fermés

$$(A+B) - S\left(B, \frac{\delta}{3}\right) = A - S\left(B, \frac{\delta}{3}\right)$$

et

$$(B+D) - S\left(B, \frac{\delta}{3}\right) = D - S\left(B, \frac{\delta}{3}\right)$$

Ils n'ont aucun point commun. Donc

(20) $$\varepsilon = \varrho\left(\left[A - S\left(B, \frac{\delta}{3}\right)\right], \left[D - S\left(B, \frac{\delta}{3}\right)\right]\right) > 0.$$

Choisissons enfin un nombre entier positif q vérifiant les deux conditions suivantes:

1) $\frac{1}{2^q} < \frac{\varepsilon}{4}, \ \frac{1}{2^q} < \frac{\delta}{12}$;

2) soient $\frac{p_j}{2^{q_j}}$ ($j = 1, 2, \ldots, 48$; p_j est un entier, q_j un entier non négatif; toutes ces fractions sont supposées irréductibles) les coordonnées des sommets des cubes dyadiques $\overline{Q}_a$ et $\overline{Q}_d$; q doit être supérieur à tous ces q_j.

34. Soit T le réseau de cubes défini par les plans dyadiques

$$x = \frac{p_1}{2^q}, \ y = \frac{p_2}{2^q}, \ z = \frac{p_3}{2^q};$$

(p_1, p_2, p_3 prennent toutes les valeurs entières).

Les cubes de T seront supposés fermés. Chacun de ces cubes est de diamètre égal à

$$\frac{\sqrt{3}}{2^q} < \frac{3}{2};$$

Ch. I, B peut être décomposé en un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles B_i sans points communs deux à deux et tels que $B_i \varepsilon \mathfrak{F}$ (rel B), $B_i \varepsilon \mathfrak{G}$ (rel B), $\delta(B_i) < \frac{\gamma}{4}$. Or, B étant fermé, les B_i le sont aussi; d'autre part, le théorème de Heine-Borel nous montre que les B_i ne peuvent être qu'en nombre fini.

de plus chacun d'eux est (d'après la condition 2) du § précédent) ou bien entièrement contenu dans $\overline{Q}_a$ ou bien entièrement étranger à Q_a; même propriété par rapport au cube Q_d.

Soient T_a^* et T_d^* deux cubes de T ayant au moins une arête L^* commune et tels que

$$T_a^* \times A \neq 0, \quad T_d^* \times D \neq 0.$$

Je dis qu'en ce cas

$$L^* \subset S\left(B, \frac{\delta}{2}\right).$$

En effet, soit a^* un point de $A \times T_a^*$, $d^* \subset D \times T_d^*$. On a

$$\varrho(a^*, d^*) \leqslant \delta(T_a^*) + \delta(T_d^*) < \varepsilon;$$

il en résulte, d'après (20), § 33, que les deux inclusions

$$a^* \subset A - S\left(B, \frac{\delta}{3}\right),$$

$$d^* \subset D - S\left(B, \frac{\delta}{3}\right)$$

ne peuvent avoir lieu en même temps. Or $a^* \subset A$, $d^* \subset D$; donc l'un au moins des deux points a^* et d^* est agrégé à $S\left(B, \frac{\delta}{3}\right)$; supposons que ce soit le premier (les deux cas sont symétriques):

$$\varrho(a^*, B) < \frac{\delta}{3}.$$

Or tout point l^* de L^* fait partie du cube T_a^*; par conséquent,

$$\varrho(l^*, a^*) \leqslant \delta(T_a^*) = \frac{\sqrt{3}}{2^q} < \frac{\delta}{6};$$

$$\varrho(l^*, B) \leqslant \varrho(l^*, a^*) + \varrho(a^*, B) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{6} = \frac{\delta}{2};$$

$$L^* \subset S\left(B, \frac{\delta}{2}\right), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

35. Les préliminaires des §§ 32—34 terminés, nous abordons la construction principale.

Envisageons l'ensemble des cubes de T situés dans

$$G-(Q_a+Q_d).$$

Ces cubes forment un ou plusieurs solides. Deux solides seront, par définition, considérés comme différents, s'ils n'ont que des sommets ou des arêtes communes, c. à d. s'ils n'ont aucune face commune [1]).

Je dis que tout cube de T qui a des points communs avec la ligne polygonale ouverte (§ 32).

$$\Lambda_g=\widehat{a_g\, a_g^1\, e_g\, d_g^1\, d_g}$$

fait partie de l'un de ces solides.

En effet (§ 32),

$$\overline{a_g^1\, e_g\, d_g^1} \subset G-(Q_a^1+Q_d^1),$$

tandis que les intervalles $\widehat{a_g a_g^1}$ et $\widehat{d_g^1 d_g}$ appartiennent respectivement à $Q_a^1-\overline{Q}_a$ et $Q_d^1-\overline{Q}_d$; donc, tout point λ^* de Λ_g est agrégé à

$$G-(\overline{Q}_a+\overline{Q}_d).$$

Soit T_λ^* un cube de T contenant λ^*. T_λ^* n'est donc pas entièrement contenu dans $\overline{Q}_a$ ou dans $\overline{Q}_d$; il est par conséquent (§ 34) entièrement étranger à Q_a et à Q_a. Ainsi si T_λ^* n'était pas (contrairement à notre hypothèse) contenu dans

$$G-(Q_a+Q_d),$$

il aurait des points communs avec Φ ou avec H. Dans le second cas il aurait encore [2]) des points communs avec Φ. Soit φ^* un de ces points; φ^* est donc agrégé à

$$\Phi-(Q_a+Q_d).$$

Or $\lambda^* \subset \Lambda_g \subset \Lambda$; il en résulte ((19), § 33) que

$$\varrho(\lambda^*, \varphi^*) \geqslant \gamma > \delta(T_\lambda^*),$$

ce qui est impossible. Notre assertion est donc démontrée.

On en déduit immédiatement que les cubes ayant des points communs avec Λ_g appartiennent à *un même* solide R; tous les points de Λ_g sont de plus intérieurs à ce solide.

[1]) Nous ferons relativement aux faces, arêtes et sommets de ces solides des conventions analogues à celles du § 23 (relatives au polyèdre Π).

[2]) Hausdorff, p. 247, VII.

Les composants de $E_3 - R$ (qui sont en nombre fini) ont des frontières polyèdrales. La somme de ces polyèdres constitue la frontière de R; on remarquera d'ailleurs que deux polyèdres différents peuvent avoir des sommets et des arêtes communs.

Or la ligne polygonale ouverte

$$\Lambda_R = \Lambda - \overline{\Lambda}_g = \widehat{d_g d_R e_R a_R a_g}$$

est entièrement contenue dans

$$Q_d + H + Q_a;$$

donc

$$R \times \Lambda_R \subset [G - (Q_a + Q_d)] \times [H + (Q_a + Q_d)] = 0;$$

Λ_R fait partie de $E_3 - R$, donc d'un composant de ce domaine. Soit $\widetilde{H}$ ce composant, Π sa frontière. Π est un polyèdre; on voit d'ailleurs aisément qu'il est de la forme indiquée au § 23.

Désignons encore par $\widetilde{G}$ le second domaine déterminé par Π; $\widetilde{G}$ est évidemment composé des points intérieurs de R et des composants de $E_3 - R$ distincts de $\widetilde{H}$. En particulier,

$$\Lambda_g \subset \widetilde{G}$$

Or $\Lambda_R \subset \widetilde{H}$; donc a_g et a_R qui sont les extrémités communes de Λ_g et Λ_R, appartiennent tous les deux à Π. Aucun de ces deux points ne peut être situé sur une arête de Π. En effet, les arêtes de Π sont dyadiques, tandis que a_g et a_R n'ont chacun qu'une seule coordonnée dyadique (§ 32).

Nous voyons ainsi que la disposition de Λ par rapport à Π est la même qu'au § 23.

36. Soit F^* une face arbitraire de Π. Examinons les deux cubes de T adjacents à F^*, L'un deux, G_f^*, est agrégé à $\widetilde{\widetilde{G}}$, l'autre, H_f^* à $\widetilde{\widetilde{H}}$. G_f^* est, de plus, contenu dans R; en effet, F^* est une face du polyèdre Π qui fait partie de la frontière de R. Il en résulte que H_f^* ne peut être entièrement agrégé à

$$G - (Q_a + Q_d).$$

En effet, s'il en était ainsi H_f^* serait agrégé à R, comme il suit immédiatement de la définition de R (§ 35); en ce cas F^* ne pourrait être située sur la frontière de R.

Ainsi trois cas sont possibles *a priori*:

1) H_f^* est agrégé (voir § 34) à $\overline{Q}_a$ ou à $\overline{Q}_d$; nous dirons alors que F^* est une face (Q_a) ou une face (Q_d);

2) H_f^* a des points communs avec $\Phi - (Q_a + Q_d)$;

3) H_f^* a des points communs avec $H - (Q_a + Q_d)$.

Or la face F^* de H_f^* est agrégée à $R \subset G$; H_f^* ne pourra donc atteindre H qu'en ayant des points communs avec Φ. Nous voyons ainsi (en tenant compte des propriétés des cubes de T par rapport à Q_a et à Q_d, propriétés indiquées au § 34) que le troisième cas se réduit au second. Nous subdiviserons ce cas-là en trois autres:

2a) $H_f^* \times \Phi \subset A$. Nous dirons alors que F^* est une face (A).

2d) $H_f^* \times \Phi \subset D$. En ce cas $F^* \varepsilon (D)$.

2b) Les cas restants ($H_f^* \times B \neq 0$, ou bien $H_f^* \times A \neq 0$ et $H_f^* \times D \neq 0$ simultanément). Nous dirons que $F^* \varepsilon (B)$.

On voit, en particulier, que les faces qui contiennent les points a_g et d_g sont respectivement des faces (Q_a) et (Q_d).

Soient F_1^* et F_2^* deux faces adjacentes,

$$F_1^* \varepsilon (Q_a).$$

En ce cas F_2^* ne peut être qu'une face (Q_a) ou (A).

Démonstration. Soient $H_{f_1}^*$ et $H_{f_2}^*$ les cubes correspondants; $H_{f_1}^* \subset \overline{Q}_a$. Or ((17 a), § 30)

$$\overline{Q}_a \subset S\left(a, \frac{1}{4}\vartheta_0\right),$$

tandis que (§ 30)

$$S(a, \vartheta_0) \subset K_a + G + H \subset A + G + H,$$

donc

$$\varrho(a, B + D) \geqslant \vartheta_0.$$

Soit u^* un point de l'arête $F_1^* \times F_2^*$, v^* un point arbitraire de $H_{f_2}^*$; $u^* \subset H_{f_1}^* \times H_{f_2}^*$. Il vient

$$u^* \subset H_{f_1}^* \subset \overline{Q}_a \subset S\left(a, \frac{1}{4}\vartheta_0\right),$$

$$\varrho(a, u^*) < \frac{1}{4}\vartheta_0; \tag{21}$$

$$\varrho(u^*, v^*) \leqslant \delta(H_{f_2}^*) = \delta(H_{f_1}^*) \leqslant \delta(\overline{Q}_a) < \frac{1}{2}\vartheta_0;$$

$$\varrho(a, v^*) \leqslant \varrho(a, u^*) + \varrho(u^*, v^*) < \frac{3}{4}\vartheta_0 \leqslant \frac{3}{4}\varrho(a, B + D).$$

Donc aucun point de $H^*_{f_2}$ ne peut être agrégé à B ou à D; F^*_2 ne fait pas partie des classes (B) et (D). Reste donc à montrer que F^*_2 n'est pas une face (Q_d), c. à d. que $H^*_{f_2}$ n'est pas contenu dans $\overline{Q}_d$. Or on a d'après (21):

$$\varrho\,(a, u^*) < \frac{1}{4}\,\varrho\,(a, B+D) \leqslant \frac{1}{4}\,\varrho\,(a, d); \tag{22 a}$$

l'inclusion $H^*_{f_2} \subset \overline{Q}_d$ entrainerait de même

$$\varrho\,(d, u^*) < \frac{1}{4}\,\varrho\,(a, d). \tag{22 d}$$

Or les inégalités (22 a) et (22 d) sont évidemment incompatibles. Donc F^*_2 n'est pas une face (Q_d), c. q. f. d.

On démontre de la même manière qu'une face adjacente à une face (Q_d) ne peut faire partie que des classes (Q_d) et (D).

37. Envisageons la somme U de toutes les faces (Q_a) et (A). L'ensemble U est par rapport à Π un domaine fermé; la frontière P de U est composée d'un ou plusieurs polygones $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Ces polygones sont formés par des arêtes de Π; ils peuvent avoir des sommets communs.

Les ensembles

$$\widehat{A} = U - P \text{ et } \widehat{D} = \Pi - U$$

sont des domaines (rel. Π). On a

$$a_0 \subset \widehat{A}, \quad d_0 \subset \widehat{D}.$$

Désignons encore par α le plus grand des nombres

$$\delta\,(P_1),\ \delta\,(P_2), \ldots,\ \delta\,(P_k)$$

Nous sommes alors (à part une légère modification de notations) dans le cas du lemme (§ 23) modifié (modification indiquée au § 24, remarque). Il en résulte qu'on doit avoir

$$\varrho\,(P, A) < \alpha. \tag{23}$$

Voyons si cette condition est vérifiée. Soit L^* une arête quelconque agrégé à P, et soient F^*_1 et F^*_2 les faces de Π adjacentes à cette arête. D'après la définition de P l'une et l'une seulement de ces deux faces est agrégée à U; supposons que ce soit F^*_1. F^*_1 est donc une face (Q_a) ou (A). Or le premier cas ne peut se produire, car une face (Q_a) et une face de l'une des classes (B),

(D), (Q_α) ne peuvent être adjacentes (§ 36). On voit de même que F_2^* n'est pas une face (Q_α). Ainsi, $F_1^* \varepsilon (A)$, F_2^* appartient à l'une des deux classes (B) ou (D). Deux cas sont à distinguer:

1) $F_2^* \varepsilon (D)$. Soient (comme au § précédent) $H_{f_1}^*$ et $H_{f_2}^*$ les cubes de T situés dans $\bar{\bar{\bar{H}}}$ et adjacents aux faces considérées. D'après la définition des classes (A) et (D), on a

$$H_{f_1}^* \times A \neq 0, \quad H_{f_2}^* \times D \neq 0.$$

Les cubes $H_{f_1}^*$ et $H_{f_2}^*$ ont donc les mêmes propriétés que les cubes T_α^* et T_β^* du § 34; il en résulte que

$$L^* \subset S\left(B, \frac{\delta}{2}\right). \tag{24}$$

2) $F_2^* \varepsilon (B)$. $H_{f_2}^*$ peut encore avoir des points communs avec D; nous sommes alors dans le cas précédent. S'il n'en est pas ainsi on aura nécessairement (§ 34, cas 2b) $H_{f_2}^* \times B \neq 0$. L^* étant agrégée à $H_{f_2}^*$ on a donc quel que soit le point l^* de L^*,

$$\varrho (l^*, B) \leqslant \delta (H_{f_2}^*) = \frac{\sqrt{3}}{2^q} < \frac{\delta}{6}$$

(§ 33, 1) et § 34). Par conséquent

$$L^* \subset S\left(B, \frac{\delta}{6}\right);$$

l'inclusion (24) est donc toujours vérifiée. L^* étant une arête arbitraire de P, on en déduit que

$$P \subset S\left(B, \frac{\delta}{2}\right). \tag{25}$$

Or $B = \sum_{i=1}^{s} B_i$, tous les $\varrho (B_i, B_k)$ étant supérieurs à δ (§ 33). Ainsi

$$P \subset \sum_{i=1}^{s} S\left(B_i, \frac{\delta}{2}\right).$$

De plus $(i \neq k)$,

$$\varrho\left(S\left(B_i, \frac{\delta}{2}\right), \quad S\left(B_k, \frac{\delta}{2}\right)\right) \geqslant \varrho (B_i, B_k) - 2 \cdot \frac{\delta}{2} > 0;$$

on voit donc que tout composant de P est entièrement contenu dans un certain $S\left(B_i, \frac{\delta}{2}\right)$. Il en est de même *à fortiori* de tout polygone P_j; on a donc

$$\delta(P_j) \leqslant \delta\left(S\left(B_i, \frac{\delta}{2}\right)\right) \leqslant \delta(B_i) + 2 \cdot \frac{\delta}{2} > \frac{\gamma}{4} + \delta < \frac{3}{4}\gamma$$

(§ 33). Il en résulte que

$$\alpha = \max\,[\delta(P_1), \delta(P_2), \dots, \delta(P_k)] < \frac{3}{4}\gamma.$$

Soit, d'autre part, p^* un point arbitraire de P. On a, d'après (25),

$$\varrho(p^*, B) < \frac{\delta}{2} < \frac{\gamma}{4}.$$

Or $B \subset \Phi - (Q_a + Q_d)$ [1]; il en résulte que

$$\varrho(B, A) \geqslant \varrho([\Phi - (Q_a + Q_d)], A) = \gamma$$

(§ 33, (19)). Ainsi

$$\varrho(p^*, A) \geqslant \varrho(B, A) - \varrho(p^*, B) < \gamma - \frac{\gamma}{4} = \frac{3}{4}\gamma$$

quel que soit le point p^* de P; donc

$$\varrho(P, A) \geqslant \frac{3}{4}\gamma > \alpha$$

La condition (23) *n'est donc pas vérifiée.*

38. Nous voyons ainsi que l'hypothèse du § 31 est en contradiction avec le lemme du § 23; elle est donc fausse, de même que l'hypothèse primitive du § 26. La proposition énoncée au début du § 26 est donc complètement démontrée:

(B_3''). *Une frontière régulière (dans E_3) reste connexe quand on en supprime les points d'un ensemble fermé punctiforme arbitraire.*

On en déduit immédiatement que tout point x d'une frontière régulière F est de dimension 2.

En effet, F étant un ensemble de E_3 privé de points intérieurs, on a

$$\dim_x F \leqslant 2\ ^{2)}.$$

Or $\dim_x F < 2$ entraînerait la possibilité d'ε-séparer le point x

[1] En effet, $Q_a \times \Phi \subset (K_a + G + H) \times \Phi = K_a \subset A$; $Q_d \times \Phi \subset D$ (voir § 30, (17) et (18), puis § 31).

[2] Voir le théorème du § 4.

par un ensemble fermé B de dimension 0, c. à d. par un ensemble fermé punctiforme; ce qui est en contradiction avec la proposition démontrée ci-dessus. On a donc

$$\dim_x F = 2, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On en déduit aisément la démonstration du théorème B_3 (§ 17). En effet, soit F_1 la frontière d'un domaine tridimensionnel borné. F_1 ne possédant aucun point intérieur, on a $\dim F_1 \leqslant 2$ [1]. D'autre part F_1 contient (d'après le lemme du § 18) une frontière régulière F; donc $\dim F_1 \geqq \dim F = 2$. Ainsi

Théorème B_3. *La frontière d'un domaine tridimensionnel borné est de dimension* 2.

On obtient donc d'après les considérations des § 16 et 17 le

Théorème A_3. *Soit C un ensemble de E_3. Tout point intérieur de C est de dimension 3 (par rapport à C); tout point frontière non limite de points intérieurs, de dimension* 0, 1 *ou* 2; *enfin un point frontière limite de points intérieurs peut être d'une dimension quelconque* $\leqslant 3$.

39. Il a été déjà indiqué [2] que le théorème A_3 n'est qu'un cas particulier d'un théorème général A_n concernant l'espace E_n; théorème qui sera établi dans le ch. V par une méthode beaucoup plus simple que celle qui a été suivie ici. Aussi pourrait-on se demander si les raisons indiquées au § 1 suffisent pour justifier l'emploi de la longue et pénible démonstration des §§ 17—38. Or il est à remarquer que ce n'est que par cette voie qu'on peut obtenir la proposition (B_3'') du § précédent; proposition dont l'importance sera mise en pleine lumière par les considérations des §§ suivants. En effet, la méthode du ch. V ne nous donne aucun moyen d'aborder la démonstration de la proposition en question; il en est de même, *à fortiori*, de la proposition analogue (B_n'') relative à E_n. Ce n'est que par une généralisation convenable de la méthode du présent chapitre que l'on peut espérer de démontrer cette dernière proposition [3].

Je tiens, d'ailleurs, à noter la vraie cause de la complexité de la démonstration ci-dessus. Nous y sommes amenés à considérer

[1] Voir le théorème du § 4.

[2] § 1 de ce chapitre.

[3] On trouvera dans le ch. V quelques indiquations sur la marche à suivre.

l'ensemble fermé punctiforme (dans E_3) le plus général. Un tel ensemble peut être décomposé en parties fermées, sans points communs deux à deux, et de diamètres arbitrairement petits. Chacune de ces parties peut être entourée par un polyèdre de manière que les polyèdres relatifs à deux parties différentes ne se coupent pas. Or il n'est pas toujours possible de choisir les polyèdres en question de façon qu'ils soient tous de genre 0. Il peut même arriver que le genre d'un polyèdre qui sépare une partie de l'ensemble donné [1]) tende nécessairement vers l'infini quand son diamètre tend vers zéro.

40. Montrons par un exemple que les faits tout-à-l'heure mentionnés peuvent avoir lieu en réalité.

L'opération F_m^*. Soit S un solide limité par un polyèdre. La projection de S sur $\overline{ox}$ est un segment $\overline{x_1 x_2}$ [2]). Soit x_0 un nombre satisfaisant aux deux conditions:

$$1) \left| \frac{x_1+x_2}{2} - x_0 \right| < \frac{1}{12}(x_1 - x_0);$$

2) le plan $x=x_0$ ne contient aucun sommet de S [3])

L'intersection de S avec le plan $\Pi = \{x = x_0\}$ sera donc constituée par un certain nombre de domaines plans fermés $Q_1, Q_2, .., Q_k$ sans points communs deux à deux. Si l'on déplace légèrement le plan Π, ces domaines ne seront modifiés que très peu; soit donc ε un nombre positif inférieur à $\frac{1}{12}(x_1 - x_0)$ et tel que les conditions suivantes soient vérifiées:

$$1) \; S \times \{x = x_0 - \varepsilon\} = \sum_{i=1}^{k} Q_i^-, \quad S \times \{x = x_0 + \varepsilon\} = \sum_{i=1}^{k} Q_i^+;$$

2) Q_i^- contient un carré K_i^-, $Q_i^+ \supset K_i^+$; K_i^- et K_i^+ $(i = 1, 2, \dots, k)$ ont même projection sur le plan oyz.

Soit G la partie de E_3 située entre les deux plans $\{x = x_0 - \varepsilon\}$ et $\{x = x_0 + \varepsilon\}$; $S - G$ est une somme de plusieurs solides [4]) dont chacun est limité par un polyèdre. Chaque carré K_i^- ou K_i^+ fait partie de l'un de ces polyèdres. Ajou-

[1]) Nous entendons par là que ce polyèdre n'a aucun point commun avec l'ensemble donné et qu'il y a des points de cet ensemble dans chacun des deux domaines définis par le polyèdre.

[2]) $x_1 < x_2$.

[3]) On n'a qu'à se servir des nombres rationnels pour éviter les choix arbitraires (voir le chapitre suivant).

[4]) Il y en a deux au moins.

tons à $S-G$ $2km$ *anses* R_{ij}^- et R_{ij}^+ ($i=1, 2, \dots, k$; $j=1, 2, \dots, m$) situées dans $G \times S$; R_{ij}^- est attaché à K_i^-; R_{ij}^+, à K_i^+; de plus R_{ij}^- est enlacée avec R_{ij}^+ [1]). Posons

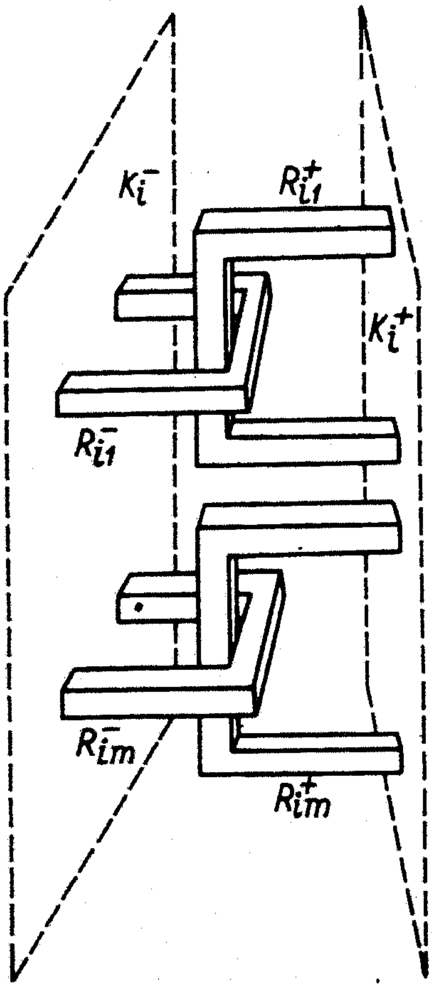

Fig. 4.

$$F_n^z(S) =$$

$$= (S-G) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} (R_{ij}^- + R_{ij}^+).$$

$F_n^z(S)$ a au moins deux composants et est agrégé à S.

Soient maintenant $S_1, S_2, \dots, S_q$ des solides de la forme indiquée sans points communs deux à deux; posons

$$F_m^z\left(\sum_{p=1}^{q} S_p\right) = \sum_{p=1}^{q} F_m^z(S_p).$$

Les opérations F_m^y et F_m^x seront définies d'une manière analogue.

D é f i n i t i o n d e l'e n s e m b l e Φ. Soit P_0 un cube; posons ($m = 0, 1, 2, \dots$).

$$P_{3m+1} = F_{m+1}^x\ (P_{3m}),$$

$$P_{3m+2} = F_{m+1}^y\ (P_{3m+1}),$$

$$P_{3m+3} = F_{m+1}^z\ (P_{3m+2});$$

$$\Phi = \prod_{m=0}^{\infty} P_m.$$

L'ensemble Φ est parfait et punctiforme; il possède la propriété requise. J'omets la démonstration; on trouvera un exemple analogue dans la thèse de M. L. A n t o i n e [2]).

41. La proposition (B_3'') et les développements qui s'y rattachent nous suggèrent un moyen de discerner les s u r f a c e s C a n t o r i e n n e s parmis les continus de dimension 2.

Déf 3₂. *Un continu K de dimension 2 sera dit une surface Cantorienne s'il reste connexe après la suppression des points d'un ensemble punctiforme fermé arbitraire.*

[1]) Toutes ces anses sont d'ailleurs limitées par des polyèdres; elles n'ont deux à deux aucun point commun.

[2]) „Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages". Thèse de Strasbourg, Paris, 1921. Je regrette de n'avoir reçu cette thèse que lorsque le présent mémoire était à peu près terminé. L'exemple de M. A n t o i n e diffère d'ailleurs du mien. Le genre des polyèdres en question ne tend pas (dans son cas) vers l'infini, mais reste constamment égal à 1.

On voit donc que (§ 38):

Théorème B_3''. *Toute frontière régulière (dans E_3) est une surface Cantorienne.*

Voici quelques propriétés immédiates des surfaces Cantoriennes.

1) *Chaque point d'une surface Cantorienne K est de dimension 2 (par rapport à K).*

La dèmonstration est identique à celle du § 38 (relative au cas particulier des frontières régulières).

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie; il suffit, en effet, de considérer un continu K composé de deux cercles tangents. Tous les points de K sont de dimension 2 (§ 14); cependant, a désignant le point de contact des deux cercles, $K-a$ n'est pas connexe.

2) *Une surface Cantorienne reste connexe après la suppression d'un ensemble punctiforme quelconque (non nécessairement fermé).*

Supposons, par contre, qu'il existe un ensemble punctiforme $B \subset K$ tel que

$$K-B=A+D, \quad H(A, D)=0;$$

et soit a un point de A, $d \subset D$. L'ensemble B *sépare* les points a et d. Or en reprenant les raisonnements du § 8 du Ch. I, on aboutit à la conclusion suivante:

Tout ensemble B séparant deux points d'un ensemble C[1]) contient un ensemble B_0 séparant ces mêmes points et qui est, de plus, fermé par rapport à C.

Donc, si notre supposition était vraie, il existerait un ensemble B_0 possédant les propriétés suivantes:

α) B_0 est agrégé à B; il est donc punctiforme;

β) $B_0 \varepsilon F$ (rel K); K étant fermé, B_0 est fermé;

γ) B_0 sépare les points a et d de K; c. à d. que $K-B_0$ n'est pas connexe.

Or l'ensemble de ces trois propriétés est en contradiction avec la définition 3_2. Notre supposition n'est donc pas réalisée, c. q. f. d.

La proposition démontrée peut être énoncée comme il suit: le complémentaire d'un ensemble punctiforme par rapport à une surface Cantorienne est connexe. Une proposition analogue relative au plan Euclidien a été démontrée par M. Sierpiński[2])

[1]) Le sens précis de cette locution et évident (voir le § 1 du Ch. I).

[2]) „Sur un ensemble punctiforme connexe", *Fund. Math.* t. I, p. 9. E_2 étant homéomorphe à une frontière régulière (surface d'une sphère) diminuée d'un point.

42. Nous sommes amenés à poser, par extension, la définition suivante qui ne pourra, d'ailleurs, être légitimée qu'ultérieurement:

Déf. 3_n. *Un continu de dimension n sera dit une multiplicité Cantorienne (de dimension n) s'il reste connexe après la suppression d'un ensemble fermé de dimension $n-2$ quelconque.*

On voit d'ailleurs immédiatement [1]) que le mot „fermé" peut être supprimé sans que la notion ainsi définie soit altérée; on voit aussi que tous les points d'une multiplicité Cantorienne de dimension n sont de dimension n.

La notion que nous venons d'introduire est, dans beaucoup de questions, trop restrictive; il en est de même de la notion (un peu plus large) d'un continu K dont tous les points sont de dimension n (par rapport à K).

Par contre, les notions suivantes nous seront très utiles dans la suite:

Soit C un ensemble de dimension n; C_n, l'ensemble des points de C qui sont de dimension n (par rapport à C). Nous dirons que C est *dimensionnellement homogène* si l'ensemble C_n est dense sur C, c. à d. $\overline{C_n}=\overline{C}$.

Déf. 4. *Un continu dimensionnellement homogène sera dit une multiplicité Cantorienne généralisée* [2]).

On voit aisément que cette dernière notion est plus large que la précédente, c. à d. qu'une multiplicité Cantorienne généralisée de dimension n peut contenir des points de dimension $< n$; ainsi le continu de la figure 4 (§ 14) est une surface Cantorienne généralisée, et il contient un point (et un seul) de dimension 1. Il y a plus: les points de dimension $< n$ d'une multiplicité Cantorienne généralisée (de dimension n) peuvent former un ensemble dense sur cette multiplicité.

Nous construirons un exemple de la sorte en condensant la singularité présentée par le continu tout-à-l'heure mentionné.

43. Nous construirons notamment dans E_3 une surface Cantorienne généralisée S possédant un ensemble dense (sur S) de points de dimension 1 (par rapport à S).

---

on voit donc que la proposition de M. Sierpiński se déduit immédiatement d'un cas particulier de la nôtre.

[1]) par un raisonnement identique à celui du § précédent.

[2]) C'est ces continus-là que j'ai appelés multiplicités Cantoriennes dans ma note préliminaire (C. R. t. 175, p. 440).

Les éléments de la construction sont des cercles fermés horizontaux (c. à d. situés dans des plans parallels au plan oxy) et verticaux (situés dans des plans parallels à oyz).

Nous dirons qu'un cercle vertical M est tangent a cercle horizontal L au point b, si $M \times L = b$ et b est un point intérieur de L (il appartient donc à la circonférenc de M). Un cercle horizontal tangent à un cercle vertical en ur point donné sera défini d'une façon analogue. Un tel cercle est univoquement déterminé par son rayon et le point b de contact. Remarquons d'ailleurs que la relation exprimée ici par le mot „tangent" n'est pas symétrique:

Soit K un cercle horizontal de diamètre < 1, b un point de sa circonférence. Il existe évidemment un polyèdre P tel que

$$b \subset P, \quad K - b \subset I(P)\ ^{1)},$$

$$\delta(P) = \delta(I(P)) < 1\ ^{2)}.$$

Soit ensuite

$$b_1\, b_2 \ldots b_i \ldots$$

un ensemble dénombrable dense sur K: nous supposons, d'ailleurs, que tous les b_i sont intérieurs à K. Nous définissons de proche en proche une suite infinie de cercles verticaux K_i et de „polyèdres P_i [3]):

$$K_1 \text{ est tangent à } K \text{ au point } b_1,\ \delta(K_1) < \frac{1}{2}:$$

il est de plus assez petit pour qu'on ait $K_1 \subset I(P)$.

P_1 est tel que

$$K_1 - b_1 \subset I(P_1), \quad b_1 \subset P_1, \quad K - b_1 \subset E(P_1);$$

$$\delta(P_1) = \delta(I(P_1)) < \frac{1}{2}, \quad P_1 \subset I(P):$$

[1]) Nous désignerons par $I(P)$ le domaine intérieur du polyèdre P; par $E(P)$ son domaine extérieur.

[2]) Pour rendre l'exemple effectif, on n'a qu'à faire usage de la méthode des points rationnels (polyèdres à sommets rationnels, etc.). Voir pour les détails le chapitre suivant.

[3]) Nous attribuons ici au mot »polyèdre« un sens plus large que de coutume, nous admettons notamment que les »polyèdres« en question peuvent avoir des faces non seulement planes, mais aussi sphériques; leurs arêtes sont donc des segments et des arcs de cercles.

Sans cette convention les conditions imposées à P_1 (et aux autres $P_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ ci-dessous) seraient incompatibles. Nous guillemeterons le mot »polyèdre« pour indiquer la convention citée.

(on a donc aussi $I(P_1) \subset I(P)$).

Si $K_1, K_2, \ldots, K_{i-1}$ et $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$ sont déjà définis, on choisira K_i et ensuite P_i de façon que les conditions suivantes soient réalisées:

$$K_i \text{ est tangent à } K \text{ au point } b_i; \quad \delta(K_i) < \frac{1}{i+1};$$

il est de plus assez petit pour être agrégé à tous les ensembles

$$I(P), \quad E(P_1), \quad E(P_2), \ldots, \quad E(P_{i-1}).$$

P_i doit satisfaire à des conditions analogues

$$\delta(P_i) < \frac{1}{i+1}, \quad P_i \subset I(P) \times E(P_1) \times \ldots \times E(P_{i-1}).$$

et, de plus, aux suivantes:

$$K_i - b_i \subset I(P_i), \quad b_i \subset P_i, \quad K - b_i \subset E(P_i).$$

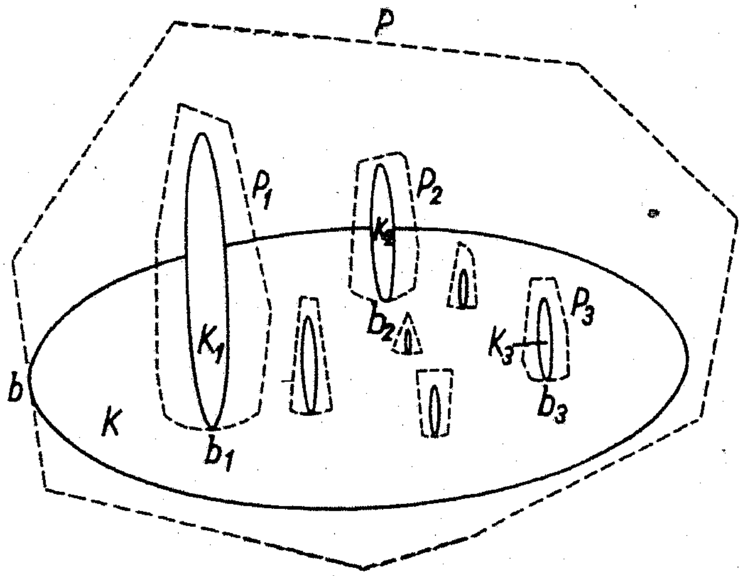

Fig. 5.

Il est évident qu'on ne sera jamais arrêté dans cette construction. Il résulte de la condition de contact que

$$K^1 = K + \sum_{i=1}^{\infty} K_i$$

est un ensemble connexe; l'inégalité $\delta(K_i) < \frac{1}{i+1}$ nous assure, de plus, que c'est un continu. On a

$$K^1 \subset \overline{I}(P),$$

$$K^1 \subset K + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{I}(P_i).$$

44. Nous répétons par rapport à chaque couple (K_i, P_i) la construction que nous avons appliquée au couple (K, P). On obtient ainsi des cercles horizontaux $K_{i_1 i_2}$ et des „polyèdres" $P_{i_1 i_2}$ [1]; puis des continus $K^1_{i_1} = K_{i_1} + \sum_{i_2=1}^{\infty} K_{i_1 i_2}$ tels que

$$K^1_{i_1} \subset K_{i_1} + \sum_{i_2=1}^{\infty} \overline{I}(P_{i_1 i_2}) \subset \overline{I}(P_{i_1});$$

on obtient enfin un continu

$$K^2 = K + \sum_{i=1}^{\infty} K^1_i = K + \sum_{i=1}^{\infty} K_i + \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty} K_{i_1 i_2} =$$

$$= K^1 + \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty} K_{i_1 i_2}$$

qui satisfait aux inclusions

$$K^2 \subset K + \sum_{i=1}^{\infty} K_i + \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty} \overline{I}(P_{i_1 i_2}) \subset K + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{I}(P_i) \subset \overline{I}(P).$$

On applique ensuite le même procédé aux couples $(K_{i_1 i_2}, P_{i_1 i_2})$; et ainsi de suite.

Voici la loi générale de construction. Les cercles et „polyèdres" à $1, 2, \dots, m-1$ indices ayant été déjà construits, on choisit sur chaque $K_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}}$ une suite de points intérieurs à ce cercle

$$b_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}}, \dots, \quad b_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} i}, \dots;$$

suite qui est dans son ensemble dense sur $K_{i_1 \dots i_{m-1}}$.

On construit ensuite les cercles et „polyèdres" à m indices; supposons qu'on ait déjà construit tous ceux qui ont leur dernier indice inférieur à i_m. En ce cas $K_{i_1 i_2 \dots i_m}$ et $P_{i_1 i_2 \dots i_m}$ doivent être définis de telle facon que les conditions suivantes soient réalisées:

1) $K_{i_1 i_2 \dots i_m}$ est un cercle (horizontal si m est pair; vertical dans le cas contraire) tangent au cercle $K_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}}$ au point $b_{i_1 i_2 \dots i_m}$;

$$\delta(K_{i_1 \dots i_m}) < \frac{1}{i_1 + i_2 + \dots + i_m + m};$$

[1]) Nous préciserons dans un moment les conditions que doivent vérifier ces ensembles.

$$K_{i_1 \ldots i_m} \subset I(P_{i_1 \ldots i_{m-1}}) \times \prod_{i=1}^{i_m-1} E(P_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}\, i).$$

1) $P_{i_1 \ldots i_m}$ doit satisfaire à des conditions analogues aux deux dernières et, de plus, aux suivantes:

$$K_{i_1 \ldots i_m} - b_{i_1 \ldots i_m} \subset I(P_{i_1 \ldots i_m}),$$

$$b_{i_1 \ldots i_m} \subset P_{i_1 \ldots i_m}),$$

$$K_{i_1 \ldots i_{m-1}} - b_{i_1 \ldots i_m} \subset E(P_{i_1 \ldots i_m}).$$

On définit ainsi de proche en proche les cercles et les „polyèdres" à un nombre quelcònque d'indices.

On remarquera d'ailleurs aisément que deux „polyèdres" distincts à un même nombre d'indices sont extérieurs l'un à l'autre, c. à d. que

$$\overline{I}(P_{i_1 i_2 \ldots i_m}) \times \overline{I}(P_{j_1 j_2 \ldots j_m}) = 0.$$

$$(P_{i_1 i_2 \ldots i_m} \neq P_{j_1 j_2 \ldots j_m})$$

45. Nous définissons enfin deux suites de continus

$$K, K^1, K^2, \ldots, K^m, \ldots$$

et

$$\Pi = \overline{I}(P), \Pi^1, \Pi^2, \ldots, \Pi^k, \ldots \text{ [1]}$$

par les relations de récurrence

$$K^m = K^{m-1} + \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{\infty} K_{i_1 i_2 \ldots i_m},$$

$$\text{(26)} \qquad \Pi^m = K^{m-1} + \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{\infty} \overline{I}(P_{i_1 i_2 \ldots i_m}) \text{ [2]}.$$

On voit immédiatement que

$$K \subset K^1 \subset K^2 \subset \ldots \subset K^m \subset \ldots,$$

$$K^m \subset \Pi^m;$$

[1]) K, K^1, K^2, et Π ont déjà été définis précédemment.

[2]) La démonstration de ce que ces ensembles sont des continus ne présente aucune difficulté: on n'a qu'à se servir des inégalités $\delta(K_{i_1 \ldots i_m}) < \dfrac{1}{i_1 + \ldots + i_m + m}$ etc. et de la condition de contact.

un calcul facile nous montre d'ailleurs que

$$\Pi \supset \Pi^1 \supset \Pi^2 \supset \ldots \supset \Pi^m \supset \ldots$$

Donc

$$K^{m+h} \subset \Pi^{m+h} \subset \Pi^m. \qquad (h \geqslant 0) \tag{27}$$

Notons encore que l'ensemble

$$\Pi^m_{j_1 j_2 \ldots j_m} = K^{m-1} + \left[\sum_{i_1, \ldots i_m = 1}^{\infty} \overline{I}(P_{i_1 \ldots i_m}) - \overline{I}(P_{j_1 \ldots j_m}) \right]$$

est encore un continu [1]), et que l'on a

$$\Pi^m = \Pi^m_{j_1 j_2 \ldots j_m} + \overline{I}(P_{j_1 j_2 \ldots j_m}), \tag{28}$$

$$\Pi^m_{j_1 \ldots j_m} \times \overline{I}(P_{j_1 j_2 \ldots j_m}) = b_{j_1 j_2 \ldots j_m}, \tag{29}$$

Ceci fait, posons

$$K^\omega = \sum_{m=1}^{\infty} K^m,$$

$$S = \overline{K^\omega},$$

$$R = S - K^\omega.$$

Je dis que S jouit de toutes les propriétés annoncées au début du § 43. Plus précisément, on a

I. S est un continu borné; K^ω et R sont denses sur S;

II. $x \subset R$ entraîne $\dim_x S = 1$;

III. $x \subset K^\omega$ entraîne $\dim_x S = 2$.

46. Démonstration. I. Les K^m étant des continus, K^ω est évidemment connexe [2]); $S = \overline{K^\omega}$ est donc un continu, Or on a, les K^m formant une suite d'ensembles croissants,

$$K^\omega = \sum_{m=1}^{\infty} K^m = \sum_{h=0}^{\infty} K^{m+h};$$

donc, d'après (27),

$$K^\omega \subset \Pi^m,$$

$$S = \overline{K^\omega} \subset \overline{\Pi^m} = \Pi^m, \tag{30}$$

[1]) Voir la note précédente.

[2]) Hausdorff, p. 245, III.

m étant quelconque. En particulier

$$S \subset \Pi = I(P);$$

c'est donc un continu borné.

La densité de K^ω sur S résulte de la définition même de S. D'autre part, la définition des K^m nous montre immédiatement que K^m est non dense sur K^{m+1}; donc, *à fortiori*, sur S. Il en résulte que K^ω est de première catégorie, $R = S - K_\omega$, de seconde catégorie par rapport à S. Par conséquent R est dense sur S [1].

II. Soit x un point quelconque de R; ε, un nombre positif arbitraire. Soit ensuite m un entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$.

On a, d'après (30) et (26),

$$S \subset K^{m-1} + \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{\infty} \overline{I}(P_{i_1 \ldots i_m}).$$

Or x ne peut être agrégé à $K^{m-1} \subset K^\omega$; il fait donc partie d'un certain $\overline{I}(P_{j_1 j_2 \ldots j_m})$ [2]. De plus $x \neq b_{j_1 j_2 \ldots j_m}$, ce dernier point étant encore agrégé à K^{m-1}. Posons

$$A = S \times \overline{I}(P_{j_1 j_2 \ldots j_m}) - b_{j_1 j_2 \ldots j_m},$$

$$D = S \times \Pi^m_{j_1 j_2 \ldots j_m} - b_{j_1 j_2 \ldots j_m};$$

je dis que

$$S = A + b_{j_1 j_2 \ldots j_m} + D$$

est une ε-séparation du point x de S.

En effet, on a d'après (28),

$$A + b_{j_1 j_2 \ldots j_m} + D = S \times \overline{I}(P_{j_1 \ldots j_m}) + S \times \Pi^m_{j_1 \ldots j_m} = S \times \Pi^m = S;$$

l'égalité (29) nous assure, de plus, que A, $b_{j_1 \ldots j_m}$ et D sont sans points communs deux à deux. Or

1) l'inclusion $x \subset A$ est évidente;

2) $b_{j_1 \ldots j_m} \,\varepsilon\, \mathfrak{F}$;

$$[b_{j_1 \ldots j_m} + D] = [S \times \Pi^m_{j_1 j_2 \ldots j_m}] \,\varepsilon\, \mathfrak{F},$$

donc

$$A = [S - (b_{j_1 \ldots j_m} + D)] \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \text{ (rel } S);$$

[1]) Hausdorff, p. 328.

[2]) et d'un seul (d'après la dernière formule du § 44).

on voit de même que

$$D \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \text{ (rel } S);$$

3) on a

$$A + b_{j_1 \dots j_m} = S \times \overline{I}(P_{j_1 \dots j_m}) \subset I(P_{j_1 \dots j_m});$$

donc, x étant un point de A et le diamètre de $\overline{I}(P_{j_1 \dots j_{r_i}})$ étant

$$< \frac{1}{j_1 + \dots + j_m + m} < \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

$$A + b_{j_1 \dots j_m} \subset S(x, \varepsilon).$$

Nous voyons ainsi que le point x peut être, quel que soit ε, ε-séparé par un seul point $b_{j_1 \dots j_m}$; par conséquent

$$\dim_x S = 1, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

III. Tout point de R est, par conséquent, un point frontière du continu S. Or l'ensemble des points-frontières d'un ensemble S ne peut être dense sur cet ensemble que lorsque S est privé de points intérieurs. Il en résulte que dim $S \leqslant 2$.

Envisageons maintenant un point quelconque x de K^ω. Ce point fait partie d'un certain cercle $K_{i_1 \dots i_m}$, et l'on a (§ 14)

$$\dim_x K_{i_1 \dots i_m} = 2.$$

Ainsi

$$2 = \dim_x K_{i_1 \dots i_m} \leqslant \dim_x S \leqslant 2;$$

$$\dim_x S = 2, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

L'énoncé du § 45 est donc complètement justifié.

47. Notons que dans l'exemple ci-dessus l'ensemble des points de dimension supérieure est de première catégorie; l'ensemble des points de dimension inférieure, de seconde catégorie. Nous verrons (ch. IV) que ce fait n'est pas accidentel.

On peut construire dans E_4 un exemple analogue d'une multiplicité Cantorienne généralisée v de dimension 3 possédant un ensemble dense de points de dimension < 3.

On peut prendre comme éléments de la construction des sphères fermées tridimensionnelles; en ce cas tous les points de dimension < 3 seront de dimension 1. On peut aussi faire usage de cylindres équilatéraux [1]) (en remplaçant les points de contact par des segments de contact); en ce pas il n'y aura que des points de dimension 2 et 3.

On peut enfin obtenir en combinant les deux méthodes précédentes une multiplicité généralisée ν telle que les ensembles de points de dimension 1, 2 et 3 (par rapport à ν) soient tous les trois denses sur ν.

48. Revenons à l'étude des ensembles situés dans E_3.

Théorème. *Soit G un domaine connexe* [2]) (*dans* E_3); *Φ, un ensemble fermé de dimension* $\leqslant 1$ [3]). *En ce cas $G-\Phi$ est aussi connexe.*

Considérons tout d'abord le cas particulier où G est une sphère tridimensionnelle $S(x, \varepsilon)$. Supposons que le domaine

$$G_0 = S(x, \varepsilon) - \Phi$$

ne soit pas connexe; et soient alors G_1 et G_2 deux composants de G_0. On a

$$\overline{G}_0 \subset \overline{S}(x, \varepsilon) = S(x, \varepsilon) + F(x, \varepsilon) = G_0 + [\Phi \times S(x, \varepsilon)] + F(x, \varepsilon);$$

$$Fr(G_0) = \overline{G}_0 - G_0 \subset [\Phi \times S(x, \varepsilon)] + F(x, \varepsilon);$$

donc [4])

$$Fr(G_1) \subset [\Phi \times S(x, \varepsilon)] + F(x, \varepsilon),$$

$$Fr(G_2) \subset [\Phi \times S(x, \varepsilon)] + F(x, \varepsilon).$$

Soit h un point de $F(x, \varepsilon)$ étranger à Φ; un tel point existe d'après les inégalités

$$\dim[F(x, \varepsilon)] = 2 > 1 \geqslant \dim \Phi \geqslant \dim[\Phi \times F(x, \varepsilon)].$$

Φ étant fermé, le nombre

$$\sigma = \varrho(h, \Phi)$$

est donc positif. Je dis que h appartient tout au plus à l'un des deux ensembles $Fr(G_1)$ et $Fr(G_2)$. En effet, s'il n'en était pas

[1]) Nous désignons par ce ferme les ensembles semblables à celui qui est défini (dans E_3) par les inégalités:

$$x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad |z| \leqslant 1$$

[2]) Nous supposons, comme d'habitude, que G est borné. Le théorème s'étend d'ailleurs aisément à tous les domaines connexes.

[3]) Φ n'est pas nécessairement contenu dans G.

[4]) Hausdorff, p. 332, VI.

ainsi, la sphère $S(h, \sigma)$ contiendrait un point g_1 de G_1 un point g_2 de G_2; elle contiendrait aussi le segment $\overline{g_1 g_2}$ qui serait donc étranger à Φ. Or ce segment est agrégé à $S(x, \varepsilon)$ (car ses extrémités le sont); il devrait donc faire partie de G_0, et même (étant connexe), d'un composant de G_0; ce qui est en contradiction avec la définition des points g_1 et g_2. Supposons donc p. ex. que

$$h \times Fr(G_1) = 0.$$

G_1 étant borné, $Fr(G_1)$ contient une frontière régulière F (§ 18). Cette frontière F ne peut avoir aucun point commun avec l'ensemble

$$\Phi \times S(x, \varepsilon).$$

En effet, soit z un point de cet ensemble. $\Phi \times S(x, \varepsilon)$ et

$$[\Phi \times S(x, \varepsilon)] + F(x, \varepsilon)$$

sont localement identiques au voisinage du point z. L'inclusion $z \subset F$ entraînerait donc les inégalités

$$\dim_z F \leqslant \dim_z [Fr(G_1)] \leqslant \dim_z \{[\Phi \times S(x, \varepsilon)] + F(x, \varepsilon)\} =$$
$$= \dim_z [\Phi \times S(x, \varepsilon)] \leqslant \dim_z \Phi \leqslant \dim \Phi \leqslant 1$$

qui sont en contradiction avec l'égalité (§ 38)

$$\dim_z F = 2.$$

Nous voyons donc que

$$F \subset F(x, \varepsilon).$$

Or h est étranger à $Fr(G_1) \supset F$; il en résulte que

$$F \subset F(x, \varepsilon) - h.$$

Soit M l'ensemble complémentaire à $F(x, \varepsilon) - h$;

$$M = S(x, \varepsilon) + h + E(x, \varepsilon).$$

C'est un ensemble connexe; en effet, quels que soient les points m_1 et m_2 de M, il existe une ligne polygonale $m_1 h m_2$ entièrement agrégée à M [1]). Or

$$\overline{M} = E_3,$$

$$M \subset E_3 - F \subset \overline{M}.$$

[1]) Hausdorff, p. 244, I.

$E_3 - F$ est donc connexe [1]), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que F est une frontière régulière, La supposition faite au début de ce § est donc fausse; $S(x, \varepsilon) - \Phi$ est connexe, c. q. f. d.

49. Revenons maintenant au cas général Supposons encore que $G - \Phi$ ne soit pas connexe:

$$G - \Phi = G_1 + G_2,$$

$$G_1 \neq 0, \; G_2 \neq 0, \; H(G_1, G_2) = 0.$$

On a

$$\overline{G}_1 + \overline{G}_2 = \overline{G - \Phi}. \tag{31}$$

Or Φ ne possède aucun point intérieur; $\Phi \times G$ est donc non dense sur G. Il en résulte que $G - (\Phi \times G) = G - \Phi$ est dense dans G [2]) c. à d. que

$$\overline{G - \Phi} = \overline{G}. \tag{32}$$

L'égalité (32) est d'ailleurs indépendente de l'hypothèse relative à la connexité de $G - \Phi$ [3]).

On obtient en rapprochant (31) et (32):

$$(\overline{G}_1 \times G) + (\overline{G}_2 \times G) = \overline{G} \times G = G.$$

L'ensemble connexe G est donc décomposé en une somme de deux ensembles fermés par rapport à lui et non vides. Ces derniers doivent donc avoir des points communs; soit x un tel point:

$$x \subset (\overline{G}_1 \times G) \times (\overline{G}_2 \times G) = \overline{G}_1 \times \overline{G}_2 \times G.$$

x fait partie du domaine G; il existe donc une sphère $S(x, \varepsilon)$ qui est agrégée à ce même domaine. Envisageons l'ensemble $S(x, \varepsilon) - \Phi$;

$$S(x, \varepsilon) - \Phi \subset G - \Phi;$$

d'après le résultat acquis au § précédent cet ensemble est connexe. Il est donc entièrement contenu dans l'un des deux ensembles G_1 ou G_2, p. ex. dans le premier:

$$S(x, \varepsilon) - \Phi \subset G_1.$$

[1]) **Hausdorff**, p. 246, IV.

[2]) **Hausdorff**, p. 327, VIII.

[3]) Cette remarque sera utilisée dans le corollaire II du § suivant.

Il en résulte que

$$S(x,\varepsilon)\times G_2=[S(x,\varepsilon)-\Phi]\times G_2+[S(x,\varepsilon)\times\Phi\times G_2]\subset$$
$$\subset G_1\times G_2+[\Phi\times(G-\Phi)]=0;$$

ce qui est en contradiction avec la condition

$$x\subset\overline{G}_2$$

Nous voyons donc que l'hypothèse de ce § est elle aussi inexacte; le théorème du § précédent est ainsi complètement démontré.

50. Corollaire I. Nous obtenons comme cas particulier la proposition suivante:

'une ligne Cantorienne ne découpe aucun domaine de E_3; en particulier, aucune sphère tridimensionnelle [1]).

Corollaire II. *Soit G un domaine connexe de E_3; en ce cas $\overline{G}$ est une multiplicité Cantorienne de dimension 3.*

En effet, dim $\overline{G}=3$ (§ 38). Il suffit donc de montrer que $\overline{G}-\Phi$ est connexe tous les fois que

$$\dim\Phi=1,\quad \Phi\,\varepsilon\,\mathfrak{F}$$

Or $G-\Phi$ est connexe; d'autre part [2])

$$G-\Phi\subset\overline{G}-\Phi\subset\overline{G}=\overline{G-\Phi}.$$

Il en résulte que $\overline{G}-\Phi$ est connexe [3]), c. q. f. d.

Le problème suivant se rattache naturellement au théorème démontré tout-à-l'heure:

Problème α. *Peut-il arriver qu'un ensemble fermé de dimension 2 ne découpe aucun domaine tridimensionnel?*

Il paraît que ce problème est extrêmement ardu; la réponse affirmative me semble d'ailleurs très peu probable.

51. Nous terminerons ce chapitre par le

Théorème B_3'. *Toute frontière double de E_3 est un ensemble dimensionnellement homogène (de dimension 2).*

Soit F la frontière commune des domaines G et H; et soit F_2 l'ensemble des points de F qui sont de dimension 2 par rapport

1) Voir la condition 3) du § 15.

2) Voir l'égalité (32) et la note qui s'y rattache.

3) Hausdorff, p. 246, IV.

à F. $\dim F = 2$ (théorème B_3, § 38); il s'agit donc de démontrer $\overline{F_2} = F$.

Soit x un point arbitraire de F; ε, un nombre positif quelconque. x étant un point-frontière des domaines G et H, la sphère $S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ contient nécessairement un point g de G et un point h de H. Or G et H sont étrangers à F; il en résulte que

$$g + h \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) - F \subset E_3 - F.$$

L'ensemble $S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) - F$ ne peut être connexe car il fait partie de $E_3 - F$ et contient des points (g et h) agrégés à différents composants de $E_3 - F$ [1]).

Or soit

$$F_x = F \times \overline{S}\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right);$$

F_x est un ensemble fermé agrégé à $S(x, \varepsilon)$; et l'on a évidemment

$$S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) - F = S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) - F_x.$$

$S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) - F_x$ n'étant pas connexe, il en résulte que

$$\dim F_x > 1.$$

Soit donc z un point F_x tel que

$$\dim_z F_x \geqslant 2;$$

on a

$$2 \leqslant \dim_z F_x \leqslant \dim_z F \leqslant 2;$$

$$z \subset F_2.$$

Or $z \subset F_x \subset S(x, \varepsilon)$; ε étant arbitraire, il en résulte que $x \subset \overline{F_2}$ quel que soit le point x de F, c. q. f. d.

Corollaire. *Tout continu (dans E_3) qui est la frontière commune de deux domaines (non nécessairement connexes), est une surface Cantorienne généralisée.*

52. On rapprochera les théorèmes B_3 (§ 38), B_3' et B_3'' (§ 41). Il est, d'ailleurs, à remarquer que les thèses des théorèmes B_3 et B_3' ne peuvent être renforcées:

[1]) Tout composant de G ou de H est un composant de $E_3 - F$.

1) Une frontière dans E_3, même continue, n'est par toujours dimensionnellement homogène.

Soit p. ex. Γ un droite passant par le point x. La frontière du domaine

$$S(x, 1) - \Gamma$$

est composée de la surface $F(x, 1)$ et du segment

$$\Gamma \times \overline{S}(x, 1).$$

2) Une frontière double, même continue, n'est pas nécessairement une surface Cantorienne; elle peut même posséder des points de dimension 1 [1]).

Exemple. Soit

$$x_0 = (0, 0, 0), \quad x_n = \left(\frac{3}{2^{n+1}}, 0, 0\right); \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$F = x_0 + F(x_0, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} F\left(x_n, \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

F est un continu; c'est la frontière commune des domaines G et H (G est connexe et borné):

$$G = S(x_0\, 1) - \left[x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{S}\left(x_n, \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right];$$

$$H = [E_3 - \overline{S}(x_0, 1)] + \sum_{n=1}^{\infty} S\left(x_n, \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

On a cependant

$$\dim_{x_0} F = 1.$$

[1]) et des points de dimension 0 dans le cas où elle n'est pas continue. On en obtient un exemple en posant (voir les notations du texte):

$$F_0 = x_0 + F(x_0, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} F\left(x_n, \frac{1}{2^{n+2}}\right).$$

(à suivre).