# Sur les séries de fonctions orthogonales.

Par

D. Menchoff (Moscou).

DEUXIÈME PARTIE.

## La sommation par les méthodes linéaires.*)

§ 1. Soit

$$(1) \qquad \varphi_1(x), \; \varphi_2(x), \; \varphi_3(x), \ldots, \; \varphi_n(x), \ldots$$

un système normé de fonctions orthogonales, c'est-à-dire,

$$\int_0^1 [\varphi_n(x)]^2 \, dx = 1, \quad \int_0^1 \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) \, dx = 0, \quad n \neq m \; ^{1)}$$

et soient

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \ldots, \; a_n, \ldots$$

des constantes réelles quelconques. Dans la première partie de cet ouvrage j'ai démontré qu'*il existe une série*

*) Le présent exposé doit être regardé comme constituant la deuxième partie d'un même travail, intitulé: *Mémoire sur les séries de fonctions orthogonales.* Dans la première partie de cet ouvrage, paru aux »Fundamenta Mathematicae«, t. IV. p. 82, j'ai considéré les questions de la convergence et de la divergence des séries de fonctions orthogonales. La troisième partie, qui paraîtra prochainement, sera divisée en deux chapitres; le premier est intitulé: *La divergence des séries orthogonales et quasi-orthogonales,* et le second sera rédigé sous le titre: *„Étude des multiplicateurs de M. Weyl“*. Les références à un paragraphe de l'ouvrage sont accompagnées de l'indication de la partie correspondante, quand celle-ci est la première. Les renvois sans mention de partie désignent un passage de la deuxième partie de l'ouvrage.

[1]) Pour simplifier le calcul, nous supposerons toujours les fonctions $\varphi_n(x)$ définies dans l'intervalle (0, 1).

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x),$$

*divergente partout, tandis que la série*

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

*converge.*

On peut se demander, s'il existe un procédé de sommation généralisé tel que, pour tous les systèmes (1), la convergence de la série (3) entraîne la sommation presque partout par ce procédé de la série (2). Il est évident que les procédés de sommation en question doivent être appliquables aux séries numériques. Comme la plupart de tels procédés sont de cas particuliers des procédés linéaires de M. Toeplitz, nous ne considérerons que ces procédés dont la définition est la suivante.

Étant donnée une série numérique quelconque

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

on prend une suite de quantités

(5) $$\alpha_1(\varrho),\ \alpha_2(\varrho),\ \alpha_3(\varrho),\ldots,\ \alpha_n(\varrho),\ldots,$$

dépendant d'un paramètre $\varrho$, qui tend vers une limite déterminée $g$ ou à l'infini. On peut toujours supposer que $\varrho$ tend vers une limite finie, puisque, dans le cas contraire, on prendrait $\frac{1}{\varrho}$ au lieu de $\varrho$. On suppose, de plus, que les quantités $\alpha_n(\varrho)$ possèdent les propriétés:

(6) $$1^{\circ}.\quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n(\varrho)| < M,$$

quelles que soient les valeurs du paramètre $\varrho$ [1]), $M$ étant un nombre positif qui ne dépend pas de $\varrho$.

(7) $$2^{\circ}.\quad \lim_{\varrho \to g} \alpha_n(\varrho) = 0,$$

où $g$ est un nombre défini plus haut.

[1]) à l'exception, bien entendu, de celles pour lesquels certaines de $\alpha_n(\varrho)$ ne sont pas définies.

$$3^{0}. \quad \lim_{\varrho\to g} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\varrho) = 1. \tag{8}$$

On dit que la série (4) est sommable par le procédé linéaire, défini à l'aide de la suite (5), si d'une part, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\varrho) \cdot \sum_{s=1}^{n} u_s = S(\varrho) \tag{9}$$

converge pour toutes les valeurs considérés de $\varrho$ et, d'autre part,

$$\lim_{\varrho\to g} S(\varrho) = S$$

existe. La quantité $S$ est, par définition, la somme généralisée de la série (4)

Nous allons démontrer qu'il n'existe pas de procédé de sommaton linéaire tel que la convergence de la série (3) entraîne toujours la sommabilité presque partout par ce procédé de la série (2). Il suffit pour cela de démontrer le théorème suivant:

**Théorème 4.** *Un procédé de sommation linéaire étant donné, on peut définir un système normé de fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$ et une suite de constantes $a_n$, donnant lieu à la série (3) convergente, tels que la série (2) n'est sommable en aucun point par ce procédé.*

§ 2. Démonstration du théorème 4. En vertu du théorème 3 de la première partie de cet ouvrage, il existe un système normé de fonctions orthogonales $\Phi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ et une suite de constantes $c_n$, donnant lieu à la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \tag{10}$$

convergente, tels que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \Phi_n(x) \tag{11}$$

diverge en tout point. Comme il résulte de la démonstration des théorèmes 2 et 3, chacune des fonctions $\Phi_n(x)$ peut être prise bornée.

En tenant compte de la convergence de la serie (10), on obtient

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

et, par suite, on peut déterminer des entiers positifs, croissants

$$l(1),\ l(2),\ l(3),\ldots,\ l(n),\ldots$$

tels que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lg n)^2\, c_{l(n)}^2$$

converge, d'où, en vertu du théorème 1, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{l(n)} \cdot \Phi_{l(n)}(x) \tag{12}$$

converge presque partout.

Soient

$$\chi_1(x),\ \chi_2(x),\ \chi_3(x),\ldots,\ \chi_m(x),\ldots$$

et

$$c'_1,\ c'_2,\ c'_3,\ldots,\ c'_m,\ldots$$

un système normé de fonctions orthogonales et une suite de constantes réelles qui s'obtiennent respectivement du système de fonctions $\Phi_n(x)$ et de la suite de constantes $c_n$ en omettant les fonctions $\Phi_{l(n)}(x)$ et les constantes $c_{l(n)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Comme la série (12) converge presque partout et la série (11) diverge partout, la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} c'_m \cdot \chi_m(x) \tag{13}$$

doit diverger presque partout. On voit de même, de la convergence de la série (10), que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} c'^2_m \tag{14}$$

converge.

Soit $E$ l'ensemble de points de divergence de la série (13), $\operatorname{Mes} E = 1$. On peut supposer, en omettant les termes égaux à zéro, que toutes les constantes $c'_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, sont différentes de zéro. Nous déterminons alors les fonctions $\tilde{\varphi}_m(x)$ par les conditions suivantes:

1°. $\tilde{\varphi}_m(x) = \chi_m(x)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, en tout point de l'ensemble $E$.

2° $\tilde{\varphi}_m(x) = \dfrac{1}{c'_m}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, en dehors de $E$.

On voit immédiatement que les fonctions $\varphi_m(x)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, et les fonctions $\Phi_{l(n)}(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, forment, dans leur ensemble, un système normé de fonctions orthogonales et que la série

$$(15) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} c'_m \varphi_m(x)$$

diverge partout. Comme chacune des fonctions $\Phi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, est bornée, chaque fonction $\varphi_m(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, l'est aussi. Désignons par $M_m$ la borne supérieure de

$$|c'_m \cdot \varphi_m(x)|$$

dans l'intervalle $(0, 1)$, d'où

$$(16) \qquad |c'_m \cdot \varphi_m(x)| \leqslant M_m,$$

quel que soit $x$ dans $(0, 1)$.

Donnons-nous un procédé de sommation linéaire correspondant aux certaines quantités (5) pour lesquelles subsistent les conditions (6), (7) et (8). En nous servant de la série (15), nous démontrerons qu'il existe un système normé de fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$ et une suite de constantes $a_n$, donnant lieu à la série

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

convergente, tels que la série

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x)$$

n'est sommable en aucun point par le procédé considéré.

Nous définirons tout d'abord une suite

$$(17) \qquad h(1),\ h(2),\ h(3), \ldots,\ h(m), \ldots$$

d'entiers positifs, croissant avec $m$, et une suite

$$(18) \qquad \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_m, \ldots$$

de nombres réels pour lesquels subsistent les inégalités

$$(19) \qquad \sum_{n=1}^{h(m-1)} |\alpha_n(\varrho_m)| \cdot \sum_{k=1}^{\chi(n)} M_k < \frac{1}{m},$$

$$\left|1-\sum_{n=h(m-1)+1}^{\infty}\alpha_n(\varrho_m)\right| \sum_{k=1}^{h(m-1)} M_k < \frac{1}{m}, \tag{20}$$

$$|\varrho_m - g| < \frac{1}{m} \tag{21}$$

$$M_m \cdot \sum_{n=h(m)}^{\infty} |\alpha_n(\varrho_m)| < \frac{1}{2^m}, \tag{22}$$

où $\chi(n)$ est le plus grand des nombres $k$ tels que $h(k) \leqslant n$ et $g$ est le nombre figurant dans la définition des quantités (5).

Posons $h(1)=1$ et désignons par $\varrho_1$ une valeur quelconque, mais fixe, du paramètre $\varrho$ dont dépendent les quantités (5). Supposons, ensuite, que les entiers $h(k)$ et les nombres $\varrho_k$ soient dejà définis pour $k \leqslant m-1$. En tenant compte des identités

$$\lim_{\varrho\to g} \sum_{n=1}^{h(m-1)} |\alpha_n(\varrho)| \cdot \sum_{k=1}^{\chi(n)} M_k = 0,$$

$$\lim_{\varrho\to g} \sum_{n=h(m-1)+1}^{\infty} \alpha_n(\varrho) = 1,$$

qui s'obtiennent immédiatement des égalités (7) et (8), on peut définir le nombre $\varrho_m$ de telle façon que les inégalités (19), (20) et (21) soient vérifiées [1]. En vertu de (6), on a, de plus,

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{n=s}^{\infty} |\alpha_n(\varrho_m)| = 0$$

et, par suite, pour toutes les valeurs de $s$, suffisamment grandes, subsiste l'inégalité

$$M_m \cdot \sum_{n=s}^{\infty} |\alpha_n(\varrho_m)| < \frac{1}{2^m},$$

où l'on peut supposer $s > h(m-1)$.

Si l'on désigne par $h(m)$ la plus petite de telles valeurs de $s$,

[1] Soit $G$ l'ensemble formé du nombre $g$ et des valeurs de $\varrho$ pour lesquelles toutes les quantités (5) sont définies. Alors, si $G$ est *fermé*, le nombre $\varrho_m$ peut être déterminé d'une manière bien précise, sans l'emploi de l'axiome du choix arbitraire.

on obtient l'inégalité (22). En partant des nombres $\varrho_1$ et $h(1)$ on peut définir ainsi de proche en proche les nombres $\varrho_m$ et $h(m)$, vérifiant les inégalités (19), (20), (21) et (22), pour toutes les valeurs de $m$. On a, de plus, $h(m) > h(m-1)$.

Posons

$$a_{h(m)} = c'_m, \quad \varphi_{h(m)} = \widetilde{\varphi}_m(x) \tag{23}$$

et

$$a_n = 0, \quad \varphi_n(x) = \Phi_{l(n-m')}(x), \tag{24}$$

lorsque $n$ est différent de tous les nombres $h(m)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, où $m'$ est le nombre de toutes les valeurs de $m$ telles que $h(m) < n$.

On voit immédiatement que le système de fonctions $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, est identique au système formé de toutes les fonctions $\widetilde{\varphi}_{l(n)}(x)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, et de toutes les fonctions $\Phi_{l(n)}(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, d'où il résulte que les fonctions $\varphi_n(x)$ forment un système normé de fonctions orthogonales.

Considérons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x). \tag{2}$$

On a, en vertu de la définition des nombres $a_n$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{m=1}^{\infty} c'^2_m$$

et par suite, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{3}$$

converge, puisque la série (14) converge.

Posons

$$\sum_m (x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varrho_m) \cdot \sum_{s=1}^{n} a_s \cdot \varphi_s(x). \tag{25}$$

Nous démontrerons tout d'abord que l'expression $\Sigma_m(x)$ ne possède la limite en aucun point lorsque $m$ croît indéfiniment. L'identité (25) peut être écrite sous la forme:

$$\sum_m (x) = \sum_m^{(1)}(x) + \sum_m^{(2)}(x) + \sum_m^{(3)}(x) + \sum_m^{(4)}(x). \tag{26}$$

où

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}
\Sigma_m^{(1)}(x) &= \sum_{n=1}^{h(m-1)} \alpha_n(\varrho_m) \cdot \sum_{s=1}^{n} a_s \cdot \varphi_s(x),\\
\Sigma_m^{(2)}(x) &= \sum_{s=1}^{h(m-1)} a_s \cdot \varphi_s(x),\\
\Sigma_m^{(3)}(x) &= -\left[1-\sum_{n=h(m-1)+1}^{\infty} \alpha_n(\varrho_m)\right] \cdot \sum_{s=1}^{h(m-1)} a_s \cdot \varphi_s(x),\\
\Sigma_m^{(4)}(x) &= \sum_{n=h(m-1)+1}^{\infty} \alpha_n(\varrho_m) \cdot \sum_{s=h(m-1)+1}^{n} a_s \cdot \varphi_s(x).
\end{aligned}\right.$$

En combinant d'une part (23) et (24), d'autre part (19), (20) et (16), on obtient pour toute valeur de $x$

$$(28)\quad\begin{aligned}
\left|\Sigma_m^{(1)}(x)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{h(m-1)} \alpha_n(\varrho_m) \cdot \sum_{k=1}^{\chi(n)} c_k' \cdot \varphi_k(x)\right| < \frac{1}{m},\\
\left|\Sigma_m^{(3)}(x)\right| &= \left|1-\sum_{n=h(m-1)+1}^{\infty} \alpha_n(\varrho_m)\right| \cdot \left|\sum_{s=1}^{h(m-1)} c_k' \cdot \tilde{\varphi}_k(x)\right| < \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité (22), la série à double entrée, figurant dans le second membre de la dernière inégalité (27), doit être absolument convergente en tout point. On a donc, en tenant compte de (23), (24), et en changeant l'ordre de sommation dans la série considérée,

$$\Sigma_m^{(4)}(x) = \sum_{n=h(m)}^{\infty} \alpha_n(\varrho_m) \cdot \sum_{k=m}^{\chi(n)} c_k' \cdot \tilde{\varphi}_k(x) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k' \cdot \tilde{\varphi}_k(x) \cdot \sum_{n=h(k)}^{\infty} \alpha_n(\varrho_m),$$

d'où, en vertu de (16) et (23),

$$(29)\quad \left|\Sigma_m^{(4)}(x)\right| < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}},$$

quel que soit $x$ dans $(0, 1)$.

En désignant par $S_m(x)$ la somme de $m$ premiers termes de la série (15) et en tenant compte de (23) et (24), on a de plus

$$(30)\quad \Sigma_m^{(2)}(x) = S_{m-1}(x).$$

En combinant d'une part (26) et (30), d'autre part (28) et (29) il vient finalement pour toute valeur de $x$

$$\left|\sum_m (x) - S_{m-1}(x)\right| < \frac{2}{m} + \frac{1}{2^{m-1}} \leqslant \frac{3}{m}. \tag{31}$$

La série (15) étant partout divergente, la somme $S_{m-1}(x)$ ne tend à la limite en aucun point, lorsque $m$ croît indéfiniment. En vertu de l'inégalité (31), la fonction $\Sigma_m(x)$ possède la même propriété et, par suite, il résulte de la relation (25) et de la définition du procédé linéaire considéré que la série (2) n'est sommable par ce procédé en aucun point. Le théorème 4 se trouve donc complètement démontré, puisque la série (3) converge et le procédé linéaire considéré est arbitraire.

**Remarque.** L'énoncé du théorème 4 peut être modifié, en remplaçant le procédé de sommation linéaire qui y figure par un procédé de sommation qui consiste à définir la somme d'une série quelconque

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

comme

$$\lim_{\varrho \to g} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\varrho) \,.\, u_n,$$

où

$$0 \leqslant \beta_n(\varrho) \leqslant 1, \quad \lim_{\varrho \to g} \beta_n(\varrho) = 1$$

et $g$ est un nombre fine. On obtient ainsi le théorème dont la démonstration est analogue à celle du théorème 4.

§ 3. Les procédés de sommation de Cesàro et de Poisson étant des procédés linéaires, on voit du théorème 4 qu'*il existe un système normé de fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$ et une suite de constantes $a_n$, donnant lieu à la série* (3) *convergente, tels que la série* (2) *n'est sommable en aucun point par le procédé de Poisson et, par suite, par le procédé de Cesàro de tout ordre positif.*

On peut se demander, quelle doit être la fonction positive $W(n)$ pour laquelle la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} W(n) \,.\, a_n^2 \tag{32}$$

entraîne la sommation presque partout de la série (2) par le procédé de Poisson ou de Cesàro. Convenons de dire que la fonction positive $W(n)$ est *une fonction de M. Weyl pour un procédé linéaire donné*, si, quel que soit le système normé de fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, la convergence de la série (32) entraîne la sommation presque partout de la série (2) par ce procédé. Nous dirons, ensuite, qu'une fonction positive $L(n)$ est *une fonction limitrophe pour un procédé linéaire donné*, lorsqu'elle possède les propriétés suivantes:

1°. La fonction $L(n)$ est une fonction de M. Weyl pour le procédé linéaire considéré.

2°. Toute fonction positive $w(n)$, vérifiant la condition

$$w(n)=o\,[L(n)],$$

n'est pas une fonction de M. Weyl pour ce procédé [1]).

On voit immédiatement, en vertu de la proposition énoncée à la fin de la première partie de cet ouvrage, que $(\lg n)^2$ *est une fonction limitrophe pour la convergence au sens ordinaire.* Nous allons démontrer, dans la suite, le théorème:

**Théorème 5.** *La fonction limitrophe pour le procédé de Poisson et pour celui de Cesàro d'ordre positif quelconque* $\lambda$ (entier ou non) *est égale à* $(\lg\lg n)^2$.

Or la sommation d'une série numérique quelconque par un des procédés de Cesàro entraîne la sommation de cette série par le procédé de Poisson [2]); il nous suffira donc de démontrer les deux théorèmes suivants:

**Théorème 6.** *Si les fonctions* $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, *forment un système normé de fonctions orthogonales, si, de plus, les constantes réelles* $a_n$ *sont telles que la série*

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\lg\lg n)^2 \cdot a_n^2 \quad (33)$$

[3])

[1]) Nous convenons d'écrire, avec M. Landau $f(n)=o(n)$ au lieu de $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n}=0$.

[2]) Hölder, *Grenzwerte von Reihen an der Convergenzgrenze*, Math. Ann., t. 22, 1882, p. 535.

[3]) Nous allons considérer, dans la démonstration du théorème 6, les logarithmes à base 2.

*converge, la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x) \tag{2}$$

*est sommable presque partout par le procédé de Cesàro d'ordre* $\lambda$, *quel que soit le nombre positif* $\lambda$.

**Théorème 7.** *Quelle que soit la fonction positive* $w(n)$, *vérifiant la condition*

$$w(n) = o[(\lg\lg n)^2],$$

*il existe toujours un système normé de fonctions orthogonales* $\varphi_n(x)$ *et une suite de constantes* $a_n$, *donnant lieu à la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \cdot a_n^2 \tag{32}$$

*convergente, tels que la série* (2) *n'est sommable en aucun point par le procédé de Poisson.*

Or la sommation d'une série par le procédé de Cesàro d'ordre donné $\lambda$ entraîne la sommation de cette série par le même procédé de tout ordre supérieur à $\lambda$; il suffit donc de démontrer le théorème 6 pour $\lambda = \frac{1}{q}$, $q$ étant un nombre entier quelconque, supérieur à *un*. Nous supposerons, dans la suite, que $\lambda$ a la forme indiquée.

Il est connu que le procédé de Cesàro d'ordre $\lambda < 1$, appliqué à une série numérique quelconque

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

est équivalent au procédé qui consiste à trouver la limite pour $n \to \infty$ de la somme

$$\sum_{s=1}^{n} \left(1 - \frac{s-1}{n}\right)^{\lambda} \cdot u_s \text{ [1]}.$$

Pour démontrer le théorème 6, il suffit donc de prouver que l'expression

[1]) M. M. Riesz, *Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques*, Comptes Rendus, t. 152, 1911, p. 1651, et surtout du même auteur: *Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation*, Proc. Lond. Math. Soc. 1924.

$$\sigma(x, n) = \sum_{s=1}^{n} \left(1 - \frac{s-1}{n}\right)^{\lambda} . a_s . \varphi_s(x)$$

tend presque partout vers une limite déterminée, $n$ tendant à l'infini. Nous commençons par démontrer quelques lemmes préliminaires concernant l'expression $\sigma(x, n)$.

§ 4. **Lemme I.** *Étant donné un système normé de fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$ et une suite de constantes réelles $a_n$, soit*

$$(34) \qquad \sigma(x, n) = \sum_{s=1}^{n} \left(1 - \frac{s-1}{n}\right)^{\lambda} . a_s . \varphi_s(x),$$

$$(35) \quad \sigma_1(x; n, n', p) = \sum_{s=1}^{n'} \left[\left(1 - \frac{s-1}{n+p}\right)^{\lambda} - \left(1 - \frac{s-1}{n}\right)^{\lambda}\right] . a_s . \varphi_s(x),$$

$$(36) \quad \sigma_2(x; n, n', p) = \sum_{s=n'+1}^{n} \left[\left(1 - \frac{s-1}{n+p}\right)^{\lambda} - \left(1 - \frac{s-1}{n}\right)^{\lambda}\right] . a_s . \varphi_s(x),$$

$$(37) \qquad \sigma_3(x; n, p) = \sum_{s=n+1}^{n+p} \left(1 - \frac{s-1}{n+p}\right)^{\lambda} . a_s . \varphi_s(x),$$

*où $\lambda > 0$ et les nombres entiers $n'$, $n$, $p$ vérifient les conditions*

$$0 < n' < n, \quad p > 0.$$

*On a alors*

$$(38) \quad \int_0^1 [\sigma(x, n+p) - \sigma(x, n)]^2 \, dx = \int_0^1 [\sigma_1(x; n, n', p)]^2 \, dx + \\ + \int_0^1 [\sigma_2(x; n, n', p) + \sigma_3(x; n, p)]^2 \, dx,$$

$$(39) \quad \int_0^1 [\sigma_1(x; n, n', p)]^2 \, dx \leqslant \lambda^2 . \frac{p^2}{n^{2\lambda} . (n+p)^2} . \sum_{s=1}^{n'} \frac{(s-1)^2}{(n-s)^{2-2\lambda}} . a_s^2,$$

$$(40) \quad \int_0^1 [\sigma_2(x; n, n', p) + \sigma_3(x; n, p)]^2 \, dx \leqslant C . \left(\frac{p}{n}\right)^{2\lambda} . \sum_{s=n'+1}^{n+p} a_s^2,$$

$$(41) \qquad \int_0^1 [\sigma_2(x; n, n', p) + \sigma_3(x; n, p)]^2 \, dx \leqslant \sum_{s=n'+1}^{n+p} a_s^2,$$

*où $C$ est un nombre positif qui ne dépend que de $\lambda$.* (Les inégalités (40) et (41) subsistent aussi dans le cas $n'=0$).

D é m o n s t r a t i o n. La relation (38) est évidente. On obtient aussi immédiatement l'inégalité (41), en tenant compte des inégalités

$$0<\left(1-\frac{s-1}{n+p}\right)^{\lambda}-\left(1-\frac{s-1}{n}\right)^{\lambda}<1, 0<s\leq n, p>0;$$

$$0<\left(1-\frac{s-1}{n+p}\right)<1,\ 0<s\leq n+p.$$

Afin d'obtenir les inégalités (39) et (40), nous supposerons, comme plus haut,

(42) $$\lambda=\frac{1}{q},$$

où $q$ est un nombre entier supérieur à *un*, de sorte que

(43) $$\lambda<1.$$

Considérons la quantité $\theta$, $0<\theta<1$, figurant dans la formule de L a g r a n g e

(44) $$(y+u)^{\lambda}-y^{\lambda}=\lambda u\,(y+\theta u)^{\lambda-1}.$$

Nous allons démontrer que, pour $y>0$, $u>0$,

(45) $$\theta>\theta_{\lambda},$$

où $\theta_{\lambda}$ est une quantité ne dépendant que de $\lambda$, dont la valeur est donnée par la relation

$$\theta_{\lambda}=\lambda^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Posons à cet effet

(46) $$H(u,y)=(y+\theta u)^{1-\lambda}-(y+\theta_{\lambda}.u)^{1-\lambda},$$

où $\theta$ est regardée comme fonction de $y$ et $u$ définie par la relation (44). On a, en vertu de (42) et (44),

$$(y+\theta u)^{1-\lambda}=\frac{1}{q}\left[(y+u)^{\frac{q-1}{q}}+(y+u)^{\frac{q-2}{q}}y^{\frac{1}{q}}+(y+u)^{\frac{q-3}{q}}y^{\frac{2}{q}}+\ldots+y^{\frac{q-1}{q}}\right]$$

et, par suite, en supposant $y>0$, $u>0$,

$$\frac{\partial H(u,y)}{\partial u}>\frac{q-1}{q^{2}}\cdot\left[\frac{1}{(y+u)^{\frac{1}{q}}}-\frac{1}{(q^{\frac{q}{q-1}}y+u)^{\frac{1}{q}}}\right]>0.$$

Il vient donc

(47) $$H(u,y)>0, \quad u>0, \; y>0,$$

puisque

$$H(0,y)=0, \quad y>0.$$

En tenant compte de (47), (46) et (43), on obtient immédiatement l'inégalité (45).

Posons, dans la formule (44),

$$y=1-\frac{s-1}{n}, \; u=\frac{p(s-1)}{n(n+p)}, \; 0<s\leq n;$$

on a

$$\left(1-\frac{s-1}{n+p}\right)^{\lambda}-\left(1-\frac{s-1}{n}\right)^{\lambda}=$$
$$=\lambda\,\frac{p(s-1)}{n(n+p)}\cdot\frac{1}{\left[1-\frac{s-1}{n}+\theta\,\frac{p(s-1)}{n(n+p)}\right]^{1-\lambda}},$$

où $\theta$ vérifie l'inégalité (45). Il résulte de cette dernière relation et de l'inégalité (43),

(48) $$\left(1-\frac{s-1}{n+p}\right)^{\lambda}-\left(1-\frac{s-1}{n}\right)^{\lambda}<\lambda\,.\,\frac{p(s-1)}{n^{\lambda}\,(n+p)\,(n-s)^{1-\lambda}},$$

(49) $$\left(1-\frac{s-1}{n+p}\right)^{\lambda}-\left(1-\frac{s-1}{n}\right)^{\lambda}<\lambda\,.\,\theta_{\lambda}^{\lambda-1}\,.\left(\frac{p}{n}\right)^{\lambda}.$$

On a encore, pour $n<s\leq n+p$,

(50) $$0<1-\frac{s-1}{n+p}<\frac{p}{n}.$$

L'inégalité (39) est une conséquence immédiate de l'inégalité (48). On obtient, de même, l'inégalité (40), en désignant par $C$ le plus grand des deux nombres $\lambda\,\theta_{\lambda}^{\lambda-1}$ et 1 et en tenant compte des inégalités (49) et (50). Le lemme 1 se trouve donc complètement démontré.

Corollaire. *Quand $n'\leq\Theta\,.\,n$, ou $\Theta$ est un nombre vérifiant la condition $0<\Theta<1$, on a de plus,*

(51) $$\int_0^1[\sigma_1(x.\,n,n',p)]^2\,dx\leq C'\,.\,\frac{1}{n^2}\,.\sum_{s=1}^{n'}(s-1)^2\,.\,a_s^2,$$

*$C'$ étant un nombre positif qui ne dépend que de $\lambda$ et de $\Theta$.*

L'inégalité (51) s'obtient immédiatement de l'inégalité (39), en posant

$$c' = \lambda^2 . (1 - \Theta)^{2\lambda - 2}$$

et en tenant de l'inégalité évidente

$$s \geqslant n\,(1 - \Theta)$$

qui subsiste pour $s \leq n'$

**Lemme 2.** *Soit $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, un système normé de fonctions orthogonales et $a_n$ les constantes réelles telles que la série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_s^2 \tag{52}$$

*converge. En supposant que les nombres entiers $n_1$, $n_2$, $n_3$, $p_t$, $r$, vérifient les conditions*

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < n_1 < n_2,\ r > 0,\ n_1 = p_0,\ n_2 = p_1,\ n_3 = p_{r+1}, \\ \qquad p_{t-1} \leq \frac{1}{2} p_t,\ 0 < t \leq r + 1, \end{array}\right. \tag{53}$$

*on a*

$$\int_0^1 \sum_{t=1}^{r} [\sigma(x, n_3) - \sigma(x, p_t)]^2\, dx \leqslant C'' . \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} A + A'\right) \tag{54}$$

*où*

$$A = \sum_{s=1}^{\infty} a_s^2, \quad A' = \sum_{t=1}^{r+1} t \sum_{s=p_{t-1}+1}^{p_t} a_s^2,$$

*$C''$ est un nombre positif, ne dépendant que de $\lambda$, et $\sigma(x, n)$ est l'expression figurant dans le lemme précédent.*

Démonstration. En supposant $t > 0$ posons, dans les inégalités (41) et (51), $\Theta = \frac{1}{2}$, $n' = p_{t-1}$, $n = p_t$, $n + p = n_3$, ce qui est possible, en vertu de la dernière condition (53). On a des deux inégalités, ainsi obtenues, et de la relation (38)

$$\int_0^1 [\sigma(x, n_3) - \sigma(x, p_t)]^2\, dx \leqslant C' . \frac{1}{p_t^2} . \sum_{s=1}^{p_{t-1}} (s - 1)^2 . a_s^2 + \sum_{s=p_{t-1}+1}^{n_3} a_s^2,$$

où $C'$ ne dépend que de $\lambda$. En posant successivement dans l'inégalité précédente $t=1, 2, 3, \ldots, r$, et en ajoutant toutes les inégalités obtenues il vient

$$\int_0^1 \sum_{t=1}^{r}[\sigma(x,n_3)-\sigma(x,p_t)]^2\,dx \leqslant C'.\left\{\left[\sum_{s=1}^{p_0}(s-1)^2 a_s^2\right].\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i^2}\right)+\right.$$

$$(55)\qquad \left.+\sum_{t=1}^{r-1}\left[\sum_{s=p_{t-1}+1}^{p_t}(s-1)^2 a_s^2\right]\left(\sum_{i=t+1}^{r}\frac{1}{p_i^2}\right)\right\}+\sum_{t=1}^{r+1} t.\sum_{s=p_{t-1}+1}^{p_t} a_s^2.$$

On obtient des conditions (53) et de la définition de la quantité $A$

$$\left[\sum_{s=1}^{p_0}(s-1)\,a_s^2\right].\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i^2}\right)\leqslant 2\,\frac{n_1^2}{n_2^2}\,A,$$

$$\left[\sum_{s=p_{t-1}+1}^{p_t}(s-1)^2 a_s^2\right]\left(\sum_{i=t+1}^{r}\frac{1}{p_i^2}\right)\leqslant 2\sum_{s=p_{t-1}+1}^{p_t} a_s^2,\ \ 0<t\leqslant r-1,$$

et par suite, en tenant compte de ces deux inégalités, de l'inégalité (55) et de la définition de la quantité $A'$, il résulte finalement

$$\int_0^1\sum_{t=1}^{r}[\sigma(x,n_3)-\sigma(x,p_t)]^2\,dx\leqslant 2\,C'\,\frac{n_1^2}{n_2^2}\,A+(2\,C'+1)\,.\,A',$$

d'où l'on obtient l'inégalité (54), en posant $C''=2\,C'+1$.

§ 5. **Lemme 3.** *Soit $\sigma(x,n)$ l'expression figurant dans les deux lemmes précédents et soit $p(m)=2^m$, $P(m)=2^{p(m)}$. Si la série*

$$(56)\qquad \sum_{n=2}^{\infty}(\lg\lg n)\,a_n^2$$

*converge, l'expression $\sigma[x, P(m)]$ tend presque partout vers une limite déterminée lorsque $m$ croît indéfiniment.*

Démonstration. Étant donnés deux entiers quelconques $k$ et $m$, $k>m>2$, posons dans l'inégalité (54) du lemme précédent

$$n_1=P(m-1),\ n_2=P(m),\ n_3=P(k),\ r=k-m, p_t=P(m+t-1),$$
$$0\leqslant t\leqslant r+1,$$

ce qui est possible puisque

$$(57)\qquad P(m+t-1)<\frac{1}{2^m}\,P(m+t)$$

et, par suite, la dernière condition (53) est remplie. Il vient, en posant $m+t-1=\tau$,

$$\int_0^1 \sum_{\tau=m}^{k-1} \{\sigma[x, P(k)] - \sigma[x, P(\tau)]\}^2 \, dx \leqslant$$

$$\leqslant C''.\left\{\left[\frac{P(m-1)}{P(m)}\right]^2 A + \sum_{\tau=m}^{k} (\tau - m + 1) \sum_{s=P(\tau-1)+1}^{P(\tau)} a_s^2\right\}, \tag{58}$$

où $C''$ et $A$ sont les nombres figurant dans l'inégalité (54).

En tenant compte de l'inégalité (57) et de l'inégalité évidente

$$\tau - m + 1 \leqslant \tau \leqslant 1 + \lg\lg s < 2 \lg\lg s,$$

subsistant pour $\tau \geqslant m > 2$, $P(\tau-1) < s \leqslant P(\tau)$, on voit que la seconde partie de l'inégalité (58) est inférieure à

$$C'' \left\{\frac{A}{2^m} + 2 \sum_{s=P(m-1)+1}^{P(k)} (\lg\lg s) . a_s^2\right\}. \tag{59}$$

Soit $\delta$ un nombre positif arbitrairement petit. En vertu de la convergence de la série (56) on peut choisir l'entier $m = m(\delta)$ assez grand, pour que la quantité (59) et, par suite, la seconde partie de l'inégalité (58) soit inférieure à $\delta^3$, quel que soit $k$ supérieur à $m$, d'où

$$\int_0^1 \sum_{\tau=m}^{k-1} \{\sigma[x, P(k)] - \sigma[x, P(\tau)]\}^2 \, dx < \delta^3, \quad k > m. \tag{60}$$

Désignons par $G_k = G_k(\delta)$ l'ensemble de tous les points $x$ pour lesquels subsiste l'inégalité

$$\sum_{\tau=m}^{k-1} \{\sigma[x, P(k)] - \sigma[x, P(\tau)]\}^2 \geqslant \delta^2.$$

Il vient de l'inégalité (60),

$$\text{Mes}\, G_k < \delta, \quad k > m.$$

Quel que soit le point $x$ de l'ensemble $C\,G_k$, complémentaire à $G_k$, on a l'inégalité

$$|\sigma[x, P(\tau')] - \sigma[x, P(\tau)]| < 2\delta, \tag{61}$$

pour toutes les valeurs de $\tau$ et $\tau'$ vérifiant la condition

$$m < \tau < \tau' < k.$$

Soit

$$G = G(\delta) = G_{m+1} + G_{m+2} + \ldots + G_t + \ldots$$

En tout point de l'ensemble $CG$ subsiste l'inégalité (61), quels que soient les entiers $\tau$, $\tau'$ vérifiant la condition $m < \tau < \tau'$, et l'on a

$$\text{Mes } CG \geqslant 1 - \delta.$$

Comme $\delta$ peut être pris arbitrairement petit, on voit immédiatement que l'expression $\sigma[x, P(m)]$ tend presque partout vers une limite déterminée lorsque $m$ croît indéfiniment, c. q. f. d.

**Lemme 4.** *$\lambda$ étant positif et les quantités $\sigma(x,n)$, $p(m)$, $P(m)$, $A$ étant les mêmes que dans les lemmes précédents, soit*

$$n(l,s) = 2^m + s \cdot 2^l, \quad N(l,s) = 2^{n(l,s)}, \quad B_m = \sum_{j=P(m)+1}^{P(m+1)} a_j^2;$$

$$\Delta(x,l,s) = \left| \sigma[x, N(l, s+1)] - \sigma[x, N(l,s)] \right|.$$

*Désignons, ensuite, par $E = E(\delta) > 0$, l'ensemble de tous les points $x$, pour lesquels le nombre des expressions différentes $\Delta(x,l,s)$* [1], *$0 \leqslant s < 2^{m-l}$, $2\,\mathrm{E}\lg m \leqslant l < m$* [2], *vérifiant l'inégalité*

$$\Delta(x,l,s) \geqslant \delta,$$

*est supérieur ou égal à $q$, $q > 0$.*

*On a alors*

$$\text{Mes } E \leqslant \frac{C'''}{q\,\delta^2} \left[ \frac{A}{2^m} + m\,(B_{m-1} + B_m) \right] \quad m \geqslant q, \tag{62}$$

*ou $C'''$ est un nombre positif qui ne dépend que de $\lambda$.*

D é m o n s t r a t i o n. Les indices $l$ et $s$ étant supposés fixes, soit $e(l,s)$ l'ensemble de tous les points $x$ pour lesquels subsiste l'inégalité

$$\Delta(x,l,s) \geqslant \delta$$

et soit $E(l,s)$ la partie commune des ensembles $E$ et $e(l,s)$. Nous

[1] Nous regardons les expréssion $\Delta(x,l,s)$ comme distinctes, si elles diffèrent par un au moins des deux indices $l$ et $s$, bien que leurs valeurs numériques soient égales.

[2] Nous désignons, suivant l'habitude, par $\mathrm{E}\,a$ la partie entière de $a$.

aurons

$$\text{Mes}\, E(l,s) \leqslant \text{Mes}\, e(l,s), \quad E = \Sigma E(l,s),$$

où la sommation doit être étendue à tous les indices $l$ et $s$ vérifiant la condition

$$0 \leqslant s < 2^{m-l}, \quad 2\,\text{E}\lg m \leqslant l < m.$$

En vertu de la définition des ensembles $E(l,s)$ chaque point de $E$ appartient à quelques ensembles $E(l,s)$ différents dont le nombre dans la somme $\Sigma E(l,s)$ est supérieur ou égal à $q$. On en conclut, en tenant compte de la proposition démontrée dans la première partie de cet ouvrage [1], que la mesure de l'ensemble $E$ est inférieure ou égale à

$$\frac{1}{q}\, \Sigma\, \text{Mes}\, E(l,s),$$

d'où

(63) $$\text{Mes}\, E \leqslant \frac{1}{q}\, \Sigma\, \text{Mes}\, e(l,s).$$

Pour calculer la valeur de Mes $e(l,s)$, posons, dans le lemme 2 du paragraphe précédent,

$$r = 1,\ n_1 = p_0 = N(l, s-1),\ n_2 = p_1 = N(l,s),\ n_3 = p_2 = N(l, s+1)$$

ce qui est possible en vertu des inégalités évidentes

(64) $$\begin{aligned} N(l,s) &< \frac{1}{2^{\frac{1}{4}m^2}}\, N(l,s+1) < \frac{1}{2}\, N(l,s+1), \\ N(l,s-1) &< \frac{1}{2^{\frac{1}{4}m^2}}\, N(l,s) \leqslant \frac{1}{2}\, N(l,s), \quad m \geqslant 2. \end{aligned}$$

Il vient de l'inégalité (54) et de la définition des quantités $A'$, $\Delta(x,l,s)$,

$$\int_0^1 [\Delta(x,l,s)]^2\, dx \leqslant C'' \left\{\left[\frac{N(l,s-1)}{N(l,s)}\right]^2 A + 2 \sum_{j=N(l,s-1)+1}^{N(l,s+1)} a_j^2,\right.$$

où $C''$ ne dépend que de $\lambda$. En tenant compte de la définition des ensembles $e(l,s)$ et des inégalités (64), on obtient de la dernière inégalité

[1]) § 1, note 6.

$$\text{Mes}\, e(l,s) \leqslant \frac{C''}{\delta^2}\left[\frac{A}{2^{\frac{1}{4}m^2}} + 2\sum_{j=N(l,s-1)+1}^{N(l,s+1)} a_j^2\right]$$

et, par suite, il résulte de l'inégalité (63) et de la définition des quantités $B_m$,

$$\text{Mes}\, E \leqslant \frac{1}{q}\sum_{l=2\mathrm{E}\lg m}^{m-1}\ \sum_{s=0}^{2^{m-l}-1} \text{Mes}\, e(l,s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C''}{q\delta^2}\left[\frac{m\, 2^m A}{2^{\frac{1}{4}m^2}} + 2\sum_{l=2\mathrm{E}\lg m}^{m-1}\ \sum_{s=0}^{2^{m-l}}\left(\sum_{j=N(l,s-1)+1}^{N(l,s)} a_j^2 + \sum_{j=N(l,s)+1}^{N(l,s+1)} a_j^2\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C'''}{q\,\delta^2}\left[\frac{A}{2^m} + m\,(B_{m-1} + B_m)\right],\ C''' = 2^7 C'',$$

ce qui prouve le lemme proposé puisque $C'''$ ne dépend que de $\lambda$.

§ 6. En tenant compte des quatre lemmes précédents on peut démontrer le théorème 6, énoncé dans le § 3. Étant donnés deux nombres entiers et positifs $\nu$, $m$ et un nombre positif $\delta$, définissons les ensembles $E_\nu = E_\nu(\delta)$ et $E'_m = E_m(\delta)$ d'une manière suivante:

1°. $E_\nu$ est l'ensemble de tous les points $x$ pour lesquels subsiste l'inégalité

$$|\,\sigma(x,n) - \sigma(x, 2^\nu)\,| < \delta,$$

quel que soit l'entier $n$ vérifiant la condition

$$2^\nu < n < 2^{\nu+1} \tag{65}$$

2°. $E'_m$ est l'ensemble de tous les points $x$ pour lesquels subsiste l'inégalité

$$|\,\sigma(x, 2^\nu) - \sigma[x, P(m)]\,| < \delta,$$

quel que soit l'entier $\nu$ vérifiant la condition

$$2^m < \nu < 2^{m+1},$$

où $P(m)$ a le même sens que dans les lemmes précédents.

Nous démontrerons tout d'abord la convergence de chacune des deux séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \text{Mes}\, \complement E_\nu \tag{66}$$

et

$$\sum_{m=1}^{\infty} \text{Mes}\, \complement E'_m. \tag{67}$$

où $CE_\nu$ et $CE'_m$ sont respectivement les ensembles complémentaires à $E_\nu$ et $E'_m$. En tenant compte du lemme 3, on achève ensuite la démonstration du théorème 6.

Pour établir la convergence des séries (66) et (67), nous nous servirons d'une inégalité qui peut être écrite comme il suit.

Soit $N$ un nombre entier et positif quelconque et soient $Q(k)$, $0 \leqslant k \leqslant 2^N$, des entiers positifs. En posant

$$D(x, l, s) = |\, \sigma[x, Q(\overline{s+1} \,.\, 2^l)] - \sigma[x, Q(s \,.\, 2^l)] \,|, \tag{68}$$

$s \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, on a alors

$$|\, \sigma(x, Q(k)] - \sigma[x, Q(0)] \,| \leqslant \sum_{i=1}^{N'} D(x, l_i, s_i), \tag{69}$$

quel que soit $k$ vérifiant l'inégalité $0 < k < 2^N$, où $N' \leqslant N$ et $s_i$, $l_i$ sont des entiers dépendant de $k$ et tels que

$$0 \leqslant s_i < 2^{N-l_i},\ 0 \leqslant l_i < N,\ l_{i-1} < l_i\,{}^{1)}.$$

Démontrons la convergence de la série (66). Nous introduirons les abréviations:

$$n(l, s) = 2^\nu + s \,.\, 2^l, \quad 0 \leqslant s < 2^{\nu-l}, \quad 0 \leqslant l < \nu;$$

$$d(x, l, s) = |\, \sigma[x, n(l, s+1)] - \sigma[x, n(l, s)] \,|, \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

où $A$ est un nombre fini, puisque, en vertu des conditions du théorème 6, la série à droite doit être convergente. Nous supposerons que $\nu \geqslant 4$.

En posant dans le lemme 1 du § 4:

$$n = n(l, s), \quad p = 2^l, \quad n' = n'(l, s) = n(l, s) - p,$$

on obtient de la relation (38) et des inégalités (39), (40),

$$\int_0^1 [d(x, l, s)]^2 dx < \lambda^2 \frac{p^2}{[n(l, s)]^{2\lambda} \,.\, [n(l, s+1)]^2} \sum_{j=1}^{n'(l,s)} \frac{(j-1)^2}{[n(l, s) - j]^{2-2\lambda}}\, a_j^2 +$$

$$+ C \left[\frac{p}{n(l, s)}\right]^{2\lambda} \cdot \sum_{j=n'(l,s)+1}^{n(l,s+1)} a_j^2, \tag{70}$$

où $C$ est un nombre positif qui ne dépend que de $\lambda$.

[1]) L'inégalité (69) s'obtient de la même façon que la relation (5) de la première partie de cet ouvrage (§ 1, note 4).

Soit

$$n'' = 2^{\nu - \mathrm{Elg}\,\nu};$$

on a, en vertu de la définition des nombres $n(l, s)$, $n'(l, s)$, $n''$ et des inégalités $\nu \geqslant 4$, $l < \nu$:

$$n(l, s) \geqslant 2^{\nu}; \quad s \geqslant 0,\ l \geqslant 0;\ \frac{n''}{2^{\nu}} < \frac{2}{\nu};$$

$$n(l, s) - n'' \geqslant \frac{1}{2}\, n(l, s); \quad \frac{n(l, s)}{n(l, s) - j} \leqslant 2,\ j \leqslant n'';$$

$$n'(l, s) \geqslant 2^{\nu - 1} > n'';$$

et par suite il vient de l'inégalité (70)

$$\int_0^1 [d(x, l, s)]^2\, dx < \lambda^2 \left(\frac{p}{2^{\nu}}\right)^2 \left(\frac{n''}{2^{\nu}}\right)^2 \sum_{j=1}^{n''} \left[\frac{n(l, s)}{n(l, s) - j}\right]^{2-2\lambda} \cdot a^2 +$$

(71)
$$+ \lambda^2 \frac{p^2}{2^{2\lambda\nu}} \cdot \sum_{j=n''+1}^{n'(l,s)} \frac{1}{[n(l, s) - j]^{2-2\lambda}}\, a_j^2 + C \left(\frac{p}{2^{\nu}}\right)^{2\lambda} \cdot \sum_{j=n''+1}^{n(l,s+1)} a_j^2 \leqslant \Gamma(l, s),$$

où

$$\Gamma(l, s) = C' \left(\frac{p}{2^{\nu}}\right)^2 \frac{A}{\nu^2} + \lambda^2 \frac{p^2}{2^{2\lambda\nu}} \cdot \sum_{j=n''+1}^{n'(l,s)} \frac{1}{[n(l, s) - j]^{2-2\lambda}} \cdot a^2 +$$

$$+ C \left(\frac{p}{2^{\nu}}\right)^{2\lambda} \cdot \sum_{j=n'+1}^{n(l,s+1)} a_j^2,\ C = 4\lambda^2 2^{2-2\lambda}.$$

Soit $\Omega(l, s)$ l'ensemble de tous les points $x$ pour lesquels subsiste l'inégalité

$$d(x, l, s) \geqslant \left(\frac{p}{2^{\nu}}\right)^{\frac{1}{2}\lambda} \cdot \frac{\delta}{L},$$

où

$$L = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j}\right)^{\frac{1}{2}\lambda}$$

et les entiers $l$, $s$ sont supposés fixes. En vertu de l'inégalité (71) on a immédiatement

$$\mathrm{Mes}\ \Omega(l, s) \leqslant \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \left(\frac{2^{\nu}}{p}\right)^{\lambda} \Gamma(l, s).$$

En posant

$$2^{\nu - l} = \frac{2^{\nu}}{p} = Q,\ E(l) = \sum_{s=0}^{Q-1} \Omega(l, s)$$

et en tenant compte de la définition des quantités $\Gamma(l, s)$, il vient donc

$$(72) \qquad \operatorname{Mes} E(l) \leqslant K \left(\frac{p}{2^{\nu}}\right)^{1-\lambda} \frac{A}{\nu^2} + K' \frac{p^{1-\lambda}}{2^{\lambda\nu}} G_l + K'' H_l,$$

où

$$G_l = \sum_{s=0}^{Q-1} \sum_{j=n''+1}^{n'} \frac{1}{[n(l,s)-j]^{2-2\lambda}} a_j^2, \quad H_l = \sum_{s=0}^{Q-1} \sum_{j=n'+1}^{n(l,s+1)} a_j^2,$$

$$K = C' \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \quad K' = \lambda^2 \left(\frac{L}{\delta}\right)^2, \quad K'' = C \left(\frac{L}{\delta}\right)^2$$

Considérons les quantités $G_l$ et $H_l$ figurant dans l'inégalité (72). Posons, comme dans le paragraphe précédent, $p(\nu) = 2^{\nu}$. En vertu de l'inégalité $\lambda < 1$ (§ 4, l'inégalité (43)) et de la définition des nombres $n' = n'(l, s)$, on a, pour $j \leqslant n'(l, s)$,

$$\frac{p}{[n(l,s)-j]^{2-2\lambda}} < 2 \cdot \sum_{t=n(l,s)-\frac{1}{2}p+1}^{n(l,s)} \frac{1}{(t-j)^{2-2\lambda}}$$

et par suite

$$G_l \leqslant 2 \sum_{s=0}^{Q-1} \sum_{j=n''+1}^{n'(l,s)} \sum_{t=n(l,s)-\frac{1}{2}p+1}^{n(l,s)} \frac{1}{(t-j)^{2-2\lambda}} \cdot a_j^2 \leqslant$$

$$(73) \qquad \leqslant 2 \sum_{t=p(\nu)-\frac{1}{2}p+1}^{p(\nu+1)-1} \sum_{j=n''+1}^{t-\frac{1}{2}p} \frac{1}{(t-j)^{2-2\lambda}} \cdot a_j^2,$$

puisque $n(l, Q-1) \leqslant 2^{\nu+1} - 1 = p(\nu+1) - 1$ et l'inégalité $n(l,s) - \frac{1}{2}p < t$ entraîne l'inégalité $n'(l,s) < t - \frac{1}{2}p$.

Changeons l'ordre de sommation dans le second membre de l'inégalité (73). On obtient de cette inégalité

$$G_l \leqslant 2 \sum_{j=n''+1}^{p(\nu)-p} a_j^2 \sum_{t=p(\nu)-\frac{1}{2}p+1}^{p(\nu+1)-1} \frac{1}{(t-j)^{2-2\lambda}} +$$

$$+ 2 \sum_{j=p(\nu)-p+1}^{p(\nu+1)-\frac{1}{2}p-1} a_j^2 \sum_{t=j+\frac{1}{2}p}^{p(\nu+1)-1} \frac{1}{(t-j)^{2-2\lambda}} \leqslant 2 \sum_{j=n''+1}^{p(\nu+1)} a_j^2 \cdot \int_{j+p/2-1}^{+\infty} \frac{d\alpha}{(\alpha-j)^{2-2\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant K''' \frac{1}{p^{1-2\lambda}} \cdot \sum_{j=n''+1}^{p(\nu+1)} a_j^2,$$

où $K'''$ est un nombre positif qui ne dépend que de $\lambda$. En posant

$$A_k = \sum_{j=p(k)+1}^{p(k+1)} a_j^2$$

et en tenant compte de la définition des nombres $n''$, $p(\nu)$, il résulte de l'inégalité précédente

$$G_l \leqslant K''' \cdot \frac{1}{p^{1-2\lambda}} \cdot \sum_{k=\nu-E\lg\nu}^{\nu} A_k. \tag{74}$$

En vertu de la définition de la quantité $H_l$ et des nombres $p$, $n' = n'(l, s)$, on a, de plus,

$$H_l = \sum_{s=0}^{Q-1} \left( \sum_{j=n'(l,s)+1}^{n(l,s)-1/2p} a_j^2 + \sum_{j=n(l,s)-1/2p+1}^{n(l,s)} a_j^2 + \sum_{j=n(l,s)+1}^{n(l,s+1)} a_j^2 \right) \leqslant 3(A_{\nu-1} + A_\nu). \tag{75}$$

Soit

$$\Omega_\nu = \sum_{l=0}^{\nu-1} E(l);$$

il vient des inégalités (72), (74) et (75)

$$\begin{aligned} \text{Mes}\, \Omega_\nu &\leqslant K \frac{A}{\nu^2} \cdot \sum_{l=0}^{\nu-1} \left( \frac{1}{2^{\nu-l}} \right)^{1-\lambda} + \\ &+ K^{IV} \sum_{l=0}^{\nu-1} \left( \frac{1}{2^{\nu-l}} \right)^{\lambda} \cdot \sum_{k=\nu-E\lg\nu}^{\nu} A_k \leqslant K\, H\, \frac{A}{\nu^2} + K^{IV} H' \sum_{k=\nu-E\lg\nu}^{\nu} A_k, \end{aligned} \tag{76}$$

où

$$K^{IV} = K'\, K''' + 6\, K'',\ H = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^j} \right)^{1-\lambda},\ H' = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^j} \right)^{\lambda},$$

$H$ et $H'$ étant des nombres finis, puisque, par hypothèse, $\lambda$ est compris entre *zéro* et *un*.

En supposant les entiers $q'$ et $q''$, $q' < q''$, suffisamment grands, il résulte de l'inégalité (76)

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=q'}^{q''} \text{Mes}\, \Omega_\nu &\leqslant K\, H\, A \sum_{\nu=q'}^{q''} \frac{1}{\nu^2} + K^{IV}. H' \sum_{\nu=q'}^{q''} \sum_{k=\nu-E\lg\nu}^{\nu} A_k \leqslant \\ &\leqslant K\, H\, A \sum_{\nu=q'}^{q''} \frac{1}{\nu^2} + K^{IV} H' \sum_{k=\nu-E\lg q'}^{q''} (lg\,\nu)\, A_\nu \end{aligned}$$

et, par suite, en vertu de la définition des quantités $A_\nu$,

$$\sum_{\nu=q'}^{q''} \operatorname{Mes} \Omega_\nu \leqslant K\, H\, A \,.\, \sum_{\nu=q'}^{q''} \frac{1}{\nu^2} + K^{IV}\, H' \sum_{n=h'}^{h''} (\lg\lg n)\, a_n^2,$$

où les nombres $h'$ et $h''$ croissent indéfiniment avec $q'$ et $q''$. En tenant compte de la dernière inégalité et de la convergence de la série (33) figurant dans l'énoncé du théorème 6, on voit immédiatement que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Mes} \Omega_\nu \tag{77}$$

converge.

Nous allons démontrer que l'ensemble $C\,\Omega_\nu$, complémentaire à $\Omega_\nu$ est une partie de l'ensemble $E_\nu$. En posant, dans l'inégalité (59), $N = \nu$, $Q(k) = 2^\nu + k$, on obtient

$$|\,\sigma(x, n) - \sigma(x, 2^\nu)\,| \leqslant \sum_{i=1}^{N'} d(x, l_i, s_i),$$

pour toutes les valeurs de $n$ vérifiant la condition $2^\nu < n < 2^{\nu+1}$, où $N' \leqslant \nu$ et $s_i$, $l_i$ sont des entiers dépendant de $n$ et tels que

$$0 \leqslant s_i < 2^{\nu - l_i}, \quad 0 \leqslant l_i < \nu, \quad l_{i-1} < l_i.$$

En vertu de la définition des ensembles $\Omega_\nu$, $E(l)$, $\Omega(l, s)$ et des nombres $p$, $L$, on a donc

$$|\,\sigma(x, n) - \sigma(x, 2^\nu)\,| \leqslant \frac{\delta}{L} \sum_{i=1}^{N'} \left(\frac{1}{2^{\nu - l_i}}\right)^{\frac{1}{2}\lambda} < \delta, \; 2^\nu < n < 2^{\nu+1},$$

pour tous les points $x$ de l'ensemble $C\,\Omega_\nu$.

En tenant compte de la définition de l'ensemble $E_\nu$, on voit de cette dernière inégalité que l'ensemble $C\,\Omega_\nu$ est une partie de l'ensemble $E_\nu$ et, par suite, l'ensemble $C\,E_\nu$ est une partie de l'ensemble $\Omega_\nu$, d'où

$$\operatorname{Mes} C\,E_\nu \leqslant \operatorname{Mes} \Omega_\nu .$$

De la convergence de la série (77) il résulte donc la convergence de la série (66).

§ 7. Démontrons la convergence de la série (67), definie dans le paragraphe précédent. En supposant l'entier $m$ fixe, posons

$$R(x, k, \nu) = |\,\sigma[x, N(2\,\mathrm{E}\lg m, k)] - \sigma(x, 2^\nu)\,|,$$

où

$$n(l,k)=2^m+k.2^l,\ N(l,k)=2^{n(l,k)}.$$

Désignons, ensuite, par $H_m$ l'ensemble de tous les points $x$ pour lesquels subsiste l'inégalité

$$R(x,k,\nu)<\frac{\delta}{2},$$

quels que soient les entiers $k$ et $\nu$ vérifiant les conditions

(78) $$0<k\leqslant 2^{m-2\mathrm{E}\lg m},\ n(2\,\mathrm{E}\lg m, k-1)\leqslant\nu<n(2\,\mathrm{E}\lg m, k).$$

Nous nous proposons tout d'abord d'obtenir l'inégalité donnant la valeur de Mes $\mathrm{C}\,H_m$, où $\mathrm{C}\,H_m$ est l'ensemble complémentaire à $H_m$. Soit $e(k,\nu)$ l'ensemble de tous les points $x$, vérifiant l'inégalité

$$R(x,k,\nu)\geqslant\frac{\delta}{2},$$

les entiers $k$ et $\nu$ étant supposés fixes. Posons

$$e(k)=\sum_{\nu=n(2\mathrm{E}\lg m,k-1)}^{n(2\mathrm{E}\lg m,k)-1}e(k,\nu),\ \chi(m)=2^{m-2\mathrm{E}\lg m}$$

et désignons par $e'(k)$ l'ensemble de tous les points $x$ pour lesquels subsiste l'inégalité

(79) $$\sum_{\nu=n(2\mathrm{E}\lg m,k-1)}^{n(2\mathrm{E}\lg m,k)-1}[R(x,k,\nu)]^2\geqslant\frac{\delta^2}{4}.$$

En tenant compte de la définition des ensembles $H_m$, $e(k,\nu)$ et $e(k)$, on voit immédiatement que l'ensemble $e(k)$ est une partie de l'ensemble $e'(k)$ et

$$\mathrm{C}\,H_m=\sum_{k=1}^{\chi(m)}e(k),$$

d'où

(80) $$\mathrm{Mes}\,\mathrm{C}\,H_m\leqslant\sum_{k=1}^{\chi(m)}\mathrm{Mes}\,e'(k).$$

Pour calculer la mesure de l'ensemble $e'(k)$, $0<k\leqslant\chi(m)$, nous nous servirons du lemme 2 du § 4, en y posant

$$r=n(2\,\mathrm{E}\lg m,k)-n(2\,\mathrm{E}\lg m,k-1),$$

$$t=\nu-n(2\,\mathrm{E}\lg m,k-1)+1,\ p_t=2^{t-1}.N(2\,\mathrm{E}\lg m,k-1),\ t\geqslant 1.$$

$$n_1=p_0=N(2\,\mathrm{E}\lg m,k-2),$$

d'où

$$n_2 = p_1 = N(2\,\mathrm{E}\lg m, k-1), \quad n_3 = p_{r+1} = N(2\,\mathrm{E}\lg m, k).$$

Il vient de la définition des expressions $R(x, k, \nu)$,

$$(81)\quad \int_0^1 \sum_{\nu=n(2\mathrm{E}\lg m, k-1)}^{n(2\mathrm{E}\lg m, k)-1} [R(x,k,\nu)]^2\,dx \leqslant C''.\left\{\left[\frac{N(2\,\mathrm{E}\lg m, k-2)}{N(2\,\mathrm{E}\lg m, k-1)}\right]^2 . A + A'\right\},$$

où

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2, \qquad A' = \sum_{t=1}^{r+1} t. \sum_{j=p_{t-1}+1}^{p_t} a_j^2$$

et $C''$ est un nombre positif qui ne dépend que de $\lambda$. En vertu de la définition des nombres $n(l,k), N(l,k), r, p_t, n_1, n_2, n_3$, on a, de plus,

$$(82)\qquad \frac{N(2\,\mathrm{E}\lg m, k-2)}{N(2\,\mathrm{E}\lg m, k-1)} < \frac{1}{2^{\frac{1}{4}m^2}}, \quad r < m^2,$$

$$(83)\qquad A' \leqslant (r+1) \sum_{j=n_1+1}^{n_3} a_j^2 < 2\,m^2 (A'_{k-1} + A'_k),$$

où

$$A'_k = \sum_{j=N(2\mathrm{E}\lg m, k-1)+1}^{N(2\mathrm{E}\lg m, k)} a_j^2, \quad k \geqslant 0.$$

On obtient donc de la définition des ensembles $e'(k)$ et des inégalités (81), (82), (83),

$$(84)\qquad \mathrm{Mes}\, e'(k) \leqslant \frac{4\,C''}{\delta^2}\left[\frac{A}{2^{\frac{1}{4}m^2}} + 2\,m^2\,(A'_{k-1} + A'_k)\right].$$

Supposons que les quantités $B_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, soient définies de la même façon que dans le lemme 4 du § 5, c'est-à-dire

$$B_m = \sum_{j=P(m)+1}^{P(m+1)} a_j^2, \quad P(m) = 2^{p(m)}, \quad p(m) = 2^m.$$

En combinant les inégalités (80) et (84) avec les inégalités évidentes

$$\frac{\chi(m)}{2^{\frac{1}{4}m^2}} < \frac{1}{2^m}, \quad m \geqslant 8, \quad \chi(m) = 2^{m - 2\mathrm{E}\lg m},$$

$$\sum_{k=1}^{\chi(m)} (A'_{k-1} + A'_k) \leqslant B_{m-1} + B_m,$$

il résulte finalement

$$\text{(85)} \qquad \operatorname{Mes} C H_m \leqslant \frac{8\,C''}{\delta^2}\left[\frac{A}{2^m} + m^2 (B_{m-1} + B_m)\right], \quad m \geqslant 8.$$

Soit $E'_m$ l'ensemble défini dans le paragraphe précédent. Pour démontrer la convergence de la série (67) il suffit d'établir une inégalité dont la première partie [1]) soit Mes $E'_m$ et dont la seconde partie soit une quantité, dépendant de $m$, qui puisse être regardée comme le terme général d'une série convergente. Les raisonnements seront les mêmes que dans la démonstration du théorème 1 de la première partie de cet ouvrage.

Posons

$$n(l,s) = 2^m + s \cdot 2^l, \quad N(l,s) = 2^{n(l,s)}, \quad k_p = \frac{m}{p^4},$$

$$\Delta(x,l,s) = |\sigma[x, N(l,s+1)] - \sigma[x, N(l,s)]|$$

et désignons par $e_p$, $p \geqslant 2$, l'ensemble de tous les points $x$ pour lesquels le nombre des expressions différentes $\Delta(x,l,s)$, $0 \leqslant s < 2^{m-l}$, $2\,\mathrm{E}\lg m \leqslant l < m$ [2]), vérifiant la condition

$$\text{(86)} \qquad \Delta(x,l,s) \geqslant \frac{\delta}{6\,k_{p-1}},$$

est inférieur à $\dfrac{k_p}{p^2}$. Soit $C e_p$ l'ensemble complémentaire à $e_p$. En remplaçant dans l'inégalité (62) du lemme 4 les quantités $\delta$ et $q$ respectivement par $\dfrac{\delta}{6\,k_{p-1}}$ et $\dfrac{k_p}{p^2}$, nous aurons

$$\operatorname{Mes} C e_p \leqslant \frac{36\;C''\;k_{p-1}^2\;p^2}{\delta^2\;k_p}\left[\frac{A}{2^m} + m\,(B_{m-1} + B_m)\right] \leqslant$$

$$\text{(87)} \qquad \leqslant \frac{K}{\delta^2\,(p-1)^2}\left[\frac{A}{m^2} + m^2 (B_{m-1} + B_m)\right], \quad p > 1,$$

où $C''$ et $K$ sont des nombres positifs ne dépendant que de $\lambda$.

[1]) Nous supposons que la quantité à gauche est plus petite que la quantité à droite.

[2]) Les expressions $\Delta(x,l,s)$ seront regardées comme distinctes, si elles diffèrent par un au moins des deux indices $l$ ou $s$, bien que leurs valeurs numériques soient égales.

Désignons par $H'_m$ la partie commune de tous les ensembles $e_p$, $p=2,3,4,\ldots$ En tenant compte de la relation

$$\mathrm{C}\,H' = \sum_{p=2}^{\infty} \mathrm{C}\,e_p,$$

on obtient de (87):

$$\text{(88)} \qquad \operatorname{Mes.C} H'_m \leqslant \frac{2K}{\delta^2}\left[\frac{A}{m^2} + m^2 (B_{m-1} + B_m)\right],$$

Posons $H''_m = (H_m, H'_m)$, c'est-à-dire $H''_m$ est la partie commune des ensembles $H_m$ et $H'_m$. Nous allons démontrer que l'ensemble $H''_m$ est une partie de l'ensemble $E'_m$.

Soit, en effet, $x$ un point quelconque de $H''_m$. En vertu de la définition de cet ensemble, le point $x$ considéré appartient à l'ensemble $H_m$ et à tous les ensembles $e_p$, $p=2,3,4,\ldots$ Soit $N_p$ le nombre des différentes $\Delta(x,l,s)$, $0 \leqslant s < 2^{m-l}$, $2\,\mathrm{E}\lg m \leqslant l < m$, pour lesquelles subsiste l'inégalité

$$\text{(89)} \qquad \frac{\delta}{6k_{p-1}} \leqslant \Delta(x,l,s) < \frac{\delta}{6k_p}.$$

En vertu de la définition de l'ensemble $e_p$,

$$\text{(90)} \qquad N_p < \frac{k_p}{p^2}.$$

Comme $k_1 = m$, on arrive à la conclusion suivante:

1⁰. Quel que soit $p \geqslant 2$, il existe $N_p$ quantités différentes $\Delta(x,l,s)$ vérifiant l'inégalité (89).

2⁰. Pour toutes les autres quantités $\Delta(x,l,s)$ subsiste l'inégalité

$$\Delta(x,l,s) < \frac{\delta}{6m}.$$

Posons dans l'inégalité (69) du paragraphe précédent

$$N = m - 2\,\mathrm{E}\lg m, \quad Q(k) = N(2\,\mathrm{E}\lg m, k), \quad 0 \leqslant k \leqslant 2^N,$$

et soit

$$l' = l - 2\,\mathrm{E}\lg m, \quad D(x,l',s) = |\sigma[x, Q(\overline{s+1}\,.\,2^{l'})] - \sigma[x, Q(s\,.\,2^{l'})]|.$$

Il vient de la définition des expressions $\Delta(x,l,s)$ et des nombres $Q(k)$, $P(m)$:

$$Q(0) = P(m), \quad Q(s\,.\,2^{l'}) = N(l,s), \quad D(x,l',s) = \Delta(x,l,s)$$

et, par suite, quel que soit l'entier $k$, vérifiant la condition

$$0 \leqslant k < 2^{m-2\mathrm{E}\lg m},$$

on a de l'inégalité (69),

$$|\sigma[x, N(2\,\mathrm{E}\lg m, k)] - \sigma[x, P(m)]| = |\sigma[x, Q(k)] - \sigma[x, Q(0)]| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N'} D(x, l'_i, s_i) = \sum_{i=1}^{N'} \Delta(x, l_i, s_i),$$

où $N' \leqslant m$ et $l_i, l'_i, s_i$ sont des entiers dépendant de $k$ et tels que

$$l'_i = l_i - 2\,\mathrm{E}\lg m,\ 0 \leq s_i < 2^{m-2\mathrm{E}\lg m - l'_i} = 2^{m-l_i},$$
$$0 \leq l'_i < m - 2\,\mathrm{E}\lg m,\ l'_{i-1} < l'_i.$$

Il vient, de plus, des dernières relations,

$$2\,\mathrm{E}\lg m \leq l_i < m,\ l_{i-1} < l_i.$$

Parmi les $N'$ termes de la somme

$$\sum_{i=1}^{N'} \Delta(x, l_i, s_i)$$

il y a au plus $N_p$ termes pour lesquels subsiste l'inégalité (89), $p = 2, 3, 4, \ldots$; tous les autres termes de cette somme, dont le nombre ne peut dépasser $m$, sont inférieurs à $\frac{\delta}{6m}$. Il vient donc

$$|\sigma[x, N(2\,\mathrm{E}\lg m, k)] - \sigma[x, P(m)]| \leq \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\delta N_p}{6\,k_p} + \frac{\delta}{6},$$

d'où, en vertu de (90) et de la définition des quantités $k_p$, on obtient pour le point $x$ considéré:

(91) $$|\sigma[x, N(2\,\mathrm{E}\lg m, k)] - \sigma[x, P(m)]| < \frac{\delta}{2}.$$

Soit $\nu$ un entier quelconque vérifiant la condition

$$2^m \leq \nu < 2^{m+1}$$

et soit $k$, $0 < k \leq 2^{m-2\mathrm{E}\lg m}$, un entier dépendant de $\nu$ et défini par l'inégalité

$$n(2\,\mathrm{E}\lg m, k-1) \leq \nu < n(2\,\mathrm{E}\lg m, k).$$

Comme le point $x$ considéré appartient à l'ensemble $H'_m$, on a, en vertu de la définition de cet ensemble et des quantités $R(x, k, \nu)$,

$$|\sigma[x, N(2\,\mathrm{E}\lg m, k)] - \sigma(x, 2^{\nu})| < \frac{\delta}{2}$$

En combinant la dérnière inégalité avec l'inégalité (91), on obtient

$$|\sigma(x, 2^{\nu}) - \sigma[x, P(m)]| < \delta,$$

quel que soit l'entier $\nu$ vérifiant la condition

$$2^m \leq \nu < 2^{m+1}$$

Le point $x$ considéré étant un point arbitraire de l'ensemble $H''_m$, on voit, de la définition de l'ensemble $E'_m$, que $H''_m$ est une partie de $E'_m$. L'ensemble $\mathrm{C}E'_m$ est donc, inversement, une partie de l'ensemble $\mathrm{C}H''_m$, d'où

$$\operatorname{Mes} \mathrm{C}E'_m \leq \operatorname{Mes} \mathrm{C}H''_m.$$

Or

$$\mathrm{C}H''_m = \mathrm{C}H_m + \mathrm{C}H'_m, \quad \operatorname{Mes} \mathrm{C}H''_m \leq \operatorname{Mes} \mathrm{C}H_m + \operatorname{Mes} \mathrm{C}H'_m,$$

puisque $H''_m$ est la partie commune des ensembles $H_m$ et $H'_m$; il vient donc des inégalités (85) et (88)

$$(92)\ \operatorname{Mes} \mathrm{C}E'_m \leq \operatorname{Mes} \mathrm{C}H_m + \operatorname{Mes} \mathrm{C}H'_m < K'\left[\frac{1}{m^2} + m^2(B_{m-1} + B_m)\right],$$

où $K'$ est un nombre positif qui ne dépend que de $\lambda$, $\delta$ et de $A$.

Soient $q'$ et $q''$, $q' < q''$, deux entiers positifs qui tendent à l'infini indépendamment l'un de l'autre. Il résulte de l'inégalité (92)

$$\sum_{m=q'}^{q''} \operatorname{Mes} \mathrm{C}E'_m \leqslant K'\left[\sum_{m=q'}^{q''} \frac{1}{m^2} + 2\sum_{m=q'-1}^{q''} m^2 B_m\right]$$

et, par suite, en vertu de la définition des quantités $B_m$,

$$\sum_{m=q'}^{q''} \operatorname{Mes} \mathrm{C}E'_m \leqslant K'\left[\sum_{m=q'}^{q''} \frac{1}{m^2} + 2\sum_{n=h'}^{h''} (\lg\lg n)^2 a_n^2\right],$$

où les nombres $h'$ et $h''$ croissent indéfiniment avec $q'$ et $q''$. En vertu de la dernière inégalité et de la convergence de la série (33), figurant dans l'énoncé du théorème 6, on obtient la convergence de la série (67), dont le terme général est $\operatorname{Mes} \mathrm{C}E'_m$.

En tenant compte de la convergence des séries (66) et (67), définies dans le paragraphe précédent, on achève aisément la démonstration du théorème 6. En vertu d'un théorème connu [1]), l'ensemble limite complet des ensembles $\mathrm{C}E'_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, a une mesure nulle et, par suite, la mesure de l'ensemble limite restreint

[1]) N. Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique*, Moscou, 1915, p. 38,

des ensembles $E'_m$ est égale à *un*. Il vient ensuite de la définition des ensembles $E'_m$, qu'il subsiste, en tout point de $E'_m$, l'inégalité

$$|\sigma(x, 2^{\nu'}) - \sigma(x, 2^{\nu})| < \delta,$$

quels que soient les entiers $\nu$ et $\nu'$ vérifiant la condition

$$2^m \leqslant \nu < \nu' < 2^{m+1}.$$

Or le nombre positif $\delta$, figurant dans la définition des ensembles $E'_m = E'_m(\delta)$, peut être pris arbitrairement petit; il résulte donc, en tenant compte du lemme 3 et de la propriété de $E'_m$ indiquée ci-dessus, que l'expression

$$\sigma(x, 2^{\nu})$$

tend presque partout vers une limite déterminée, lorsque $\nu$ croît indéfiniment. En se servant de la convergence de la série (66) et de la définition des ensembles $E_\nu$, on démontre, en raisonnant de la même manière, que l'expression

$$\sigma(x, n)$$

tend presque partout vers une limite déterminée, lorsque $n$ croît indéfiniment.

En tenant compte de la définition des expressions $\sigma(x, n)$ et des remarques faites au debut du § 4, il vient immédiatement que la série (2), figurant dans l'énoncé du théorème 6, est sommable presque partout par le procédé de Cesàro d'ordre $\lambda$, quel que soit le nombre positif $\lambda$. Le théorème 6 se trouve donc complètement démontré.

§ 8. Avant de passer à la démonstration du théorème 7, énoncé dans le § 3, nous examinerons de plus près les propriétés des fonctions $\delta_{\nu, m}(x)$, orthogonales dans l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$, dont la définition a été donnée par les rélations

$$\delta_{\nu, m}(x) = f_{\nu, m+1}(x) - f_{\nu, m}(x),$$

où

$$f_{\nu, m}(x) = \frac{\lg|\nu x - m|}{\lg \nu}, \; x \neq \frac{m}{\nu}; \; f_{\nu, m}\left(\frac{m}{\nu}\right) = 0 \text{ [1]}.$$

On peut démontrer pour les fonctions $\delta_{\nu, m}(x)$ le lemme suivant:

[1] § 3 de la première partie de cet ouvrage. Nous allons considérer dans la suite les logarithmes à base $e$.

**Lemme 5.** *En posant*

$$x_m = \frac{m}{\nu} - \frac{1}{k^2\nu}, \quad x'_m = \frac{m}{\nu} + \frac{1}{k^2\nu},$$

*ou $k$ et $\nu$ sont des entiers vérifiant la condition $1 < k \leqslant \nu$, $\nu > 1$, on a*

$$\sum_{s=1}^{2\nu} |\delta_{\nu,s}(x)| < 13, \tag{93}$$

*quel que soit $x$ extérieur à tous les intervalles $(x_m, x'_m)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$.*

Démonstration. Soit $x$ un point quelconque, extérieur à tous les intervalles $(x_m, x'_m)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$. Trois cas sont à distinguer:

1°. Le point $x$ est à droite de l'intervalle $(x_m, x'_m)$ et à gauche de l'intervalle $(x_{m+1}, x'_{m+1})$, où $m$ est un entier quelconque vérifiant la condition $1 \leqslant m < m+1 \leqslant 2\nu$.

2°. Le point $x$ est à gauche de tous les intervalles $(x_m, x'_m)$, $1 \leq m \leq 2\nu$.

3°. Le point $x$ est à droite de tous les intervalles $(x_m, x'_m)$, $1 \leq m \leq 2\nu$.

Examinons le premier cas. Nous aurons

$$\frac{m}{\nu} + \frac{1}{k^2\nu} < x < \frac{m+1}{\nu} - \frac{1}{k^2\nu}$$

et, par suite,

$$1 > \nu x - m > \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{1}{\nu^2}, \quad 1 > m + 1 - \nu x > \frac{1}{\nu^2},$$

$$\nu x - s > \nu x - (s+1) > 0, \quad s < m,$$

$$(s+1) - \nu x > s - \nu x > 0, \quad s > m,$$

d'où

$$|\delta_{\nu,m}(x)| \leq \frac{|\lg(m+1-\nu x)| + |\lg(\nu x - m)|}{\lg \nu} < \frac{2\left|\lg \frac{1}{\nu^2}\right|}{\lg \nu} = 4,$$

$$\delta_{\nu,s}(x) = f_{\nu,s+1}(x) - f_{\nu,s}(x) =$$

$$= \frac{\lg[\nu x - (s+1)] - \lg(\nu x - s)}{\lg \nu} < 0, \quad s < m$$

$$\delta_{\nu,s}(x) = \frac{\lg(s+1-\nu x) - \lg(s - \nu x)}{\lg \nu} > 0, \quad s > m.$$

On a, d'autre part, pour $1 \leqslant m < 2\nu$,

$$1 < \nu x < m+1 \leqslant 2\nu, \quad 1 < 2\nu+1-\nu x < 2\nu+1$$

et, par suite,

$$0 < \lg(\nu x) < 2\lg\nu, \qquad 0 < \lg(2\nu+1-\nu x) < \lg(2\nu+1) < 3\lg\nu, \quad \nu > 1.$$

On obtient donc

$$\sum_{s=1}^{2\nu} |\delta_{\nu,s}(x)| \leqslant \sum_{s=0}^{2\nu} |\delta_{\nu,s}(x)| = \left|\sum_{s=0}^{m-1} \delta_{\nu,s}(x)\right| + |\delta_{\nu,m}(x)| +$$

$$+\left|\sum_{s=m+1}^{2\nu} \delta_{\nu,s}(x)\right| = |f_{\nu,m}(x) - f_{\nu,0}(x)| + |\delta_{\nu,m}(x)| +$$

$$+ |f_{\nu,2\nu+1}(x) - f_{\nu,m+1}(x)| \leqslant \frac{|\lg(\nu x - m)| + |\lg \nu x|}{\lg\nu} +$$

$$+ |\delta_{\nu,m}(x)| + \frac{|\lg(2\nu+1-\nu x)| + |\lg(m+1-\nu x)|}{\lg\nu} < 13,$$

ce qui donne l'inégalité (93).

On prouve de la même façon l'inégalité (93) dans les cas 2° et 3°, ce qui établit le lemme à démontrer.

On peut obtenir une propriété analogue pour les fonctions $\psi_{\nu,m}(y)$, définies dans le § 4 de la première partie de cet ouvrage. Nous rappelons tout d'abord la définition des fonctions $\psi_{\nu,m}(y)$.

Étant donné un intervalle quelconque $(a,b)$, nous avons posé

$$\psi_{\nu,m}(y) = \delta_{\nu,m}[\chi(y)] \cdot \sqrt{(b-a)\cdot\chi'(y)},$$

où

(94) $$\chi(y) = \operatorname{tg}\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{(y-a)\pi}{b-a}\right].$$

Les fonctions $\psi_{\nu,m}(y)$ ainsi définies forment pour $\nu$ fixe un système de fonctions orthogonales dans l'intervalle $(a,b)$.

Nous allons démontrer pour ces fonctions le lemme suivant:

**Lemme 6.** *En tous les points $y$ de l'intervalle $(a,b)$, extérieurs à un ensemble $\Pi_\nu$,*

(95) $$\text{Mes}\, \Pi_\nu < \frac{4(b-a)}{k^{\frac{3}{2}}},$$

*subsiste l'inégalité*

(96) $$\sum_{m=1}^{2\nu} |\psi_{\nu,m}(y)| < C k^{\frac{3}{2}},$$

*où $k$ est un entier défini dans le lemme précédent, c'est-à-dire, $1 < k \leqq \nu$, et $C$ est une constante absolue.*

D é m o n s t r a t i o n. Posons $x = \chi(y)$. On voit immédiatement de la relation (94) que $x$ croît de $-\infty$ à $+\infty$, lorsque la valeur correspondante de $y$ croît de $a$ à $b$. Désignons par $y_m$, $y'_m$ les valeurs de $y$ correspondant aux valeurs $x_m$, $x'_m$ de la variable $x$. Aux points $x$ de l'intervalle $(x_m, x'_m)$ correspondent alors les points $y$ de l'intervalle $(y_m, y'_m)$ et l'on a

$$x_m = \chi(y_m), \quad x'_m = \chi(y'_m).$$

Pour calculer la longueur de l'intervalle $(y_m, y'_m)$, $0 \leqq m \leqq 2\nu$, posons

$$\alpha_m = -\frac{\pi}{2} + \frac{(y_m - a)\pi}{b - a}, \quad \alpha'_m = -\frac{\pi}{2} + \frac{(y'_m - a)\pi}{b - a},$$

d'où

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \alpha_m < \alpha'_m < \frac{\pi}{2}, \quad x_m = tg\,\alpha_m, \quad x'_m = tg\,\alpha'_m, \\ y_m = \frac{(b-a)\cdot\alpha_m}{\pi} + \frac{a+b}{2}, \quad y'_m = \frac{(b-a)\cdot\alpha'_m}{\pi} + \frac{a+b}{2}. \end{array} \right.$$

Or

$$(98) \qquad x'_m > x_m = \frac{m}{\nu} - \frac{1}{k^2\nu} \geqq \frac{1}{\nu} - \frac{1}{k^2\nu} > 0, \quad m \geqq 1;$$

il vient donc des trois premières relations (97),

$$\frac{\pi}{2} > \alpha'_m > \alpha_m > 0, \quad m \geqq 1,$$

et par suite,

$$0 < \alpha'_m - \alpha_m < \frac{\pi}{2}.$$

On a alors des relations (97) et (98),

$$y'_m - y_m = \frac{(b-a)\cdot(\alpha'_m - \alpha_m)}{\pi} < \frac{b-a}{\pi}\, tg\,(\alpha'_m - \alpha_m) =$$

$$= \frac{b-a}{\pi} \cdot \frac{x'_m - x_m}{1 + x_m \cdot x'_m} < \frac{(b-a)(x'_m - x_m)}{\pi}.$$

On obtient donc de la définition de $x_m$ et $x'_m$,

$$(99) \qquad y'_m - y_m < \frac{2(b-a)}{\pi k^2 \nu}, \quad m \geqq 1.$$

Posons

$$(100) \qquad \alpha' = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{k^{\frac{3}{2}}}, \quad \alpha'' = +\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

et soient $c'$, $c''$ les points de l'intervalle $(a, b)$ définis des relations:

$$(101) \qquad \alpha' = -\frac{\pi}{2} + \frac{(c'-a)\pi}{b-a}, \quad \alpha'' = -\frac{\pi}{2} + \frac{(c''-a)\pi}{b-a}.$$

On obtient immédiatement

$$c' = \frac{(b-a)\cdot\alpha'}{\pi} + \frac{a+b}{2}, \quad c'' = \frac{(b-a)\cdot\alpha''}{\pi} + \frac{a+b}{2}$$

et, par suite, en vertu de (100),

$$(102) \qquad c'-a = b-c'' = \frac{b-a}{k^{\frac{3}{2}}},$$

Désignons par $\Pi_\nu$ l'ensemble de tous les points $y$ compris dans les intervalles $(a, c')$, $(c'', b)$ et $(y_m, y'_m)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$. Il résulte de (99) et (102),

$$\operatorname{Mes} \Pi_\nu < \frac{4(b-a)}{\pi k^2} + \frac{2(b-a)}{k^{\frac{3}{2}}} < \frac{4(b-a)}{k^{\frac{3}{2}}},$$

c'est-à-dire, nous avons l'inégalité (95).

Déterminons la valeur de la somme

$$\sum_{m=1}^{2\nu} |\psi_{\nu,m}(y)|,$$

le point $y$ étant en dehors de l'ensemble $\Pi_\nu$. On a, en vertu de la relation (94),

$$\sqrt{(b-a)\cdot\chi'(y)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\cos\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{(y-a)\pi}{b-a}\right]}.$$

Il vient donc de (100) et (101),

$$(103) \qquad \sqrt{(b-a)\cdot\chi'(y)} < \frac{\sqrt{\pi}}{\sin\left(\frac{\pi}{k^{\frac{3}{2}}}\right)} < C' k^{\frac{3}{2}},$$

quel que soit le point $y$ compris dans l'intervalle $(c', c'')$, où $C'$ est une constante absolue.

Lorsque le point $y$ est extérieur à tous les intervalles $(y_m, y'_m)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, le point correspondant $x = \chi(y)$ doit être extérieur à tous les intervalles $(x_m, x'_m)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$. En tenant compte du lemme 5, on obtient alors l'inégalité

$$(104) \qquad \sum_{m=1}^{2\nu} |\delta_{\nu,m}[\chi(y)]| < 13$$

qui subsiste, quel que soit $y$ extérieur à tous les intervalles $(y_m, y'_m)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$.

Or les points de l'ensemble $\Pi_\nu$ sont à la fois intérieurs à l'intervalle $(c', c'')$ et extérieurs à tous les intervalles $(y_m, y'_m)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$. En posant $C = 13\, C'$ et en tenant compte de la définition des fonctions $\psi_{\nu,m}(y)$ et des inégalités (103), (104), on voit donc que l'inégalité (96) subsiste en tout point de l'ensemble $\Pi_\nu$. Le lemme 6 se trouve ainsi complètement démontré, puisque la mesure de l'ensemble $\Pi_\nu$ vérifie la condition (95).

Nous désignerons dans la suite par $x$ la variable indépendante.

Dans les §§ 5 et 6 de la première partie de cet ouvrage nous avons défini les deux systèmes de fonctions $\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x)$ et $\chi_{\nu,m}(x)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, possédant les propriétés suivantes:

1⁰. Les fonctions $\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x)$ sont définies dans un intervalle arbitraire $(a, b)$ et l'on a

$$(105) \qquad \sum_{m=1}^{2\nu} |\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x) - \psi_{\nu,m}(x)| < \frac{1}{2}$$

en tout point d'un ensemble $\mathcal{E}_\nu$ dont la mesure et supérieure à $b - a - \varepsilon$, $\varepsilon$ étant un nombre positif quelconque, donné d'avance.

$$(106) \qquad 2^0. \int_a^b [\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x) - \psi_{\nu,m}(x)]^2\, dx < \varepsilon.$$

3⁰. Les fonctions $\chi_{\nu,m}(x)$ sont définies dans l'intervalle $(a, c)$, où $c - a = 2(b - a)$.

$$(107) \qquad 4^0. \ \chi_{\nu,m}(x) = \psi_{\nu,m}(x), \quad 1 \leqslant m \leqslant 2\nu,$$

dans l'intervalle $(a, b)$.

$$(108) \qquad 5^0. \quad |\chi_{\nu,m}(x)| < \sqrt{\frac{N'}{b-a}}\, \varepsilon', \quad 1 \leqslant m \leqslant 2\nu,$$

dans l'intervalle $(b, c)$, où $N' = \nu(2\nu - 1)$ et $\varepsilon'$ est un nombre positif, ne dépendant que de $\varepsilon$, tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon' = 0.$$

6°. Les deux fonctions quelconques $\chi_{\nu,m}(x)$ et $\chi_{\nu,m'}(x)$, $m \neq m'$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, $1 \leqslant m' \leqslant 2\nu$, sont orthogonales dans l'intervalle $(a, c)$.

Nous prendrons dans la suite le nombre $\varepsilon$ assez petit, pour que les inégalités

$$(109) \qquad \varepsilon < \frac{b-a}{\nu^{\frac{3}{2}}}, \quad \sqrt{\frac{N'}{b-a}}\,\varepsilon' < \frac{1}{2\nu}$$

soient vérifiées. On peut démontrer dans ce cas le lemme suivant:

**Lemme 7.** *En tous les points de l'intervalle $(a, c)$, extérieurs à un ensemble $\Pi'_\nu$,*

$$(110) \qquad \text{Mes}\ \Pi'_\nu < \frac{4(c-a)}{k^{\frac{3}{2}}},$$

*subsiste l'inégalité*

$$(111) \qquad \sum_{n=1}^{2\nu} |\chi_{\nu,m}(x)| < H k^{\frac{3}{2}},$$

*ou $H$ est une constante absolue et $k$ est un entier quelconque vérifiant la condition $1 < k \leqslant \nu$.*

D é m o n s t r a t i o n. Posons

$$\Pi'_\nu = \Pi_\nu + C\,\mathcal{E}_\nu,$$

où $\Pi_\nu$ est l'ensemble défini dans le lemme 6 et $C\,\mathcal{E}_\nu$ est l'ensemble complémentaire à $\mathcal{E}_\nu$ par rapport à l'intervalle $(a, c)$. On a, en vertu des inégalités (95) et (109),

$$\text{Mes}\ \Pi'_\nu \leqslant \frac{4(b-a)}{k^{\frac{3}{2}}} + \frac{b-a}{\nu^{\frac{3}{2}}},$$

d'où l'on obtient l'inégalité (110), en tenant compte de la définition de l'ensemble $\Pi'_\nu$ et de la relation $c-a=2(b-a)$. Nous allons démontrer que l'inégalité (111) subsiste en tout point extérieur à l'ensemble $\Pi'_\nu$ où $H$ est une constante absolue, convenablement choisie.

Soit, en effet, $x$ un point arbitraire, extérieur à l'ensemble $\Pi'_\nu$, et par suite, extérieur à chacun des ensembles $\Pi_\nu$ et $C\,\mathcal{E}_\nu$. Deux cas sont à distinguer:

1°. Le point $x$ considéré est compris dans l'intervalle $(a, b)$.

2°. Le point $x$ est compris dans l'intervalle $(b, c)$.

Dans le premier cas le point $x$ est un point de l'intervalle $(a, b)$ qui appartient à l'ensemble $\mathcal{E}_\nu$, mais n'appartient pas à l'ensemble

$\Pi_\nu$. On obtient donc, en vertu de l'inégalité (96) et des conditions (105), (107),

$$\sum_{m=1}^{2\nu} |\chi_{\nu,m}(x)| \leqslant \sum_{m=1}^{2\nu} |\psi_{\nu,m}(x)| + \sum_{m=1}^{2\nu} |\tilde{\psi}_{\nu,m}(x) - \psi_{\nu,m}(x)| <$$
$$< C k^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} < H k^{\frac{3}{2}},$$

où $H = C + 1$, c'est-à-dire, on obtient l'inégalité (111).

Dans le second cas on a, en vertu de l'inégalité (108) et de la seconde inégalité (109),

$$\sum_{m=1}^{2\nu} |\chi_{\nu,m}(x)| < 1 < H k^{\frac{3}{2}},$$

puisque $H = C + 1 > 1$ et $k > 1$.

L'inégalité (111) subsiste donc en tout point $x$ extérieur à l'ensemble $\Pi'_\nu$, ce qui établit le lemme à démontrer.

Dans la première partie de cet ouvrage nous avons désigné par $\chi_{\nu,m}(x, \Delta)$ les fonctions $\chi_{\nu,m}(x)$, correspondant à un intervalle quelconque $\Delta = (a, c)$. Nous désignerons, de la même manière, par $\Pi'_\nu(\Delta)$ l'ensemble $\Pi'_\nu$ correspondant à l'intervalle $\Delta$.

§ 9. Après ces préliminaires on peut passer à la démonstration du théorème 7, énoncé dans le § 3. Soit $w(n)$ une fonction positive quelconque vérifiant la condition

(112) $$w(n) = o\,[(\lg\lg n)^2]\ ^{1)}.$$

Sans restreindre la généralité de la démonstration, on peut supposer la fonction $w(n)$ supérieure à *un*,

$$w(n) > 1.$$

Posons, ensuite,

$$\omega(h) = w(2^h).$$

Il est clair que la fonction positive $\omega(h)$ vérifie les conditions

(113) $$\omega(h) = o\,[(\lg h)^2], \quad \omega(h) > 1.$$

Nous nous servirons dans la suite des résultats établis dans le § 7 de la première partie de cet ouvrage, en remplaçant la fonction $w(n)$, qui figure dans la relation (36) de ce paragraphe, par la fonc-

[1]) Comme il a été déjà remarqué, nous considérons dans la démonstration du théorème 7 les logarithmes à base $e$.

tion $\omega(h)$, pour laquelle subsiste la première relation (113). On obtient ainsi une suite de fonctions

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x), \ldots,\ \psi_h(x), \ldots$$

et une suite de nombres entiers croissants

$$0 = \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots < \nu_k < \ldots \tag{114}$$

possédant les propriétés suivantes:

1°. Les fonctions $\psi_h(x)$, $h = 1, 2, 3, \ldots$, sont deux à deux orthogonales dans l'intervalle (0, 1).

2°. La série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \psi_h(x) \tag{115}$$

diverge presque partout [1]).

3°

$$0 < \int_0^1 [\psi_h(x)]^2\, dx \leq \frac{2\, C'}{\nu_k\, (\lg \nu_k)^2},\quad N_{k-1} < h \leqslant N_k,\quad k \geqslant 2, \tag{116}$$

où $N_0 = 0$, $N_k = 1 + 2\,(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_k)$, $k > 0$, et $C'$ est une constante absolue.

4°. Quel que soit $k \geqslant 2$, il existe un système fini d'intervalles $\varDelta$, obtenus par une subdivision convenable de l'intervalle (0, 1), dans chacun desquels, les extrémités exclues, subsistent les relations

$$\psi_h(x) = \pm\, \chi_{\nu_k, h'}(x, \varDelta) \tag{117}$$

pour tous les valeurs de $h$ vérifiant la condition

$$N_{k-1} < h \leq N_k,$$

où $h' = h - N_{k-1}$ et, par suite, $1 \leqslant h' \leqslant 2\,\nu_k$.

5°.

$$\frac{\omega(h)}{(\lg h)^2} < \frac{1}{k^2} \tag{118}$$

pour tous les valeurs de $h$ vérifiant la condition $h \geqslant \nu_k$.

6°.

$$N_k < 3\,\nu_k,\quad k \geqslant 2. \tag{119}$$

La relation (117) et les inégalités (116), (118), (119) sont obtenues respectivement de la définition des fonctions $\psi_h(x)$ et des inégalités (42), (38), (40) du § 7 de la première partie de cet ouvrage (p. p. 102, 99 et 100).

[1]) Toutes les fonctions figurant dans la démonstration du théorème 7 seront définies dans l'intervalle (0, 1).

Soit

$$P_k = \Sigma \Pi'_{\nu_k}(\Delta),$$

où la sommation doit être étendue à tous les intervalles $\Delta$ figurant dans l'énoncé de la propriété 4°; des $\psi_h(x)$ et $\Pi'_\nu(\Delta)$ sont les ensembles définis dans le lemme 7 du paragraphe précédent. En tenant compte de ce dernier lemme, il vient de la propriété 4° une autre propriété des fonctions $\psi_h(x)$ qui peut être énoncée comme il suit:

7°. En tout point $x$ extérieur à l'ensemble $P_k$ subsiste l'inégalite

$$(120) \qquad \sum_{h=N_{k-1}+1}^{N_k} |\psi_h(x)| < H k^{\frac{3}{2}}, \quad k \geq 2,$$

où $H$ est une constante absolue.

Pour la mesure de l'ensemble $P_k$ on obtient de l'inégalité (110) du paragraphe précédent:

$$(121) \qquad \text{Mes } P_k < \frac{4}{k^{\frac{3}{2}}} \cdot \Sigma \Delta = \frac{4}{k^{\frac{3}{2}}}, \quad k \geq 2,$$

où $\Sigma\Delta = 1$ est la somme des longueurs de tous les intervalles $\Delta$, définis dans l'énoncé de la propriété 4° des fonctions $\psi_h(x)$.

Posons

$$(122) \qquad \sqrt{\int_0^1 [\psi_h(x)]^2 \, dx} = c_h, \quad \frac{\psi_h(x)}{c_h} = \Phi_h(x), \quad h = 1, 2, 3, \ldots,$$

où, en vertu de l'inégalité (116), les nombres $c_h$ vérifient l'inégalité

$$(123) \qquad 0 < c_h^2 \leqslant \frac{2C'}{\nu_k (\lg \nu_k)^2}, \quad N_{k-1} < h \leq N_k,$$

et par suite, sont tous différents de zéro. En tenant compte de la propriété 1° des fonctions $\psi_h(x)$ et des relations (122), on voit immédiatement que les fonctions $\Phi_h(x)$, $h = 1, 2, 3, \ldots$, forment un système normé de fonctions orthogonales.

Soient

$$\chi_1(x), \ \chi_2(x), \ \chi_3(x), \ldots, \ \chi_m(x), \ldots$$

et

$$c'_1, \ c'_2, \ c'_3, \ldots, \ c'_m, \ldots$$

un système normé de fonctions orthogonales et une suite de constantes réelles, obtenus respectivement du système de fonctions $\Phi_h(x)$ et de la suite de constantes $c_h$, $h = 1, 2, 3, \ldots$, en omettant les fonctions $\Phi_{N_k}(x)$ et les constantes $c_{N_k}$, $k=1, 2, 3, \dots$ En tenant compte des inégalités (123), (118), (119), (113) et de l'inégalité évidente

$$N_k > \nu_k,$$

on obtient

$$N_k\, c_{N_k}^2 < \frac{6\, C'}{k^2}$$

et, par suite, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k \, . \, c_{N_k}^2$$

doit être convergente. Il résulte donc du théorème 1 de la première partie de cet ouvrage (ou du théorème de M. Weyl) [1]), que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{N_k} \, . \, \Phi_{N_k}(x)$$

converge presque partout. La série (115) étant presque partout divergente, on voit de la définition des fonctions $\chi_m(x)$ et des constantes $c'_m$ que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} c'_m \cdot \chi_m(x) \tag{124}$$

diverge presque partout.

Posons

$$\nu'_1 = 0,\ N'_1 = 0;\ \nu'_k = 2\,\nu_k - 1,\ N'_k = \nu'_2 + \nu'_3 + \dots + \nu'_k, \quad k > 1,$$

d'où

$$N'_k < N_k. \tag{125}$$

En tenant compte de la définition des fonctions $\chi_m(x)$ et de la propriété 7° des fonctions $\psi_h(x)$, il résulte qu'il subsiste, en tout point en dehors de $P_k$, l'inégalité

$$\sum_{m=N'_{k-1}+1}^{N'_k} |c'_m \cdot \chi_m(x)| < H \, . \, k^{\frac{3}{2}}, \quad k \geqslant 2, \tag{126}$$

où $H$ est la même constante que dans l'inégalité (120). Les constantes $c'_m$ vérifient, de plus, l'inégalité

$$c'^{\,2}_m < \frac{2\, C''}{\nu_k\,(\lg \nu_k)^2}, \quad N'_{k-1} < m \leqslant N'_k, \tag{127}$$

qui s'obtient immédiatement de l'inégalité (123).

[1]) H. Weyl, Math. Ann., t. 67.

Désignons par $n(k, h')$ le nombre entier défini par la formule

$$(128) \qquad n(k,h') = \left(\prod_{s=1}^{k-1} s^{3\nu'_s}\right) . k^{3h'}, \quad 1 \leqslant h' \leqslant \nu'_k, \quad k \geqslant 2,$$

et soit $n'$ le nombre de toutes les valeurs de $n(k, h')$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, $1 \leqslant h' \leqslant \nu'_k$, non dépassant $n$. Nous définirons les constantes $a_n$ et les fonctions $\varphi_n(x)$ par les conditions suivantes:

$$(129) \qquad a_{n(k,h')} = c'_m, \quad \varphi_{n(k,h')}(x) = \chi_m(x), \quad m = N'_{k-1} + h', \quad k \geqslant 2, \ 1 \leqslant h' \leqslant \nu'_k\,;$$

$$(130) \qquad a_n = 0, \quad \varphi_n(x) = \Phi_{n''}(x), \quad n'' = N_{n-n'},$$

lorsque $n$ est différent de tous les nombres $n(k, h')$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, $1 \leqslant h' \leqslant \nu'_k$. Il résulte de la définition des fonctions $\Phi_n(x)$ et $\chi_m(x)$ que la suite de fonctions $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ne diffère de la suite de fonctions $\Phi_h(x)$, $h = 1, 2, 3, \ldots$, que par l'ordre de termes. On voit donc que les fonctions $\varphi_n(x)$ forment un système normé de fonctions orthogonales.

Il nous sera nécessaire, dans la suite, de transformer l'inégalite (126), en introduisant les notations données par les rélations (129), (130) et (128). Il vient ainsi, en désignant par $H$ la même constante que dans l'inégalité (126),

$$(131) \qquad \sum_{n=n(k,0)+1}^{n(k+1,0)} |a_n . \varphi_n(x)| < H . k^{\frac{3}{2}},$$

quel que soit le point $x$ en dehors de l'ensemble $P_k$. On a de même de (130),

$$(132) \qquad \left|\sum_{n=n(k,h'-1)+1}^{n(k+1,0)} a_n . \varphi_n(x)\right| = \sum_{n=n(k,h')}^{n(k+1,0)} |a_n . \varphi_n(x)|$$

identiquement dans l'intervalle (0, 1).

Soit $w(n)$ la fonction figurant dans l'énoncé du théorème 7. Nous allons démontrer que

$$(32) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} w(n) . a_n^2$$

est une série convergente. Il vient, de la définition des nombres $N_k$, $n(k,h')$, $N'_k$ et des relations (119), (125).

$$k < N_k, \quad (k-1)^{\nu_{k-1}} < n(k,h') < k^{3N'_k} < k^{9\nu_k},$$

$$\nu_{k-1} < \lg n(k,h'), \lg\lg n(k,h') < \lg(9\,\nu_k \lg k) < H' \lg \nu_k, \qquad k > 2,$$

où $H'$ est une constante absolue. On a donc, en tenant compte de la fonction $\omega(h)$ et de l'inégalité (118),

$$w[n(k,\,h')] = \frac{\omega\left[\dfrac{\lg n(k,h')}{\lg 2}\right]}{[\lg\lg n(k,h')]^2}\cdot[\lg\lg n(k,h')]^2 <$$

$$(133) \qquad < \frac{H'}{(\lg 2)^2}\cdot\frac{(\lg \nu_k)^2}{(k-1)^2}, \qquad k > 2.$$

En combinant les relations (128), (129), (130) avec les inégalités (127), (133), on obtient finalement

$$\sum_{n=n(k,0)+1}^{n(k+1,0)} w(n)\,.\,a_n^2 = \sum_{h'=1}^{\nu'_k} w[n(k,h')]\,.\,c_m'^2 <$$

$$< \frac{H'}{(\lg 2)^2}\cdot\frac{(\lg\nu_k)^2}{(k-1)^2}\cdot\frac{2\,C'}{\nu_k\,.\,(\lg\nu_k)^2}\cdot\nu'_k < \frac{4\,H'\,C'}{(\lg 2)^2\,(k-1)^2}, \quad m = N'_{k-1} + h'.$$
$$k > 2,$$

d'où il résulte la convergence de la série (32).

Démontrons maintenant que la série

$$(134) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; \varphi_n(x)$$

n'est pas sommable presque partout par le procédé de Poisson.

Soit $P$ l'ensemble limite complet des ensembles $P_k$. Il résulte de l'inégalité (121) que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Mes}\ P_k$$

converge, et par suite, en vertu d'un théorème déjà cité [1],

$$\text{Mes}\ P = 0, \quad \text{Mes}\ C\,P = 1,$$

où $C\,P$ est l'ensemble complémentaire à $P$.

Désignons par $G$ l'ensemble de points de divergence de la série

[1] N. Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique*, Moscou, 1915, p. 38.

(124), et soit $E$ la partie commune des ensembles $\complement P$ et $G$, $E=(\complement P, G)$. On a

$$\text{Mes } G = 1,$$

et par suite,

$$\text{Mes } E = 1$$

Nous démontrerons que la série (134) n'est sommable par le procédé de Poisson en aucun point de l'ensemble $E$. En posant $m = N'_{k-1} + h'$ et en tenant compte de la définition des nombres $N'_k$, on voit qu'à toute valeur entière de $m$, $m \geqslant 1$, il correspond, d'une façon univoque et réciproque. une couple de valeurs entières de $k$ et $h'$ vérifiant les conditions

$$k \geqslant 2, \quad 1 \leqslant h' < \nu'_k,$$

de sorte que les expressions

$$(135) \qquad n(k, h'-1) = n(m), \quad \left(1 - \frac{1}{k^{1\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{n(m)}} = r_m$$

ne dépendant que de $m$. Nous introduirons les abréviations

$$(136) \qquad \Sigma(x, m) = \sum_{n=1}^{\infty} r_m^n \cdot a_n \cdot \varphi_n(x),$$

$$(137) \qquad S(x, m) = \sum_{n=1}^{n(m)} a_n \cdot \varphi_n(x);$$

$$\alpha(x, m) = \sum_{n=1}^{n(m)} (1 - r_m^n) \cdot a_n \cdot \varphi_n(x),$$

$$\beta(x, m) = \sum_{n=n(m)+1}^{\infty} r_m^n \cdot a_n \cdot \varphi_n(x),$$

d'où

$$(138) \qquad \Sigma(x, m) = S(x, m) - \alpha(x, m) + \beta(x, m).$$

L'ensemble $E$ étant la partie commune des ensembles $\complement P$ et $G$, tout point de $E$ est en dehors de l'ensemble $P$, et par suite, il résulte de la définition de ce dernier ensemble qu'il correspond à chaque point $x$ de $E$ un entier $p(x)$ tel que le point $x$ considéré est extérieur à tous les ensembles $P_k$, $k \geqslant p(x)$, $x$ étant un point quelconque de l'ensemble $E$, il vient donc de l'inégalité (131) et de la première relation (135),

$$\sum_{n=n(k,0)+1}^{n(m)} |a_n \cdot \widetilde{\varphi}_n(x)| < H k^{\frac{3}{2}}, \quad \sum_{n=n(k,h')}^{n(k+1,0)} |a_n \cdot \widetilde{\varphi}_n(x)| < H k^{\frac{3}{2}},$$

(139)
$$\sum_{n=n(t,0)+1}^{n(t+1,0)} |a_n \cdot \widetilde{\varphi}_n(x)| < H t^{\frac{3}{2}},$$

quels que soient les entiers $t$, $k$, $m$, $h'$ vérifiant les conditions

$$p(x) \leqslant t, \ p(x) \leqslant k, \ m = N'_{k-1} + h', \ 1 \leqslant h' \leqslant \nu'_k,$$

ou $H$ est une constante absolue définie plus haut.

Considérons séparément chacune des deux expressions $\alpha(x, m)$ et $\beta(x, m)$. On a des relations (135)

$$0 < 1 - r_m^n \leq \frac{1}{k^{\frac{11}{4}}}, \ n \leqslant n(m),$$

et par suite, en combinant la dernière inégalité avec les inégalités (139), il résulte de la définition de l'expression $\alpha(x, m)$:

$$|\alpha(x,m)| \leq \frac{1}{k^{\frac{11}{4}}} \left[ \Phi(x) + \sum_{t=p(x)+1}^{k-1} \sum_{n=n(t,0)+1}^{n(t+1,0)} |a_n \cdot \widetilde{\varphi}_n(x)| + \sum_{n=n(k,0)+1}^{n(m)} |a_n \cdot \widetilde{\varphi}(x)| \right] <$$
$$< \frac{1}{k^{\frac{11}{4}}} \Phi(x) + \frac{2H}{k^{\frac{1}{4}}},$$

où

$$\Phi(x) = \sum_{t=1}^{p(x)} \sum_{n(t,0)+1}^{n(t+1,0)} |a_n \cdot \widetilde{\varphi}_n(x)|, \ n(1,0) = 0.$$

Or le nombre $k$ croît indéfiniment avec $m$ et $\Phi(x)$ ne dépend que de $x$; il vient donc pour le point $x$ considéré,

(140)
$$\lim_{m \to \infty} \alpha(x, m) = 0$$

En tenant compte de la première relation (135) et de l'identité (132), nous écrirons l'expression $\beta(x, m)$ sous la forme:

$$\beta(x, m) = \sum_{n=n(k,h')}^{n(k+1,0)} r_m^n \cdot a_n \cdot \widetilde{\varphi}_n(x) = \sum_{n=n(k+1,0)+1}^{n(k+2,0)} r_m^n \cdot a_n \cdot \widetilde{\varphi}_n(x) +$$

(141)
$$+ \sum_{t=k+2}^{\infty} \sum_{n=n(t,0)+1}^{n(t+1,0)} r_m^n \cdot a_n \cdot \widetilde{\varphi}_n(x).$$

D'autre part, il vient de la relation (128) et de la première relation (135),

$$(142)\qquad \begin{aligned} n(k,h') &\geqslant n(m)\,k^2, \quad 1 \leqslant h' \leqslant \nu'_k; \\ n(t,0) &\geqslant n(m)\,k^3.\,(t-k-1),\ t \geqslant k+2. \end{aligned}$$

Or a, de plus, les inégalités évidentes

$$(143)\qquad t^{\frac{3}{2}} < 4k^{\frac{3}{2}}.(t-k)^{\frac{3}{2}} < 8k^{\frac{3}{2}}.(t-k)(t-k-1),\ t \geqslant k+2, \\ r_m < 1.$$

En posant

$$\varrho_k = r_m^{n(m).k^3}$$

et en combinant d'une part (141), (142), d'autre part (139), (143), on obtient pour le point $x$ considéré,

$$|\beta(x,m)| < 2H\varrho_k\,(k+1)^{\frac{3}{2}} + 8\,H\,\varrho_k\,k^{\frac{3}{2}}.\sum_{t=k+2}^{\infty}(t-k)(t-k-1)\,\varrho_k^{t-k-2} <$$

$$(144)\qquad < H''\,\varrho_k.k^{\frac{3}{2}}.\left(1+\frac{2}{(1-\varrho_k)^3}\right),$$

ou $H''$ est une constante absolue. On a de la seconde relation (135)

$$r_m^{n(m)} = 1 - \frac{1}{k^{\frac{11}{4}}},$$

et par suite, en posant $k^{\frac{11}{4}} = p_k$,

$$\varrho_k = \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{p_k.\sqrt[4]{k}} < \left(\frac{2}{e}\right)^{\sqrt[4]{k}}$$

pour toutes les valeurs de $k$, suffisamment grandes. Il vient donc

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{3}{2}}.\,\varrho_k = 0,$$

d'ou il résulte, en vertu de (144),

$$(145)\qquad \lim_{m\to\infty} \beta(x,m) = 0.$$

Nous allons démontrer qu'au point $x$ considéré l'expression $\Sigma(x,m)$ ne tend vers aucune limite, lorsque $m$ croît indéfiniment. On a de (138), (140) et (145),

$$\lim_{m\to\infty} [\Sigma(x\,m) - S(x,m)] = 0,$$

et par suite, il nous suffira de démontrer que l'expression $S(x,m)$ ne tend vers aucune limite pour $m \to \infty$.

En se servant de (129), (130), de la première relation (135) et de la relation $m = N'_{k-1} + h'$, donnant la correspondance entre $m$ et $k$, $h'$, on écrira la relation (137) sous la forme:

$$S(x, m) = \sum_{s=1}^{m-1} c'_s \cdot \chi_s(x),$$

c'est-a-dire, $S(x, m)$ est la somme de $m-1$ premiers termes de la série (124). Le point $x$ considéré appartient, par hypothèse, à l'ensemble $E$ et, par suite, à l'ensemble $G$, puisque

$$E = (\mathrm{C}P, G).$$

Or l'ensemble $G$ est formé de tous les points de divergence de la série (124); il résulte donc que $x$ est un point de divergence de la série (124), d'où l'on voit, en vertu de (146), que l'expression $S(x, m)$ et, par suite, $\Sigma(x, m)$ ne tend vers aucune limite lorsque $m$ croît indéfiniment.

Il vient de la seconde relation (135),

$$\lim_{m\to\infty} r_m = 1.$$

En tenant compte de la définition du procédé de sommation de Poisson, on voit donc de la rélation (136), qu'au point $x$ considéré, et par suite, en tout point de l'ensemble $E$, la série (134) n'est pas sommable par le procédé de Poisson.

Posons

$$\varphi_n(x) = \bar{\varphi}_n(x)$$

lorsque $x$ appartient à l'ensemble $E$ et

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{a'_n}$$

en dehors de $E$, où $a'_n = a_n$, pour $a_n \neq 0$, et $a'_n = 1$ dans le cas contraire. Comme

$$\text{Mes } E = 1,$$

il résulte immédiatement que les fonctions $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, forment un système normé de fonctions orthogonales et que la série

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x)$$

diverge partout. Le théorème 7 se trouve donc complètement démontré, puisque la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \cdot a_n^2 \tag{32}$$

converge et $w(n)$ est une fonction positive arbitraire, assujettie à une seule condition

$$w(n) = o\,[(\lg\lg n)^2].$$

§ 9. En combinant les théorèmes 6 et 7, on obtient immédiatement le théorème 5, c'est-à-dire $(\lg\lg n)^2$ est la fonction limitrophe pour le procédé de Poisson et pour les procédés de Cesàro de tout ordre positif. Il en résulte que toute fonction positive $w(n)$, vérifiant la condition

$$w(n) = o\,[(\lg\lg n)^2], \tag{146}$$

n'est pas une fonction de M. Weyl pour les procédés indiqués. On peut se demander, s'il existe un procédé de sommation linéaire pour lequel certaines fonctions de M. Weyl vérifiaient la condition (146). Nous allons démontrer le théorème suivant:

**Théorème 8.** *Quelle que soit la fonction positive $w(n)$ vérifiant la condition*

$$\lim_{n\to\infty} w(n) = +\infty, \tag{147}$$

*il existe toujours un procédé de sommation linéaire pour lequel $w(n)$ est une fonction de M. Weyl.*

Démonstration. Soit $w(n)$ une fonction quelconque vérifiant les conditions du théorème. En vertu de (147), il existe une fonction positive $h(n)$ possèdant les propriétés:

1°. $h(n)$ est une fonction continue, croissante et positive, définie pour toutes les valeurs positives de $n$.

2°. $$h(n) < w(n)$$

pour toutes les valeurs entières de $n$, $n > 0$.

3°. $$h(n+1) - h(n) < 1, \quad n > 0.$$

4°. $$\lim_{n\to\infty} h(n) = +\infty$$

En vertu de la propriété 2°, il suffit de démontrer le théorème 8 en prenant la fonction $h(n)$ au lieu de $w(n)$.

Désignons par $H(\varrho)$ la fonction inverse de la fonction $h(n)$, c'est-à-dire, la fonction vérifiant la condition

$$h[H(\varrho)] = \varrho, \tag{148}$$

et soit

$$k_\varrho = \mathrm{E}\, H(\varrho).$$

Il résulte des propriétés 1° et 4° de la fonction $h(n)$ que $H(\varrho)$ est une fonction positive, uniforme et croissante, qui tend à l'infini avec $\varrho$. On a, de plus, en vertu de la propriété 3°,

$$k_{\varrho-1} < k_\varrho, \quad \varrho > 1.$$

Nous supposerons dans la suite que $\varrho$ est un nombre entier.

Soit $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, un système normé quelconque de fonctions orthogonales et soit $a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, une suite de constantes réelles telles que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(n) \cdot a_n^2 \tag{149}$$

converge. Désignons par $S(x, n)$ la somme de $n$ premiers termes de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x) \tag{2}$$

Nous allons démontrer que l'expression $S(x, k_\varrho)$ tend presque partout vers une limite déterminée lorsque $\varrho \to \infty$.

Posons à cet effet

$$\begin{gathered} A_1 = +\sqrt{\sum_{n=1}^{k_1} a_n^2}, \quad A_\varrho = +\sqrt{\sum_{n=k_{\varrho-1}+1}^{k_\varrho} a_n^2}, \\ \Phi_1(x) = \frac{S(x, k_1)}{A_1}, \quad \Phi_\varrho(x) = \frac{S(x, k_\varrho) - S(x, k_{\varrho-1})}{A_\varrho} \end{gathered} \tag{150}$$

Les fonctions $\Phi_\varrho(x)$, $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$, forment, évidemment, un système normé de fonctions orthogonales et l'on a

$$S(x, k_\varrho) = \sum_{s=1}^{\varrho} A_s \cdot \Phi_s(x). \tag{151}$$

En tenant compte de la propriété 3° des fonctions $h(n)$ et de la relation (148), on voit que l'inégalité $k_{\varrho-1} < n$, entraîne l'inégalité

$$\varrho < C\, h(n),$$

où $C$ est une constante absolue. Il vient donc de (150)

$$\varrho\, A_\varrho^2 \leqslant C \cdot \sum_{n=k_{\varrho-1}+1}^{k_\varrho} h(n) \cdot a_n^2,$$

et par suite, la série

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} \varrho \cdot A_\varrho^2$$

doit être convergente, puisque la série (149) converge. Il résulte alors du théorème déjà cité de M. Weyl que la série

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} A_\varrho \cdot \Phi_\varrho(x) \tag{152}$$

converge presque partout. En vertu de (151), l'expression $S(x, k_\varrho)$ est la somme de $\varrho$ premiers termes de la série (152); on voit donc que $S(x, k_\varrho)$ tend presque partout vers une limite déterminée lorsque $\varrho$ croît indéfiniment, c'est-à-dire, *la convergence de la série* (149) *entraîne la convergence presque partout de la suite*

$$S(x, k_1),\ S(x, k_2),\ S(x, k_3), \ldots,\ S(x, k_\varrho), \ldots \tag{153}$$ [1])

Posons $\alpha_n(\varrho) = 1$ lorsque $n = k_\varrho$ et $\alpha_n(\varrho) = 0$ lorsque $n \neq k_\varrho$. On voit immédiatement que les quantités $\alpha_n(\varrho)$ possèdent les propriétés 1°, 2° et 3°, énoncées dans le § 1, et par suite, définissent un procédé de sommation linéaire [2]). Il vient, de plus,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\varrho) \cdot S(x, n) = S(x, k_\varrho),$$

d'où l'on voit que la série (2) est sommable par le procédé linéaire considéré, puisque la suite (153) converge presque partout. Il en résulte que $h(n)$ et, par suite, $w(n)$ est une fonction de M. Weyl pour ce procédé, ce qui établit le théorème à démontrer.

§ 10. Dans la troisième partie de cet ouvrage je donnerai la démonstration des propositions suivantes:

[1]) En posant dans cette dernière proposition $h(n) = \lg n$, $H(\varrho) = 2^\varrho$ (nous prenons $\lg n$ à base 2), on obtient la proposition indiquée dans le § 1 de la première partie de cet ouvrage.

[2]) Le nombre $g$ figurant dans la définition des procédés de sommation linéaires, est égale, dans le cas actuel, à $\infty$.

1. *Quelle que soit la fonction* $w(n)$ *vérifiant la condition* $w(n) = [(\lg n)^2]$, *il existe toujours un système normé de fonctions* $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *orthogonales et* c o n t i n u e s [1]), *et une suite de constantes* $a_n$ *tels que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x) \tag{2}$$

*diverge presque partout, tandis que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \cdot a_n^2$$

*converge.*

2. *Quelle que soit la fonction positive* $H(n)$ *vérifiant la condition* $\lim_{n\to\infty} H(n) = +\infty$, *il existe toujours un système normé de fonctions orthogonales* $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *et une suite de constantes* $a_n$ *possédant les propriétés:*

1⁰ *Chaque fonction* $\varphi_n(x)$ *ne dépasse pas* $H(n)$ *en valeur absolue, c'est-à-dire,*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant H(n), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

2⁰. *La série* (2) *diverge partout.*

3⁰. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

*converge.*

3. *Quel que soit le nombre positif* $\varepsilon$, *la convergence de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lg |a_n|)^2 \left(\lg\lg \frac{1}{|a_n|}\right)^{1+\varepsilon} a_n^2$$

*implique la convergence presque partout de la série* (2), *où les fonctions* $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *forment un système normé de fonctions orthogonales et les constantes* $a_n$ *sont telles que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Par conséquent, *la convergence de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

*implique la convergence presque partout de la série* (2).

[1]) Les fonctions $\varphi_n(x)$ peuvent être prises d'ailleurs périodiques de période 1.

4. *Etant donné un procédé arbitraire de sommation linéaire et une fonction positive $w(u)$, assujettie à une seule condition $w(u) = o[(\lg u)^2]$, il existe toujours un système normé de fonctions $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, et une suite de constantes $a_n$ tels que la série* (2) *n'est sommable en aucun point par le procédé considéré, tandis que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} w\left(\frac{1}{|a_n|}\right) \cdot a_n^2$$

*converge.*

18 octobre 1922.