Zur allgemeinen Kurventheorie.

Von

Karl Menger (Amsterdam).

Einleitung.

Die folgenden Untersuchungen befassen sich mit dem seit dem Jahre 1921 eingehend behandelten allgemeinen Kurvenbegriff [1]), demzufolge ein kompakter zusammenhängender Raum *Kurve* genannt wird, *wenn zu jedem seiner Punkte beliebig kleine Umgebungen mit zusammenhangslosen Begrenzungen* existieren [2]). Ein Punkt, zu dem bei selebig kleine Umgebungen mit *endlichen* Begrenzungen gibt, heisst *regulär* und wir nennen ihn *von höchstens n-ter Ordnung*, wenn insbesondere beliebig kleine Umgebungen von ihm existieren, deren Begrenzungen höchstens n Punkte enthalten. Die regulären

[1]) Vgl. meine Grundzüge einer Theorie der Kurven, Mathem. Annalen 95 1925, S. 277 (im folgenden als „Kurven" zitiert), sowie Proc. Ac. Amsterdam 28, 1925, S. 67 und 29, Mai 1926, wo eine (u. a. den obigen Kurvenbegriff enthaltende) Note von mir aus dem Jahre 1921 abgedruckt ist. — Unabhängig hat Urysohn einen äquivalenten Kurvenbegriff untersucht im zweiten Teil des Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes, der in den Verhand. Ak. Amsterdam erscheinen wird und an eine Note Compt. Rend. 175, 1922, S. 481 knüpft. — Eine zusammenfassende Darstellung der neuen Kurventheorie findet sich im vierten Kapitel meines Berichtes über die Dimensionstheorie, Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 35, 1926, S. 113.

[2]) Ein Teilkontinuum K irgend eines Raumes, z. B. eines R_n, heisst demgemäss Kurve, *wenn zu jedem Punkt von K beliebig kleine Umgebungen existieren, deren Begrenzungen mit K zusammenhangslose Durchschnitte haben.*

Punkte, die von keiner bestimmten endlichen Ordnung sind, — jene Punkte also, zu denen zwar beliebig kleine Umgebungen mit endlichen Begrenzungen existieren, bei denen aber die Mächtigkeit dieser Umgebungsbegrenzungen notwendig über jede endliche Zahl wächst, wenn die Umgebungen hinlänglich klein werden, — heissen *von wachsender Ordnung*. Die Kurven, welche nur reguläre Punkte, bzw. nur Punkte von höchstens n-ter Ordnung enthalten, bezeichnen wir kurz als *reguläre Kurven*, bzw. als *Kurven von höchstens n-ter Ordnung*.

Die Berechtigung dieses Kurvenbegriffes wird durch eine allgemeine *Dimensionstheorie* [1]) verbürgt, mit welcher die Kurventheorie weitgehende formale Analogien aufweist. Umgebungsfolgen, welche sich auf die Punkte zusammenziehen, — und speziell die Begrenzungen dieser Umgebungen, die in der Kurventheorie eine Rolle spielen, — sind auch das Massgebende für den Dimensionsbegriff. Wir fassen denselben nämlich kurz dahin, dass wir einen Raum *n-dimensional* nennen, *wenn zu jedem seiner Punkte beliebig kleine Umgebungen mit höchstens $(n-1)$-dimensionalen Begrenzungen existieren und n die kleinste Zahl dieser Eigenschaft ist, wobei als (-1)-dimensional die leere Menge und nur diese bezeichnet wird.* Als nulldimensional ergeben sich dann unter den kompakten metrischen Räumen die diskontinuierlichen. Als eindimensionale Kontinua erscheinen die Kurven im Sinne der obigen Definition.

Im folgenden sollen nun einige Probleme der Kurventheorie behandelt werden. Wir beweisen im ersten Teil ein Theorem, welches eine neue anschauliche Formulierung des Begriffes der Ordnung von Kurvenpunkten ermöglicht, — behandeln im zweiten Teil einige umfassendste Kurven, — und untersuchen im dritten Teil die Punkte von unendlicher Ordnung.

I. Über die Bedeutung der Ordnungszahl von Kurvenpunkten.

Eines der wichtigsten Probleme der Kurventheorie ist die Frage nach den Beziehungen zwischen der Ordnungszahl eines Punktes der regulären Kurve K und der Anzahl der im betreffenden Punkt zusammenstossenden und sonst fremden Teilbögen von K. Mehr

[1]) Vgl. meinen Bericht über die Dimensionstheorie, wo die Ergebnisse von Urysohn's Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes Fund. Math. VII u. VIII und meiner Arbeiten: Über die Dimension von Punktmengen, Monatshefte f. Math. u. Phys. I. Teil, Bd. 33, 1923, S. 148, II. Teil, Bd. 34, 1924, S. 137, sowie zahlreiche andere Resultate zusammengefasst sind.

als n im Punkte p endende und sonst fremde Teilbögen von K existieren, falls p von n-ter Ordnung ist, sicher nicht. Lassen sich aber aus der regulären Kurve K zu einem Punkt p von der Ordnung n wirklich immer n in p endende und sonst fremde Teilbögen herausgreifen? Und zu einem Punkt von wachsender Ordnung abzählbar viele in ihm zusammenstossende sonst fremde Bögen mit gegen Null konvergierenden Durchmessern?

An diese Fragestellung[1]) haben mehrere Untersuchungen angeknüpft. Ich habe gezeigt, dass für reguläre Baumkurven, d. h. für reguläre Kurven, die keinen topologischen Kreis als Teil enthalten, die Frage in bejahendem Sinn zu beantworten ist[2]). Da diese Aussage sich auf das Verhalten einer Baumkurve in der Nachbarschaft ihrer Punkte bezieht, ist damit natürlich zugleich bezeigt, dass in jedem Punkt n-ter Ordnung eines *Baumes im kleinen* n Bögen zusammenstossen, wobei als Baum im kleinen jede Menge zu bezeichnen ist, die zu jedem ihrer Punkte eine Umgebung enthält, deren abgeschlossene Hülle ein Baum ist. In dieser Form wurde das Ergebnis auch von Herrn Alexandroff hergeleitet[3]), welcher kompakte reguläre Kurven, die Bäume in kleinen sind, als endlich hoch zusammenhängende Kurven bezeichnet. Herr Kuratowski erbrachte den Nachweis, dass in jedem Punkt zweiter Ordnung einer beliebigen regulären Kurve zwei bis auf den Punkt fremde Teilbögen zusammenstossen[4]). Im folgenden will ich den Beweis meiner Vermutung für alle regulären Kurven und für beliebiges n erbringen.

Theorem. *Eine reguläre Kurve enthält zu jedem Punkt p von n-ter Ordnung ein topologisches n-Bein mit p als Scheitel, d. h. es lassen sich aus der Kurve n in p endende und sonst fremde Bögen herausgreifen. Zu jedem Punkt von wachsender Ordnung enthält eine reguläre Kurve abzählbar viele in ihm endende, sonst fremde Teilbögen mit gegen Null konvergierenden Durchmessern. Die Ordnung eines Punktes p einer regulären Kurve ist also die grösste Zahl n von der Eigenschaft, dass sich aus der Kurve ein topologisches n-Bein mit p als Scheitel herausgreifen lässt.*

Betrachten wir zunächst zwei naheliegende Wege, welche — wenigstens ohne weiteres — nicht zum Beweise des Theorems führen!

Sicherlich lässt sich zum Punkt p ein in ihm endender Bogen aus der Kurve

[1]) Vgl. Kurven, Math. Annalen 95, S. 302. — Man kann die Frage natürlich allgemeiner stellen für beliebige Kurven und irreduzible Kontinua, die in ihren Punkten zusammenstossen. Eine einfache Antwort gilt dann aber, wie man vorneherein sieht, nicht.

[2]) Über reguläre Baumkurven, Math. Annalen 96, vgl. auch schon Kurven, S. 302.

[3]) Math. Annalen 96.

[4]) Kuratowski beweist den Satz sogar für die Punkte zweiter Ordnung von Kontinua, die nebst allen ihren Teilkontinua im kleinen zusammenhängend sind.

herausgreifen. Man könnte daher erstens versuchen, unter der Annahme, dass bereits $n-1$ in p endende und sonst fremde Bögen aus der Kurve herausgegriffen seien, einen n-ten Bogen anzugeben, welcher in p endet und sonst zu den $n-1$ herausgegriffenen Bögen fremd ist. Dies ist nun aber, wenn nicht scharfe (in ihren Details äusserst schwer durchblickbare) Vorsichtsmassregeln bei der Auswahl der $n-1$ ersten Bögen getroffen worden sind, im allgemeinen gar nicht möglich! Man denke eine Kurve bestehend aus einer Strecke und einer um den Mittelpunkt m der Strecke sich herumwindenden Spirale. Der Punkt m ist von zweiter Ordnung und tatsächlich lassen sich zwei in m endende, sonst fremde Teilbögen der Kurve angeben, nämlich die beiden Streckenhälften. Hat man aber als ersten in m endenden Bogen die Spirale herausgegriffen, dann enthält die Kurve keinen zweiten Bogen, welcher in m endet und sonst zum ersten herausgegriffenen Bogen fremd ist.

Eine zweite Beweismöglichkeit würde man auf den ersten Blick von der Anwendung des Brouwerschen Reduktionstheorems erwarten. Indes ist die hier in Frage kommende Eigenschaft nicht induzibel: Man kann unschwer eine monoton abnehmende Folge von regulären Kurven angeben, welche im Punkt p durchwegs von der Ordnung n sind und deren Durchschnitt zwar eine Kurve, aber von geringerer als n-ter Ordnung im Punkte p ist.

Eine Analyse dieser Bemerkungen bringt grosse Verwicklungen des Problems zum Vorschein, so dass man von vorneherein eine ziemliche Länge des Beweises erwarten muss.

Sei p ein Punkt der regulären Kurve R. Es existiert dann eine auf p sich zusammenziehende Folge von Umgebungen $\{U_k(p)\}$ $(k=1,2,\ldots)$, so dass die Begrenzung B_k von $U_k(p)$ endlich ist, etwa aus n_k Punkten besteht, und dass die Begrenzung jeder Umgebung $U(p) \subset U_k(p)$ mindestens n_k Punkte enthält. Dabei können wir für jedes k $\overline{U}_{k+1}(p) \subset U_k(p)$ annehmen. Ist p von der Ordnung n, dann bestehen fast alle B_k aus genau n Punkten und wir können daher eine Folge $\{U_k(p)\}$ von den angegebenen Eigenschaften annehmen, so dass alle B_k genau n Punkte enthalten. Ist p von der Ordnung w (von wachsender Ordnung), so ist $n_{k+1} \geqq n_k$, $\lim\limits_{k=\infty} n_k = \infty$ Unser Theorem gilt offenbar, wenn wir nachweisen:

Satz α. *Für jedes k enthält die abgeschlossene Menge $R_k = \overline{U}_k(p) - U_{k+1}(p)$ n_k paarweise fremde Bögen, von denen jeder einen Punkt von B_k und einen Punkt von B_{k+1} verbindet.*

Betrachten wir nun irgend eine bestimmte dieser Mengen R_k näher! Sie ist in R abgeschlossen, also, in sich betrachtet, ein regulär-eindimensionaler (d. h. nur reguläre Punkte enthaltender) kompakter Raum und besitzt nur endlich viele Komponenten. Nehmen wir nun an, es sei E irgend eine B_k und B_{k+1} trennende abgeschlossene Menge, d. h. eine Menge, so dass $R_k - E$ in zwei relativ abgeschlossene, zu einander fremde Teile zerfällt, von denen der eine die Menge $B_k - E.B_k$, der andere die Menge $B_{k+1} - E.B_{k+1}$ enthält. Die Komponenten der Menge $R_k - E$ sind wegen des Zusammenhanges im kleinen von R und der endlichen Komponentenzahl von R_k nach einem bekannten Satz [1]) in R_k offen. Betrachten wir die Summe von $U_{k+1}(p)$ und allen jenen Komponenten der Menge $R_k - E$, welche Punkte mit B_{k+1} gemein haben! Man sieht leicht ein, dass diese Summe eine Umgebung $U(p) \subset U_k(p)$ ist, deren Begrenzung B Teil von E ist. Da die Begrenzung jeder Umgebung $\subset U_k(p)$ mindestens n_k Punkte enthält, existiert also keine weniger als n_k Punkte enthaltende, B_k und B_{k+1} trennende Teilmenge von R_k. Wir wollen der Kürze halber eine Menge M zwischen den beiden fremden in M abgeschlossenen Teilmengen A und B *n-punktig zusammenhängend* nennen, wenn keine A und B trennende, weniger als n Punkte enthaltende Teilmenge von M existiert. Für jedes k ist dann also die Menge R_k zwischen B_k und B_{k+1} n_k punktig zusammenhängend. Satz α ist demnach enthalten in

Satz β. *Ist K ein kompakter regulär eindimensionaler Raum, welcher zwischen den beiden endlichen Mengen P und Q n-punktig zusammenhängend ist, dann enthält K n paarweise fremde Bögen, von denen jeder einen Punkt von P und einen Punkt von Q verbindet.*

Dieser Satz bildet in gewissem Sinn eine Verallgemeinerung von der Charakterisierung des einfachen Bogens zwischen zwei Punkten a und b durch die Tatsache des Zerfallens nach Tilgung eines beliebigen einzelnen Punktes. So wie der einfache Bogen zwischen seinen Endpunkten irreduzibel zusammenhängend ist, so sind n Bögen irreduzibel n-punktig zusammenhängend zwischen den beiden n-Tupeln ihrer Endpunkte. Jede andere zwischen den beiden n-Tupeln n-punktig zusammenhängende regulär-eindimensionale Menge ist hingegen hinsichtlich dieser Eigenschaften reduzibel, da sie nach Satz β n fremde Bögen zwischen den beiden n-Tupeln enthält [2]).

Wir beweisen nun zunächst als ein im folgenden verwendetes einfaches Hilfsmittel

Satz γ. *Ist R ein im kleinen zusammenhängender kompakter Raum mit endlich vielen Komponenten und ist* $\{C_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *eine Folge von ineinandergeschachtelten abgeschlossenen Mengen, deren jede die beiden abgeschlossenen Mengen A und B trennt, dann werden A und B auch durch die Menge* $C = \prod_{n=1}^{\infty} C_n$ *getrennt.*

[1]) Vgl. H. Hahn, Fund. Math. II, S. 189, vgl. auch C. Kuratowski, Fund. Math. I. S. 43.

[2]) Über einige mit diesen Fragen zusammenhängende Begriffsbildungen, die man einer Theorie des n-punktigen und n-stufigen Zusammenhanges zu Grunde legen könnte, vgl. meinen Bericht über die Dimensionstheorie, Kap. IV, S. 144 f.

Nennen wir U die Summe aller Komponenten von $R - C$, welche mit A Punkte gemein haben und setzen wir $V = R - (C + U)$. Sowohl U als auch V sind als Summe von Komponenten der offenen Menge $R - C$ in ihr offen; beide Mengen sind also in $R - C$ auch abgeschlossen. Ferner sind U und V fremd und es gilt offenbar $A - A.C \subset U$. Um nachzuweisen, dass A und B durch C getrennt sind, haben wir nur noch zu zeigen, dass U zu B fremd ist. Andernfalls müsste aber eine Komponente und folglich auch ein Teilbogen von $R - C$ existieren, welcher sowohl mit A als auch mit B Punkte gemein hätte und daraus leitet man sofort einen Widerspruch gegen die Trennung von A und B durch die Mengen C_n her. Damit ist Satz γ bewiesen. —

Wir betrachten nunmehr die Aussage von Satz β für den Fall, dass K ein gewöhnlich-eindimensionaler Raum, d. h. Summe von endlich vielen Bögen ist, die zu je zweien höchstens Endpunkte mit einander gemein haben.

Satz δ = Satz β für gewöhnlich eindimensionale Räume.

Als *punktförmiges Stück* von $K(P, Q)$ wollen wir jeden Punkt bezeichnen, der entweder Punkt von $P + Q$ oder End- oder Verzweigungspunkt von K ist. Die endlich vielen Komponenten vom Komplement der Menge aller punktförmigen Stücke von $K(P, Q)$ nennen wir die *zusammenhängenden Stücke* von $K(P, Q)$. Die Gesamtzahl aller zusammenhängenden Stücke von $K(P, Q)$ bezeichnen wir als *Grad* von $K(P, Q)$.

Satz δ kann nun durch Induktion nach dem Grad von $K(P, Q)$ bewiesen werden. Man zeigt leicht, dass der Grad jedes zwischen zwei Mengen P und Q n-punktig zusammenhängenden Raumes $\geqq n$ ist und dass jeder zwischen P und Q n-punktig zusammenhängende Raum vom Grad n aus n paarweise fremden Bögen zwischen P und Q besteht. Wir wollen also annehmen, Satz γ sei bewiesen für alle zwischen P und Q n punktig zusammenhängenden Räume von einem Grad $< g$.

Es sei dann ein zwischen P und Q n-punktig zusammenhängender Raum K von Grad $g > n$ vorgegeben. Man kann aus K offenbar einen zwischen P und Q *irreduzibel n-punktig zusammenhängenden* Teil herausgreifen, d. h. einen zwischen P und Q n-punktig zusammenhängenden Teil K', von dem kein echter Teil zwischen P und Q n-punktig zusammenhängend ist. Wenn der Grad von $K' < g$ ist, dann enthält laut Annahme K', also auch K n

paarweise fremde Bögen zwischen P und Q. Wir nehmen also an, der irreduzibel n-punktig zusammenhängende Raum K' besitze den Grad $g\ (>n)$. Offenbar enthält dann K' ein punktförmiges Stück s, welches in der Menge $P+Q$ nicht enthalten ist. In $K'-s$ sind $n-1$ Punkte und daher auch $n-1$ punktförmige Stücke $s_2, s_3 \dots s_n$ enthalten, so dass P und Q durch die Menge $S=\{s, s_2, \dots s_n\}$ getrennt sind, d. h. so, dass in $K'-S$ zwei abgeschlossene zu einander fremde Teile K_1 und K_2 existieren, von denen K_1 die Menge $P-S.P$ und K_2 die Menge $Q-S.Q$ enthält. Wenn die Menge $S.P$ etwa genau p Punkte enthält, dann ist K_1 zwischen $P-S.P$ und $S-S.P$ mindestens $(n-p)$-punktig zusammenhängend; denn enthielte K_1 weniger als $n-p$ Punkte, welche $P-SP$ und $S-S.P$ trennen, so würden diese Punkte zusammen mit den p Punkten von $P.S$ eine weniger als n Punkte enthaltende Menge darstellen, durch die $P-P.S$ und $Q-S.Q$ getrennt werden, und eine solche kann nicht existieren. Anderseits ist K_1 ein Raum von einem Grad $<g$, enthält also $(n-p)$ paarweise fremde Bögen zwischen $P-S.P$ und $S-S.P$. Ebenso enthält K_2, wenn die Menge $S.Q$ etwa aus genau q Punkten besteht, $n-q$ paarweise fremde Bögen zwischen $Q-S.Q$ und $S-S.Q$. Diese $n-p$ und $n-q$ Bögen zusammen ergeben n paarweise fremde Teilbögen von K zwischen P und Q.

Damit ist Satz δ bewiesen.

Wir schicken nun dem Beweis von Satz β einige weitere Betrachtungen voraus. Es sei K eine regulär-eindimensionale Menge mit endlich vielen Komponenten, auf welcher zwei endliche Mengen P und Q ausgezeichnet seien. Nach kurventheoretischen Sätzen [1]) existiert sicher ein System $\{C_{i_1, i_2, \dots i_k}\}$ von Teilkontinua der Kurve K, welches folgenden Bedingungen genügt:

1) Das System enthält endlich viele, etwa n_0, Kontinua $C_1, C_2, \dots, C_{n_0}$, welche wir „Kontinua des ersten Schrittes" nennen, so dass $K=\sum_{i_1=1}^{n_0} C_{i_1}$ gilt, dass je zwei dieser Kontinua höchstens endliche Durchschnitte haben und dass jedes der Kontinua höchstens einen Punkt der Menge $P+Q$ enthält.

2) Sei $C_{i_1, i_2, \dots i_{k-1}}$ ein bereits definiertes Kontinuum des $(k-1)$-ten Schrittes. Dann enthält das System endlich viele, etwa $n_{i_1, i_2, \dots i_{k-1}}$, Kontinua $C_{i_1, i_2, \dots i_{k-1}, j}$, so das $C_{i_1, i_2, \dots i_{k-1}} = \sum_{j=1}^{n_{i_1, i_2, \dots i_{k-1}}} C_{i_1, i_2, \dots i_{k-1}, j}$ gilt und dass je zwei Kontinua des k-ten Schrittes höchstens endlich viele Punkte mit einander gemein haben.

3) Ist d_k der grösste unter den Durchmessern der Kontinua des k-ten Schrittes, so gilt $\lim_{k=\infty} d_k = 0$.

[1]) Vgl. Kurven, S. 300. Für das Folgende vgl auch den Begriff des *finiten Umgebungssystems* in meinen Aufsatz: Allgemeine Räume und Cartesiche Räume I, Proc. Ac. Amsterdam 29, 1926, S. 476.

Jedes der Kontinua $C_{i_1, i_2, \dots i_k}$ ist offenbar die abgeschlossene Hülle einer in K offenen Menge, welche eine endliche Begrenzung besitzt, bestehend aus den endlich vielen Punkten, die das Kontinuum $C_{i_1, i_2, \dots i_k}$ mit den anderen Kontinua des k-ten Schrittes gemein hat. Jedem Punkt von K ist für jede natürliche Zahl k ein Kontinuum $C_k(p)$ zugeordnet, welches den Punkt p im Innern enthält und einen Durchmesser $<2d_k$ besitzt: nämlich die Summe aller p enthaltenden Kontinua des k-ten Schrittes.

Ist nun irgend eine reguläre Kurve R und eine endliche Teilmenge E von R gegeben, so existiert stets eine gewöhnliche Kurve $G \subset R$, welche zu je zwei Punkten von E einen sie verbindenden Bogen enthält. Wir können diese Bemerkung anwenden auf das Kontinuum $C_{i_1, i_2, \dots i_k}$ und auf die endliche Menge bestehend aus den Begrenzungspunkten von $C_{i_1, i_2, \dots i_k}$ und dem zu $C_{i_1, i_2, \dots i_k}$ eventuell gehörigen Punkt der Menge $P+Q$. Wir können dann jeder Kurve $C_{i_1, i_2, \dots i_k}$ unseres Systems eine gewöhnliche Teilkurve $G_{i_1, i_2, \dots i_k}$ entsprechen lassen, welche zwischen je zwei Punkten der Begrenzung von $C_{i_1, i_2, \dots i_k}$ oder von $(P+Q).C_{i_1, i_2, \dots i_k}$ einen sie verbindenden Bogen enthält. Wir bezeichnen die gewöhnlich-eindimensionale Menge, welche Summe aller gewöhnlichen Kurven $G_{i_1, i_2, \dots i_k}$ des k-ten Schrittes ist, mit G_k. Es gilt dann

Satz ε. Ist $S=\{s_1, s_2, \dots s_r\}$ eine endliche Menge, welche P und Q in G_k trennt, dann ist, (wenn $C_k(s_i)$ die Summe aller s_i enthaltenden Kontinua des k-ten Schrittes bezeichnet), $C(S)=\sum_{i=1}^{r} C_k(s_i)$ eine P und Q in K trennende Menge.

Da laut Voraussetzung P und Q in G_k durch die Menge S getrennt sind, existiert eine Zerlegung $G_k - S = G' + G''$, wo G' und G'' zwei fremde, in $G_k - S$ abgeschlossene Mengen sind und $G' \supset P - P.S$ und $G'' \supset Q - Q.S$ gilt. Wir haben nachzuweisen, dass $K - C(S)$ in zwei fremde relativ abgeschlossene Teile zerfällt, von denen der eine $P - P.C(S)$, der andere $Q - Q.C(S)$ enthält. Wir bezeichnen zu diesem Zweck mit K', bzw. mit K'' den Durchschnitt von $K - C(S)$ mit der Summe aller jener Kontinua des k-ten Schrittes, die mit G', bzw. mit G'' Punkte gemein haben, und zeigen, dass eine Zerlegung von den gewünschten Eigenschaften geliefert wird durch die Formel $K - C(S) = K' + K''$. Dass $K' \supset P - P . C(S)$ und die analoge Formel für K'' gilt, ist klar. Es bleibt nachzuweisen, dass K' und K'' fremd sind. Wir zeigen, dass sie sogar einen positiven Abstand haben. Andernfalls existierte ja ein Punkt a von $\overline{K'} . \overline{K''}$. Der Punkt a würde einem Kontinuum $C_{i_1, i_2, \ldots i_k} = C'$, dessen Inneres in K' liegt, und einem Kontinuum $C_{j_1, j_2, \ldots j_k} = C''$, dessen Inneres in K'' liegt, angehören C' und C'' hätten sicher auch einen Begrenzungspunkt b miteinander gemein. Nun ist $C' . G' = G_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ also enthielte C' mit Rücksicht auf die Konstruktion von $G_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ einen in b endenden Teilbogen von G'; und aus demselben Grund enthielte C'' einen in b endenden Teilbogen von G''. Da aber der Punkt b nicht zu S gehören kann, [jeder Punkt von S liegt ja im Innern der zu $K' + K''$ fremden Menge $C(S)$] — ist damit ein Widerspruch gegen die vorausgesetzte Fremdheit von G' und G'' hergeleitet und Satz ε ist bewiesen.

Um nun Satz β zu beweisen, setzen wir voraus, die reguläre Kurve K enthalte nicht n paarweise fremde Teilbögen, deren jeder den einen Endpunkt in P und den anderen in Q besitzt. Satz β ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass unter dieser Voraussetzung K zwischen P und Q nicht n-punktig zusammenhängend sein kann. Zum Beweise von Satz β haben wir also unter der angegebenen Voraussetzung die Existenz von $n - 1$ Punkten nachzuweisen, welche P und Q in K trennen.

Wir bilden zu diesem Zweck ein System von Kontinua $\{C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\}$ mit den drei oben beschriebenen Eigenschaften und betrachten für irgend ein bestimmtes k die nach den obigen Vorschriften gebildete gewöhnlich-eindimensionale Menge G_k. Als Teil von K kann G_k nicht n paarweise fremde Bögen zwischen P und Q enthalten; also existieren nach Satz δ $n-1$ Punkte, welche P und Q in G_k trennen und zwar existieren endlich viele, etwa r_k, verschiedene $(n-1)$-Tupel von punktförmigen Stücken der Menge G_k, welche P und Q in G_k trennen. Sei S_i^k $(i = 1, 2, \ldots r_k)$ eine dieser P und Q in G_k trennenden Mengen bestehend aus $n-1$ punktförmigen Stücken $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots p_{i_{n-1}}$ von G_k. Zu jeder solchen Menge S_i^k können wir die Menge $C(S_i^k)$ bilden, welche Summe ist von allen Kontinua $C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ des k-ten Schrittes, die irgend einen der Punkte von S_i^k enthalten.

Jede solche Menge $C(S_i^k)$ ist also Summe von $n-1$ (nicht notwendig fremden) Kontinua, deren jedes einen Durchmesser $< 2 d_k$ hat. Jede dieser Mengen $C(S_i^k)$ ist ferner offenbar in irgend einer der Mengen $C(S_j^{k-1})$ enthalten. Es existiert daher eine Folge von ineinandergeschachtelten Mengen $\{C(S_{i_k}^k)\}$, $(k = 1, 2, \ldots$ ad. inf$)$, deren jede P und Q trennt und deren Durchschnitt aus höchstens $n-1$ Punkten besteht. Nach Satz γ sind P und Q auch durch die Menge $\prod\limits_{k=1}^{\infty} C(S_{i_k}^k)$ getrennt. Damit sind $n-1$ P und Q trennende Punkte von K angegeben, womit der Beweis von Satz β und mithin von unserem Theorem vollendet ist.

Es sei zum Abschluss dieser Betrachtungen noch auf eine Verallgemeinerungsmöglichkeit des Theorems hingewiesen. Wir haben zur Definition der Ordnung von Kurvenpunkten die Umgebungsbegrenzungen nach ihren Mächtigkeiten eingeteilt. An anderer Stelle [1]) habe ich darauf hingewiesen, dass man eine *Verzweigungsordnung* definieren könnte durch eine analoge Einteilung der Umgebungsbegrenzungen nach der *Mächtigkeit der Menge ihrer Komponenten.* Von einer Verzweigungsordnung $\leqq n$ wäre demgemäss ein Punkt zu bezeichnen, zu dem beliebig kleine Umgebungen existieren, deren Begrenzungen höchstens n Komponenten enthalten. Es scheint nun plausibel, dass in einer „regulär-verzweigten" Menge in jedem Punkt n-ter Verzweigungsordnung n Bögen zusammenstossen, so wie wir dies für Kurvenpunkte n-ter Ordnung nachgewiesen haben. *Für einen Punkt von n-ter Verzweigungsordnung lassen sich vielleicht sogar n in ihm zusammenstossende, in p einfach verzweigte Mengen angeben, welche hinsichtlich dieser Eigenschaften in gewissem Sinn saturiert sind.*

II Über umfassendste Kurven.

Liegt eine Klasse von Räumen oder Raumgebilden vor, so kann man fragen, ob die Klasse ein topologisch umfassendstes Gebilde enthält, d. h. ob ein Element der Klasse existiert, welches ein topologisches Bild von jedem Element der Klasse als Teil enthält.

Unter den *endlichen* Mengen beispielsweise existiert sicherlich *keine* umfassendste. Ebensowenig gibt es einen *endlichdimensionalen* Raum, welcher alle endlichdimensionalen Räume topologisch enthalten würde.

Hingegen existiert einem Sierpińskischen Satz zufolge eine *nulldimensionale* Menge, nämlich die Menge aller irrationalen Punkte des Einheitsintervalls, welche ein topologisches Bild von jedem separabeln nulldimensionalen Raum enthält. Und es existiert einem Urysohnschen Satz zufolge ein *separabler* Raum, nämlich der Hilbertsche Raum, in welchen jeder separable Raum einbettbar ist.

[1]) Kurven Math. Ann. 95. S. 281, vgl. auch Bericht üb. d. Dimensionstheorie S. 130.

Die für die Kurventheorie wichtigste Tatsache dieses Problemenkreises ist enthalten in folgendem

Theorem: *Es existieren stetig durchlaufbare Kurven des R_3, die zu jedem kompakten eindimensionalen Raum eine homöomorphe Teilmenge enthalten.*

Eine solche umfassendste Kurve kann man in folgender Weise herstellen: Wir teilen einen Würfel W von der Seitenlänge 1 in 27 homothetische Teilwürfel von der Seitenlänge $\frac{1}{3}$. Unter diesen 27 Teilwürfeln befinden sich 7 Würfel, die fremd sind zu den Kanten des Würfels, von dem wir ausgegangen sind. Diese 7 Würfel (wir wollen sie die 7 *inneren* Würfel nennen) nebst ihren Begrenzungen tilgen wir aus W. Zu jedem der 20 nicht getilgten Würfel nehmen wir seine Begrenzung, soweit sie getilgt wurde, wieder hinzu und wiederholen in ihm diesen Vorgang der Teilung in 27 Teilwürfel und der Tilgung der 7 inneren. So fahren wir fort. Beim n-ten Schritt erhalten wir 20^n Würfel von der Seitenlänge $\frac{1}{3^n}$, deren Summe wir mit I_n bezeichnen. Die stetig durchlaufbare Kurve $\prod_{n=1}^{\infty} I_n$ ist eine umfassendste Kurve im definierten Sinn [1]).

In der Ebene hatte bekanntlich Sierpiński [2]) eine stetig durchlaufbare Kurve konstruiert, von der er nachwies, dass sie alle ebenen Kurven enthält. Sie entsteht dadurch, dass man ein Quadrat von der Seitenlänge 1 in 9 homothetische Teilquadrate der Seitenlänge $\frac{1}{3}$ teilt, das innerste dieser Quadrate (d. h. jenes, welches zum Rand des Ausgangsquadrates fremd ist), ohne seine Begrenzung tilgt, sodann dasselbe Verfahren auf jedes der restlichen 8 Quadrate anwendet und so ad infinitum fortfährt. Wir zeigen nun: ***In der Sierpińskischen Kurve ist von jeder ebenen Menge ohne inneren Punkt ein topologisches Bild als Teil enthalten,*** diese Kurve umfasst also nicht nur alle ebenen *Kurven*, sondern auch alle nicht-abgeschlossenen ebenen Mengen, die kein Teilquadrat enthalten. Jede ebene Menge ohne inneren Punkt ist ja offenbar enthalten in einer Menge, deren Komplement abzählbar und in der Ebene dicht ist. Da nun einem bekanten Satz von Fréchet zufolge alle ebenen Mengen mit abzählbaren, überall dichten Komplementen untereinander homöomorph sind, genügt es, einen Teil des Sierpińskischen Kurve anzugeben, der homöomorph ist mit einer Menge, deren Komplement abzählbar und überall dicht ist. Als ein solcher Teil erweist sich die G_δ — Menge M, welche übrig bleibt, wenn man aus dem ***offenen*** Quadrat das innerste seiner 9 Teilquadrate ***nebst seiner Begrenzung*** tilgt, sodann das innerste Neuntel nebst dessen Begrenzung aus jedem der restlichen 8 Teilquadrate und wenn man diesen Tilgungsprozess ad infinitum fortsetzt. Dass diese Menge M tatsächlich homöomorph ist mit einer Menge, deren Komplement abzählbar und überall dicht ist, ergibt sich am einfachsten, wie Herr Vietoris bemerkt hat, durch Berufung auf folgenden Satz von R. L. Moore [1]): Jede die Ebene überdeckende oberhalb stetige Menge (upper semicontinuous collection) von paarweise fremden, die Ebene nicht zerlegenden beschränkten Kontinua ist mit der Ebene homöomorph. Die Punkte des offenen Quadrates zusammen mit den abgeschlossenen Teilquadraten, die zur Bildung von M aus dem Quadrat getilgt wurden, stellen nämlich eine oberhalb stetige Menge solcher Kontinua dar. Es existiert also eine topologische Abbildung der Menge dieser Kontinua auf die Ebene und man zeigt leicht, dass die abzählbare Punktmenge, auf welche dabei die abzählbar vielen Quadrate der Komplements von M abgebildet werden, in der Ebene dicht liegt. Die Menge M wird dabei also auf das Komplement einer abzählbaren, in der Ebene dichten Menge abgebildet.

[1]) Der Beweis für die Einbettbarkeit jedes kompakten eindimensionalen Raumes in diese oben geschilderte Kurve findet sich in meinen Abhandlungen „Allgemeine Räume und Cartesische Räume" erste Mitteilung, Proc. Ac. Amsterdam 29, 1926, S. 476, zweite Mitteilung, ebenda Juni 1926. In einer ausführlichen demnächst erscheinenden Darstellung dieser Verhältnisse für beliebige Dimensionen hoffe ich zugleich u. a. nachweisen zu können, dass in diese umfassendste Kurve nicht nur jeder kompakte, sondern sogar jeder *separable* eindimensionale Raum einbettbar ist. Eine Konsequenz hievon ist u. a., dass sich im R_3 vier Mengen R_3^0, R_3^1, R_3^2, R_3^3 angeben lassen mit den Dimensionen 0, 1, 2, 3, so dass jede nulldimensionale Menge in R_3^0, jede eindimensionale Menge in R_3^1, jede zweidimensionale Menge des R_3 in R_3^2, jede dreidimensionale Menge des R_3 in R_3^3 einbettbar ist

[2]) C. R. 162, S 629.

Nachdem durch das angeführte Theorem die Existenz umfassendster Kurven sichergestellt ist, kann man die Frage nach der Existenz umfassendster Kurven von besonderer Art aufwerfen. *Existiert eine umfassendste reguläre Kurve? Gibt es, wenigstens für gewisse n, umfassendste Kurven n-ter Ordnung?*

Nach einem Theorem der Kurventheorie [2]) existieren nur endlich viele topologische Typen von Kurven zweiter Ordnung und der Kreis ergibt sich als umfassendste Kurve zweiter Ordnung Man könnte untersuchen, ob nicht die bekannte Sierpińskische Dreieckskurve [3]) alle ebenen Kurven dritter Ordnung umfasst. Wichtiger (mit Rücksicht auf die Einbettbarkeit aller kompakten eindimensionalen Räume in den R_3) wäre die Angabe umfassendster Kurven von bestimmter Art im R_3. Man könnte z. B. folgende räumliche Verallgemeinerung der Dreieckskurve auf ihre Umfassungseigenschaften prüfen: Jedes Tetraeder, dessen Seiten die Länge 1 haben, ist Summe von einem Oktaeder, dessen Seiten die Länge $\frac{1}{2}$ haben und von vier Tetraedern, deren Seiten die Länge $\frac{1}{2}$ haben. Wir tilgen nun aus einem solchen Tetraeder das Innere dieses eingeschriebenen Oktaeders, wiederholen dieses

[1]) Transactions Am. Math. Soc. 27, 1925. S. 416.

[2]) Vgl. Kurven, Math. Annalen 95, S 303 und den demnächst erscheinenden zweiten Teil des Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes. Das Theorem wird auch im wesentlichen in Urysohn's oben zitierter C. R — Note. sowie in meiner erwähnten Note aus dem Jahr 1921 ausgesprochen.

[3]) Vgl. C. R., 160, 1916, S. 302.

Verfahren in jedem der vier übrigbleibenden Tetraeder und fahren so ad infinitum fort. Es entsteht eine Kurve sechster Ordnung [1]).

Eine vollständige Lösung dieser Probleme soll im folgenden für die Klasse der *Baumkurven* gegeben werden, d. h. für jene regulären Kurven, die keinen topologischen Kreis als Teil enthalten [2]). Es gilt diesbezüglich folgendes

Theorem. *Es existieren, und zwar in der Ebene, umfassendste Baumkurven und ferner für jedes n Baumkurven n-ter Ordnung, die von jeder Baumkurve n-ter Ordnung ein topologisches Bild als Teil enthalten. Unter diesen umfassendsten Baumkurven gibt es solche, welche Summe von abzählbar vielen Strecken und einer nulldimensionalen Menge von Endpunkten sind. Damit eine Baumkurve B alle Baumkurven n-ter Ordnung, bzw. alle Baumkurven überhaupt topologisch enthalte, ist notwendig und hinreichend, dass B einen Teilbaum B' enthält, in dem die Punkte n-ter bzw. w-ter Ordnung von B' dicht liegen.*

Es sei in der Ebene eine Strecke S gegeben. Zugleich mit S sei eventuell ein Dreieck D gegeben, so dass ein Eckpunkt von D mit einem der Endpunkte von S zusammenfällt, während alle übrigen Punkte von S im Inneren von D liegen. T sei eine abzählbare in S dichte Teilmenge von S. Wir bestimmen auf einer zu S parallelen Strecke eine Menge T', welche keinen ihrer Häufungspunkte enthält und ordnen die abzählbar vielen Geraden, welche einen Punkt von T und einen Punkt von T' verbinden, in eine Folge $\{g_k\}$ $(k = 1, 2, ..)$. Wir bestimmen sodann sukzessive erstens aufs jeder der Geraden g_k eine Strecke S_k welche in dem zu T gehörigen Punkt von g_n endet, und zweitens ein Dreieck D_k, welches diesen Punkt als Eckpunkt besitzt und alle übrigen Punkte von S_k in seinem Inneren enthält. Dabei soll D_k so klein bestimmt werden, dass 1) sein Durchmesser $< \frac{1}{k}$ ist, dass 2) D_k abgesehn höchstens von seinem auf S gelegenen Eckpunkt zu allen Dreiecken D_m $(m < k)$ fremd ist, und dass 3), falls zugleich mit S ein Dreieck D vorgegeben wurde, $D_k \subset D$ gilt. Sind abzählbar viele Strecken S_k irgendwie diesen Bedingungen gemäss bestimmt, dann nennen wir $m_n(S, D)$ ihre Summe. wobei wir $n = 3, 4, 5, \ldots w$ setzen, jenachdem die Menge T' 1, 2, 3.... oder unendlich viele Punkte enthält.

Wir bestimmen nun für jede der Strecken S_{i_1} $(i_1 = 1, 2, \ldots)$ von $m_n(S, D)$, die wir auch die Strecken des ersten Schrittes nennen, eine Menge $m_n(S_{i_1}, D_{i_1})$, bezeichnen die Strecken dieser Menge mit $S_{i_1 i_2}(i_2 = 1, 2, \ldots)$, die zugehörigen Dreiecke mit $D_{i_1 i_2}$ und setzen $\sum\limits_{i_1\ i_2=1}^{\infty} S_{i_1 i_2} = m_n^2 S$. Sind bereits die Strecken $S_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ des $(k-1)$-ten Schrittes und die zugehörigen Dreiecke $D_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ bestimmt, so bilden wir zu jeder dieser Strecken eine Menge $m_n(S_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}, D_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}})$, deren Strecken wir mit $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ $(i_k = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen, und setzen $\sum\limits_{i_1, \ldots i_k=1}^{\infty} S_{i_1 i_2 \ldots i_k} = m_n^k S$.

Wir wählen nun irgend eine Strecke S der Ebene und setzen
$$G_n = \sum_{k=1}^{\infty} m_n^k S, \quad B_n = \overline{G}_n, \quad (n = 3, 4, 5, \ldots w).$$

Wir behaupten: Die Menge B_n ist ein *Baum*. B_n ist sicher zusammenhängend im kleinen. Wir haben zu zeigen, dass B_n keinen topologischen Kreis als Teil enthält. Angenommen, es sei K ein topologischer Kreis $\subset B$. Wenn K im Innern eines Dreieckes D_{i_1} des ersten Schrittes Punkte enthält, dann ist K offenbar zum Innern aller anderen Dreiecke des ersten Schrittes fremd. K kann also nur im Innern von e i n e m der Dreiecke des ersten Schrittes, etwa von D_{i_1}, Punkte enthalten. Ebenso kann K nur im Innern von e i n e m Dreieck des zweiten Schrittes, etwa von $D_{i_1 i_2} \subset D_{i_1}$, und allgemein nur im Innern von e i n e m Dreieck des k-ten Schrittes, $D_{i_1 i_2, \ldots i_k}$, Punkte enthalten. Dann kann aber der Durchmesser von K nicht > 0 sein, d. h. B_n kann keinen topologischen Kreis als Teil enthalten. Man sieht ferner, dass der Baum B_n nur Verzweigungspunkte von n-ter Ordnung enthält $(n = 3, 4, \ldots w)$.

Wir zeigen weiter, dass B_w ein u m f a s s e n d s t e r Baum ist. Sei nämlich irgend ein Baum b vorgelegt. Wir wählen irgend einen zwei Endpunkte von b verbindenden Teilbogen s von b und bilden

[1]) Alle reguläre Kurven, welche in eine Kurve der geschilderten Art oder in eine ähnliche Kurve einbettbar sind, haben die Eigenschaft, dass sie in endlich viele beliebig kleine Kontinua zerlegbar sind, die zu je zweien höchstens einen Punkt gemein haben. Als eine (auch an sich interessante) Vorfrage zu derartigen Einbettungssätzen könnte man daher untersuchen: *Ist jede reguläre Kurve für jedes $\varepsilon > 0$ Summe von endlich vielen Kontinua $< \varepsilon$, die zu je zweien höchstens einen Punkt gemein haben?* Bewiesen ist nur (vgl. Kurven S. 300), dass jede reguläre Kurve in endlich viele beliebig kleine Kontinua zerfällt, die zu je zweien *endliche* Durchschnitte haben.

[2]) Eine systematische Untersuchung dieses Begriffes, auf den zuerst von M a z u r k i e w i c z (Fund Math. II, S. 119) hingewiesen wurde, findet sich in meinem Aufsatz „Über reguläre Baumkurven", Math Annalen 96.

ihn topologisch ab auf die Strecke S von B_ω. Die abzählbare Menge t der auf s gelegenen Verzweigunspunkte von b möge dabei in die Menge $T \subset S$ übergehen. Wir betrachten die Menge $b - s$. Sie besitzt abzählbar viele Komponenten mit gegen Null konvergierenden Durchmessern (oder insbesondere nur endlich viele Komponenten), deren abgeschlossenen Hülle b_{i_1} ($i = 1, 2, ..$) Bäume sind. Wir ordnen jedem Baum b_{i_1} ein Dreieck des ersten Schrittes von B_ω zu, welches wir mit D_{i_1} bezeichnen. Dabei ordnen wir jedem Baum b_{i_1}, welcher mit s einen Punkt a gemein hat ein Dreieck zu, welches mit S jenen Punkt gemein hat, in welchen a bei der topologischen Abbildung von s auf S übergeführt wurde. In jedem Baum b_{i_1} wählen wir einen Bogen, welcher einen Endpunkt von b_{i_1} mit dem zu b_{i_1} gehörigen Punkt von s verbindet. Diesen Bogen nennen wir s_{i_1} und bilden ihn topologisch ab auf die in D_{i_1} gelegene Strecke S_{i_1}. In dieser Weise wird das Abbildungsverfahren fortgesetzt: Ist $b_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ ein bereits definierter Baum $\subset b$, so ordnen wir den abgeschlossenen Hüllen der Komponenten von $b_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} - s_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ Dreiecke des n-ten Schrittes von B_ω zu. Dabei lassen wir dem Baum $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ein Dreieck $D_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ entsprechen, welches mit $S_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ jenen Punkt gemein hat, auf welchen bei der topologischen Abbildung von $s_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ auf $S_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ der Punkt abgebildet wurde, der $s_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ und $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ gemein ist. In diesem Baum $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ wählen wir wieder einen Bogen $s_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ und bilden ihn auf eine Strecke des n-ten Schrittes $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ in geeigneter Lage ab.

Damit gewinnen wir eine topologische Abbildung von der Summe aller Bögen $s_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ auf einen Teil von G_n, nämlich auf die Summe aller bei der Abbildung verwendeten Strecken $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Jeder Punkt von b, welcher in dieser Bogensumme nicht enthalten ist, liegt jedenfalls in einer bestimmten Folge $b_{i_1}, b_{i_1 i_2}, \ldots b_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ldots$ jener Teilbäume von b, welche bei dieser Konstruktion aufgetreten sind. Jedem solchen Punkt ordnen wir den Durchschnitt der entsprechenden Dreiecke $D_{i_1}, D_{i_1 i_2}, \ldots D_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ldots$ zu. Damit ist eine Abbildung der ganzen Menge b auf einen Teil von B_ω hergestellt und man überzeugt sich leicht davon, dass diese Abbildung topologisch ist.

Ist b ein Baum n-ter Ordnung, so kann diese Abbildung offenbar auf einen Teil von B_n hergestellt werden. Zugleich ergibt die Konstruktion, *dass alle Bäume, welche nur Verzweigungspunkte n-ter Ordnung enthalten und in welchen diese Verzweigungspunkte dicht liegen, untereinander homöomorph sind.* Jeder umfassendste Baum n-ter Ordnung muss offenbar auch einen mit B_n homöomorphen Teil enthalten; damit ein Baum alle Bäume n-ter Ordnung enthalte, ist also notwendig und hinreichend, dass er einen Teilbaum enthalte, in dem die Punkte von n-ter Ordnung dicht liegen.

Es werde noch erwähnt, dass auch *Bäume ohne Punkte der Ordnung ω existieren, die alle Bäume ohne Punkte wachsender Ordnung topologisch enthalten.* Diese Bäume sind dadurch charakterisiert, dass sie einen Teilbaum enthalten, in dem für jedes n die Verzweigungspunkte von einer Ordnung $> n$ dicht liegen.

Schliesslich bemerken wir, dass die oben implizit verwendete Darstellung der Baumkurven als Summe eines Semikontinuums, das sich aus abzählbar vielen Bögen zusammensetzt, und einer nulldimensionalen Menge allgemein für reguläre Kurven gilt. Sogar jede im kleinen zusammenhängende Kurve, zu deren sämtlichen Punkten beliebig kleine Umgebungen mit abzählbaren Begrenzungen existieren, oder, wie wir statt dessen auch sagen, *jede stetig durchlaufbare halbreguläre Kurve, ist Summe eines Semikontinuums bestehend aus abzählbar vielen Bögen und einer nulldimensionalen Menge.* Liegt z. B. eine reguläre Kurve vor, so hat man nur ein System von Kontinua mit den oben (S. 102) angegebenen Eigenschaften zu bilden und in jedem dieser Kontinua je zwei Begrenzungspunkte durch einen Teilbogen zu verbinden. Die Summe aller dieser Bögen ist ein Semikontinuum mit nulldimensionalem Komplement

III. Über die Punkte unendlicher Ordnung.

Es liege in einem separabeln vollständigen Raum eine Menge M vor. M^1 bezeichne die erste Ableitung, d. h. die Menge aller Häufungspunkte von M, und für jede Ordinalzahl α der ersten und zweiten Zahlenklasse bezeichne M^α die α-te Ableitung von M, d. h., falls α eine isolierte Zahl ist, die erste Ableitung von $M^{\alpha-1}$ falls α eine Grenzzahl ist, das Produkt aller Mengen M^β $(\beta < \alpha)$.

Betrachten wir nun einen Punkt p der Kurve K. Wenn beliebig kleine Umgebungen von p mit abzählbaren Begrenzungen existieren. dann wollen wir p einen *halbregulären* Punkt von K nennen, und wir sagen von einem halbregulären, aber nicht regulären Punkt auch, er besitze die *Ordnung* $\aleph_0$. Zu jeder abgeschlossenen abzählbaren Menge A existiert nach dem Cantorschen Theorem in der ersten oder zweiten Zahlenklasse eine kleinste Ordinalzahl α (und zwar eine isolierte Zahl), so dass die α-te Ableitung von A leer ist. Wir sagen nun, der halbreguläre Punkt p besitze ein *Geschlecht* $\leqq \alpha$, wenn beliebig kleine Umgebungen von p existieren, deren

Begrenzungen leere α-te Ableitungen besitzen, und wir sagen, p sei vom Geschlecht α, wenn α die kleinste Zahl dieser Eigenschaft ist. Das Geschlecht ist also eine für jeden halbregulären Punkt bestimmte Ordinalzahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse. Die regulären Punkte sind die Punkte vom Geschlecht 1.

Ist das Geschlecht α des Punktes p eine isolierte Zahl, dann existieren beliebig kleine Umgebungen von p, deren Begrenzungen endliche $(\alpha - 1)$-te Ableitungen besitzen. Existieren zu einem Punkt p beliebig kleine Umgebungen, so dass die $(\alpha - 1)$-ten Ableitungen ihrer Begrenzungen n Punkte enthalten, dann sagen wir, falls n die kleinste Zahl dieser Eigenschaft ist, der Punkt p sei vom *Typus* (α, n). Punkte vom Geschlecht α, die von keinem bestimmten endlichen Typus sind, nennen wir vom Typus (α, w). Die Existenz von Punkten des Typus (α, n) erkennt man, indem man alle Punkte einer linearen Menge A, deren $(\alpha - 1)$-te Ableitung genau n Punkte enthält, mit einem Punkt q ausserhalb der die Menge A tragenden Geraden durch Strecken verbindet. Die Summe aller dieser Strecken ist im Punkt q vom Typus (α, n). In ähnlicher Weise zeigt man die Existenz von Punkten des Typus $(\alpha\ w)$. In der Kurve, welche aus den Punkten $y = \sin\frac{1}{x}$, $x > 0$, und dem Häufungskontinuum $-1 \leqq y \leqq +1$, $x = 0$ besteht, sind die halbregulären Punkte vom Typus (2, 2), bis auf die beiden Punkte $x = 0$, $y = \pm 1$, die vom Typus (2, 1) sind.

Als Geschlecht α des Punktes p kann sich auch eine Grenzzahl ergeben, obwohl die Ordnung der ersten nicht-leeren Ableitung der einzelnen Umgebungsbegrenzungen stets eine isolierte Zahl ist. Es können beispielsweise zu dem Punkt p beliebig kleine Umgebungen existieren, deren Begrenzungen leere Ableitungen von endlicher Ordnung besitzen, ohne dass schon beliebig kleine Umgebungen existieren würden, so dass eine bestimmte endliche Ableitung aller dieser Begrenzungen leer wäre. (Man könnte auch für solche Punkte ein Typus definieren).

Die halbregulären Punkte zerfallen also in $\aleph_1$ Typen [1]) und je zwei Punkte sind ihrem Typus nach mit einander vergleichbar. Wir setzen $(\alpha, m) > (\beta, n)$, wenn entweder $\alpha > \beta$, oder $\alpha = \beta$ und $m > n$ gilt.

[1]) Vgl. Bericht über die Dimensionstheorie. S. 129.

Von den Sätzen, welche über die verschiedenen Typen von halbregulären Punkten gelten, seien bloss zwei angeführt, welche zeigen, dass Aussagen über halbreguläre Punkte durch Berücksichtigung der verschiedenen Typen in viele Aussagen aufgespaltet werden können, und dass Sätze über reguläre Punkte ihr Analogen für die verschiedenen Geschlechter besitzen.

Auf Grund der in meinen dimensionstheoretischen Untersuchungen verwendeten Methoden kann man über die allgemeine gestaltliche Struktur der Räume folgenden Fundamentalsatz herleiten [1]):

Es liege in einen kompakten metrischen Raum ein System von Umgebungen vor, welches folgenden Bedingungen genügt:

1) Neben je zwei Umgebungen U_1 und U_2 des System gehört auch die Umgebung $U_1 + U_2$ dem System an.

2) Neben jeder Umgebung U des Systems gehört dem System auch jede Umgebung an, deren Begrenzung Teil der Begrenzung von U ist, wobei die leere Menge als Teil jeder Menge gilt.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Menge aller jener Punkte des Raumes, auf die sich Umgebungen des vorgelegten Systems nicht zusammenziehen, ein F_σ, das zu jedem seiner Punkte ein diesen Punkt enthaltendes Teilkontinuum enthält.

Betrachten wir nun das System aller Umgebungen, deren Begrenzungen für eine bestimmte Ordinalzahl α eine leere α-te Ableitung haben. Das System dieser Umgebungen erfüllt die beiden Bedingungen des angeführten Satzes. Die Punkte, auf welche sich Umgebungen dieses Systems nicht zusammenziehen, sind aber die Punkte von einem Geschlecht $> \alpha$. Dann entnehmen wir aber dem angeführten Fundamentalsatz das

Theorem. *Für jede Ordinalzahl α ist die Menge aller Punkte von einem Geschlecht $> \alpha$ entweder leer oder ein F_σ, das zu jedem seiner Punkte ein ihn enthaltendes Teilkontinuum enthält.*

Aus der Existenz eines einzigen Punktes von einem Geschlecht $> \alpha$ folgt also die Existenz einer kondensierten Menge solcher

[1]) Vgl. Kurven S. 287. In der oben angeführten Schärfe wurde das Theorem von Hurewicz, Normalbereiche und Dimensionstheorie, Math. Annalen 96, 1926 bewiesen.

Punkte. Jeder Punkt von einem Geschlecht $> \alpha$ ist sogar in einem Kontinuum enthalten, das nur aus Punkten von einem Geschlecht $> \alpha$ besteht [1]).

Als Kurve von einem Geschlecht $\leqq \alpha$ können wir jene Kurven bezeichnen, deren sämtliche Punkte ein Geschlecht $\leqq \alpha$ haben. *Die Kurven von einem Geschlecht $< \alpha$ sind dadurch charakterisiert, dass sie für jedes $\varepsilon > 0$ Summe von endlich vielen Umgebungen $< \varepsilon$ sind, die zu je zweien Durchschnitte haben, deren α-te Ableitungen leer sind.*

Wir beweisen endlich noch das folgende

Theorem. *Es sei α eine isolierte Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse. Ist p ein Punkt von einem Typus (α, n) in der Kurve K, dann ist der Punkt p von einem Typus $\geqq (1, n)$ für die Menge aller Punkte von K, deren Geschlecht $\geqq \alpha$ ist.*

Wir setzen voraus, p sei vom Typus (α, n); es existiert also eine Umgebung $Z(p)$, so dass die $(\alpha - 1)$-te Ableitung von der Begrenzung jeder Umgebung von $p < Z(p)$ mindestens n Punkte enthält. Wir wollen gegen diese Voraussetzung einen Widerspruch herleiten aus der Annahme, dass die Menge aller Punkte von einem Geschlecht $\geqq \alpha$ in p von einem Typus $< (1, n)$ sei, d. h. aus der Annahme, dass beliebig kleine Umgebungen von p existieren, deren Begrenzungen weniger als n Punkte enthalten, in denen K ein Geschlecht $\geqq \alpha$ besitzt. Dieser letzteren Annahme zufolge müsste eine Umgebung $U << Z(p)$ [2]) existieren, deren Begrenzung $B(U)$ abgesehn von einer höchstens $n-1$ Punkte enthaltenden Menge A nur Punkte von einem Geschlecht $< \alpha$ enthielte. Wir könnten daher jedem Punkt q von $B(U) - A$ eine Umgebung $U(q)$ zuordnen, so dass die α-te Ableitung der Begrenzung von $U(q)$ leer ist. Wir können sodann aus der Gesamtheit dieser Umgebungen $U(q)$, einem vielfach verwendbaren Überdeckungssatz [3]) zufolge, abzählbar viele Umgebungen $\{U_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ herausgreifen, so dass

1) $B(U) - A \subset \sum_{n=1}^{\infty} U_n$.

2) in jeder Umgebung $U(A)$ fast alle U_n liegen.

[1]) Punkte, deren Geschlecht eine Grenzzahl ist, können, selbst wenn sie die Punkte höchsten Geschlechtes einer gegebenen Kurve sind, isoliert auftreten.

[2]) Ich schreibe $A << B$ gleichbedeutend mit $\bar{A} < B$.

[3]) Vgl. Über die Dimension von Punktmengen II, Monatshefte f. Math. u. Phys. 34, S. 142, Kurven, Math. Ann. 95. S. 288, auch Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre, Wiener Ber. 133, 1924, S. 423.

Betrachten wir nun die Umgebung $V = U + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \subset Z(p)$. Bezeichnet $B(U_n)$ die Begrenzung von U_n, dann gilt mit Rücksicht auf die Bedingungen 1) und 2) bei der Auswahl der U_n

$$B(V) \subset A + \sum_{n=1}^{\infty} B(U_n).$$

Für die α-te Ableitung $B^{\alpha}(U_n)$ von $B(U_n)$ gilt mit Rücksicht auf die Bedingung 2)

$$B^{\alpha}(V) \subset A + \sum_{n=1}^{\infty} B^{\alpha}(U_n),$$

also, da alle Mengen $B^{\alpha}(U_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ leer sind,

$$B^{\alpha}(V) \subset A.$$

V ist also eine Umgebung von $p \subset Z(p)$, so dass die α-te Ableitung ihrer Begrenzung weniger als n Punkte enthält, womit der angekündigte Widerspruch hergestellt ist.

Es sei noch erwähnt, dass man mit Hilfe derselben Methode zeigen kann, *dass in einem Punkt vom Typus (α, n)* nicht nur die Menge aller Punkte von einem Geschlecht $\geqq \alpha$, sondern sogar *die Menge aller Punkte von einem Typus $\geqq (\alpha, 2)$ einen Typus $\geqq (1, n)$ besitzt.*

Die Methode, die zum Beweis des letzten Theorems verwendet wurde, lässt sich dadurch charakterisieren, dass man eine Umgebung, deren Begrenzung Punkte von einer gewissen Eigenschaft enthält, durch Modifikation in der Nachbarschaft dieser Begrenzungspunkte überführt in eine andere Umgebung, deren Begrenzung keine Punkte der betreffenden Eigenschaft enthält. Diese *Methode der Modifikation von Umgebungen an ihren Rändern*, die ich zum Beweise zahlreicher strukturtheoretischer Sätze verwendet habe [1]), stellt eines der wichtigsten Hilfsmittel der Dimensions- und Kurventheorie dar.

[1]) Vgl. die Arbeiten der vorhergenden Fussnote.

Amsterdam, 10. Juli 1926.