L'inégalité (12) subsistant pour nombre positif ε , il en résulte:

$$\rho_1(f, g) \leq \rho(X, Y). \quad (13)$$

D'autre part, il résulte de la définition du nombre $\rho_1(f, g)$ que

$$|f(r_k) - g(r_k)| \leq \rho_1(f, g) \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots;$$

d'après (7) et d'après la définition du nombre $\rho(X, Y)$, nous avons donc

$$\rho(X, Y) \leq \rho_1(f, g). \quad (14)$$

Les formules (13) et (14) donnent l'égalité $\rho_1(f, g) = \rho(X, Y)$, donc, d'après (7), l'égalité (6), c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré que l'espace D_ω est applicable sur un sous-ensemble C_1 de l'espace C_0 et que l'espace C_0 est applicable sur un sous-ensemble Q de l'espace D_ω . Les espaces D_ω et C_0 ont donc métriquement même nombre de dimension, et notre proposition est démontrée.

Il est à remarquer que l'espace C de toutes les fonctions continues dans un intervalle fermé *fini* (avec la même définition de distance que dans l'espace C_0) a, d'après M. Fréchet, un nombre de dimension inférieur à celui de D_ω .

Quant à l'espace D_ω observons encore qu'il est *nulle part séparable*, c'est-à-dire qu'aucun ensemble ouvert contenu dans l'ensemble D_ω n'est séparable¹⁾.

En effet, soit U un ensemble ouvert contenu dans l'espace D_ω , $X(x_1, x_2, \dots)$ un élément de U . L'ensemble U étant ouvert, il existe un nombre positif r , tel que tout élément Y de l'espace D_ω satisfaisant à l'inégalité $\rho(X, Y) \leq r$ appartient à U . Faisons maintenant correspondre à chaque ensemble N de nombres naturels l'élément $\Xi(\xi_1, \xi_2, \dots)$ de l'espace D_ω , où $\xi_n = x_n + r$ pour $n \in N$ et $\xi_n = x_n$ pour $n \notin N$. On aura évidemment toujours $\rho(X, \Xi) \leq r$, donc $\Xi \in U$. Or, N et N_1 étant deux ensembles distincts de nombres naturels, on a évidemment $\rho(\Xi(N), \Xi(N_1)) = r$. L'ensemble de tous les éléments $\Xi(N)$ de l'espace D_ω , où N est un ensemble quelconque de nombres naturels, est donc un ensemble isolé contenu dans U , ayant la puissance du continu, ce qui prouve que l'ensemble U n'est pas séparable, c. q. f. d.

¹⁾ Un exemple d'un espace métrique nulle part séparable a été donné par P. Urysohn, ce volume, p. 119—121.

Über Folgen stetiger Funktionen.

Von

Witold Hurewicz (Amsterdam).

In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten von Folgen stetiger Funktionen untersucht und in Zusammenhang gebracht mit gewissen Überdeckungseigenschaften von Punktmengen¹⁾. Die behandelten Fragen stehen zugleich in engen Beziehungen zu den sogenannten Pantachieproblemen.

1. Sind zwei Folgen reeller Zahlen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gegeben, so schreiben wir mit Hausdorff²⁾, $\{a_n\} > \{b_n\}$, bzw. $\{a_n\} < \{b_n\}$, bzw. $\{a_n\} = \{b_n\}$ wenn die Ungleichungen $a_n > b_n$, bzw. $a_n < b_n$, bzw. $a_n = b_n$ für fast allen n (d. h. für alle hinreichend grossen n) gelten. Diese drei Fälle bilden bekanntlich keine vollständige Disjunktion, es können vielmehr leicht zwei Folgen angegeben werden, zwischen denen keine dieser drei Grössenrelationen besteht.

Eine Menge A von Zahlenfolgen nennen wir nach oben (bzw. nach unten) *beschränkt*, wenn es eine Zahlenfolge α gibt, die grösser (bzw. kleiner) ist als alle Elemente von A . Die Menge A heisst nach oben (nach unten) *halbbeschränkt*, wenn eine Zahlenfolge α existiert, so dass kein Element von A grösser (kleiner) ist als α . Eine Menge von Zahlenfolgen, die sowohl nach oben als nach unten beschränkt bzw. halbbeschränkt ist, nennen wir schlechthin beschränkt bzw. halbbeschränkt.

¹⁾ Im Anschluss an eine Problemstellung von K. Menger in seiner Abhandlung „Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre“ (Wiener Berichte 133, 1924, S. 421) habe ich diese Überdeckungseigenschaften näher untersucht in der Arbeit „Eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems“. (Math. Zeitschr. 24, 1925, S. 401). Über die dimensionstheoretischen Anwendungen der zitierten Menger'schen Untersuchungen vgl. Menger, Bericht über die Dimensionstheorie (Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 36, 1926).

²⁾ Vgl. Hausdorff, die Graduierung nach dem Endverlauf, Abhandl. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 31, 1909 und Untersuchungen über Ordnungstypen, Berichte d. Sächs. Ges. d. Wiss. 59, 1909.

2. Es sei auf einer Punktmenge M (eines metrischen Raumes) eine Folge $\{f_n\}$ von reellen stetigen Funktionen gegeben. Als den Wertebereich der Funktionenfolge $\{f_n\}$ auf M bezeichnen wir die Menge aller Zahlenfolgen $\{r_n\}$, für die es einen Punkt p von M gibt, so dass $\{f_n(p)\} = \{r_n\}$ gilt. Auf einer kompakten abgeschlossenen Menge M hat jede Folge $\{f_n\}$ von stetigen Funktionen einen beschränkten Wertebereich. Da nämlich auf einer abgeschlossenen Menge alle stetigen Funktionen beschränkt sind, gibt es zu jedem n eine Zahl α_n , so dass in jedem Punkt p von M $|f_n(p)| < \alpha_n$ gilt. Daraus folgt aber, $\{-\alpha_n\} < \{f_n\} < \{\alpha_n\}$; also ist der Wertebereich von $\{f_n\}$ auf M beschränkt. Diese Ergebniss lässt sich sofort verallgemeinern:

Ist die Menge M Vereinigung von abzählbar vielen kompakten abgeschlossenen Mengen $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$, so hat jede Folge $\{f_n\}$ von auf M stetigen Funktionen einen beschränkten Wertebereich.

Es genügt zu zeigen, dass der Wertebereich von $\{f_n\}$ auf M nach oben beschränkt ist. Nach dem soeben bewiesenen ist der Wertebereich von $\{f_n\}$ auf jedem M_k beschränkt; d. h. es gibt zu jedem k eine Zahlenfolge α_k , so dass in allen Punkten von M_k die Ungleichung besteht: $\alpha_k > \{f_n(p)\}$. Sei nun α eine Zahlenfolge, die alle α_k übertrifft¹⁾. Dann gilt offenbar in jedem Punkt p von M : $\{f_n(p)\} < \alpha$.

3. Dass auf gewissen Punktmengen Folgen stetiger Funktionen mit nicht beschränktem und sogar mit nicht halbbeschränktem Wertebereich existieren, zeigt das folgende einfache Beispiel: Sei M die Menge aller irrationalen Zahlen des Intervalles $(0,1)$. Ist x ein Element von M , so bezeichnen wir mit $f_n(x)$ das n -te Glied der Kettenbruchentwicklung der Zahl x . Der Wertebereich der auf M definierten Folge der stetigen Funktionen f_n besteht aus allen Folgen natürlicher Zahlen, ist also weder beschränkt, noch halbbeschränkt.

Es entsteht die Frage, durch welche inneren Eigenschaften jene Mengen charakterisiert sind, auf denen alle Folgen stetiger Funktionen beschränkte bzw. halbbeschränkte Wertebereich besitzen.

¹⁾ Bekanntlich gibt es zu jeder abzählbaren Menge von Zahlenfolgen eine grössere Folge (vgl. Hausdorff l. c.).

4. Wir bezeichnen als Überdeckung einer Punktmenge M ein System von offenen Mengen, in deren Vereinigung M enthalten ist. Wir sagen von der Menge M , dass sie die Eigenschaft E^* besitzt¹⁾, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Sind irgendwie abzählbar viele Überdeckungen von M gegeben, so können aus jeder dieser Überdeckungen je endlich viele Elemente in der Weise herausgegriffen werden, dass die Gesamtheit aller so herausgegriffenen offenen Mengen wieder eine Überdeckung von M bildet²⁾.

Diese Definition lässt sich kürzer fassen, wenn wir folgenden Hilfsbegriff einführen: Ist $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n, \dots$ irgend eine Folge von Überdeckungen der Menge M , so bezeichnen wir als eine Auswahlüberdeckung aus der Folge $\{\sigma_n\}$ eine Überdeckung, welche aus abzählbar vielen offenen Mengen $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ besteht, so dass für jedes n U_n Vereinigung ist von endlich vielen Elementen aus σ_n . Die Mengen mit der Eigenschaft E^* sind dann also jene Mengen, für die aus jeder Folge von Überdeckungen eine Auswahlüberdeckung gebildet werden kann.

Wenn die Menge M die Eigenschaft E^* besitzt, so kann zu jeder Folge $\{\sigma_n\}$ von Überdeckungen von M eine solche Auswahlüberdeckung σ gebildet werden, dass jeder Punkt von M (nicht nur in einem, sondern sogar) in unendlich vielen Elementen von σ enthalten ist. Bilden wir nämlich zunächst für jedes k eine Auswahlüberdeckung σ'_k aus der Folge $\sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{k+l}, \dots$. Die Elemente von σ'_k seien $U_k^k, U_{k+1}^k, \dots, U_{k+l}^k, \dots$ (wo also U_{k+l}^k Vereinigung ist von endlich vielen Elementen aus σ_{k+l}). Setzen wir $U_n = \bigcup_{k=1}^n U_n^k$, so bilden die Mengen U_n eine Auswahlüberdeckung von der gewünschten Eigenschaft (denn es gilt für jedes n : $\bigcup_{k=n}^{\infty} U_k \supset \bigcup_{k=n}^{\infty} U_n^k \supset M$).

¹⁾ Hinsichtlich kompakter Mengen ist die Eigenschaft E^* , wie in meiner oben zitierten Arbeit gezeigt wird, äquivalent mit der von Menger (Wien. Ber. 133) betrachteten Eigenschaft E . Die Menge M besitzt die Eigenschaft E wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Ist S ein System von offenen Mengen, das beliebig kleine Umgebungen jedes Punktes von M enthält, dann kann aus S eine M überdeckende Folge von offenen Mengen mit gegen Null konvergierenden Durchmessern herausgegriffen werden.

²⁾ Hat eine Menge M die Eigenschaft E^* , so offenbar auch alle topologischen Bilder von M .

Wenn es möglich ist, aus jeder Folge von Überdeckungen der Menge M eine Auswahlüberdeckung σ in der Weise zu bilden, dass jeder Punkt von M (nicht nur in unendlich vielen, sondern sogar) in *fast allen* Elementen von σ liegt, dann sagen wir, die Menge M besitze die *Eigenschaft E^{**1}* .

5. Der Zusammenhang zwischen diesen Überdeckungseigenschaften und den oben formulierten Problemen betreffend die Wertebereiche von Folgen stetiger Funktionen wird hergestellt durch das folgende Theorem:

Damit auf der separablen Menge M jede Folge stetiger Funktionen einen halbbeschränkten, bzw. beschränkten Wertebereich besitze, ist notwendig und hinreichend, dass M die Eigenschaft E^* , bzw. E^{**} habe.

¹⁾ Aus der Eigenschaft E^{**} folgt offenbar die Eigenschaft E^* . Die Frage nach der Existenz von Mengen mit der Eigenschaft E^* ohne Eigenschaft E^{**} bleibt hier offen.

(Zusatz bei der Korrektur) Herr Sierpiński hat bemerkt, dass diese Frage unter der Voraussetzung der Kontinuumshypothese ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) im positiven Sinne zu beantworten ist. Dies ergibt sich aus der von Lusin (vgl. C. R. 158, S. 1259) unter der Annahme der Kontinuumshypothese nachgewiesenen Existenz von linearen nicht abzählbaren Mengen, die auf jeder nirgends dichten linearen Menge eine höchstens abzählbare Menge von Punkten besitzen. Jede derartige Lusin'sche Menge hat nämlich die Eigenschaft E^* (vgl. Sierpiński, Fund. Math. VIII, S. 223), aber nicht die Eigenschaft E^{**} . Das letztere kann aus dem allgemeinen Satze gefolgert werden, wonach jede Menge M eines separablen Raumes R , die keinen inneren Punkt enthält und die Eigenschaft E^{**} besitzt, notwendig von erster Kategorie ist (während jede Lusin'sche Menge, wie aus ihrer Definition unmittelbar folgt, von zweiter Kategorie ist). Zum Beweise betrachten wir eine in $R - M$ (und folglich auch in R) dicht liegende Folge von Punkten a_n ($n = 1, 2, \dots$) aus $R - M$. Bezeichnen wir mit $U(a; r)$ die sphärische Umgebung des Punktes a mit dem Radius r , so bilden die Mengen $G_k^n = R - U(a_n; 1/k)$ ($k = 1, 2, \dots$) bei festem n eine Überdeckung τ_n von M . Da M die Eigenschaft E^{**} besitzt, gibt es eine Folge von Indizes k_n , so dass $M \subset \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=n}^{\infty} G_{k_m}^m$ und a fortiori:

$$M \subset \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=n}^{\infty} \bar{G}_{k_m}^m$$

In der letzten Summe ist aber jeder Summand $\prod_{m=n}^{\infty} \bar{G}_{k_m}^m$ eine in R nirgends dichte Menge, denn er ist abgeschlossen und enthält von der in R dicht liegenden Folge $\{a_n\}$ nur endlich viele Elemente. Also ist M von erster Kategorie in R .

Wir beweisen zunächst die Notwendigkeit der Bedingung E^* für die Halbbeschränktheit aller Wertebereiche. Sei zu diesem Zweck M eine separable Menge, auf der jede Folge stetiger Funktionen einen halbbeschränkten Wertebereich besitzt. Wir können beim Beweise annehmen, dass M Teilmenge eines in sich kompakten Raumes R ist, [d. h. eines Raumes, in welchem jede unendliche Menge einen Häufungspunkt hat ¹⁾]. Es sei eine Folge $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots$ von Überdeckungen der Menge M vorgelegt. Wir bezeichnen mit U_k die Vereinigung aller offenen Mengen aus σ_k . Für jeden Punkt p von R bedeute $f_k(p)$ ($k = 1, 2, \dots$) den Abstand zwischen p und dem Komplement der Menge U_k ; (falls dieses Komplement leer ist, setzen wir $f_k(p) = 1$). Dadurch ist auf R eine Folge von stetigen, nicht-negativen Funktionen definiert, die auf M durchwegs von Null verschiedene Werte besitzen; es sind daher auf M auch die reziproken Funktionen definiert und stetig. Wegen der Halbbeschränktheit des Wertebereiches dieser letzteren Funktionenfolge gibt es eine Folge $\{r_n\}$ von positiven Zahlen, so dass in jedem Punkt von M für mindestens einen Index n die Ungleichung:

$$\frac{1}{f_n} \leq r_n$$

oder

$$(+)\quad f_n \geq \frac{1}{r_n}$$

besteht. Bezeichnen wir mit R_n die (abgeschlossene) Menge aller Punkte von R , in denen $(+)$ gilt, so haben wir demnach:

$$M \subset \sum_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Andererseits gilt offenbar für jedes n

$$R_n \subset U_n.$$

¹⁾ Nach einem Satz von Urysohn (Comptes Rendus, 178, 1924, S. 65) ist jede separable Menge homöomorph mit einer Teilmenge eines kompakten Raumes.

Da R_n kompakt und abgeschlossen ist, kann man nach dem Borelschen Theorem aus σ_n endlich viele offene Mengen herausgreifen, in deren Vereinigung R_n enthalten ist. Die für alle n solchartig herausgegriffenen Mengen überdecken $\sum_{n=1}^{\infty} R_n$, also erst recht M . Damit ist gezeigt, dass aus jeder beliebigen Folge von Überdeckungen der Menge M eine Auswahlüberdeckung gebildet werden kann, dass also M die Eigenschaft E^* besitzt.

Wir zeigen nun, dass die Eigenschaft E^{**} für die Beschränktheit aller Wertebereiche notwendig ist. Sei also M eine separable Menge, auf der alle Folgen stetiger Funktionen beschränkte Wertebereiche besitzen. Wir setzen M wieder als Teilmenge eines kompakten Raumes R voraus, betrachten eine beliebige Folge $\{\sigma_n\}$ von Überdeckungen von M und definieren ganz so, wie bei dem eben durchgeführten Beweis, die Mengen U_n und die Funktionen f_n . Wegen der Beschränktheit des Wertebereiches der Funktionenfolge $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ auf M gibt es eine Folge $\{r_n\}$ von positiven Zahlen, so dass die Ungleichung $(+)$ in jedem Punkt von M für fast alle n gilt. Mit R_k bezeichnen wir die Menge aller Punkte von R , in denen die Ungleichung $(+)$ für alle $n \geq k$ gilt. Die Mengen R_k sind abgeschlossen, und es ist wieder

$$M \subset \sum_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Es gilt weiter für jedes n

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n \subset U_n.$$

Nach dem Borelschen Theorem kann man daher aus σ_n endlich viele offene Mengen herausgreifen, in deren Vereinigung V_n die kompakte abgeschlossene Menge $R_1 + R_2 + \dots + R_n$ enthalten ist. Die Mengen V_n bilden eine Auswahlüberdeckung aus der Folge $\{\sigma_n\}$ und jeder Punkt von $\sum_{n=1}^{\infty} R_n$, also a fortiori von M , liegt in fast allen V_n . Mithin hat M die Eigenschaft E^{**} .

Wir zeigen nunmehr, dass die Bedingungen des Theorems hinreichend sind. Sei also M eine Menge von der Eigenschaft E^* ,

bzw. E^{**} , und es sei auf M eine Folge $\{f_n\}$ von stetigen Funktionen definiert, von der wir zeigen wollen, dass sie einen nach oben halbbeschränkten, bzw. beschränkten Wertebereich besitzt. Sei M_k^n ($n, k = 1, 2, \dots$) die in M offene Menge aller Punkte, in denen $f_k < n$ gilt. Für jedes k bilden die Mengen $M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^m, \dots$ eine Überdeckung σ_k von M . Nach Voraussetzung kann aus der Folge $\{\sigma_k\}$ eine Auswahlüberdeckung σ gebildet werden, so dass jeder Punkt von M in unendlich vielen ^{1}), bzw. in fast allen Elementen von σ enthalten ist. M. a. W. es existiert eine Folge natürlicher Zahlen $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ so dass in jedem Punkt von M die Ungleichung

$$f_k < i_k$$

für unendlich viele bzw. für fast alle k gilt. Mithin ist der Wertebereich von $\{f_n\}$ auf M halbbeschränkt bzw. beschränkt.

Bemerken wir zum Abschluss, dass die separablen Mengen von der Eigenschaft E^* auch dadurch charakterisiert sind, dass auf ihnen alle Folgen stetiger Funktionen abgeschlossene Wertebereiche besitzen, worunter folgendes gemeint ist: Ist α eine zum Wertebereich nicht gehörende Zahlenfolge, so gibt es zwei Folgen $\beta < \alpha < \gamma$ so dass kein Element μ des Wertebereiches der Ungleichung $\beta < \mu < \gamma$ genügt.

6. Die unter 2 und 5 angeführten Sätze ergeben zusammen genommen (wie man auch direkt ganz einfach bestätigen kann), dass jedes halbkompakte F_σ (so werden die Vereinigungen abzählbar vieler kompakter abgeschlossener Mengen genannt) die Eigenschaft E^{**} , also a fortiori die Eigenschaft E^* besitzen.

Von Menger wurde die Frage aufgeworfen ^{2}), ob die Eigenschaft E^* für die halbkompakten Mengen F_σ charakteristisch sei. Ich habe bewiesen, dass unter den Suslinschen Mengen (A) eines separablen vollständigen Raumes die Eigenschaft E^* ausschliesslich den halbkompakten F_σ zukommt ^{3}). Auf Grund der

^{1}) Vgl. die unter 4 erwähnte Folgerung aus der Eigenschaft E^* .

^{2}) Vgl. die zitierte Arbeit von Menger. Bei Menger wird das Problem für die Eigenschaft E (vgl. Fussnote 4) formuliert.

^{3}) Vgl. meine zitierte Arbeit, in welcher das Resultat blos für halbkompakte Mengen ausgesprochen wird. Unter Benützung des in Fussnote S. 196 erwähnten Urysohn'schen Satzes kann man leicht zeigen, dass die Einschränkung auf halbkompakte Mengen entbehrlich ist.

vorangehenden Entwicklungen sind also die halbkompakten F_σ unter den Mengen (A) dadurch charakterisiert, dass auf ihnen alle Folgen von stetigen Funktionen beschränkte Wertebereiche besitzen¹⁾.

Von Sierpiński wurde gezeigt²⁾, dass unter der Voraussetzung der Kontinuumshypothese lineare Punktmengen mit der Eigenschaft E^* existieren, die keine F_σ sind. Es entsteht nun die Vermutung, dass durch die (wahrscheinlich schärfere) Eigenschaft E^{**} die halbkompakten Mengen F_σ allgemein charakterisiert sind.

7. Wir betrachten zum Abschluss Beziehungen der vorangehenden Untersuchungen zu den sog. *Pantachieproblemen*, (d. h. zu den Problemen des Wachstums der Funktionen oder der Zahlenfolgen).

Eine vom Typus Ω aufsteigend wohlgeordnete Menge A von Zahlenfolgen

$$(*) \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_\omega < \dots < \alpha_\mu \dots | \Omega$$

(von denen also jede alle vorangehenden im Sinne der obigen Definition übertrifft), wird von Hausdorff³⁾ als eine Ω -Reihe bezeichnet. Hausdorff wirft die Frage auf ob es eine nicht beschränkte, bzw. nicht halbbeschränkte Ω -Reihe gibt, d. h. eine Ω -Reihe, die zu jeder vorgelegten Zahlenfolge eine nicht-kleinere, bzw. eine grössere enthält. (Unter der Voraussetzung der Kontinuumshypothese sind beide Fragen natürlich zu bejahen)⁴⁾. Es

¹⁾ Dieser Satz kann auch unabhängig von den Überdeckungseigenschaften bewiesen werden auf Grund des folgenden Theorems, dessen Beweis in einer demnächst erscheinenden Abhandlung dargelegt wird: Jede Menge (A) eines separablen vollständigen Raumes, (nennen wir sie M), die kein halbkompaktes F_σ ist, enthält eine in ihr abgeschlossene Teilmenge N , welche mit der Menge aller irrationalen Zahlen des Intervalls $(0,1)$ homöomorph ist. Wie wir unter 3 sahen, kann auf N eine Folge $\{f_n\}$ von stetigen Funktionen mit nicht halbbeschränktem Wertebereich definiert werden, und nach einem bekannten Satz kann jede f_n zu einer auf M stetigen Funktion erweitert werden.

²⁾ „Sur un Problème de M. Menger“, Fund. Math. VIII, S. 223.

³⁾ Vgl. die oben zitierten Abhandlungen von Hausdorff.

⁴⁾ Eine Menge A von Zahlenfolgen wird von Hausdorff (a. a. O.) als eine *Pantachia* bezeichnet, wenn je zwei Elemente von A mit einander vergleichbar sind (d. h. wenn zwischen je zwei Elementen eine der drei Grössenrelationen besteht), während jede nicht in A enthaltene Zahlenfolge mit gewissen Elementen von A nicht vergleichbar ist. Die Frage, ob es nicht

gilt nun der Satz: Damit eine nicht beschränkte Ω -Reihe existiere, ist notwendig und hinreichend, dass es separable Punktmengen¹⁾ von der Mächtigkeit $\aleph_1$ gebe ohne die Eigenschaft $E^{**2)}$.

Wir beweisen zunächst die Notwendigkeit der Bedingung. Angenommen, die Ω -Reihe (*) sei nicht beschränkt. Es kann vorausgesetzt werden, dass ihre Elemente α_μ Folgen natürlicher Zahlen sind. Jedem α_μ ordnen wir den unendlichen Kettenbruch x_μ zu, dessen Glieder mit den entsprechenden Gliedern der Folge α_μ übereinstimmen. Die Zahlen x_μ bilden eine lineare Punktmenge von der Mächtigkeit $\aleph_1$, welche die Eigenschaft E^{**} nicht besitzt. Bezeichnet man nämlich für jedes x_μ mit $f_k(x_\mu)$ das k -te Glied der Folge α_μ , so wird auf M eine Folge $\{f_n\}$ von stetigen Funktionen definiert, deren Wertebereich aus allen α_μ besteht und somit nach oben nicht beschränkt ist.

Wir nehmen zweitens an, es existiere eine separable Punktmenge M von der Mächtigkeit $\aleph_1$ ohne die Eigenschaft E^{**} . Es kann auf M eine Folge $\{f_n\}$ von stetigen Funktionen definiert werden, deren Wertebereich A nach oben nicht beschränkt ist. Denken wir uns die Elemente von A wohlgeordnet nach dem Typus Ω (ohne Rücksicht auf Grössenbeziehungen zwischen den Elementen):

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\omega, \dots, \beta_\mu, \dots | \Omega.$$

Wir definieren nun durch transfinite Induktion eine Ω -Reihe von Zahlenfolgen: Wir setzen $\alpha_1 = \beta_1$. Sei sodann μ eine Ordinalzahl $< \Omega$, und jeder Ordinalzahl $\tau < \mu$ sei bereits eine Folge reeller Zahlen α_τ zugeordnet. Als α_μ wählen wir eine Folge die grösser ist als alle α_τ und β_τ (für $\tau < \mu$). Die solcher art definierten Folgen α_μ bilden eine nach oben unbeschränkte Ω -Reihe.

beschränkte Ω -Reihen gibt, ist nach Hausdorff äquivalent mit der Frage, ob es *Pantachien* gibt, welche mit Ω konfinal sind. Wenn es eine nicht halbbeschränkte Ω -Reihe gibt, so sind sogar alle *Pantachien* mit Ω konfinal.

¹⁾ Der folgende Beweis zeigt: Wenn es solche Punktmengen gibt, dann unter ihnen auch lineare.

²⁾ Die Hausdorff'sche Frage ist also sicher im bejahenden Sinne zu beantworten, wenn die am Schluss des § 6 ausgesprochene Vermutung, dass die halbkompakten F_σ durch die Eigenschaft E^{**} charakterisiert sind, richtig ist.

In ganz analoger Weise zeigt man:

Für die Existenz von nicht halbbeschränkten Ω -Reihen ist die Existenz von separablen Punktmengen von der Mächtigkeit $\aleph_1$, welche die Eigenschaft E^* nicht besitzen, notwendig und hinreichend.

Eine nachträgliche Bemerkung.

Nennen wir mit Hausdorff¹⁾ eine metrische Menge *bedingt kompakt*, wenn jeder ihrer unendlichen Teile eine Fundamentalfolge²⁾ von Punkten enthält³⁾. Es besteht dann der Satz:

Damit eine Menge M die Eigenschaft E^{**} habe, ist notwendig und hinreichend, dass jedes topologische Bild von M Summe von abzählbar vielen bedingt kompakten Mengen sei.

Die Bedingung ist notwendig. Da die Eigenschaft E^{**} bei topologischen Abbildungen erhalten bleibt, brauchen wir nur zu zeigen, dass jede Menge M von der Eigenschaft E^{**} in abzählbar viele bedingt kompakte Mengen zerlegbar ist. Sei n eine natürliche Zahl. Die Mengen $U(p; 1/n)$ ⁴⁾, wo p alle Punkte von M durchläuft, bilden eine Ueberdeckung σ_n von M . Nach Annahme gibt es eine Auswahlüberdeckung

$$\sigma = \{U_1, U_2, U_3, \dots\}$$

aus der Folge $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$, so dass jeder Punkt von M fast allen U_i angehört. Es gilt also:

$$M \subset \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=n}^{\infty} U_m$$

Jeder Summand $\prod_{m=n}^{\infty} U_m$ ist aber bei beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ in endlich viele Teile mit Durchmessern $< \varepsilon$ zerlegbar (denn U_m

¹⁾ Vgl. Hausdorff, Mengenlehre (Berlin, 1927) S. 107.

²⁾ D. h. eine Folge von Punkten $a_1, a_2, a_3, \dots$ die zu jeder vorgegebenen positiven Zahl ε einen Punkt a_n enthält, der von jedem folgenden einen Abstand $< \varepsilon$ hat.

³⁾ Jede bedingt kompakte Menge kann als Teilmenge eines in sich kompakten Raumes angesehen werden, und umgekehrt. Vgl. Hausdorff, a. a. 0.

⁴⁾ $U(p; 1/n)$ bedeutet die Menge aller Punkte des Raumes, die vom Punkte p einen Abstand $< 1/n$ haben

ist Summe von endlich vielen Mengen mit Durchmessern $\leq 2/m$), ist folglich bedingt kompakt¹⁾.

Die Bedingung ist hinreichend. Sei nämlich M eine Menge, welche die Eigenschaft E^{**} nicht besitzt. Wir setzen M als Teilmenge eines vollständigen Raumes voraus, und betrachten eine Folge $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ von Ueberdeckungen der Menge M , zu denen es keine Auswahlüberdeckung von der mehrmals angeführten Eigenschaft gibt. Sei V_n die Summe aller Mengen der n -ten Ueberdeckung. Es gilt dann

$$M \subset \prod_{n=1}^{\infty} V_n$$

Es ist ferner evident dass jede Menge N , welche der Bedingung

$$M \subset N \subset \prod_{n=1}^{\infty} V_n$$

genügt, die Eigenschaft E^* nicht besitzt²⁾ und folglich auch keine Summe von abzählbar vielen absolut kompakten³⁾ Mengen ist.

Nun kann aber die G_δ -Menge $A = \prod_{n=1}^{\infty} V_n$ laut einem Satze von Alexandroff⁴⁾ auf eine *vollständige* Menge A^* topologisch abgebildet werden. Bei dieser Abbildung wird M in einen Teil M^* von A^* überführt, und aus dem soeben Bemerkten ergibt sich, dass es keine Menge N^* gibt, die der Bedingung:

$$M^* \subset N^* \subset A^*$$

genügt und gleichzeitig Summe von abzählbar vielen absolut kompakten Mengen ist. Daraus folgt aber, dass M^* nicht in abzählbar viele bedingt kompakte Mengen zerfallen kann, denn jede bedingt kompakte Menge $K \subset A^*$ ist in einer absolut kom-

¹⁾ Vgl. Hausdorff, a. a. 0.

²⁾ Denn die Systeme σ_n sind Ueberdeckungen auch von N , und zu jeder Auswahlüberdeckung σ aus der Folge $\{\sigma_n\}$ gibt es nach Annahme Punkte von M , also a fortiori von N , die in unendlich vielen Elementen aus σ nicht enthalten sind.

³⁾ „Absolut kompakt“ = „In sich kompakt“ = „Kompakt und abgeschlossen“.

⁴⁾ Vgl. Alexandroff, C. R. 178, S. 185.

pakten Teilmenge von A^* (nämlich in der abgeschlossenen Hülle von K in A^*) enthalten. Damit ist unser Satz bewiesen ¹⁾.

Die (im Paragraph 6 gestellte) Frage, ob die Mengen von der Eigenschaft E^{**} mit den halbkompakten F_σ über einstimmen, kann demnach in die folgende Gestalt gebracht werden:

Ist eine Menge, die in abzählbar viele *bedingt kompakte* Mengen zerlegbar ist und diese Eigenschaft auch nach jeder topologischer Abbildung bewahrt, notwendig Summe von abzählbar vielen *absolut kompakten* Mengen?

Sur les coupures de l'espace.

Par

S. Mazurkiewicz et S. Straszewicz (Varsovie).

1. Le but de cette Note est de démontrer deux théorèmes sur les coupures de R_3 (espace Euclidien à trois dimensions). Les théorèmes en question présentent une certaine analogie avec ceux que Janiszewski avait démontrés en 1913 pour le plan Euclidien ¹⁾.

2. A tout point τ de l'intervalle $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ faisons correspondre un point $x(\tau)$ de R_3 et supposons que la fonction $x(\tau)$ est continue. Cette correspondance détermine une courbe continue $[x(\tau); \tau_1, \tau_2]$; nous l'appellerons fermée si $x(\tau_1) = x(\tau_2)$.

3. Soit $B \subset R_3$ un ensemble fermé, $[x(\tau); \tau_1, \tau_2]$ une courbe continue, fermée, dont l'image est contenue dans $R_3 - B$. Cette courbe sera dite: libre par rapport à B , s'il existe une fonction de deux variables $x(\tau, \lambda)$ déterminée et continue pour $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$ et telle que:

$$x(\tau, \lambda) \in (R_3 - B) \quad (1)$$

$$x(\tau_1, \lambda) = x(\tau_2, \lambda) \quad (2)$$

$$x(\tau, 1) = x(\tau); \quad x(\tau, 0) = x_0 = \text{constans.} \quad (3)$$

Dans le cas contraire nous dirons, que cette courbe est entrelacée avec B .

4. Un ensemble fermé $B \subset R_3$ sera dit entrelaçable, s'il existe une courbe continue fermée entrelacée avec B .

¹⁾ Es sei darauf hingewiesen, dass ein analoger Satz auch für die Eigenschaft E besteht: Eine Menge hat dann und nur dann die Eigenschaft E , wenn jedes topologische Bild von ihr Summe ist einer Folge M von Mengen, deren Durchmesser gegen 0 konvergieren.

¹⁾ Sur les coupures du plan faites par les continus. Prace mat.-fiz. T. 26. p. 11—63.