Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen *(A)*.

Von

W. Hurewicz (Amsterdam).

Nach einem bekannten Ergebnis der Punktmengenlehre, dem sogenannten *Youngschen Satz* ist in einem vollständigen metrischen Raum [1]) jede in sich dichte Menge G_δ [2]) mindestens von der Mächtigkeit des Kontinuums (falls der Raum separabel ist, genau von der Mächtigkeit des Kontinuums) [3]). Berücksichtigt man, dass jede relativ abgeschlossene Menge selbst ein G_δ ist, so erhält man den Satz: *Ist die Menge M ein absolutes G_δ* [4]), *so ist jede in M perfekte*, d. h. in M abgeschlossene und insichdichte *Teilmenge von M nicht-abzählbar* (sondern mindestens von der Mächtigkeit des Kontinuums).

Die *Umkehrung* dieses Satzes, die Behauptung nämlich, dass jede Menge, die keinen in ihr perfekten abzählbaren Teil enthält, notwendig ein absolutes G_δ ist, gilt, wie wir sehen werden, in der vollen Allgemeinheit nicht, erweist sich indessen als richtig, wenn man sich auf den Bereich der *Mengen $C(A)$*, d. h. der zu Souslinschen Mengen (A) komplementären Mengen beschränkt (wobei der

[1]) Wegen der Terminologie vgl. Hausdorff, Mengenlehre (1927) (im folgenden als „Mengenlehre" zitiert).

[2]) Dabei treffen wir ein für allemal die Vereinbarung, dass die leere Menge zu den in sich dichten Mengen *nicht* gezählt wird.

[3]) Vgl. Mengenlehre, S. 138.

[4]) Unter den absoluten G_δ versteht man die Mengen G_δ in vollständigen Räumen (vgl. Mengenlehre, S. 136). Die absoluten G_δ sind nichts anderes als topologische Bilder der vollständigen Räume (vgl. Alexandroff, Comptes Rendus 178 S. 185—187, ferner Hausdorff, Fund. Math. 6., S. 146—148)

zugrundegelegte Raum als vollständig und separabel vorausgesetzt wird). *Unter den Mengen $C(A)$*, insbesondere also unter den *Borelschen Mengen* eines vollständigen separablen Raumes sind die *Mengen G_δ durch die Abwesenheit von relativ-perfekten abzählbaren Teilen vollständig charakterisiert* [1]).

Neben diesem Hauptergebnis werden im folgenden noch einige andere Sätze über Mengen (A), bzw. über ihre Komplemente bewiesen.

Als ein wichtiges Hilfsmittel werden sogen. „Häufungssysteme" (d. h. Systeme von abzählbar vielen in einer bestimmten unten präzisierten Weise geordneten Punkten) verwendet, die von mir bereits gelegentlich einer früheren Untersuchung eingeführt wurden [2]) Mit der Definition und den wichtigsten Eigenschaften der Häufungssysteme befassen sich die nächsten drei Paragraphen.

1. Häufungssysteme. Im metrischen Raume R sei ein Punkt p gegeben, ferner eine gegen ihn konvergierende Folge von paarweise verschiedenen Punkten $p_1, p_2, p_3, \ldots$:

$$p = \lim_{n=\infty} p_n; \quad p_r \neq p_s \ (r \neq s)$$

Es sei sodann für jede Nummer n eine gegen den Punkt p_n konvergierende Folge aus paarweise verschiedenen Punkten $p_{n,1}, p_{n,2}, p_{n,3}, \ldots$ definiert, und ebenso sei weiter jedem Indizespaar (n_1, n_2) eine Punktfolge $p_{n_1, n_2, m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ zugeordnet, so dass $p_{n_1, n_2, r} \neq p_{n_1, n_2, s}$ für $r \neq s$ und $p_{n_1, n_2} = \lim\limits_{m=\infty} p_{n_1, n_2, m}$. Allgemein, es sei zu jedem endlichen System natürlicher Zahlen $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ein Punkt $p_{n_1, n_2, \ldots n_k}$ bestimmt gemäss den Bedingungen:

$$p_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \lim_{m=\infty} p_{n_1, n_2, \ldots, n_k, m}; \quad p_{n_1, n_2, \ldots, n_k, r} \neq p_{n_1, n_2, \ldots, n_k, s} \quad (r \neq s).$$

Das System aller Punkte $p_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ (den Punkt p inbegriffen) nennen wir ein *Häufungssystem*. Aus der Definition folgt unmittelbar, dass Häufungssysteme *in jedem Raum, der einen insichdichten Bestandteil enthält, gebildet werden können*. Eine Punktfolge von der Gestalt

$$p_{n_1}, \ p_{n_1, n_2}, \ p_{n_1, n_2, n_3}, \ldots, \ p_{n_1, n_2, n_k}, \ldots$$

heisst eine *Grundfolge* des Häufungssystems.

[1]) Dieser Satz wurde von mir (ohne ausführlichen Beweis) bereits in Math. Zeitschr. 54, S. 421, Fussnote [35]) ausgesprochen.

[2]) Vgl. die sub [5]) zitierte Abhandlung, S. 419.

Die Gesamtheit aller Punkte des gegebenen Häufungssystems σ, als gewöhnliche Punktmenge aufgefasst (wobei also von der Indizesbezeichnung der Punkte abgesehen wird) bezeichnen wir mit $M(\sigma)$ und betrachten die Gesamtheit aller *Häufungspunkte* dieser Menge. Das System σ nennen wir *normal*, wenn jeder *Häufungspunkt* der Menge $M(\sigma)$ entweder in $M(\sigma)$ selbst liegt, oder *Grenzpunkt einer konvergenten Grundfolge von* σ ist, wenn m. a. W. die Menge $M(\sigma)$ abgeschlossen wird nach Adjungierung der Grenzpunkte aller konvergenten Grundfolgen [1]). Wir wollen nun einige hinreichende Bedingungen für die Normalität der Häufungssysteme aufstellen.

2. Bedingungen für normale Häufungssysteme. Sei ein Häufungssystem $\sigma = \{p_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ gegeben. Bezeichnen wir für jedes Indizessystem $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ mit $M_{m_1, m_2, \ldots, m_k}(\sigma)$ die Menge, bestehend aus dem Punkt $p_{m_1, \ldots, m_k}$ und aus den Punkten

$$p_{m_1, m_2, \ldots, m_k, i_1, i_2, \ldots, i_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ i_1, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots);$$

$\delta_{m_1, m_2, \ldots, m_k}(\sigma)$ sei der Durchmesser dieser Menge. Dann gilt:

I. Für die Normalität des Häufungssystems σ ist das gleichzeitige Bestehen der folgenden Bedingungen hinreichend:

1) Für jedes endliche Indizessystem $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ist

$$\lim_{m=\infty} \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k, m} = 0.$$

2) Für jede unendliche Folge natürlicher Zahlen $\{n_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ist

$$\lim_{k=\infty} \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = 0.$$

Beweis. Mit Rücksicht auf die Beziehungen:

$$p_{n_1, \ldots, n_k} = \lim_{m=\infty} p_{n_1, \ldots, n_k, m}\,;\ p_{n_1, \ldots, n_k, m} \subset M_{n_1, \ldots, n_k, m}$$

(wo zur Abkürzung $M_{n_1, \ldots, n_k}$ statt $M_{n_1, \ldots, n_k}(\sigma)$ geschrieben wird) hat jede Umgebung des Punktes $p_{n_1, \ldots, n_k}$ gemeinsame Punkte mit allen Mengen $M_{n_1, \ldots, n_k, m}$ für hinreichend grosse Werte von m. Nach voraussetzung 1) müssen dann in jeder Umgebung von $p_{n_1, \ldots, n_k}$ alle

[1]) Ein und dasselbe Häufungssystem σ kann als Häufungssystem in verschiedenen metrischen Räumen betrachtet werden (z. B. kann die Menge $M(\sigma)$ als Raum zugrundegelegt werden). Aus der Definition der Normalität geht hervor, das für diese Eigenschaft nicht nur die Struktur des Häufungssystems selbst, sondern überdies noch die Eigenschaften des zugrundegelegten Raumes massgebend sind. Beispielweise ist jedes beliebige Häufungssystem σ normal, wenn man als Raum die Menge $M(\sigma)$ betrachtet.

Mengen $M_{n_1, \ldots, n_k, m}$ von einem gewissen Index m an *vollständig enthalten* sein. Es gilt m. a. W.

$$(') \qquad p_{n_1, \ldots, n_k} = \lim_{m=\infty} M_{n_1, \ldots, n_k, m}$$

und insbesondre

$$('') \qquad p = \lim_{m=\infty} M_m.$$

Sei nun q ein *nicht zu* $M(\sigma)$ *gehörender* Häufungspunkt von $M(\sigma)$. Wir haben zu zeigen, dass gegen q eine Grundfolge von σ konvergiert.

Nach Annahme ist q Grenzpunkt einer Folge:

$$(\dagger) \qquad p_{n_1^1, n_2^1, \ldots, n_{k_1}^1},\ p_{n_1^2, n_2^2, \ldots, n_{k_2}^2}, \ldots,\ p_{n_1^\Lambda, n_2^\Lambda, \ldots, n_{k_\Lambda}^\Lambda}, \ldots$$

Die Zahlen n_1^Λ können mit wachsendem Λ nicht ins unendliche wachsen, denn das Λ-te Element in $(\dagger)$ ist in der Menge $M_{n_1^\Lambda}$ enthalten, und die Beziehung $\lim\limits_{\Lambda=\infty} n_1^\Lambda = \infty$ hätte daher (nach $('')$) zur Folge: $q = \lim\limits_{\Lambda=\infty} M_{n_1^\Lambda} = p$, im Widerspruch zur Voraussetzung, q liege ausserhalb der Menge $M(\sigma)$. Damit ist gezeigt, dass es eine Zahl n_1^0 geben muss, so dass für unendlich viele Werte von Λ

$$(*) \qquad n_1^\Lambda = n_1^0$$

gilt. In ganz derselben Weise zeigen wir weiter, dass es unter denjenigen Indizes Λ, für die $(*)$ erfüllt ist, unendlich viele gibt, für die die Zahl n_2^Λ einen festen (von Λ unabhängigen) Wert, etwa den Wert n_2^0 besitzt; sonst würde nämlich die Teilfolge von $(\dagger)$, welche den die Relation $(*)$ befriedigenden Nummern Λ entspricht, mit Rücksicht auf $(')$ gegen $p_{n_1^0}$ konvergieren, und wir hätten demzufolge $q = p_{n_1^0}$, was nach Annahme unmöglich ist.

Setzen wir jetzt voraus, es liegen bereits k natürliche Zahlen $n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0$ vor, so dass für unendlich viele Werte von Λ, etwa für die Werte $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$, die k Gleichungen

$$(**) \qquad n_1^\Lambda = n_1^0,\ n_2^\Lambda, = n_2^0, \ldots,\ n_k^\Lambda = n_k^0$$

bestehen. Wir sehen wiederum, dass die Beziehung $\operatorname{Lim}\limits_{m=\infty} n_{k+1}^{\Lambda_m} = \infty$ nicht gelten kann (sonst hätte die den Nummern Λ_l entsprechende Teilfolge von $(\dagger)$ den zu $M(\sigma)$ gehörenden Punkt $p_{n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0}$ zum Grenzpunkt [1]). Folglich muss es unter den Zahlen Λ_l unendlich

[1]) Aus demselben Grunde kann es auch nicht vorkommen, dass es unter den den Nummern $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$ entsprechenden Gliedern der Folge $(\dagger)$ nur endlich viele

viele geben, für die neben den Relationen (**) noch die Gleichung:

$$n_{k+1}^{\Delta} = n_{k+1}^{0},$$

erfüllt ist, wo n_{k+1}^{0} eine von Δ unabhängige Zahl bedeutet.

In dieser Weise fortfahrend, definiert man eine unendliche Folge natürlicher Zahlen n_k^0 $(k = 1, 2, \ldots)$, so dass es für jedes k in der Folge (†) unendlich viele Punkte gibt, die der Menge $M_{n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0}$ angehören. In jeder Umgebung von q liegen also für beliebiges k Punkte aus $M_{n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0}$. Daraus ergibt sich nach Voraussetzung 2):

$$q = \lim_{m=\infty} M_{n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0},$$

und somit (da $p_{n_1^0, \ldots, n_k^0} \subset M_{n_1^0, \ldots, n_k^0}$):

$$q = \lim_{m=\infty} p_{n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0}$$

Also ist q tatsächlich Grenzpunkt einer Grundfolge von σ, w. z. b. w.

Aus dem bewiesenen ziehen wir eine Folgerung: Es sei jedem System natürlicher Zahlen $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ eine reelle positive Zahl $r_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ zugeordnet, so dass folgende Bedingungen erfüllt seien: 1) Bei beliebig gewählten Werten für $n_1, \ldots, n_k$ gilt $\lim\limits_{m=\infty} r_{n_1, \ldots, n_k, m} = 0$; 2) für jede unendliche Indizesfolge $\{n_i\}$ ist $\lim\limits_{k=\infty} r_{n_1, \ldots, n_k} = 0$. Diese Bedingungen befriedigt beispielweise das System der Zahlen $r_{n_1, \ldots, n_k} = \dfrac{1}{1 + \prod\limits_{i=1}^{k} n_i}$. Aus satz I. ergibt sich sofort, dass jedes Häufungssystem mit der Eigenschaft: $\delta_{n_1, \ldots, n_k}(\sigma) < r_{n_1, \ldots, n_k}$ normal ist. Wir sehen also:

II. *Bei geeigneter Wahl der Zahlen $r_{n_1, \ldots, n_k}$ ist jedes Häufungssystem σ, das die Beziehungen*

$$\delta_{n_1, \ldots, n_k}(\sigma) < r_{n_1, \ldots, n_k}$$

erfüllt, normal.

3. Restsysteme. Es sei ein Häufungssystem $\sigma = \{p_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ gegeben. Wir wollen aus σ durch Tilgung gewisser Elemente neue Häufungssysteme herleiten.

gibt, die mit mehr als k Indizes versehen sind. (Wäre dies der Fall, so müsste der Punkt $p_{n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0}$ unendlich viele Male in der Folge (†) auftreten) und es wäre wiederum $q = p_{n_1^0, \ldots, n_k^0}$.

Wir setzen $p' = p$; ferner wählen wir eine ganze Zahl $m_0 \geqq 0$ und setzen für $n = 1, 2, \ldots$:

$$(') \qquad p'_n = p_{n+m_0}.$$

Sodann bilden wir für jedes natürliche n aus der gegen p'_n konvergierenden Punktfolge $p_{n+m_0, 1}, p_{n+m_0, 2}, p_{n+m_0, 3}, \ldots$, eine Restfolge [1]) $p'_{n, 1}, p'_{n, 2}, p'_{n, 3}, \ldots$ Es ist also:

$$p'_{n, i} = p_{n+m_0, i+m_n} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

wo m_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ganze nicht-negative Zahlen bedeuten.

Allgemein beim k-ten Schritte des Verfahrens wird jedem $(k-1)$-gliedrigen Indizeskomplex $(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1})$ eine ganze Zahl $m_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}} \geqq 0$ zugeordnet, und es wird definiert:

$$('') \qquad p'_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k} = p_{n_1+m_0, n_2+m_{n_1}, n_3+m_{n_1, n_2}, \ldots, n_k+m_{n_1, \ldots, n_{k-1}}}.$$

Die in dieser Weise definierten Punkte $p_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ bilden in ihrer Gesamtheit ein neues Häufungssystem σ', das aus einem Teil der Punkte des ursprünglichen Häufungssystems σ besteht (wobei von einer Punktfolge von der Gestalt:

$$p_{n_1, \ldots, n_k, 1}, \; p_{n_1, \ldots, n_k, 2}, \ldots, \; p_{n_1, \ldots, n_k, m}, \ldots$$

entweder gar kein Punkt, oder eine ganze Restfolge in das System σ' aufgenommen wird). Wir nennen σ' ein *Restsystem* von σ. Es gelten folgende evidente Sätze:

Ist σ' ein Restsystem von σ und σ'' ein Restsystem von σ', so ist σ'' ein Restsystem auch von σ. (Die Bildung von Restsystemen ist eine transitive Operation).

Ist das Häufungssystem σ' ein Restsystem von σ, so ist jede Grundfolge von σ' zugleich eine Grundfolge von σ.

Aus der Definition des Restsystems ergibt sich ferner unmittelbar: Ist irgendwie ein System reeller positiver Zahlen $\{r_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ gegeben $(k = 1, 2, \ldots; n_1, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots)$, so kann man zu jedem beliebigen Häufungssystem $\sigma = \{p_{n_1, \ldots, n_k}\}$ ein Restsystem $\sigma' = \{p'_{n_1, \ldots, n_k}\}$ bilden, so dass, wenn für zwei Punkte p und q mit $\overline{p, q}$ ihr Abstand bezeichnet wird, die Ungleichungen gelten:

$$(*) \qquad \overline{p'_{n_1, \ldots, n_k, m}, \; p'_{n_1, \ldots, n_k}} < r_{n_1, \ldots, n_k} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

[1]) Unter einer Restfolge der gegebenen Folge $\{p_n\}$ (von Punkten, oder abstrakten Elementen) verstehen wir eine Folge $p_m, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots$

Aus dieser Bemerkung schliessen wir weiter:

Bei vorgegebenem System positiver Zahlen $\{r_{n_1,\dots,n_k}\}$ existiert zu jedem Häufungssystem σ ein Restsystem σ', so dass unter Beibehaltung der Bezeichnung des vorigen Paragraphen:

$$\delta_{n_1,\dots,n_k}(\sigma') < r_{n_1,\dots,n_k}$$

gilt.

Sei in der Tat $r'_{n_1,\dots,n_k}$ die kleinste unter den k Zahlen

$$r_{n_1},\ r_{n_1,n_2},\dots,\ r_{n_1,n_2,\dots,n_k}.$$

Wir bestimmen das System σ' in der Weise, dass die Beziehungen (*) gelten, wenn man darin $r_{n_1,\dots,n_k}$ durch $\frac{r'_{n_1,\dots,n_k}}{2^{k-1}}$ ersetzt. Dann haben wir für $i<k$ nach der „Dreiecksungleichung“:

$$\overline{p'_{n_1,\dots,n_i},\ p'_{n_1,\dots,n_i,\dots,n_k}} \leqq \sum_{j=i}^{k-1} \overline{p'_{n_1,\dots,n_j},\ p'_{n_1,\dots,n_j,n_{j+1}}} \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=i}^{k-1} \frac{r'_{n_1,\dots,n}}{2^{j+1}} \leqq r_{n_1,\dots,n_i} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} 1/2^{j+1} \leqq \frac{r_{n_1,\dots,n_i}}{2}.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt aber sofort, dass die Durchmesser $\delta_{n_1,\dots,n_i}$ der Mengen $M_{n_1,\dots,n_i}(\sigma')$ kleiner sind als die Zahlen $r_{n_1,\dots,n_i}$.

Mit Rücksicht auf den Satz II des vorigen Paragraphen können wir jetzt das folgende fundamentale Theorem aussprechen:

Theorem. *Jedes Häufungssystem enthält ein normales Restsystem.*

Bemerkung. Es gilt, wie der vorangehende Beweis zeigt, sogar die schärfere Behauptung: Zu jedem Häufungssystem σ existiert ein Restsystem σ', so dass *jedes Restsystem von σ' normal ist.*

Ein zweiter wichtiger Satz über Restsysteme (den wir in § 8 gebrauchen werden) besagt:

In einem vollständigen Raum gibt es zu jedem Häufungssystem σ ein Restsystem σ' mit den folgenden Eigenschaften:

1) *Jede Grundfolge*

(a) $$p'_{n_1},\ p'_{n_1,n_2},\dots,\ p'_{n_1,n_2,\dots,n_k},\dots$$

von σ' ist konvergent.

2) *Ordnet man dem Grenzpunkt der Folge* (a) *den unendlichen Kettenbruch* $\frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\frac{1|}{|n_3}+\dots$ *zu, so erhält man eine topologische (d. h. ein-eindeutige und umkehrbar stetige) Abbildung zwischen der Menge aller irrationalen Zahlen des Intervalls* (0, 1) *einerseits und der Menge der Grenzpunkte sämtlicher Grundfolgen von σ' anderseits* [1]).

Wir bilden das System σ' in der folgenden Weise: Wir wählen zunächst die Zahl m_0 so gross, dass die Punkte

$$p'_n = p_{n+m_0}$$

sämtlich von dem Punkte $p'=p$ verschieden sind. (Eine solche Zahl m_0 gibt es sicher, denn nach der Definition des Häufungssystems sind keine zwei von den Punkten p_n identisch, also kann höchstens einer von ihnen mit dem Punkt p koinzidieren). Dann ist keiner der Punkte p'_n Häufungspunkt der Folge $\{p'_n\}$ (denn p ist der einzige Häufungspunkt dieser Folge). Infolgedessen können wir zu jedem p'_n eine Umgebung U_n bestimmen, so dass je zwei dieser Umgebungen samt ihren Begrenzungen fremd sind; dabei dürfen wir die Durchmesser dieser Umgebungen kleiner als 1 annehmen:

$$p'_n \subset U_n;\quad \overline{U}_n . \overline{U}_m = 0;\quad \delta(U_n) < 1\ ^{2)}.$$

Sei jetzt $k>1$, und angenommen, es seien bei der Bildung des Restsystems die ersten $k-1$ Schritte bereits ausgeführt; es liegen also für $i<k$ die Punkte

(″) $$p'_{n_1,\dots,n_i} = p_{n+m_0,\, n_2+m_{n_1},\dots,\, n_i+m_{n_1,\dots,n_{i-1}}}$$

vor. Sei ferner jedem Indizessystem $(n_1,\dots,n_i)$, wo $i<k$, eine offene Menge $U_{n_1,\dots,n_i}$ zugeordnet, so dass folgende Beziehungen bestehen.

(α) $$p'_{n_1,\dots,n_i} \subset U_{n_1,\dots,n_i}$$

(β) $$U_{n_1,\dots,n_{i-1},n_i} \subset U_{n_1,\dots,n_{i-1}}$$

(γ) $$\delta(U_{n_1,\dots,n_i}) < 1/i$$

[1]) In nicht volständigen Räumen gilt der Satz *nicht*. Nehmen wir beispielweise als Raum die Menge der rationalen Zahlen des Intervalls 0, 1, und setzen wir $p_{m_1,\dots,n_k} = \frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\dots+\frac{1|}{|n_k}$, so konvergiert jede Grundfolge des Häufungssystems $\sigma=\{p_{m_1,\dots,n_k}\}$ gegen eine irrationale Zahl des Intervalls (0, 1), und entsprechendes wird auch für jedes Restsystem von σ gelten; also kann für kein Restsystem von σ die Bedingung (1) erfüllt sein.

[2]) $\overline{U}$ bedeutet die abgeschlossene Hülle von U.

$$(\delta) \qquad \overline{U_{n_1,\ldots,n_{i-1},n_i}} \cdot \overline{U_{n_1,\ldots,n_{i-1},n_i'}} = 0 \quad (n_i \neq n_i').$$

Indem wir jetzt in den Formeln (″) für $i=k$ die Zahlen $m_{n_1,\ldots,n_k}$ hinreichend gross wählen, bestimmen wir die Punkte $p'_{n_1,\ldots,n_k}$ in der Weise, dass alle Punkte der Folge

$$p'_{n_1,\ldots,n_{k-1},1},\ p'_{n_1,\ldots,n_{k-1},2},\ldots,\ p'_{n_1,\ldots,n_{k-1},m},\ldots$$

in der Umgebung $U_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$ ihres Grenzpunktes $p'_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$ liegen, und vom letzten Punkte sämtlich verschieden sind. Dann lassen sich, wie unmittelbar ersichtlich, offene Mengen $U_{n_1,\ldots,n_k}$ angeben, derart, dass die obenstehenden Beziehungen (α)—(δ) bestehen bleiben, wenn man darin $i=k$ setzt. Das Verfahren kann also ad infinitum fortgesetzt werden und liefert schliesslich ein Restsystem $\sigma' = \{p'_{n_1,\ldots,n_k}\}$, von dem wir nunmehr zeigen wollen, dass es die Bedingungen 1) und 2) befriedigt.

1) Nach den Beziehungen (α) und (β) liegen alle Punkte der Grundfolge

$$(\mathrm{a}) \qquad p'_{n_1},\ p'_{n_1,n_2},\ldots,\ p'_{n_1,n_2,\ldots,n_k},\ldots$$

vom i-ten angefangen, innerhalb der Menge $U_{n_1,\ldots,n_i}$, deren Durchmesser nach (γ) kleiner ist als $1/i$. Demnach ist die Folge (a) eine „Cauchysche Folge" und konvergiert daher im vollständigen Raum R. Ueberdies erhalten wir für jedes i, wenn wir mit $p'_{n_1,\ldots,n_i,\ldots}$ den Grenzpunkt von (a) bezeichnen:

$$(\mathrm{b}) \qquad p'_{n_1,\ldots,n_i,\ldots} \subset U_{n_1,\ldots,n_i}.$$

Die Bedingung 2) kann man auch folgendermassen formulieren:

2′) Wird jedem Index Λ $(\Lambda = 1, 2, \ldots)$ irgendwie eine Folge natürlicher Zahlen

$$n_1^{(\Lambda)},\ n_2^{(\Lambda)},\ldots,\ n_k^{(\Lambda)},\ldots$$

zugeordnet, so besteht für eine Folge $\{n_i\}$ die Limesbeziehung

$$(\mathrm{v}) \qquad p'_{n_1,n_2,\ldots,n_i,\ldots} = \lim_{\Lambda=\infty} p'_{n_1^{(\Lambda)},n_2^{(\Lambda)},\ldots,n_i^{(\Lambda)}}$$

dann und nur dann, wenn für jedes i

$$(\mathrm{v,\ v}) \qquad n_i^{(\Lambda)} = n_i$$

gilt, sobald Λ hinreichend gross ist.

Um nachzuweisen, dass die Beziehungen (v) und (v, v) tatsächlich äquivalent sind, setzen wir der Kürze halber

$q = p'_{n_1,\ldots,n_i,\ldots}$ und $q^{(\Lambda)} = p'_{n_2^{(\Lambda)},\ldots,n_2^{(\Lambda)}}$. Wenn nun die Beziehungen (vv) gelten, so ist nach (b) der Punkt $q^{(\Lambda)}$ bei beliebig gegebenem i für hinreichend grosse Werte von Λ in der Menge $U_{n_1,\ldots,n_i}$ enthalten; da in derselben Menge, deren Durchmesser $< 1/i$ ist auch der Punkt q liegt, haben wir die Limesrelation (v).

Wenn hingegen die Beziehungen (vv) nicht erfüllt sind, so betrachten wir der kleinsten Index i, für den

$$(\mathrm{vvv}) \qquad n_i^{(\Lambda)} \neq n_i$$

für unendlich viele Λ gilt. Es ist für fast alle Λ (etwa für $\Lambda > \Lambda_0$) $q^{(\Lambda)} \subset U_{n_1^{(\Lambda)},\ldots,n_{i-1}^{(\Lambda)},n_i^{(\Lambda)}} = U_{n_1,\ldots,n_{i-1},n_i^{(\Lambda)}}$. Mit Rücksicht auf (δ) liegt $q^{(\Lambda)}$ für unendlich viele Λ (nämlich für alle diejenigen $\Lambda > \Lambda_0$, für welche (vvv) gilt) ausserhalb der Umgebung $U_{n_1,\ldots,n_i}$ von q. Folglich kann q kein Grenzpunkt der Folge $\{q^{(\Lambda)}\}$ sein.

Bemerkung. Das den Bedingungen 1) und 2) genügende Restsystem, dessen Existenz wir soeben nachgewiesen haben, kann stets als *normal* angenommen werden: wir können nämlich das ursprüngliche Häufungssystem σ durch ein Restsystem σ' ersetzen, so dass jedes Restsystem von σ' normal ist (vgl. Bemerkung zum Theorem auf S. 84) und erst auf dieses Häufungssystem σ' das soeben bewiesene Theorem anwenden.

4. Anwendungen der Häufungssysteme. Baire'sche Kategorie und relativ perfekte Mengen. Wir setzen nun unsere bisherige Ueberlegungen in Beziehung zu der in der Einleitung gestellten Frage nach der Existenz von relativ-perfekten abzählbaren Teilen in einer gegebenen Punktmenge M. Als Grundlage für weitere Entwicklungen dient das Theorem:

Theorem. *Damit die Menge M eine in M perfekte abzählbare Teilmenge enthalte, ist hinreichend*[1]*, dass es ein nur aus Punkten von M bestehendes Häufungssystem σ gebe von der Art, dass keine Grundfolge von σ gegen einen Punkt von M konvergiert.*

Bilden wir nämlich zu σ ein normales Restsystem σ' dann genügt auch σ' unserer Voraussetzung. Die Punkte von σ' bilden eine abzählbare insichdichte Teilmenge von M. Ferner ist diese Teilmenge in M abgeschlossen, denn jene ihrer Häufungspunkte, die ihr nicht angehören, sind der Normalität von σ' zufolge durchwegs Limespunkte der Grundfolgen von σ', kommen also nach Voraussetzung in M nicht vor.

[1]) Wir werden übrigens bald sehen, dass die Bedingung auch notwendig ist.

Wir gehen zu einigen einfachen Anwendungen dieses Theorems über.

Eine Menge M heisst bekanntlich von erster Kategorie in Bezug auf eine Obermenge $N \supset M$, wenn sie Summe ist von abzählbar vielen in N nirgends dichten Mengen. Sonst heisst sie von zweiter Kategorie in Bezug auf N. Eine Menge, die von erster (bzw. von zweiter) Kategorie in Bezug auf sich selbst ($M = N$) ist, werden wir schlechthin von erster (bzw. von zweiter) Kategorie nennen [1]. Es besteht nun der Satz:

Jede Menge von erster Kategorie enthält eine in ihr perfekte abzählbare Menge.

Sei nämlich

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n,$$

wo die Mengen M_n in M nirgends dicht sind. Für jedes n ist also die Menge $M - \overline{M}_n$ in M dicht, und da M insichdicht [1]) ist, hat $M - \overline{M}_n$ jeden Punkt von M zum Häufungspunkt. Um unsere Behauptung zu beweisen, genügt es in M ein Häufungssystem anzugeben, dessen keine Grundfolge in M (d. h. gegen einen Punkt von M) konvergiert. Nehmen wir zu dem Zwecke einen willkürlichen Punkt p von M. Wie oben bemerkt, ist p Häufungspunkt von $M - \overline{M}_1$ und daher Grenzpunkt einer Folge von untereinander verschiedenen Punkten aus $M - \overline{M}_1$:

$$p = \lim_{n=\infty} p_n; \quad p_n \subset M - \overline{M}_1.$$

Zu jedem p_n bestimmen wir eine Umgebung U_n, so dass

$$\overline{U}_n \,.\, M_1 = 0$$

Sei $k > 1$, und nehmen wir an, es sei bereits jedem $(k-1)$-gliedrigen Indizessystem $(n_1, \ldots n_{k-1})$ ein Punkt $p_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$, sowie eine Umgebung $U_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$ dieses Punktes zugeordnet.

[1]) Jede Menge von erster Kategorie ist in sich dicht. Wenn nämlich die Menge M einen isolierten Punkt p enthält, so ist p in keiner in M nirgends dichten Teilmenge N von M enthalten, denn jeder Punkt einer solchen Teilmenge ist Häufungspunkt von $M - N$ also jedenfalls Häufungspunkt von M. Daraus geht hervor, dass M nicht dargestellt werden kann als Summe von nirgends dichten Teilmengen, geschweige denn, als Summe von abzählbar vielen solchen Mengen.

Beim k-ten Schritt der Konstruktion bilden wir zu jedem Punkt $p_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$ eine gegen ihn konvergierende Folge von paarweise verschiedenen Punkten

$$p_{n_1,\ldots,n_{k-1},m} \subset (M - \overline{M}_k) \,.\, U_{n_1,\ldots,n_{k-1}} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Eine solche Folge existiert sicher, weil $p_{n_1,\ldots,n_k}$ wie überhaupt jeder Punkt von M, Häufungspunkt von $M - \overline{M}_k$ ist (und folglich auch von $(M - \overline{M}_k) \,.\, U_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$). Zu jedem der neugebildeten Punkte $p_{n_1,\ldots,n_k}$ wählen wir eine Umgebung $U_{n_1,\ldots,n_k}$ mit der Eigenschaft

$$(1) \qquad p_{n_1,\ldots,n_k} \subset U_{n_1,\ldots,n_k} \subset U_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$$

$$(2) \qquad M_k \,.\, \overline{U_{n_1,\ldots,n_k}} = 0 \text{ [1]}.$$

In dieser Weise ad infinitum fortfahrend, erhalten wir ein Häufungssystem $\sigma' = \{p_{n_1,\ldots,n_k}\}$ aus Punkten von M, sowie ein System von offenen Mengen $\{U_{n_1,\ldots,n_k}\}$. In jeder Grundfolge

$$(') \qquad p_{n_1},\ p_{n_1,n_2},\ldots,\ p_{n_1,n_2,\ldots,n_k},\ldots$$

liegen mit Rücksicht auf (1) alle Punkte, vom k-ten angefangen, in der Menge $U_{n_1,\ldots,n_k}$. Folglich liegen sämtliche Häufungspunkte der Folge (') (falls solche überhaupt vorhanden sind) im Durchschnitt

$$\prod_{k=1}^{\infty} \overline{U_{n_1,\ldots,n_k}},$$

und somit nach (2) ausserhalb der Menge $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = M$.

Bemerkung. Aus dem soeben durchgeführten Beweis folgt leicht, dass die am Anfang dieses Paragraphen gegebene hinreichende Bedingung für die Existenz von abzählbaren relativ-perfekten Mengen auch **notwendig** ist. Sei nämlich P ein abzählbarer relativ-perfekter Teil der Menge M. Da P eine Menge von erster Kategorie ist [2]), gibt es, wie wir soeben sahen, auf P ein Häufungssystem, das keine gegen einen Punkt von P konvergierende Grundfolge besitzt. Da P in M abgeschlossen, enthält auch M keine Limespunkte der Grundfolgen von σ.

[1]) $U_{n_1,\ldots,n_k}$ kann sicher im Einklang mit dieser Bedingung gewählt werden, weil $p_{n_1,\ldots,n_k}$ (als Punkt von $M - \overline{M}_k$) kein Häufungspunkt von M_k ist

[2]) In einer in sich dichten Menge bildet jeder Punkt eine nirgends dichte Teilmenge. Jede **abzählbare** in sich dichte Menge ist daher von erster Kategorie

Wir zeigen jetzt:

Sei M eine beliebige (metrische) Punktmenge. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

1) *Jede in M perfekte Menge ist nicht-abzählbar.*

2) *Jede in M abgeschlossene Menge ist von zweiter Kategorie* (in Bezug auf sich selbst).

3) *Jedes G_δ in M ist von zweiter Kategorie.*

Man sieht zunächst leicht, dass aus der Aussage 3) die Aussage 2) und aus der Aussage 2) die Aussage 1) folgt: man braucht nur zu berücksichtigen, dass jedes G_δ abgeschlossen ist und dass jede insichdichte Menge von zweiter Kategorie nicht-abzählbar ist.

Umgekehrt, aus 1) folgt 2); nehmen nämlich wir an, es gäbe eine in M abgeschlossene Menge N von erster Kategorie. Nach dem vorangehenden enthielte N einen relativ-perfekten abzälbaren Teil P. Da aber N in M abgeschlossen ist, ist P auch in Bezug auf M perfekt ist.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass aus 2) 3) folgt. Setzen wir voraus, es gebe in M ein G_δ von erster Kategorie G. Für die abgeschlossene Hülle $\overline{G}$ von G in M gilt die Zerlegung:

$$(\dagger) \qquad \overline{G} = G \dot{+} (\overline{G} - G).$$

Darin ist der erste Summand nach Annahme von erster Kategorie in Bezug auf sich selbst und daher auch in Bezug auf die umfassendere Menge $\overline{G}$. Der zweite Summand ist (als das Komplement der G_δ-Menge G in der abgeschlossenen Menge $\overline{G}$) Summe von abzählbar vielen in M abgeschlossenen Mengen:

$$\overline{G} - G = \sum_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Das Komplement eines jeden F_n in $\overline{G}$ enthält die in $\overline{G}$ dichte Menge G, also ist jedes F_n in $\overline{G}$ nirgends dicht, und somit ist in $(\dagger)$ auch der zweite Summand von erster Kategorie in Bezug auf die Summe $\overline{G}$. Folglich ist die in M abgeschlossene Menge $\overline{G}$ von erster Kategorie (in Bezug auf sich selbst).

Die der Bedingung 2) genügenden Mengen wurden bereits von Hausdorff[1]) betrachtet und von ihm als „Mengen F_{II}" bezeichnet.

Wie am Anfang der Arbeit angekündigt wurde, sind unter den Mengen $C(A)$ eines vollständigen separablen Raumes die Mengen G_δ die einzigen Mengen für die eine der Aussagen 1), 2) oder 3) erfüllt ist.

[1]) Vgl. Mengenlehre, S. 143.

Der Beweis dieser Behauptung erfordert noch einige vorbereitende Erörterungen über Mengen F_σ, die den Gegenstand des folgenden Paragraphen bilden.

5. Einige Hilfssätze über Mengen F_σ. Seien M und N zwei in demselben metrischen Raum gelegene Mengen. Wir sagen, die Menge M sei *abgeschlossen in Bezug auf N*, wenn jeder in N enthaltene Häufungspunkt von M auch in M liegt, wenn m. a. w.

$$\overline{M} . N \subset M \text{ [1])}.$$

gilt. Dabei setzen wir in Abweichnung von der üblichen Terminologie nicht voraus, dass M eine Teilmenge von N ist. Ist M Summe von abzählbar vielen in Bezug auf N abgeschlossenen Mengen, so heisst M ein *F_σ in Bezug auf N*. Wir schreiben hierfür:

$$M \equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N).$$

Aus unseren Definitionen folgt sofort:

1) Ist M abgeschlossen bzw. ein F_σ in Bezug auf N, so auch in Bezug auf jede in N enthaltene Menge.

2) Die Summe von abzählbar vielen und der Durchschnitt von endlich vielen Mengen, deren jede ein F_σ rel. N ist, ist selbst ein F_σ in Bezug auf N.

Der Anschluss an den gewöhnlich betrachteten Fall $M \subset N$ wird durch den Satz hergestellt:

3) Die Menge M ist dann und nur dann ein F_σ in Bezug auf N, wenn sie ein F_σ in Bezug auf $M + N$ ist.

Wenn nämlich $M \equiv F_\sigma$ (rel. N) ist, so haben wir:

$$(a) \qquad M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

wo

$$(b) \qquad N . \overline{M}_n \subset M_n \quad (n = 1. 2, \ldots).$$

Aus (b) folgt:

$$\overline{M}_n . (M + N) \subset \overline{M}_n . M + M_n \subset M.$$

Anderseits ist

$$\overline{M}_n . (M + N) \supset \overline{M}_n \supset M_n.$$

Kombinieren wir die beiden letzten Formeln mit (a), so erhalten wir:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n . (M + N).$$

[1]) Vermöge dieser Definition ist die leere Menge abgeschlossen in Bezug auf jede beliebige Menge. Ferner ist M in Bezug auf N immer dann abgeschlossen, wenn $\overline{M} . N = 0$ ist.

In dieser Formel ist jeder Summand hinsichtlich $M+N$ abgeschlossen, also ist M ein F_σ in Bezug auf $M+N$. Umgekehrt, wenn dass letztere der Fall ist, ist M ein F_σ in Bezug auf N (dies ist eine unmittelbare Folgerung aus dem oben angeführten Satz (1)).

Betrachten wir jetzt neben den beiden Mengen M und N noch einen Punkt p desselben Raumes. Wir sagen, M sei *im Punkte* p ein F_σ in Bezug auf N und schreiben abgekürzt:

$$(') \qquad M \equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N;\ \text{loc } p),$$

wenn es eine Umgebung U von p gibt derart, dass

$$('') \qquad U.M \equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N)\,^{1)}.$$

(') gilt in trivialer Weise immer dann, wenn p kein Häufungspunkt von M ist.

Wir setzen für das folgende alle betrachteten Mengen als separabel voraus und beweisen den Satz:

4) Gilt (') *in allen Punkten von* N, so ist

$$M \equiv F_\sigma \ (\text{rel } N).$$

In der Tat, es gibt nach Annahme zu jedem Punkt von N eine Umgebung mit der Eigenschaft (''); mit Rücksicht auf ihre Separabilität kann die Menge N mit einer Folge solcher Umgebungen $U_1, U_2, U_3, \ldots$ überdeckt werden. Für die Summe $V = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ dieser Umgebungen ergibt sich (vgl. Satz 2)):

$$(\alpha) \qquad V.M \equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N)$$

$$(\beta) \qquad N \subset V.$$

Betrachten wir die Zerlegung:

$$M = M.V + (M - M.V)\ .$$

Der erste Summand $M.V$ ist ein F_σ in Bezug auf N; der zweite Summand ist sogar abgeschlossen in Bezug auf N, denn es gilt: $\overline{M - M.V} \subset \overline{R - V} = R - V$, und daher nach ($\beta$): $(\overline{M - M.V}).N = 0$ [2]). Also ist $M \equiv F_\sigma$ (rel. N).

[1]) Dann gilt dasselbe für jede in U enthaltene Umgebung $V \subset U$ von p. V ist nämlich als offene Menge ein F_σ in Bezug auf den Raum R und daher auch in Bezug auf $N \subset R$. Infolgedessen ist nach 2) $V.M = V.U.M$ ein F_σ hinsichtlich N.

[2]) Vgl. Fussnote auf S. 91.

Eine für das folgende sehr nützliche Verschärfung von (4) lautet:

(4') Seien M, N und U drei Mengen (desselben metrischen Raumes R), von denen die letzte (in R) offen ist. Wenn *für jeden Punkt* p *von* $U.N$

$$M \equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N;\ \text{loc } p)$$

gilt, so ist

$$U.M \equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N).$$

Analog wie beim Beweise von (4) stellen wir zuerst die Existenz einer offenen Menge V fest, so dass

$$(\alpha) \qquad V.M \equiv F_\sigma \ (\text{rel } N)$$

$$(\beta') \qquad U.N \subset V.$$

Aus (α) folgt (da U ein F_σ rel. N ist)

$$U.V.M \equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N).$$

Die Behauptung ist bewiesen, wenn wir noch zeigen:

$$U.M - U.V.M = U.(M - V.M) \equiv F_\sigma \ (\text{rel } N).$$

Nun kann die offene Menge U als Summe von abzählbar vielen (in R) abgeschlossenen Mengen dargestellt werden:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Unter Berücksichtigung von (β') bekommen wir:

$$\overline{A_n.(M - M.V)} \subset \overline{A_n.(R - V)} = A_n(R - V) \subset U.(R - V) \subset R - N.$$

Daraus folgt, dass die Menge $A_n.(M - M.V)$ in Bezug auf N abgeschlossen ist. Also ist

$$U.(M - M.V) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.(M - M.V)$$

ein F_σ rel N.

6. Charakterisierung der Mengen G_δ im Bereiche der Mengen $C(A)$ [2]). Wir gehen jetzt zum Beweise unseres Hauptsatzes über:

Theorem. *In einem separablen Raume* R [1]) *enthält jede Menge* $C(A)$ *(d. h. jede zu einer Menge* (A) *komplementäre Menge) die kein* G_δ *ist, einen in ihr perfekten abzählbaren Teil.*

[1]) Vollständigkeit wird dagegen nicht vorausgesetzt.

[2]) Die Überlegungen dieses Paragraphen finden sich im Wesentlichen bereits in meiner Arbeit in Math. Zeitschrift 24, S. 413 ff.

Sei M eine Menge (A). Es gebe also ein System abgeschlossener Mengen $A_{m_1, m_2, \ldots, m}$ $(k = 1, 2, \ldots;\ m_1, \ldots, m_k = 1, 2, \ldots)$, so dass M Summe ist aller Durchschnitte:

$$(') \qquad A_{m_1} . A_{m_1, m_2}, \ldots, A_{m_1, m_2, \ldots, m_k}, \ldots$$

wo die Zahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ unabhängig voneinander alle natürlichen Werte durchlaufen. Seien k natürliche Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ gegeben; die Summe aller derjenigen Durchschnitte $(')$, für die

$$m_1 = n_1,\ m_2 = n_2, \ldots,\ m_k = n_k$$

gilt, bezeichnen wir mit $M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Dann gilt offenbar:

$$1) \qquad M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i; \quad M_{n_1, \ldots, n_k} = \sum_{i=1}^{\infty} M_{n_1, \ldots, n_k, i}$$

$$2) \qquad M_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k} \subset M_{n_1, \ldots, n_{k-1}}$$

$$3) \qquad M_{n_1, \ldots, n_k} \subset A_{n_1, \ldots, n_k}.$$

Wir setzen jetzt voraus, M sei kein F_σ in R:

$$M \not\equiv F_\sigma \quad (\text{rel } R),$$

oder, was nach Satz (3) des vorigen Paragraphen dasselbe bedeutet:

$$M \not\equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N),$$

wo $N = R - M$ gesetzt wird. Unter dieser Annahme, welche in anderer Formulierung besagt, dass N kein G_δ in R ist, werden wir in N einen abzählbaren relativ-perfekten Teil aufweisen, indem wir in N ein Häufungssystem konstruieren, dessen keine Grundfolge innerhalb N konvergiert.

Mit Rücksicht auf Satz (4) in § 5 gibt es *in* N einen Punkt p, so dass

$$M \not\equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N;\ \text{loc } p)\ ^{1)}.$$

Wir haben dann für $n = 1, 2, \ldots$:

$$M . U(p;\ 1/n) \not\equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N),$$

wo unter $U(p;\ 1/n)$ wie üblich die Menge aller Punkte des Raumes verstanden wird, die von p um weniger als $1/n$ entfernt sind.

[1]) Diese Formel bedeutet natürlich die Negation der Beziehung: $M \equiv F_\sigma$ (rel N; loc p).

Mit Rücksicht auf $p \subset R - M$ können wir statt dessen, wenn wir noch die Bezeichnung $U'(p;\ 1/n) = U(p;\ 1/n) - p$ einführen, auch schreiben:

$$M . U'(p;\ 1/n) \not\equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N).$$

Nach 1) ist aber

$$M . U'(p;\ 1/n) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i . U'(p;\ 1/n);$$

folglich muss für einen Index i_n gelten

$$M_{i_n} . U'(p;\ 1/n) \not\equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N). \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Nach dem Ergebnis (4') der vorigen Paragraphen gibt es einen Punkt

$$p_n \subset N . U'(p;\ 1/n),$$

so dass

$$M_{i_n} \not\equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N;\ \text{loc } p_n).$$

Die vorletzte Beziehung zeigt, dass $p = \lim_{n=\infty} p_n$ und dass alle p_n von p verschieden sind. Indem wir nötigenfalls die Folge $\{p_n\}$ durch eine Teilfolge ersetzen, können wir annehmen die Punkte p_n seien paarweise verschieden.

Setzen wir jetzt voraus, es sei für ein bestimmtes k jedem Indizessystem $(n_1, \ldots, n_q)$, wo $q < k$, ein Punkt $p_{n_1, \ldots, n_q}$, sowie eine Nummer $i_{n_1, \ldots, n_q}$ zugeordnet, und es sei dabei die folgende Bedingung erfüllt:

$$(') \qquad M_{i_{n_1}, i_{n_1, n_2}, \ldots, i_{n_1, \ldots, n_{k-1}}} \not\equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N;\ \text{loc } p_{n_1, \ldots, n_{k-1}}).$$

Beim dem nächsten k-ten Schritt der Konstruktion gehen wir folgendermassen vor; Aus $(')$ erhalten wir für jedes natürliche m:

$$M_{i_{n_1}, i_{n_1, n_2}, \ldots, i_{n_1, \ldots, n_{k-1}}} . U(p_{n_1, \ldots, n_{k-1}};\ 1/m) =$$
$$= M_{i_{n_1}, i_{n_1, n_2}, \ldots, i_{n_1, \ldots, n_{k-1}}} . U'(p_{n_1, \ldots, n_{k-1}};\ 1/m) \not\equiv F_\sigma \ (\text{rel } N).$$

Nach 1) gibt es eine Nummer $i_{n_1, \ldots, n_{k-1}, m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, so dass

$$M_{i_{n_1}, i_{n_1, n_2}, \ldots, i_{n_1, \ldots, n_{k-1}}, i_{n_1, \ldots, n_{k-1}, m}} . U'(p_{n_1, \ldots, n_{k-1}};\ 1/m) \not\equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N).$$

Nach dem schon benützten Ergebnis von § 5 können wir für jedes m einen Punkt

$$p_{n_1, \ldots, n_{k-1}, m} \subset N . U'(p_{n_1, \ldots, n_{k-1}};\ 1/m)$$

wählen mit der Eigenschaft:

$$M_{i_{n_1},\dots,i_{n_1},\dots,n_{k-1},i_{n_1},\dots,n_{k-1},m} \equiv F_\sigma \quad (\text{rel } N;\ \text{loc } p_{n_1,\dots,n_{k-1},m}).$$

Es ist dann

$$p_{n_1,\dots,n_{k-1}} = \lim_{m=\infty} p_{n_1,\dots,n_{k-1},m};\quad p_{n_1,\dots,n_{k-1}} \neq p_{n_1,\dots,n_{k-1},m'} \quad (m=1,2,\dots).$$

Indem man nötigenfalls die Folge $\{p_{n_1,\dots,n_{k-1},m}\}$ $(m=1,2,\dots)$ durch eine Teilfolge ersetzt, darf man weiter annehmen:

$$p_{n_1,\dots,n_{k-1},m} \neq p_{n_1,\dots,n_{k-1},m'} \quad (m \neq m').$$

Durch unbegrenzte Fortsetzung des Verfahrens (deren Möglichkeit durch die Eigenschaft (′) gewährleistet wird) erhält man ein Häufungssystem $\sigma = \{p_{n_1,\dots,n_k}\}$, das aus lauten in N liegenden Punkten besteht. Die Beziehung (′), in der wir $k-1$ durch k ersetzen, impliziert

$$p_{n_1,\dots,n_k} \subset \overline{M_{i_{n_1},i_{n_1},n_2,\dots,i_{n_1},\dots,n_k}},$$

und daraus ergibt sich weiter nach 2) und 3) für jedes $i<k$:

$$(''')\quad p_{n_1,\dots,n_i,\dots,n_k} \subset \overline{M_{i_{n_1},i_{n_1},n_2,\dots,i_{n_1},\dots,n_i}} \subset \overline{A_{i_{n_1},i_{n_1},n_2,\dots,i_{n_1},\dots,n_i}} = A_{i_{n_1},n_1,n_2,\dots,i_{n_1},\dots,n_i}.$$

Betrachten wir eine Grundfolge

$$(*)\qquad p_{n_1},\ p_{n_1,n_2},\dots,\ p_{n_1,n_2,\dots,n_k},\dots$$

Nach (″) liegen alle Glieder dieser Folge vom k-ten angefangen in der abgeschlossenen Menge $A_{i_{n_1},i_{n_1},n_2,\dots,i_{n_1},\dots,n_k}$. Also liegt jeder Häufungspunkt von (*) in dem Durchschnitt:

$$\prod_{k=1}^{\infty} A_{i_{n_1},i_{n_1},n_2,\dots,i_{n_1},\dots,n_k} \subset M = R - N.$$

In N sind demnach keine Grenzpunkte der Grundfolgen von σ vorhanden. Damit ist (mit Rücksicht auf das Theorem von § 4) die Existenz von abzählbaren relativ perfekten Teilen der Menge N nachgewiesen.

Wenn man von dem Raum R auser der Separabilität noch die Vollständigkeit voraussetzt, so gilt, wie bereits früher bemerkt wurde, auch die umgekehrte Behauptung: Ein G_δ in einem vollständigen Raum (ein absolutes G_δ) enthält keinen relativ-perfekten abzählbaren

Teil [1]). *Unter den Mengen $C(A)$ eines vollständigen separablen Raumes* (beispielweise des Euklidischen n-dimensionalen Raumes) *sind die Mengen G_δ durch die nicht-Abzählbarheit ihrer relativ-perfekten Teile vollkommen charakterisiert.*

Ferner ergibt sich noch der folgende Satz: Enthält die Menge M des separablen Raumes R keinen relativ-perfekten abzählbaren Teil, so gibt es zu jeder M enthaltenden Menge N, deren Komplement (in R) eine Menge (A) ist, eine G_δ-Menge G mit der Eigenschaft: $M \subset G \subset N$.

Betrachten wir für einen Augenblick die Menge $R^* = M + (R-N)$ als Raum. Da das Komplement von M in R^* eine Menge (A) in R also auch in R^* ist, ist M nach dem oben bewiesenen ein G_δ in R^*. Daraus folgt, dass es eine G_δ-Menge G in R^* geben muss, deren Durchschnitt mit R^* die Menge M ergibt. Dies ist aber gleichbedeutend mit der Beziehung: $M \subset G \subset N$.

7. Ungültigkeit der Charakterisierung in der Gesamtheit aller linearen Punktmengen. Im vorigen Paragraphen wurde bewiesen, dass eine im separablen Raum gelegene Menge M eine in ihr perfekte abzählbare Teilmenge enthält, wofern die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

1) M ist eine Menge $C(A)$.
2) M ist kein G_δ.

Wir fragen jetzt, ob die erste dieser Voraussetzungen nicht entbehrt werden könnte, anders ausgedrückt, ob die durch unser Theorem gegebene Charakterisierung der Mengen G_δ, deren Gültigkeit vorläufig nur für den Bereich der Mengen $C(A)$ feststeht, nicht *allgemein* gültig ist.

Es ist leicht zu zeigen, dass diese Frage sogar unter Beschränkung auf lineare Mengen *im negativen Sinne* zu beantworten ist. Wir stützen uns dabei auf die bekannte Tatsache [2]), dass es auf der Euklidischen Geraden R_1 nicht abzählbare Punktmengen gibt, die keine (in Bezug auf R_1) perfekte Teilmengen enthalten. Sei M eine deratige „total imperfekte" Menge, N ihr Komplement (in R_1). N ist sicher kein G_δ (sonst müsste M als ein nicht-abzählbares F_σ eine perfekte Teilmenge enthalten); trotzdem ist jede in N perfekte Menge P nicht-abzählbar, denn sonst wäre die Menge $\overline{P}-P$ (als das Komplement der abzählbaren Menge P in der perfekten linearen Menge $\overline{P}$) ein in sich dichtes G_δ, enthielte daher nach dem Young'schen Satze eine (in R_1)

[1]) Für nicht vollständige Räume gilt dies natürlich im Allgemeinen nicht: Jede beliebige Menge ist ein G_δ, wenn man sie selbst als Raum betrachten.

[2]) Vgl. Bernstein, Leipziger Berichte 60 (1908) S. 329—330.

perfekte Teilmenge; dies widerspricht aber unserer Voraussetzung, denn $\overline{P}-P$ ist mit Rücksicht auf die Abgeschlossenheit von P in N eine Teilmenge von M.

Von Wichtigkeit ist die Frage, ob unsere Charakterisierung der absoluten G_δ richtig ist im Bereiche aller Mengen (A) eines vollständigen separablen Raumes (sie ist sicher richtig im Unterbereiche aller Borelschen Mengen, denn dieselben sind zugleich Mengen $C(A)$). Wäre dies der Fall, so müsste, wie der vorstehende Beweis zeigt, jede Menge $C(A)$, die kein F_σ ist, einen perfekten Teil enthalten, und die schwierige Frage nach der Mächtigkeit der Mengen $C(A)$ wäre in dem Sinne gelöst, dass jede Menge $C(A)$ entweder abzählbar ist, oder die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

Das System γ aller Mengen, die von relativ-perfekten abzählbaren Teilen frei sind, das, wie soeben nachgewiesen umfassender ist als der Bereich der absoluten G_δ, hat mit dem letzteren Bereich folgende gemeinsame Eigenschaft:

Die Summe von endlich vielen Mengen des Systems γ ergibt wieder eine Menge aus γ. Es genügt den Satz für den Fall zweier Summanden zu beweisen. Zunächst bemerken wir folgendes: Ist eine insichdichte Menge M Summe von zwei Mengen M_1 und M_2 so muss mindestens einer dieser beiden Summanden einen insichdichten Teil enthalten. Ist nämlich M_1 nicht insichdicht, so kann M_1 in M nicht dicht liegen, es gibt also einen relativ offenen Teil U von M, der ganz von M_2 ausgefüllt wird. Als ein relativ offener Teil der insichdichten Menge M ist aber U insichdicht; M_2 enthält also eine insichdichte Teilmenge.

Seien nun A und B zwei Mengen aus γ. Wäre ihre Summe $C=A+B$ keine Menge aus γ, so enthielte sie einen abzählbaren in ihr perfekten Teil P. Nach der obigen Bemerkung enthält mindestens eine der beiden Mengen $P.A$ und $P.B$ etwa die Menge $P.A$ einen insichdichten Teil; die grösste insichdichte Teilmenge von $P.A$ wäre dann ein relativ-perfekter abzählbarer Teil von $P.A$ und folglich auch von A, was nach Annahme unmöglich ist.

Es bleibt offen die Frage, ob der Durchschnitt von abzählbar vielen Mengen aus γ stets eine Menge aus γ ist (wie es bei den G_δ der Fall ist).

8. Uebergang zu Komplementen. Mengen F_σ und Mengen (A). Wir wenden uns der folgenden Fragestellung zu: Was lässt sich über eine Menge M aussagen, wenn man weiss, dass ihr Komplement

einen abzählbaren relativ perfekten Teil enthält? Damit die Frage einen Sinn habe muss der zugrundegelegte Raum gewissen einschränkenden Voraussetzungen unterworfen werden, denn sonst ist der Begriff des Komplements unbestimmt. Wir beweisen den Satz:

Enthält eine in einem vollständigen Raum R liegende Menge M einen in ihr perfekten abzählbaren Teil, so enthält das Komplement von M eine relativ abgeschlossene Teilmenge, die mit der Menge aller irrationalen Zahlen eines linearen Intervalls homöomorph ist. In kompakten Räumen gilt auch die Umkehrung.

Aus der Existenz einer in M perfekten abzählbaren Menge folgt die Existenz eines Häufungssystems auf M, das keine in M konvergente Grundfolge besitzt [1]). Wie wir im § 3 sahen, gibt es ein Restsystem σ' von σ, das erstens normal ist und zweitens die folgende Eigenschaft hat: Jede Grundfolge von σ' konvergiert (in R), und die Menge der Grenzpunkte der Grundfolgen von σ' ist mit der Menge aller irrationalen Zahlen des Intervalls $(0,1)$ — diese Menge wollen wir im folgenden mit dem Buchstaben I bezeichnen — homöomorph. Sei $M(\sigma')$ die Gesamtheit aller Punkte von σ' (als gewöhnliche Punktmenge betrachtet), und sei $G(\sigma')$ die mit I homöomorphe Menge der Grenzpunkte der Grundfolgen von σ'. Die Normalität von σ' besagt, dass

$$\overline{M(\sigma')}=M(\sigma')+G(\sigma').$$

Da $M(\sigma')\subset M$ und $G(\sigma')\subset R-M$, haben wir:

$$(R-M).\overline{M(\sigma')}=G(\sigma').$$

Diese Formel zeigt, dass $G(\sigma')$ in $R-M$ abgeschlossen ist, womit der erste Teil unserer Behauptung bewiesen ist.

Um den zweiten Teil zu beweisen, setzen wir den Raum als kompakt voraus und machen die Annahme, es gebe eine in $R-M$ abgeschlossene Menge N, die mit I homöomorph ist. $\overline{N}-N=\overline{N}.M$ ist eine in M abgeschlossene Teilmenge von M; in Bezug auf R ist $\overline{N}-N$ ein F_σ also eine Menge $C(A)$. Unsere Behauptung ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass $\overline{N}-N$ kein G_δ ist, denn dann enthält $\overline{N}.M$ und folglich auch M, den Ergebnissen von § 6 zufolge, einen relativ-perfekten abzählbaren Teil. Wäre nun $\overline{N}-N$ ein G_δ, so wäre N ein F_σ in R, also da R kompakt ist, Summe von abzählbar

[1]) Vgl. die Bemerkung am Schluss von § 4.

vielen in sich kompakten Mengen; dann wäre auch I als topologisches Bild von I Summe von abzählbar-vielen in sich kompakten Mengen und folglich auch ein F_σ in Bezug auf das lineare Kontinuum R_1, was jedoch bekanntlich *) nicht der Fall ist.

Wir können jetzt durch Uebergang zu Komplementen duale Gegenstücke zu den bisherigen Resultaten aussprechen. So erhalten wir beispielweise auf Grund der Ergebnisse von § 4:

In einem vollständigen Raum enthält jede Menge, deren Komplement von erster Kategorie ist (in Bezug auf sich selbst), eine relativ abgeschlossene mit I homöomorphe Menge.

Aus dem im § 6 bewiesenen Theorem ergibt sich:

Im Bereiche aller Mengen (A) eines kompakten Raumes sind die F_σ dadurch charakterisiert, dass keiner ihrer relativ-abgeschlossenen Teile mit I homöomorph ist [1]).

Nun erinnern wir daran, dass der Menge I in der Theorie der Mengen (A) noch eine andere Bedeutung zukommt; Die Mengen (A) in vollständigen Räumen sind nämlich nichts anders, als *eindeutige und stetige Bilder der Menge I* [2]).

Um daraus weitere Schlüsse zu ziehen, beschränken wir uns auf lineare Mengen (d. h. auf Mengen der Euklidischen Geraden) und benützen den folgenden Hilfssatz von Sierpiński [3]):

α) Eine lineare Menge, die kein Intervall enthält, lässt sich eindeutig und stetig auf jede in ihr abgeschlossene Menge abbilden.

Ferner nehmen wir noch das folgende Lemma zu Hilfe, dessen Beweis wir in einem Anhang am Schlusse dieses Paragraphen folgen lassen:

β) Ist die lineare Menge M kein F_σ, so kann sie eindeutig und stetig auf eine lineare Menge M^* abgebildet werden, die ebenfalls kein F_σ ist und überdies kein Intervall enthält.

*) Vgl. Mengenlehre S. 138.

[1]) Ueber die Bedeutung dieses Satzes hinsichtlich gewisser Ueberdeckungseigenschaften von Punktmengen vgl. meine Abhandlung in Fund Math. 9, S. 200, Fussnote [1]).

[2]) Vgl. Sierpiński, Bull. Acad. sc. Cracovie (A) 1918, S. 161—167.

[3]) Vgl. Sierpiński, Fund. Math. XI, S. 118. Das Lemma wurde dort ausgesprochen unter Beschränkung auf Teilmengen der Menge I; in den Beweis geht diese Einschränkung nicht ein (dass dieselbe unwesentlich ist folgt übrigens schon daraus, dass jede lineare Menge die kein Intervall enthält, sich auf einen Teil von I topologisch abbilden lässt.

Sei jetzt M eine lineare Menge (A), und setzen wir voraus, M sei kein F_σ. Die aus M nach dem Lemma β) gebildete Menge M^* ist ebenfalls eine Menge (A) [1]). M^* enthält, wie wir oben bewiesen haben, eine mit I homöomorphe in M abgeschlossene Menge J. Nach α) ist J und folglich auch I ein stetiges Bild der Menge M^* und somit auch der Menge M. Da aber I in jede beliebige Menge (A) durch stetige Abbildungen überführt werden kann, erhalten wir das Ergebnis:

Aus jeder linearen Menge (A), die kein F_σ ist, können durch stetige Abbildungen sämtliche lineare Mengen (A) gewonnen werden.

Die Voraussetzung, die betreffende Menge sei kein F_σ, ist wesentlich, denn stetige Bilder einer linearen F_σ-Menge sind selbst F_σ-Mengen. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$ das System aller linearen Mengen (A) und mit $\mathfrak{B}$ das System aller linearen F_σ. Diese beiden Systeme haben die Eigenschaft, dass sie zugleich mit einer Punktmenge auch ihre eindeutigen und stetigen Bilder enthalten. Der zuletzt bewiesene Satz drückt nun aus, dass *jedes Teilsystem von $\mathfrak{A}$, das in diesem Sinne abgeschlossen ist in Bezug auf die Klasse der eindeutigen und stetigen Transformationen, entweder mit dem ganzen System $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, oder ein Teilsystem von $\mathfrak{B}$ ist.*

Anhang. Beweis des Hilfssatzes (β).

Wir beweisen zunächst das folgende Lemma:

Auf der Eudlidischen Zahlengeraden seien endlich oder abzählbar viele beschränkte abgeschlossene Intervalle

$$(') \qquad [a_1, b_1], \quad [a_2, b_2], \quad [a_3, b_3], \ldots$$

gegeben, die zu je zwei keine gemeinsame Punkte besitzen. Behauptung: Es gibt eine im Intervalle $[-\infty, +\infty]$ stetige reelle Funktion $f(x)$, so dass $f(x) = f(y)$ dann und nur dann gilt, wenn die beiden Punkte x und y in demselben Intervall $[a_n, b_n]$ liegen.

Zum Beweis des Lemmas betrachten wir die Menge bestehend aus allen Punkten a_n, sowie aus allen denjenigen Punkten der Geraden, die in keinem der Intervalle (') liegen. Diese Menge, als eine geordnete abstrakte Menge aufgefasst, hat denselben Ordnungstypus, wie die Menge der reellen Zahlen. Es sind nämlich die folgenden für den letzten Ordnungstypus charakteristischen [2]) Bedingungen erfüllt:

1) Es gibt in M kein erstes und kein letztes Element.

2) Ist M irgendwie in zwei Untermengen M_1 und M_2 zerlegt, so dass jedes Element von M_1 links von jedem Element von M_2 liegt, so gibt es entweder in M_1 ein letztes oder in M_2 ein erstes Element.

[1]) Dass stetige Bilder der Mengen (A) selbst Mengen (A) sind, wurde zuerst von Lusin ausgesprochen (Vgl. C. R. 164 (1917), S. 91—94) und folgt auch aus dem oben angeführten Theorem von Sierpiński.

[2]) Vgl. etwa Mengenlehre, S. 54.

3) Es gibt eine abzählbare Menge A von Elementen aus M, so dass zwischen je zwei Elementen von M mindestens ein Element von A liegt.

Der einfache Beweis dieser drei Eigenschaften sei dem Leser überlassen.

Das bisher bewiesene kann man auch so aussprechen: Es kann eine reelle Funktion $f(x)$ definiert werden, welche die Zahlenmenge N als Definitionsbereich besitzt, monoton wachsend ist und jeden reellen Wert in genau einem Punkte von N annimmt. Man sieht leicht, dass eine solche Funktion auf N stetig ist. Wir erweitern jetzt den Definitionsbereich von f auf die ganze Gerade, indem wir für jeden Punkt eines Intervalls $[a_n, b_n]$ festsetzen: $f(x) = f(a_n)$. Es ist klar, dass die derart auf der ganzen Geraden definierte Funktion $f(x)$ stetig ist und den Bedingungen des Lemmas genügt.

Sei jetzt M eine lineare Menge, von der wir voraussetzen, sie sei kein F_σ. Wir wollen M durch eine stetige Abbildung in eine kein Intervall enthaltende lineare Menge überführen, die ebenso wie M kein F_σ ist. Wir können beim Beweise annehmen, die Menge M sei beschränkt. Wir wollen zunächst M auf eine Hilfsmenge $M\dagger$ abbilden. Bezeichnen wir zu dem Zwecke mit B den offenen Kern von M, d. h. die grösste in M enthaltene offene Menge. (Es ist natürlich die Annahme gestattet, dass B nicht leer ist). B ist Summe von endlich oder abzählbar vielen offenen Intervallen

$$(') \qquad (a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad (a_3, b_3), \ldots$$

die paarweise fremd sind (dagegen brauchen ihre Endpunkte nicht durchwegs voneinander verschieden zu sein). Wir definieren auf M eine reelle Function $F(x)$ durch folgende Festsetzungen:

1) Für jeden Punkt von $M - B$ sei $F(x) = x$.

2) Betrachten wir jetzt einen Punkt x von B; er liege etwa im Intervall (a_n, b_n). Wir setzen:

a) $F(x) = x$, wenn beide Endpunkte a_n und b_n der Menge M angehören.

b) $F(x) = a_n$, wenn a_n in M liegt, aber nicht b_n.

c) $F(x) = b_n$, wenn b_n in M liegt, aber nicht a_n.

d) $F(x) = \frac{a_n + b_n}{2}$, wenn weder a_n, noch b_n in M liegt.

Die Funktion $F(x)$ ist, wie leicht ersichtlich, in allen Punkten ihres Definitionsbereiches M stetig und vermittelt eine Abbildung von M auf eine Menge $M\dagger$, die aus M dadurch entsteht, dass manche der Intervalle (') (nämlich jene, die mindestens einen nicht zu M gehörigen Endpunkt besitzen) aus M getilgt, bzw. durch ihre Mittelpunkte ersetzt werden. $M\dagger$ ist kein F_σ, denn sonst wäre die in M und a fortiori in $M\dagger$ abgeschlossene Menge $M - B$ ebenfalls ein F_σ und folglich auch die Menge $M = (M - B) + B$ (als Summe eines F_σ und einer offenen Menge). Der offene Kern $B\dagger$ von $M\dagger$ ist Summe aller derjenigen Intervalle (), deren beide Endpunkte in M liegen, etwa der Intervalle:

$$('') \qquad (a_{n_1}, b_{n_1}), \quad (a_{n_2}, b_{n_2}), \quad (a_{n_3}, b_{n_3}), \ldots$$

Von diesen Endpunkten fallen keine zwei zusammen, denn wäre etwa $p = a_{n_m} = b_{n_l}$, so wäre die Menge $B + p$ ein B als echte Teilmenge enthaltender offener Teil von M, während doch B die grösste offene Teilmenge von M ist.

Auf die abgeschlossenen Intervalle (') können wir das oben bewiesene Lemma anwenden und erhalten eine stetige Funktion $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, so dass $f(x) = f(y)$ dann und nur dann gilt, wenn x und y einem und demselben Intervall $[a_n, b_n]$ angehören. $f(x)$ ist natürlich eine monotone Funktion; wir können sie etwa als monoton wachsend annehmen. Aus der Definition von $f(x)$ folgt insbesondere dass für einen ausserhalb $M\dagger$ liegenden Punkt p der Wert $f(p)$ von der Funktion $f(x)$ in keinen von p verschiedenen Punkt angenommen wird.

Lassen wir jetzt den Punkt x die Menge $M\dagger$ durchlaufen und betrachten die Menge M^* der zugehörigen Funktionswerte $f(x)$. M^* ist ein stetiges Bild von $M\dagger$ und daher auch von M. Wir zeigen nun, dass M^* den Bedingungen des Hilfssatzes genügt.

1) M^* enthält kein Intervall. Seien nämlich $a < b$ zwei Punkte von M^*. Wir wollen zeigen dass im Intervalle (a, b) ein nicht zu M^* gehörender Punkt liegt. Sei etwa $a = f(x)$, $b = f(y)$, wo $x < y$. Das Intervall (x, y) kann nicht ganz in $M\dagger$ enthalten sein, sonst wäre es ein x in einem der Intervalle (') enthalten, und wir hätten dann $f(x) = f(y)$. Sei z ein zwischen x und y liegender Punkt aus dem Komplement von $M\dagger$. Dann liegt die Zahl $c = f(z)$ im Intervalle (a, b), und wir wissen, dass der Wert c in keinem von z verschiedenen Punkte also in keinem Punkte von angenommen wird. Hieraus folgt, dass c ein nicht in M^* liegender Punkt des Intervalls (a, b) ist.

2) M ist kein F_σ. Mit Rücksicht auf die Stetigkeit der Funktion f ist das Urbild jeder abgeschlossenen Menge N, d. h. die Menge aller Punkte x, für die $f(x)$ ein Element ist von N, selbst abgeschlossen. Daher ist das Urbild jedes F_σ ein F_σ. Nun ist aber das Urbild von M^* mit $M\dagger$ identisch, denn für einen ausserhalb von $M\dagger$ liegenden Punkt p kann, wie wir oben sahen, in keinem Punkte von M (allgemeiner in keinem von p verschiedenen Punkte der Geraden) die Gleichung $f(x) = f(p)$ erfüllt sein, d. h. der Punkt $f(p)$ ist kein Element von $M\dagger$. Daraus, dass $M\dagger$ kein F_σ ist, folgt also das entsprechende für M.

9. Einige weitere Anwendung der Häufungssysteme. Sei R eine beliebige separable Menge, Wir fragen, unter welchen Umständen eine gegebene Teilmenge M von R einen *in Bezug auf* R perfekten Teil enthält. Diese Frage wird durch den folgenden Satz in Beziehung zu dem Begriff des Häufungssystems gebracht:

Damit M einen in R perfekten Teil enthalte, ist notwendig und hinreichend, dass es auf M ein Häufungssystem σ gebe von der Art, dass keine Grundfolge von σ gegen einen Punkt von $R - M$ konvergiert.

Die Bedingung ist notwendig. Ist nämlich P eine perfekter Teil von M, so hat jedes aus Punkten von P konstruiertes Häufungssystem die verlangte Eigenschaft. Die Bedingung ist hinreichend, denn sei σ ein aus Punkten von M gebildetes Häufungssystem von der betreffenden Eigenschaft. Durch Restbildung gehen wir zu einem normalen Häufungssystem σ' über. Die Menge aller Punkte von σ', ergänzt um ihre in R liegende Häufungspunkte, ist eine in R perfekte Teilmenge von M.

Wir knüpfen jetzt an das bekannte Theorem an, wonach in einem vollständigen separablen Raum jede nicht-abzählbare Menge (A) eine perfekte Teilmenge enthält [1]).

Die Verwendung der Häufungssysteme gestattet einen sehr einfachen Beweis dieses Theorems, überdies ohne Einschränkung auf vollständige [2]) Räume, was, wie wir sehen werden, auch in der Theorie der linearen Menge (A) zu gewissen neuen Ergebnissen führt. Unser Satz lautet also:

I. *Jede nicht-abzählbare Menge (A) im separablen Raum R enthält eine (in R) perfekte Teilmenge.*

Sei M eine Menge (A) mit dem erzeugenden System $\{A_{n_1,\ldots,n_k}\}$. Die Symbole $M_{n_1,\ldots,n_k}$ mögen dasselbe bedeuten, wie im § 6. Unser Satz ist bewiesen, wenn wir aus Punkten von M ein Häufungssystem bilden, dessen keine Grundfolge gegen einen ausserhalb von M liegenden Punkt konvergiert. Wir verfahren dabei ganz analog wie beim Beweise des Haupttheorems im § 6, allerdings mit dem Unterschied, dass es sich dort um die Konstruktion eines Häufungssystems aus Punkten von $R-M$ handelte, während wir jetzt ein Häufungssystem auf M bilden wollen. Statt der im § 6 verwendeten Eigenschaften der F_σ benützen wir hier die Tatsache, dass in einem separablen Raum jede nicht-abzählbare Menge M einen Kondensationspunkt enthält, d. h. einen Punkt, in dessen jeder Umgebung eine nicht-abzählbare Teilmenge von M liegt.

Sei p ein in M liegender Kondensationspunkt von M. Für jedes natürliche m ist die Menge $U(p;\,1/m)$ nicht-abzählbar. Mit Rücksicht auf die Beziehung $M=\Sigma M_i$ gibt es zu jedem m einen Index i_m, so dass die Menge $U(p;\,1/m)\cdot M_{i_m}$ nicht-abzählbar ist. Die letztere Menge enthält sicher einen von p verschiedenen Kondensationspunkt p_m, und wir haben: $p=\lim\limits_{m=\infty} p_m$. Indem man nötigenfalls die Punktfolge p_m und entsprechend die Indizesfolge i_m durch eine Teilfolge ersetzt, kann man weiter annehmen, dass die Punkte p_m untereinander verschieden sind.

[1]) Dies wurde zunächst hinsichtlich linearer Mengen) von Souslin bewiesen vgl. C. R. 164 (1617), S. 88—91. Vgl. ferner Mengenlehre, S. 179.

[2]) Für den Fall vollständiger Räume liesse sich der Satz auch sehr einfach, aus dem oben bewiesenen Theorem folgern, dass jede Menge (A), die kein F_σ ist, eine mit der Menge aller irrationalen Zahlen homöomorphe Teilmenge enthält, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die letztere Menge einen perfekten Teil enthält.

Sei k eine natürliche Zahl >1, und es sei bereits für jedes Indizessystem $(n_1, n_2, \ldots, n_q)$ wo $q\leqslant k$, ein Punkt $p_{n_1,n_2,\ldots,n_q}$, sowie ein Index $i_{n_1,n_2,\ldots,n_q}$ definiert, derart, dass $p_{n_1,\ldots,n_q}$ in M liegt und Kondensationspunkt ist von

$$(')\qquad M_{i_{n_1},\,i_{n_1,n_2},\ldots,\,i_{n_1,\ldots,n_q}}.$$

Der Durchschnitt jeder Umgebung

$$(*)\qquad U(p_{n_1,\ldots,n_k};\ 1/m)$$

mit der Menge $(')$ für $q=k$ ist nicht-abzählbar. Daraus folgern wir (unter Berufung auf die Beziehungen $M_{n_1,\ldots,n_k}=\sum\limits_{m=1}^{\infty} M_{n_1,\ldots,n_k,m}$), dass es zu jedem m einen Index $i_{n_1,\ldots,n_k,m}$ gibt, so dass der Durchschnitt der offenen Menge $(*)$ mit

$$('')\qquad M_{i_{n_1},\,i_{n_1,n_2},\ldots,\,i_{n_1,\ldots,n_k},\,i_{n_1,\ldots,n_k,m}}$$

nicht-abzählbar ist. Dann enthält die Menge $('')$ einen in $(*)$ liegenden Kondensationspunkt, $p_{n_1,\ldots,n_k,m}$, und es gilt:

$$p_{n_1,\ldots,n_k}=\lim_{m=\infty} p_{n_1,\ldots,n_k,m},$$

(wobei, ebenso wie oben, angenommen werden kann, dass die Punktfolge unter dem Limeszeichen aus untereinander verschiedenen Punkten besteht). Damit ist die unbeschränkte Fortsetzbarkeit des Verfahrens erwiesen, das schliesslich zu einem Häufungssystem σ führt. Der Punkt $p_{n_1,\ldots,n_q}$ ist in der abgeschlossenen Hülle der Menge $(')$ enthalten (er ist nämlich Häufungspunkt dieser Menge), und daraus ergibt sich, wörtlich, wie am Schluss von § 6, dass die Grenzpunkte der Grundfolgen aus σ durchwegs in M liegen, womit der Satz I bewiesen ist. Man kann ihn auch in die folgende Gestalt bringen:

I' Sei M eine Menge (A) in einem separablen Raum. Jede Menge N, die mit M eine nicht abzählbare Menge gemeinsam hat, enthält einen relativ-perfekten Teil, der nur aus Punkten von M besteht.

Der Beweis ergibt sich daraus, dass der Durchschnitt $M.N$ eine Menge (A) in Bezug auf N ist.

Ueber die blosse Feststellung der Existenz von perfekten Teilen hinaus, wollen wir jetzt eine Aussage über die *Verteilung* von solchen Teilmengen herleiten:

I''. Ist M eine Menge (A) im separablen Raum R, so gibt es zu jeder ihrer nicht-abzählbaren Teilmengen N, eine (in R) perfekte Teilmenge von M, die mit N eine insichdichte Menge gemein hat.

Nach I' enthält die Menge $N^* = N + (R - M)$ einen relativ perfekten Teil $P \subset N$. In $N^* - P$, also a fortiori in $N^* - N = R - M$ liegt kein Häufungspunkt von N. Anders ausgedrückt, ist die abgeschlossene Hülle von P in M enthalten. $\overline{P}$ ist ein perfekter Teil von M, der mit N die insichdichte Menge P gemein hat [1]).

Es entsteht die Frage, ob Satz I'' nicht dahin verallgemeinert werden kann, dass es zu jeder nicht-abzählbaren Menge $N \subset M$ eine perfekte Menge $P \subset M$ gibt, die mit N sogar eine *nicht-abzählbare* Menge gemein hat. Es ist leicht zu zeigen, dass dies jedenfalls gilt, wenn M ein F_σ ist. In der Tat, sei

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

unter den M abgeschlossene Mengen verstanden, und sei $N \subset M$ nicht-abzählbar. Es ist dann für mindestens eine Nummer n der Durchschnitt $N . M_n$ nicht-abzählbar. Stellen wir M_n als Summe einer abzählbaren Menge B und einer perfekten Menge P dar (eine solche Darstellung ist bekanntlich für jede abgeschlossenen Menge möglich) so ist $P . N$ nicht-abzählbar.

Unter Voraussetzung der *Kontinuumshypothese*, kann gezeigt werden, dass diese Eigenschaft für die F_σ charakteristisch ist. Sei nämlich M kein F_σ. Ordnen wir alle abgeschlossene Teilmengen von M, — die Gesamtheit dieser Teilmengen hat bei Annahme der Kontinuumshypothese die Mächtigkeit $\aleph_1$, — in eine transfinite Folge nach dem Ordnungstypus Ω (Ω bedeutet die erste Ordinalzahl der dritten Zahlenklasse):

$$M_1,\ M_2,\ M_3, \ldots,\ M_\omega,\ M_{\omega+1}, \ldots,\ M_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega).$$

Unter den Mengen

$$(\dagger) \qquad M_\alpha - \sum_{\beta<\alpha}^{\infty} M_\beta \quad (\alpha < \Omega)$$

gibt es unabzählbar viele, die nicht leer sind (gäbe es nur abzählbar viele, so wäre M, wie man leicht sieht, ein F_σ). Greifen wir aus jeder der nicht leeren Mengen $(\dagger)$ je einen Punkt heraus, so erhalten wir eine nicht-abzählbare Menge, die offenbar mit jedem M_α, also überhaupt mit jeder abgeschlossenen Teilmenge von M einen abzählbaren Durchschnitt hat.

[1]) Es sei hervorgehoben, dass man beim Beweise dieses Satzes, sogar unter Beschränkung auf lineare Mengen, mit dem oben angeführten Souslinschen Satze (vgl. Fussnote [1]) Seite 104) nicht auskommt, vielmehr den allgemeinen Satz I braucht.

Ohne Annahme der Kontinuumshypothese bleibt sogar das Problem nur eine Menge (A) anzugeben, die der im obigen Sinne verschärften Behauptung I'' nicht genügt, offen [1]).

Eine andere Folgerung aus Satz I bezieht sich auf die Mächtigkeit der Mengen (A) in separablen Räumen. Sei R ein separabler Raum von der Eigenschaft, dass in ihm jede perfekte Menge dieselbe Mächtigkeit besitzt, wie der Gesamtraum. Beispielweise haben Euklidische Räume, allgemeiner vollstädigen separable Räume diese Eigenschaft). Aus I folgt sofort, dass in einem derartigen Raum jede Menge (A) entweder endlich ist, oder abzählbar unendlich, oder von derselben Mächtigkeit, wie R. Dies ist eine Verallgemeinerung des bekannten Mächtigkeitssatzes für Mengen (A) in vollständigen separablen Räumen.

Falls M ein G_δ ist, kann man die Existenz einer perfekten Teilmenge von M schon unter der Voraussetzung beweisen, dass M einen (nicht leeren) insichdichten Teil enthält, ohne zu fordern, dass M nicht abzählbar sei. Es gilt also in Verallgemeinerung eines für vollständige Räume wohlbekannten Satzes:

In einem separablen Raum enthält jedes insichdichte G_δ eine perfekte Teilmenge [2]) [3]).

Zum Beweise sei die insichdichte Menge M als Durchschnitt einer Folge offener Mengen dargestellt:

$$M = \prod_{m=1}^{\infty} O_n.$$

Wir konstruieren ein Häufungssystem aus Punkten von M mit Hilfe des folgenden Verfahrens: Denken wir uns eine bestimmte Nummer k die Punkte $p_{n_1, n_2, \ldots, n_i}$ $(i \leqq k)$ bereits definiert, und es sei ferner jedem dieser Punkte eine Umgebung $U_{n_1, n_2, \ldots, n_i}$ zugeordnet, so dass folgende Beziehungen erfüllt sind:

[1]) Für den Bereich der Mengen $C(A)$ ist das entsprechende Problem gelöst (vgl. Lusin Bull. Acad. Cracovie 1918, S. 42—43).

[2]) Die Verallgemeinerung auf Mengen, die einen in sich dichten Teil enthalten ohne selbst in sich dicht zu sein ergibt sich unmittelbar, indem man M durch die grösste in sich dichte Teilmenge von M ersetzt.

[3]) Daraus, kann man natürlich nicht, wie im Fall der vollständigen Räume schliessen dass jedes in sich dichte G_δ nicht abzählbar sei.

$$p_{n_1, n_2, \ldots, n_i} \subset U_{n_1} \cdot U_{n_1, n_2}, \ldots, U_{n_1, n_2, \ldots, n_i}$$

$$\overline{U_{n_1, n_2, \ldots, n_i}} \subset O_i.$$

Bei dem nächsten k-ten Schritt des Verfahrens wird zu jedem der Punkte $p_{n_1, \ldots, n_k}$ eine gegen ihn konvergiernde Folge von untereinander verschiedenen Punkten aus M[1]) $p_{n_1, \ldots, n_k, m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ definiert, die alle innerhalb der den Punkt $p_{n_1, \ldots, n_k}$ enthaltenden offenen Menge

$$O_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} U_{n_1, \ldots, n_i}$$

gewählt sind. Zu jedem der neugebildeten Punkte $p_{n_1, \ldots, n_{k+1}}$ können wir alsdann eine Umgebung $U_{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}}$ wählen, so dass die vorstehenden Relationen für $i = k + 1$ ihre Gültigkeit behalten. Durch unbeschränkte Fortsetzung des Verfahrens erhält man ein Häufungssystem σ, in dessen jeder Grundfolge

$$(') \qquad p_{n_1}, p_{n_1, n_2}, p_{n_1, n_2, n_3}, \ldots$$

alle Elemente von k-ten angefangen in der Menge $U_{n_1, \ldots, n_k}$ liegen also ist der eventuell vorhandene Grenzpunkt von (') in der Menge

$$\prod_{k=1}^{\infty} \overline{U_{n_1, \ldots, n_k}} \subset \prod_{k=1}^{\infty} O_k = M$$

enthalten. Damit ist die Existenz einer perfekten Teilmenge von M nachgewiesen. Es ergibt sich hieraus ebenso wie oben im Falle der allgemeinen Mengen (A):

Ist M ein G_δ (in einem separablen Raum), so gibt es zu jeder insichdichten Teilmenge N eine perfekte Teilmenge von M, die mit N einen insichdichten Durchschnitt hat.

Durch diese Eigenschaft sind, wenigstens in vollständigen Räumen, die G_δ unter den Mengen $C(A)$ charakterisiert. Sei zum Beweis M eine Menge $C(A)$ im vollständigen Raum R, aber kein G_δ. Nach dem Theorem in § 6 gibt es in M einen relativ perfekten abzählbaren Teil N. Von der insichdichten Menge N wollen wir zeigen, dass ihr Durchschnitt mit einer (in R) abgeschlossenen Teilmenge von M keinen in sich dichten Teil enthält. Weil nämlich N in M abgeschlossen ist, ist $N \cdot P$ in P und folglich auch in R abgeschlossen. Als eine im vollständigen Raum abgeschlossene abzählbare Menge kann $N \cdot P$ keinen insichdichten Teil enthalten.

[1]) Eine derartige Folge gibt es sicher, weil M als in sich dicht vorausgesetzt war.

Bemerken wir abschliessend, dass die Eigenschaften der Häufungssysteme in engen Beziehungen stehen gewiessen Sätzen über das Verhalten der Folgen stetiger Funktionen mit einer gegebenen Menge als gemeinsamen Definitionsbereich[1]). Es sei diesbezüglich auf eine spätere Abhandlung verwiesen.

[1]) Vgl. Hurewicz. Fund. Math, 9, S. 969.