Page.
§ 3. Notion générale de classe close par rapport à une opération donnée 211
§ 4. Opération $\boldsymbol{T}$. Classes d'ensembles héréditaires 227
§ 5. Opération $\boldsymbol{S}$. Classes d'ensembles additives 233
§ 6. Opération $\boldsymbol{S}_\beta$. Classes d'ensembles additives au dégré β . 246
§ 7. Opération $\boldsymbol{D}$. Classes d'ensembles soustractives 287
Résumé 301
Indexe des symboles 303

Sur les éléments cycliques et leurs applications.

Par

C. Kuratowski et G. T. Whyburn[1] (Lwów).

Dans l'ouvrage présent nous adoptons, comme point de départ une définition d'élément cyclique différente de celle adoptée primitivement[2]). Cela nous permet de développer la théorie d'éléments cycliques et de leurs applications sans avoir récours au théorème suivant, dont la démonstration est fort compliquée: si aucun point ne coupe l'espace Péanien[3]) entre deux points donnés a et b, ces points sont situés sur une courbe simple fermée[4]).

Première Partie: Développement de la théorie.

1. *Définitions et propriétés générales d'espaces Péaniens.*

1 désigne l'espace considéré; nous le supposons toujours *Péanien.*

Le point p (ou bien l'ensemble fermé K) *coupe* l'espace E entre deux points x et y, si x et y appartiennent à deux composantes différentes de $E-p$ (resp. $E-K$); une *composante* d'un ensemble Z est un sous-ensemble connexe de Z qui n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de Z.

[1]) Fellow of the John Simon Guggenheim Memorial Foundation.

[2]) d'après laquelle un élément cyclique est: soit un point qui coupe l'espace, soit un point d'arrêt (= point d'ordre 1), soit un continu saturé relativement à la propriété que tout couple de ses points s'y laisse unir par une courbe simple fermée. Voir Whyburn, bibliographie N1 (à la fin de l'ouvrage present).

[3]) = image continue de l'intervalle = espace compact, connexe et localement connexe. Il est à remarquer que la théorie d'éléments cycliques se laisse, en quelque sorte, étendre aux espaces non-compacts. Voir bibliogr. N22.

[4]) Théorème démontré par M. Ayres, bibliogr. N17. Pour le cas du plan, N1.

$F(R)$ désigne la *frontière* de l'ensemble R, c. à d., l'ensemble $\overline{R}\cdot(\overline{1-R})$.

$\delta(M)$ désigne le *diamètre* de l'ensemble M, et $\varrho(x, y)$ la distance des points x et y.

Nous nous servirons des propriétés suivantes d'espace Péanien:

α) si le point p coupe l'espace entre x et y, il existe une décomposition de l'espace en deux continus M et N tels que

$$M+N=1, \quad M\cdot N=p, \quad x \epsilon M \text{ et } y \epsilon N \text{ [1]}.$$

β) S étant une composante d'un ensemble ouvert, S est ouvert [2].

γ) Tous deux points d'une région ($=$ ensemble ouvert connexe) R s'y laissent unir par un arc simple [3].

δ) $F(\Sigma X_n) \subset \overline{\Sigma F(X_n)}$, quelques soient les ensembles X_n [4].

ε) K désignant l'ensemble de tous les points qui coupent l'espace entre deux points donnés a et b, l'ensemble $K+a+b$ est fermé [5].

2. *Définition d'élément cyclique.*

Deux points p et q sont dits *conjugués*, lorsqu'il n'existe aucun point qui coupe l'espace entre eux.

Appelons *élément cyclique* de l'espace: 1° tout point qui coupe l'espace et 2° p étant un point qui ne coupe pas l'espace, l'ensemble de tous les points conjugués à p; nous désignons cet ensemble par M_p [6])

Un élément cyclique qui ne se réduit pas à un seul point est dit *vrai* élément cyclique.

Selon cette définition, tout point appartient à un élément cyclique au moins; car tout point qui coupe l'espace est lui-même un élément cyclique, et tout point p qui ne coupe pas l'espace est contenu dans l'ensemble M_p. Ainsi

2.1) *l'espace est somme de ses éléments cycliques.*

[1]) Knaster et Kuratowski, Fund. Math, t. 2, pp. 206—253, th. 6.

[2]) Hahn, Fund. Math. t. 2.

[3]) R. L. Moore, Math. Zeit., Bd. 15, pp. 254—260. Mazurkiewicz: *Sur les lignes de Jordan* Fund. Math. I.

[4]) Hausdorff *Mengenlehre* p. 155, Berlin 1927.

[5]) Whyburn, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 33, pp. 305—308, et pp. 685—689. Cf. Wilder, ibid, vol. 34, pp. 649—655.

[6]) L'idée de cette définition est dûe à M. R. L. Moore; voir N. 10 de la bibliogr.

2.2) *tout point p qui ne coupe pas l'espace n'appartient qu'à un seul élément cyclique.*

Si on avait, en effet, $p \epsilon M_a \cdot M_b$ et $c \epsilon M_a - M_b$, il existerait un point q qui coupe l'espace entre b et c, d'où $q \neq p$. Or, par hypothèse, on peut unir c à a, a à p et p à b sans passer par q. Donc c est conjugué à b, d'où $c \epsilon M_b$.

3. *Éléments cycliques se réduisant à des points individuels.*

Un point a est dit un *point d'arrêt* [$=$ point d'ordre 1 au sens de M. Menger [1])] lorsqu'il existe une suite d'ensembles ouverts G_n tels que

(1) $F(G_n)$ se réduit à un seul point

(2) $$a \epsilon G_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \delta(G_n) = 0.$$

La condition (2) peut être remplacée par la condition non-métrique:

(3) $$G_n \subset G_{n-1}, \text{ pour tout } n, \text{ et } a = \prod_1^\infty G_n.$$

Évidemment si a est un point d'arrêt, il n'existe aucun point conjugué à a; c'est donc toujours un élément cyclique.

Il résulte du théorème suivant que les seuls deux cas possibles où a constitue un élément cyclique sont: 1° lorsque a coupe l'espace, 2° lorsque a est un point d'arrêt.

3.1) *Si a ne coupe pas l'espace et n'est pas un point d'arrêt, il existe un point b ($\neq a$) qui est conjugué à a.*

Démonstration. Supposons qu'il n'existe aucun point b satisfaisant aux conditions du théorème. Soit b un point quelconque de $1-a$ et soit K l'ensemble de tous les points qui coupent l'espace entre a et b. L'ensemble $K+b$ ne peut pas être fermé. Car, dans ce cas, il existerait un point q de $K+b$ qui est un point limite de la composante de $1-(K+b)$ contenant le point a, et il s'ensuit aussitôt que les points a et q seraient conjugués. Or, l'ensemble $K+a+b$ étant fermé (selon ε), il en résulte l'existence d'une suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de points de K qui converge vers a.

[1]) Voir Math. Ann., Bd. 95, pp. 287—306.

Parsuite, pour tout n, il existe (d'après α) deux continus A_n et B_n tels que

$$A_n + B_n = 1, \quad A_n \cdot B_n = x_n, \quad a \in A_n \quad \text{et} \quad b \in B_n.$$

Soit $n_1, n_2, n_3, \ldots$ une suite d'entiers telle que pour tout i, on ait

$$x_{n_i} \in A_{n_{i-1}}.$$

Nous allons prouver que la suite d'ensembles ouverts $[A_{n_i} - x_{n_i}]$ satisfait aux conditions (1) et (3). Évidemment $F(A_{n_i} - x_{n_i}) = x_{n_i} = F(B_{n_i})$, et ainsi (1) est satisfait. Du fait que $b \in B_{n_i}$ on conclut que $B_{n_i} \supset B_{n_{i-1}}$ et, en conséquence, que

$$(A_{n_i} - x_{n_i}) \subset (A_{n_{i-1}} - x_{n_{i-1}}).$$

Or, supposons que l'ensemble $\prod_1^\infty (A_{n_i} - x_{n_i})$ ne se réduise pas au point a. Il résulte de δ) que: $F(\Sigma B_{n_i}) \subset \overline{\Sigma F(B_{n_i})} = \Sigma x_{n_i} + a$ et, comme x_{n_i} est un point intérieur de $B_{n_{i+1}}$, il vient: $F(\Sigma B_{n_i}) = a$. D'autre part, $F(\Pi(A_{n_i} - x_{n_i}) - a) = F(\Sigma B_{n_i} + a) = a$. Donc les ensembles:

$$\prod_1^\infty (A_{n_i} - x_{n_i}) - a \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty B_{n_i}$$

sont séparés et non-vides. Mais la somme de ces deux ensembles est égale à l'ensemble $1 - a$ et, par hypothèse, le point a ne coupe pas l'espace. Il résulte de cette contradiction que la suite d'ensembles ouverts $(A_{n_i} - x_{n_i})$ satisfait aux conditions (1) et (3), et en conséquence, le point a est un point d'arrêt. Ceci contredit notre hypothèse et ainsi notre théorème se trouve démontré.

3.2) *Corollaire. Si a n'est pas un point régulier* [1]*, il existe un point b qui lui est conjugué.*

Soit, en effet: $1 - a = S_1 + S_2 + \ldots$ une décomposition en composantes. Les ensembles $S_i + a$ sont donc des continus Péaniens qui ne sont pas coupés par a. Si l'on suppose qu'il n'existe aucun point de l'espace qui soit conjugué à a, il n'en existe un non

[1]) au sens de Menger-Urysohn.

plus dans $S_i +$ Donc, selon le théorème précédent, a est un point d'arrêt de $S_i + a$. On en conclut, en tenant compte du fait que $\lim_{i\to\infty} \delta(S_i) = 0$ (en cas d'une infinité des S_i), que a est un point régulier, c. q. f. d.

4. *Ensembles A et chaînes cycliques $C(a, b)$.*

Appelons *ensemble A* tout ensemble fermé qui satisfait à la condition suivante:

φ) *si x et y appartiennent à A, chaque arc xy est contenu dans A.*

Nous allons prouver dans la suite que les ensembles A (contenant plus d'un point) sont identiques aux continus-sommes d'éléments cycliques.

De la définition résulte aussitôt que

4.1) *Le produit d'un nombre quelconque d'ensembles A est un ensemble A.*

L'espace étant, par hypothèse, Péanien, deux points arbitraire x et y suffisamment voisins se laissent unir dans cet espace par un arc de diamètre aussi petit qu'on le veut. D'après φ) la même propriété appartient à chaque ensemble A. Donc

4.2) *Tout ensemble A est un continu Péanien.*

4.3) *S étant une composante de l'ensemble $1 - A$, $F(S)$ se compose d'un seul point* (à moins que A ne soit vide).

Supposons, par contre, que $x \neq y$ et $x \in F(S)$, $y \in F(S)$. S étant une région d'un espace Péanien, il existe un arc $x_1 y_1$ plongé dans S, abstraction faite de ses extrémités (qui se trouvent dans le voisinage de x et y); cet arc unit deux points de A sans qu'il soit contenu dans A. Ceci contredit la propriété φ).

4.4) *$S_1, S_2, S_3, \ldots$ étant une suite de composantes (différentes) de l'ensemble $1 - A$, l'ensemble* $\mathrm{Lim\,inf}\, S_n$ *est vide ou se réduit à un seul point.*

Autrement dit: *le diamètre de S_n tend vers 0.*

Supposons, en effet, que $a, b \in \mathrm{Lim\,inf}\, S_n$. Les ensembles S_n étant (selon β) ouverts, il vient $a, b \in A$. Par hypothèse, il existe dans l'entourage de a un point a_n et dans l'entourage de b un point b_n tels que $a_n, b_n \in S_n$; il existe donc deux arcs disjoints aa_n et bb_n. Soit $a_n b_n$ un arc dans S_n. Le continu $aa_n + a_n b_n + b_n b$ contient un arc ab ayant des points communs avec S_n. Ceci contredit la propriété φ).

4.5) *Si Z est connexe, $A \cdot Z$ l'est également. Si Z est un continu, il en est de même de $A \cdot Z$.*

Supposons, par contre, que

(i) $$A \cdot Z = M + N, \quad M \neq 0 \neq N, \quad \overline{M} \cdot N = 0 = \overline{N} \cdot M.$$

Soient:

$M_1 =$ la somme des composantes S de $1 - A$ telles que $F(S) \subset M$.

$N_1 =$ la somme des composantes S de $1 - A$ telles que $F(S) \subset N$.

On a donc

(ii) $$Z \subset (M + M_1) + (N + N_1),$$

$$Z(M + M_1) \neq 0 \neq Z(N + N_1), \qquad (\overline{M} + \overline{N}) \cdot (M_1 + N_1) = 0,$$

et, comme selon δ): $F(M_1) \subset M$ et $F(N_1) \subset N$, il vient:

$$\overline{M}_1 \cdot N = (M_1 + F(M_1)) \cdot N \subset \overline{M} \cdot N = 0$$

et de même $\overline{N}_1 \cdot M = 0$. Enfin $\overline{M}_1 \cdot N_1 = 0 = \overline{N}_1 \cdot M_1$, puisque M_1 et N_1 sont deux ensembles ouverts et disjoints. En tenant compte de (i), on a

(iii) $$\overline{M + M_1} \cdot (N + N_1) = 0 = \overline{N + N_1} \cdot (M + M_1).$$

Les formules (ii) et (iii) contredisent l'hypothèse que Z est connexe.

4.6) *Si X coupe A entre a et b, X coupe l'espace entier entre a et b.*

Car, en cas contraire, soit Z un ensemble connexe tel que $a, b \subset Z \subset 1 - X$. L'ensemble AZ est connexe, selon 4.5).

4.7) *Si $x \in A$ et S est une composante de l'ensemble $A - x$, $S + x$ est un „ensemble A".*

Supposons, par contre, que $a, b \subset S + x$ et que $y \in ab - (S + x)$. Par conséquent, un des deux arcs, soit ay, soit yb, ne contient pas le point x, c-à-d. est disjoint de la frontière de S relative à A. Mais ceci est impossible, car chacun de ces arcs unit un point de $S + x$ au point y, qui appartient à $A - S$, et $ab \subset A$.

Définition. Appelons *chaîne cyclique de a à b* le produit $C(a, b)$ de tous les ensembles A qui contiennent a et b

Selon 4.1), $C(a, b)$ est donc *le plus petit* ensemble A contenant a et b. On verra ensuite que, lorsque a et b sont deux points conjugués, l'ensemble $C(a, b)$ est un élément cyclique. Dans le cas général, le rôle de $C(a, b)$ est analogue à celui d'un „arc" ayant pour éléments des éléments cycliques.

4.8) *Si a et b sont deux points conjugués, aucun point ne coupe $C(a, b)$. Donc chaque couple de points de $C(a, b)$ est conjugué.*

Soit $x \in C(a, b)$. On peut admettre que $x \neq a$. Soit S la composante de $C - x$ qui contient a. Selon 4.6), on a $b \in S + x$ et selon 4.7), $S + x$ est un ensemble A contenant a et b, d'où: $C(a, b) \subset S + x$, donc $S = C(a, b) - x$.

4.9) *Dans les mêmes hypothèses sur a et b, si x est un point de $C(a, b)$ qui coupe l'espace, x constitue la frontière d'une composante de $1 - C(a, b)$. L'ensemble de ces x est donc au plus dénombrable.*

Car, en cas contraire, l'ensemble

$$1 - x = (C(a, b) - x) + \Sigma(S_i + F(S_i)),$$

(la sommation étant étendue à toutes les composantes de $1 - C$) est connexe (selon 4.8)).

5. *Propriétés qui caractérisent les vrais éléments cycliques.*

5.1) *Pour qu'un ensemble E soit un vrai élément cyclique, il faut et il suffit qu'il soit un ensemble $C(a, b)$, où a et b sont deux points conjugués.*

En effet, si M_p est un vrai élément cyclique, chaque couple a, b de ses points est un couple conjugué. Il s'agit de prouver que $M_p = C(a, b)$.

Soit $x \in 1 - C(a, b)$ et soit, conformément à 4.3), y le point qui constitue la frontière de la composante de $1 - C(a, b)$ contenant x. Comme y coupe l'espace, il vient $y \neq p$; comme d'autre part, $p \in C(a, b)$, puisque autrement p ne serait pas conjugué soit à a soit à b, — on en conclut que y coupe l'espace entre p et x. D'où $x \in 1 - M_p$.

Il est ainsi établi que $M_p \subset C(a, b)$. L'inclusion inverse étant une conséquence immédiate de 4.8), la nécessité de notre condition est démontrée.

Pour prouver sa suffisance, considérons, conformément à 4.9), un point p de $C(a, b)$ qui ne coupe pas l'espace. D'après 4.8): $a, b \subset M_p$ et il suit, comme auparavant, que $M_p = C(a, b)$.

5.2) *Pour qu'un ensemble connexe qui ne se réduit pas à un seul point soit un vrai élément cyclique il faut et il suffit qu'il ne soit coupé par aucun de ses points et qu'il soit saturé par rapport à cette propriété.*

Soit C un vrai élément cyclique. D'après 5.1) et 4.8), aucun point ne le coupe. Il s'agit de prouver que, D étant un ensemble connexe tel que $C \subset D$ et $D - C \neq 0$, D contient des points qui le coupent. Or, S étant une composante de $1 - C$ qui contient des points de D, la frontière de S est, selon 4.3), un point qui coupe l'ensemble D.

Pour prouver la suffisance des conditions, considérons un ensemble connexe E qui n'est coupé par aucun de ses points et qui est saturé par rapport à cette propriété. Évidemment aucun point de l'ensemble $\overline{E}$ ne coupe $\overline{E}$, et il en résulte que $\overline{E} = E$. L'ensemble E est un ensemble A; car, xy étant un arc unissant deux points x et y de E, il s'ensuit aussitôt que l'ensemble $E + xy$ n'est coupé par aucun de ses points; en conséquence on a $xy \subset E$.

Soient maintenant a et b deux points quelconques de E. Puisque aucun point de E ne le coupe, il s'ensuit que les points a et b sont conjugués et il existe, conformément à 5.1), un point p tel que $C(a, b) = M_p$. Par définition de M_p, on a l'inclusion $E \subset M_p = C(a, b)$. L'ensemble E étant un ensemble A contenant a et b, il vient $C(a, b) \subset E$, d'où $E = C(a, b) =$ un vrai élément cyclique.

6. *Autres propriétés des éléments cycliques.*

6.1) *C_1 et C_2 étant deux éléments cycliques différents, on a soit $C_1 \cdot C_2 = 0$, soit $C_1 \cdot C_2 =$ un point qui coupe l'espace (donc, qui constitue un élément cyclique).*

D'après 2.2) chaque point de $C_1 \cdot C_2$ coupe l'espace. Par conséquent, en raison de 4.9), l'ensemble $C_1 \cdot C_2$ est au plus dénombrable. Mais d'après 4.5), $C_1 \cdot C_2$ est connexe; c'est donc un ensemble vide ou un seul point.

6.2) *$C_1, C_2, C_3, \ldots$ étant une suite d'éléments cycliques différents, on a $\lim_{n\to\infty} \delta(C_n) = 0$. Les éléments cycliques qui ne se réduisent pas à des points individuels (c. à. d. les vrais éléments cycliques) forment une famille finie ou dénombrable.*

Car, en cas contraire, il existerait deux éléments, par exemple, C_1 et C_2, contenant respectivement des points a_1, b_1 et a_2, b_2 tels que les distances $\delta(a_1, a_2)$ et $\delta(b_1, b_2)$ seraient très petites relativement aux distances $\delta(a_1, b_1)$ et $\delta(a_2, b_2)$. En unissant a_1 à a_2 et b_1 à b_2 par des petits arcs a_1a_2 et b_1b_2 disjoints, le produit de l'ensemble connexe $Z = C_2 + a_1a_2 + b_1b_2$ avec C_1 ne serait pas connexe, car $Z \cdot C_1 = C_1 \cdot a_1a_2 + (C_1 \cdot b_1b_2 + C_1 \cdot C_2)$ et l'ensemble $C_1 \cdot C_2$ (selon 6.1) est vide ou se réduit à un seul point. Cela contredit la propriété 4.5) des ensembles A.

6.3) *L'ensemble des points d'un élément cyclique C qui appartiennent à des éléments cycliques différents de C est au plus dénombrable.*

C'est une conséquence immédiate de 6.1) et 4.9).

6.4) *Si le continu K est somme d'éléments cycliques, K est un ensemble A satisfaisant à la condition φ).*

Supposons, contrairement à φ), qu'il existe un arc qui n'est pas contenu dans K mais dont les extrémités appartiennent à K. On peut en extraire un arc ab n'ayant en commun avec K que ses extrémités. K étant un continu, on en conclut immédiatement que les points a et b sont conjugués. Or, l'élément cyclique $C(a, b)$ n'est pas contenu dans K (puisque $ab \subset C(a, b)$), donc le produit $K \cdot C(a, b)$ est selon 6.3) au plus dénombrable. Ceci est impossible, car ce produit est selon 4.5) un continu ne se réduisant pas à un seul point (puisque a et b lui appartiennent).

Le théorème réciproque est aussi vrai:

6.5) *Si l'ensemble A (jouissant de la propriété φ) ne se réduit pas à un seul point, il est une somme d'éléments cycliques.*

Supposons, par contre, qu'il existe un point $p \epsilon A$ qui n'est contenu dans aucun élément cyclique appartenant à A. Le point p ne coupe donc pas l'espace et n'est pas un point d'arrêt. Par conséquent, il existe un seul vrai élément cyclique C qui le contient. Donc, par hypothèse, $C - A \neq 0$.

L'ensemble AC ne se réduit pas au point p, car si A n'est pas un sous-ensemble de C (si $A \subset C$, évidemment AC n'est pas un seul point), AC coupe l'espace entre $C-A$ et $A-C$.

Soit donc G une composante de l'ensemble $C - AC$. L'ensemble AC étant évidemment un „ensemble A relativement à C", la frontière de G relative à C se réduit à un seul point, qui coupe C. Ceci contredit la propriété 4.8). Ainsi 6.5) est établi.

Les propositions 6.4), 6.5) et 4.1) impliquent que:

6.6) *Si chacun des continus K_x est une somme d'éléments cycliques, le produit $\prod K_x$ est également un continu qui est une somme d'éléments cycliques.*

6.7) $K_1, K_2, K_3, \ldots$ *étant une suite de continus tels que l'ensemble $L = \mathrm{Lim\,inf}\, K_n$ contient plus d'un point et*

$$L \cdot \sum_{n=1}^{\infty} K_n = 0, \textit{ il existe un élément cyclique } C \textit{ tel que}$$

$$L = \mathrm{Lim\ inf}\ [K_n \cdot C].$$

En effet, soient $a \neq b$ deux points de L; si l'on suppose que a et b ne sont pas conjugués, il existe un point p et une décomposition de l'espace en deux continus M et N telle que

$$1 = M + N, \quad M \cdot N = p, \quad a \epsilon M, \quad b \epsilon N, \quad a \neq p \neq b.$$

Or, a et b étant deux points de $\mathrm{Liminf}\ K_n$, on en conclut aussitôt que $p \epsilon K_n$ à partir d'un certain n; mais ceci contredit l'hypothèse que $L \cdot K_n = 0$.

Donc a et b sont conjugués. Par conséquent, $L \subset C(a, b)$. En effet, si $p \epsilon [L - C(a, b)]$ et S désigne la composante de l'ensemble $1 - C(a, b)$ qui contient p, le point $F(S)$ (voir 4.3) coupe l'espace entre p et chaque point de $C(a, b) - F(S)$; donc, il le coupe entre p et a ou bien entre p et b. Il y aurait donc dans L deux points non-conjugués, contrairement à ce qui vient d'être démontré.

Soit $q = \lim q_n$, $q_n \epsilon K_n$. Si $q_n \epsilon C(a, b)$ à partir d'un certain n, on a $q \epsilon \mathrm{Liminf}\ [K_n \cdot C(a, b)]$. Supposons donc que $q_n \epsilon [K_n - C(a, b)]$ et désignons par S_n la composante de l'ensemble $1 - C(a, b)$ qui contient q_n. Il vient $q \epsilon F(\Sigma S_n)$, puisque q comme point de $C(a, b)$ n'appartient pas à ΣS_n. Donc, selon δ), $q \epsilon \overline{\Sigma F(S_n)}$. Nous allons prouver qu'à partir d'un certain n, $F(S_n)$ est un point appartenant à K_n. À ce but il suffit de prouver qu'à partir d'un certain n on n'a jamais $K_n \subset S_n$.

Or, si l'on avait $K_{n_i} \subset S_{n_i}$ pour une infinité des n_i, on aurait $a, b \epsilon \mathrm{Liminf}\ S_{n_i}$. Si les S_{n_i} sont différents, leur diamètre tend vers 0, et $\mathrm{Liminf}\ S_{n_i}$ ne peut contenir qu'un seul point. D'autre part, si les S_{n_i} sont identiques, on a aussi une contradiction, car les points a et b appartiennent à l'ensemble $F(S_{n_i})$ qui selon 4.3) se réduit à un point.

Il est donc établi qu'à partir d'un certain n, $F(S_n)$ est un point $p_n \epsilon K_n$. Comme nous venons de prouver, on peut supposer que tous les S_n sont différents donc le diamètre de S_n tendant vers 0, la formule $\lim q_n = q$ entraîne $\lim p_n = q$ et comme $p_n \epsilon K_n \cdot C(a, b)$, il vient $q \epsilon \mathrm{Lim\,inf}[K_n \cdot C(a, b)]$.

De là résulte

6.8) *Si K est un continu de convergence (contenant plus d'un point) de l'espace, K est un continu de convergence par rapport à un élément cyclique.*

En effet, soit, conformément à la définition de continu de convergence, $K = \mathrm{Lim}\ K_n$, $K \cdot K_n = 0$, $K_n \cdot K_m = 0$ pour $n \neq m$, K_n étant un continu. Il existe donc un élément cyclique C tel que $K \subset C$ et $K = \mathrm{Lim\,inf}\ K_n \cdot C$. Comme évidemment $\mathrm{Lim\,sup}\ K_n \cdot C \subset \mathrm{Limsup}\ K_n = K$, il vient $K = \mathrm{Lim}\ K_n \cdot C$. En outre $K_n \cdot C$ est, selon 4.5), un continu.

7. *Une propriété des chaînes cycliques.*

Soient a et b deux points quelconques et soit K l'ensemble de tous les points qui coupent l'espace entre eux. D'après (ε), l'ensemble $K + a + b$ est fermé. Considérons l'ensemble X qui est la somme de l'ensemble $K + a + b$ et de tous les éléments cycliques qui contiennent deux points de $K + a + b$. Nous allons prouver que

7.1) $X = C(a, b)$.

Démonstration: Puisque l'ensemble $C(a, b)$ est connexe et contient $a+b$, il s'ensuit que $C(a, b) \supset K+a+b$, car tout point de K coupe l'espace entre a et b. Soit C un élément cyclique qui contient deux points x et y de l'ensemble $K+a+b$. Puisque, selon 4.5), l'ensemble $C \cdot C(a, b)$ est connexe et contient $x+y$, il résulte d'après 4.9) qu'il contient un point p qui ne coupe pas l'espace. Or, $C(a, b)$ étant selon 6.5) une somme d'éléments cycliques et C étant le seul élément cyclique contenant p, il s'ensuit que $C \subset C(a, b)$. On a donc, d'après la définition de X,

(i) $$X \subset C(a, b).$$

D'autre part, l'ensemble $K+a+b$ étant fermé, il résulte d'après 6.2) que l'ensemble X est fermé. Il est aussi connexe. Car, soit t un arc unissant a et b On a évidemment.

(ii) $$K+a+b \subset t.$$

Soit S une composante quelconque de l'ensemble $t-(K+a+b)$. Donc S est un arc ouvert unissant deux points x et y de $K+a+b$. On voit facilement que les points x et y sont conjugués, car si un point coupait l'espace entre x et y, il le couperait aussi entre a et b et appartiendrait donc à K, ce qui n'est pas possible puisque $K \cdot S = 0$. En conséquence, selon 5.1), l'ensemble $C(x, y)$ est un élément cyclique appartenant à X. Puisque $S+x+y$ est un arc unissant x et y, il s'ensuit que $S \subset C(x, y) \subset X$; et il vient

(iii) $$t \subset X.$$

On conclut de (ii) et (iii) que l'ensemble X est connexe. Enfin X est un continu qui est somme d'éléments cycliques, car, d'une part, chaque point de K est un élément cyclique et, d'autre part, si a ne coupe pas l'espace et n'est pas conjugué à b, son élément cyclique C contient un point de K, notamment le point $F(S)$, où S désigne la composante de $1-C$ qui contient b; donc $C \subset X$. Selon 6.4), X est un ensemble A. On a donc, en vertu de la définition de l'ensemble $C(a, b)$:

(iv) $$C(a, b) \subset X.$$

D'après (i) et (iv): $X = C(a, b)$. C. q. f. d.

8. *Les ensembles H.*

Appelons tout ensemble qui est à la fois connexe et somme d'éléments cycliques un *ensemble H*. Selon 6.5), la notion d'ensemble H généralise celle d'ensemble A (ne se réduisant pas à un seul point).

Il résulte aussitôt de cette définition que:

8.1) *Si la somme d'un nombre quelconque d'ensembles H est connexe, elle est également un ensemble H.*

8.2) *Si l'ensemble $H \cdot C$ contient soit deux points différents, soit un point qui ne coupe pas l'espace (C étant un vrai élément cyclique), on a $C \subset H$.*

Car $H \cdot C$ étant connexe (d'après 4.5), contient des points qui ne coupent pas l'espace (selon 4.9). Or, chaque point qui ne coupe pas l'espace étant situé dans un seul élément cyclique, il vient $C \subset H$.

8.3) *a et b étant deux points quelconques d'un ensemble H, on a $C(a, b) \subset H$.*

En adoptant la notation de la section précédente, on a évidemment $K+a+b \subset H$, car H est connexe et contient le couple $a+b$. Donc, tout élément cyclique C qui contient deux points x et y de $K+a+b$ contient deux points en commun avec H, et par conséquent on a, selon 8.2), $C \subset H$. Ainsi, en vertu de la définition de la chaîne X, il s'ensuit que $C(a, b) = X \subset H$. C. q. f. d.

8.4) *Tout ensemble H possède la propriété (φ), c. à d., tout arc ab unissant deux points a et b de H est contenu dans H.*

On a, en effet, en vertu de 8.3), $ab \subset C(a, b) \subset H$.

8.5) *Z étant un ensemble connexe, $H \cdot Z$ l'est également.*

Soient, en effet, a et b deux points quelconques de l'ensemble $H \cdot Z$. Selon 4.5), l'ensemble $Z \cdot C(a, b)$ est connexe et selon 8.3), on a

$$a+b \subset Z \cdot C(a, b) \subset Z \cdot H.$$

On démontre aussitôt à l'aide de 8.5) le théorème

8.6) *Tout ensemble H est localement connexe.*

8.7) *Le produit d'un nombre quelconque d'ensembles H est un ensemble H.*

Soit G un système d'ensembles H et soit P le produit de tous les éléments de ce système. L'ensemble P est somme d'éléments cycliques. Soit, en effet, p un point quelconque de P. Si p coupe l'espace, il est lui-même un élément cyclique, et s'il ne coupe pas l'espace, il n'existe qu'un seul élément cyclique C qui le contient; et p étant contenu dans tous les ensembles H de G, il s'ensuit que $C \subset P$.

L'ensemble P est aussi connexe. Soient, en effet, a et b deux points quelconques de P. On conclut de 8.3) que la chaîne cyclique $C(a, b)$ est contenue dans tous les ensembles H de G et, par conséquent, dans leur produit P. Il s'ensuit aussitôt que P est connexe; ainsi, il est un ensemble H.

8.8) *Tout point de l'ensemble $\overline{H} - H$ est un élément cyclique (donc, soit un point d'arrêt, soit un point qui coupe l'espace). On conclut donc que tout ensemble H_0 tel que $H \subset H_0 \subset \overline{H}$ est également un ensemble H.*

En effet, soit p un point quelconque de $\overline{H} - H$, et supposons, par impossible, que p n'est ni un point d'arrêt ni un point qui coupe l'espace. Il existe donc un vrai élément cyclique C contenant le point p. Il vient d'abord $H \cdot C \neq 0$; car, si l'on avait $H \cdot C = 0$, la frontière $F(S)$ de la composante S de $1 - C$ contenant H serait un point qui coupe l'espace et, en conséquence, $\neq p$; et on conclurait que p n'était pas un point limite de H, contrairement à l'hypothèse. Ainsi, l'ensemble $H \cdot C$ n'est pas vide; et puisqu'il est connexe (selon 4.5)) et ne peut pas contenir C, il résulte d'après 8.2) qu'il se réduit à un seul point q. Par conséquent:

$$(H + p) \cdot C = p + q$$

ce qui est impossible, l'ensemble $(H + p) \cdot C$ étant connexe en vertu de 4.5).

8.9) *Corollaire.* $\overline{H}$ *est un ensemble A.*

8.10) *R étant une composante du complémentaire d'un ensemble H, l'ensemble $\overline{R} \cdot \overline{H}$ se réduit à un seul point.*

Supposons, par contre, que l'ensemble $\overline{R} \cdot \overline{H}$ contient deux points différents a et b. On conclut de 8.8) que l'ensemble $H_0 = H + a + b$ est un ensemble H. Mais on a alors

$$H_0 \cdot (R + a + b) = (H + a + b)\ (R + a + b) = a + b.$$

Ceci est impossible, d'après 8.5), puisque l'ensemble $R + a + b$ est connexe.

9. *Approximation de l'espace à l'aide des chaînes cycliques.*

9.1) [1]) *Il existe deux suites (finies ou infinies) de points distincts $[p_i]$ et $[q_i]$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ telles que les chaînes cycliques $C(p_i, q_i)$ possèdent les propriétés suivantes:*

(a) *On a pour tout i,* $C(p_i, q_i) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} C(p_j, q_j) = q_i$.

(b) *En posant* $H_n = \sum_{i=1}^{n} C(p_i, q_i)$ *et*

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n = \sum_{n=1}^{\infty} C(p_n, q_n),$$

tout point de l'ensemble $1 - H$ est un point d'arrêt.

(c) *Le diamètre des composantes de l'ensemble $1 - H_n$ tend vers 0 avec $^1/_n$.*

(d) $$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \delta[C(p_n, q_n)] = 0.$$

Démonstration. L'espace étant séparable, il existe un ensemble dénombrable $D = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots$ tel que $\overline{D} = 1$. Posons $r_1 = p_1$ et $q_1 = r_2$. Soit n_2 l'entier le plus petit tel que le point r_{n_2} n'est pas contenu dans la chaîne cyclique $C(p_1, q_1)$. [S'il n'existe aucun entier de ce genre, on a évidemment $C(p_1, q_1) = 1$]. Soit q_2 le point qui est la frontière de la composante S_2 de $1 - C(p_1, q_1)$ contenant le point $p_2 = r_{n_2}$. Soit n_3 l'entier le plus petit tel que le point r_{n_3} n'est pas contenu dans l'ensemble $H_2 = C(p_1, q_1) + C(p_2, q_2)$, et

[1]) On rapprochera ce théorème de celui de M. Wilder (Fund. Math. 7, p. 365), qui concerne le cas où l'espace est une dendrite. Cf. aussi W. L. Ayres, Fund. Math. XIV.

soit q_3 la frontière de la composante S_3 de l'ensemble $1 - H_2$ qui contient le point $p_3 = r_{n_3}$, et ainsi de suite. En général, si l'ensemble D n'est pas contenu dans l'ensemble $H_{n-1} = C(p_1, q_1) + \ldots + C(p_{n-1}, q_{n-1})$ (dans le cas contraire notre théorème est évidemment vrai), nous prenons pour n_n l'entier le plus petit tel que le point r_{n_n} n'appartient pas a H_{n-1} et pour q_n le point frontière de la composante S_n de $1 - H_{n-1}$ qui contient le point $p_n = r_{n_n}$. Nous allons prouver, à présent, que les conditions (a) — (d) sont satisfaites.

L'ensemble $S_i + q_i$ étant, selon 4.7) un ensemble A donc, selon 6.5), un ensemble H, il s'ensuit en vertu de 8.3) qu'on a

$$C(p_i, q_i) \subset S_i + q_i,$$

et, par conséquent, que (a) est satisfait.

Soit x un point quelconque de $1 - H$. Il résulte de la définition des points p_n que, pour tout n, on a

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \subset H_n$$

et, par conséquent, il vient $D \subset H$. Donc, d'après l'égalité $\overline{D} = 1$, on a $\overline{H} = 1$; et en vertu de 8.8) il s'ensuit que le point x est, soit un point d'arrêt, soit un point qui coupe l'espace. Or, de la connexité de H et de l'égalité $\overline{H} = 1$ il résulte que le point x ne coupe pas l'espace. Donc x est un point d'arrêt et (b) est démontré.

Supposons maintenant, contrairement à (c), que, pour un $\epsilon > 0$, il existe pour tout n au moins une composante S de $1 - H_n$ tel que $\delta(S) \geqslant \epsilon$. Selon 4.4) le nombre de composantes S de ce genre (avec n fixe) est au plus fini; soit G_n leur somme. En vertu de l'inclusion

$$G_n \subset G_{n-1}, \tag{i}$$

il existe un point p appartenant à l'ensemble $\prod_1^\infty \overline{G}_n$. Nous allons prouver que $p \subset \prod_1^\infty G_n$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait, pour un n, $p \in F(G_n)$. Désignons par $S_1, S_2, \ldots, S_k$ les composantes de G_n tels que $F(S_i) = p$, $(i \leqslant k)$. Or, il existe, (comme on voit en tenant compte de (b)) un entier $m > n$ tel que

$$H_m \cdot S_i \neq 0 \text{ pour tout } i \leqslant k. \tag{ii}$$

Le point p étant, selon (i), un point de $1 - G_m$, donc un point frontière de G_m, il existe une composante R de $1 - H_m$ appartenant à G_m et telle que $F(R) = p$; d'autre part, il existe un $i \leqslant k$ tel que $R \subset S_i$. Ceci est impossible, car d'après (ii) $S_i - R \neq 0$, donc S_i étant connexe, il en résulte que $F(R) \cdot S_i \neq 0$.

Ainsi il est établi que $p \subset \prod_1^\infty G_n$. Donc, $p \subset 1 - H$ et, d'après (b), p est un point d'arrêt. Par conséquent, il existe un ensemble ouvert Q de diamètre $< \epsilon$ contenant le point p et tel que $F(Q)$ se réduit à un seul point. Puisque le point $F(Q)$ coupe l'espace, il existe, d'après (b), un n tel que $F(Q) \subset H_n$. Ceci est impossible, car selon notre supposition, la composante S de $1 - H_n$ qui contient p a un diamètre $\geqslant \epsilon$, tandisque, selon l'inclusion précédente, on a $S \subset Q$. Notre supposition impliquant une contradiction, la propriété (c) se trouve démontrée.

La propriété (d) résulte aussitôt de la propriété (c). Car, pour un ϵ arbitrairement donné, soit n tel que toute composante de $1 - H_n$ a un diamètre $< \epsilon$. Donc, $C(p_n, q_n) - q_n$ étant contenu dans une seule composante de $1 - H_n$, il vient $\delta[C(p_n, q_n)] < \epsilon$.

10. *Remarque.*

On démontre facilement en se basant sur le théorème de M. Ayres, cité dans l'Introduction, l'équivalence de la définition primitive d'élément cyclique et de celle adoptée dans cet ouvrage; on prouve aussi que les quatre classes suivantes de sous-ensembles d'un espace Péanien sont identiques [1]):

(I) les ensembles H (voir § 8 ci-dessus; nous convenons ici que tout ensemble qui se réduit à un seul point est un ensemble H),

(II) les ensembles (fermés ou non-fermés) satisfaisant à la condition φ),

[1]) en faisant usage du théorème suivant (non difficile à prouver) de M. Ayres: *Pour qu'un continu Péanien E soit cycliquement connexe il faut et il suffit que tout triple de points x, y, z de E se laisse unir dans E par un arc dans chacun des ordres xyz, xzy, zxy.* Voir no. 8 de la bibliographie.

(III) les „arc-curves" au sens de M. Ayres[1]).

(IV) les ensembles Q ayant la propriété que leur produit $Q \cdot Z$ avec un ensemble connexe Z quelconque est connexe.

Deuxième Partie: Applications.

L'utilité de la notion d'élément cyclique provient en général de la structure „dendritique" de l'espace relativement à ses éléments cycliques. On voit, en tenant compte des théorèmes de la première partie, en particulier des §§ 8 et 9, qu'il y a beaucoup de ressemblance entre la structure d'un espace Péanien quelconque par rapport à ses éléments cycliques et d'une dendrite (= espace Péanien ne contenant aucune courbe simple fermée = espace Péanien dont tous les éléments cycliques se réduisent à des points individuels).

Il y a un grand nombre de propriétés de l'espace entier qui ne dépendent que des propriétés analogues d'éléments cycliques. Nous donnons dans la section suivante une liste de propriétés de ce genre que nous appelons *propriétés cycliquement extensibles*. Plus précisément: une propriété est *extensible*, si dès qu'elle appartient à chaque élément cyclique, elle appartient à l'espace entier. Par contre, une propriété qui appartient à chaque élément dès qu'elle appartient à l'espace, sera dite *cycliquement réductible*.

11. *Propriétés cycliquement extensibles et réductibles.*

Les propriétés suivantes sont des propriétés cycliquement extensibles et réductibles.

(1) Propriété de ne contenir aucun sous-continu non-Péanien[6 2]). (C'est une conséquence immédiate de 6.8)).

(2) Propriété de ne contenir aucun sous-ensemble connexe qui ne soit pas un semi-continu.[6]

(3) Propriété de ne pas couper le plan (lorsque l'espace est situé sur le plan).[6]

[1]) M. Ayres appelle un ensemble $M(K)$ l'„*arc-curve*" de l'ensemble K, lorsque $M(K)$ est l'ensemble de tous les points de l'espace qui sont situés sur un arc unissant deux points de K; $M(K) = K$ dans le cas où l'ensemble K se réduit à un seul point. Dans l'ouvrage no. 12 de la bibliographie M. Ayres a démontré l'identité des classes (I) et (III).

[2]) Les chiffres renvoient à la „Bibliographie".

(4) Propriété d'être une courbe régulière (au sens de Menger-Urysohn).[9]

(5) Propriété d'être une courbe rationelle (au sens de Menger-Urysohn).[23]

(6) Propriété d'avoir une dimension $\leqslant n$, $(n > 0)$.[16]

(7) Propriété d'être uni-cohérent.[16]

(8) Propriété d'être un espace de Janiszewski.[16]

(9) Propriété de contenir un point invariant relativement aux transformations continues en un sous-ensemble[1]).

(10) Propriété d'être, pour tout $\epsilon > 0$, somme d'un nombre fini de continus de diamètre $< \epsilon$ dont aucun couple ne contient deux points en commun.[9]

(11) Propriété de ne contenir qu'un nombre au plus dénombrable de points de ramification.[9]

(12) Propriété d'être somme d'un nombre au plus dénombrable d'arcs simples — l'ensemble des points d'arrêt étant supposé au plus dénombrable.[15]

(13) Propriété de ne contenir aucun sous-ensemble connexe qui ne contienne aucun arc simple. (Cela résulte aussitôt de 8.5) et 15c).

(14) Propriété de contenir une dendrite contenant tous les éléments cycliques se réduisant à un seul point.[20]

Tous ces théorèmes, démontrés par des différents auteurs, peuvent être établis en se basant sur la théorie d'éléments cycliques exposée ici. Nous prouverons dans les §§ suivants encore quelques théorèmes nouvaux de ce genre.

Parmi les problèmes non discutés ici, les relations entre les nombres de Betti des éléments cycliques et de l'espace entier, paraîssent être surtout importantes. Remarquons enfin qu'il semble bien probable que, K étant un sous-ensemble de l'espace tel que pour tout élément cyclique C l'ensemble KC est homéomorphe à un sous-ensemble d'une dendrite, l'ensemble K entier l'est également.

12. *Espaces convexes.*

Un espace métrique est dit convexe (au sens de M. W. A. Wilson), lorsque à chaque couple de points a, b et chaque nombre

[1]) Théorème démontré par M. Borsuk dans sa Thèse. Dans le cas où la transformation est *bicontinue*, la propriété reste extensible mais elle n'est pas réductible. Voir Ayres[21].

$0 \leqslant t \leqslant \varrho(a, b)$ correspond un et un seul point c tel que $\varrho(a, c) = t$ et $\varrho(c, b) = \varrho(a, b) - t$ [1]).

Théoreme. La propriété d'être homéomorphe à un espace convexe est extensible.

Démonstration. Nous démontrerons ce théorème d'abord dans le cas où l'espace est une chaîne cyclique: $1 = C(p, q)$.

Soit $C_1, C_2, \ldots$ la suite des vrais éléments cycliques. Imaginons chacun d'eux métrisé de façon convexe et de sorte que $\delta(C_n) < \frac{1}{2^n}$.

Considérons l'arc pq. Cet arc contient une infinité au plus dénombrable d'intervalles fermés n'empiétant pas les uns sur les autres et appartenant à l'ensemble $K + p + q$ (voir § 7). Chacun de ces intervalles peut être imaginé congruent à un segment de droite; de plus, la longueur totale de ces segments peut être supposée finie.

L'espace se trouve ainsi métrisé de façon convexe. Car, étant donnés deux points x et y, on les unit par un arc xy tel que la partie de xy située dans un élément cyclique arbitraire constitue un segment de longueur minima; la longueur totale de ces segments et des intervalles contenus dans l'ensemble $xy \cdot (K + p + q)$ est la distance de x à y.

Pour passer, à présent, au cas général, nous emploierons les notations du théor. 9.1).

D'après ce qui précède, chaque $C(p_n, q_n)$ peut être imaginé comme espace convexe à diamètre $< \frac{1}{2^n}$. La métrique de $H_n = \sum_{i=1}^{n} C(p_i, q_i)$ en découle directement: si $x \in C(p_n, q_n)$ et $y \in H_{n-1}$ on pose: la distance $\varrho(xy) = \varrho(xq_n) + \varrho(q_n, y)$. Parsuite l'ensemble

[1]) Bull. Amer. Math. Soc. 1930, p. 112. Cf. K. Menger, Math. Ann. 100.

Il importe de remarquer que le produit géométrique de deux espaces convexes est convexe [lorsque dans le produit on définit la distance des points x, y et x', y' comme égale à $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$]. Ce théorème rapproché du théorème du texte permet de construire une famille bien étendue d'espaces convexes. Tous ces espaces sont — comme l'a prouvé M. Wilson — uni-cohérents (à condition qu'ils soient compacts).

Comme nous venons d'apprendre, le théorème de ce § fut aussi trouvé par M. Aronszajn dans ses recherches (non-publiées encore) concernant les espaces métriques en général au point de vue de propriétés extensibles.

$H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$ se trouve métrisé de façon convexe. Or, la fonction $\varrho(xy)$ étant uniformément continue sur H et H étant dense dans l'espace, la fonction $\varrho(xy)$ se laisse prolonger sur l'espace entier par le passage aux points limites. L'espace entier devient métrique et convexe.

Remarque. La propriété considérée est aussi *réductible.* En effet, si l'espace est convexe et x, y sont deux points d'un élément cyclique C, le „segment" xy est contenu dans C, puisque C est un „ensemble A".

13. *Un critère concernant les propriétés extensibles.*

Théorème. Soit G un système de sous-ensembles fermés de l'espace Péanien tel que tout ensemble qui se réduit à un seul point appartient à ce système. La propriété P d'un ensemble d'être coupé entre tout couple de ses points par un ensemble du système G est cycliquement extensible.

Démonstration. Supposons, d'accord avec l'hypothèse, que chaque élément cyclique est coupé entre tout couple de ses points par un ensemble du système G. Soient a et b deux points quelconques de l'espace entier. Or, si a et b sont situés dans un élément cyclique C, il existe par hypothèse un ensemble X de G qui coupe C entre a et b; et selon 4.6), X coupe l'espace entier entre a et b. Si a et b ne sont pas situés dans un élément cyclique, ils ne sont pas des points conjugués; il existe, par conséquent, un point x qui coupe l'espace entre a et b. Tout ensemble se réduisant à un seul point étant par hypothèse un ensemble du système G, on conclut que dans ce cas aussi l'espace est coupé entre a et b par un ensemble de G. Cela veut dire que l'espace entier possède la propriété P. C. q. f. d.

Pour appliquer notre théorème, soit G_f le système de tous les sous-ensembles finis, soit G_d le système de tous les sous-ensembles fermés et au plus dénombrables et, pour tout $\imath$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, soit G_n le système de tous les sous-ensembles fermés de dimension n au plus. Pour tout α $(\alpha = f, d, 0, 1, 2, 3, \ldots)$, soit P_α la propriété d'un ensemble d'être coupé entre tout couple de ses points par un ensemble du système G_α. Il résulte du théorème précédent que toutes les propriétés P_α $(\alpha = f, d, 0, 1, 2\ 3, \ldots)$ sont cycliquement extensibles.

Or, on sait (on démontre facilement à l'aide du théorème de Borel, les systèmes G_α étant additives) que tout espace Péanien jouissant de la propriété P_α ($\alpha = f, d, 0, 1, 2, 3, \ldots$) possède la propriété que chacun de ses points est contenu dans des entourages arbitrairement petits dont les frontières sont des ensembles appartenant au système G_α. Cela veut dire que les propriétés d'être une courbe régulière, d'être une courbe rationelle, ou d'avoir une dimension $\leqslant n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont identiques respectivement aux propriétés P_f, P_d, $P_{n-1}, \ldots$, et en conséquence, que ces propriétés (propriétés (4), (5), et (6) du § 11) sont cycliquement extensibles.

14. *L'ordre d'un point comparé à son ordre relatif aux éléments cycliques* [1]).

D'après Menger-Urysohn un point p possède l'ordre $r(p)$ lorsque $r(p)$ est le nombre cardinal le plus petit tel que le point p est contenu dans un entourage U arbitrairement petit dont la frontière est un ensemble de puissance $r(p)$. Dans le cas où la puissance de $F(U)$ (tout en restant finie) tend vers l'infini avec $1/\delta(U)$, posons $r(p) = \omega$. Donc, tout point de l'espace Péanien possède comme ordre un des nombres $1, 2, 3, \ldots\ \omega, \aleph_0, \mathfrak{c}$.

Supposons, d'abord, que le nombre $r(p) = r$ est fini. Soit $m(p)$ le nombre (fini) des composantes de l'ensemble $1 - p$, soit $n(p)$ le nombre des vrais éléments cycliques contenant le point p, et, pour tout élément C_i de ce genre ($0 \leqslant i \leqslant n(p)$), soit $r_{c_i}(p)$ l'ordre de p dans l'espace C_i. Nous allons établir la formule suivante:

$$\text{(A)} \qquad r = r(p) = m(p) - n(p) + \sum_{i=1}^{n(p)} r_{c_i}(p).$$

Posons, en effet, $k = m(p) - n(p)$. Donc $k \geqslant 0$ et il existe précisément k composantes $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ de $1 - p$ tel que l'ensemble $S_i + p$ ($1 \leqslant i \leqslant k$) ne contient aucun vrai élément cyclique de l'espace qui contienne p. Le point p ne coupant pas l'espace Péanien $S_i + p$, p est d'après 3.1) un point d'arrêt de $S_i + p$ et il existe un sous-ensemble ouvert U_i de $S_i + p$ de diamètre $< \epsilon/2$ qui contient p et dont la frontière se réduit à un seul point x_i, — ϵ étant un nombre positif donné en avance.

[1]) Le problème traité dans ce § a été posé par M. Knaster.

Soient R_i ($1 \leqslant i \leqslant n(p)$) les composantes de $1 - p$ tel que pour tout i, $R_i + p \supset C_i$. Or, il existe, d'après 4.4), un nombre $d_i \leqslant \epsilon/4$ tel que pour tout point x de $(R_i + p) - C_i$ tel que $\varrho(x, p) < d_i$, la composante de $(R_i + p) - C_i$ contenant x a un diamètre $< \epsilon/8$. Il existe pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n(p)$, un sous-ensemble ouvert W_i de C_i contenant le point p, de diamètre $< d_i$ et dont la frontière $F_{c_i}(W_i)$ rel. à C_i contient exactement $r_{c_i}(p)$ points. Ajoutons a W_i chaque composante de $(R_i + p) - C_i$ dont la frontière [qui selon 4.3) se réduit à un seul point] appartient à W_i, et appelons V_i l'ensemble obtenu. On a donc

$$\delta(V_i) < \delta(W_i) + \epsilon/4 < d_i + \epsilon/4 < \epsilon/2.$$

On voit aussitôt que V_i est un sous-ensemble ouvert de $R_i + p$ et que $F_{r_i}(V_i) = F_{c_i}(W_i)$. On conclut donc que l'ensemble

$$U = \sum_1^k U_i + \sum_1^{n(p)} V_i$$

est un sous-ensemble ouvert de l'espace entier, que $\delta(U) < \epsilon$ et que $F(U) = \sum_1^k x^i + \sum_1^{n(p)} F_{r_i}(V_i)$. On a donc

$$\text{(i)} \qquad r(p) \leqslant m(p) - n(p) + \sum_{i=1}^{n(p)} r_{c_i}(p).$$

D'autre part, il existe pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n(p)$, un nombre ϵ_i tel que la frontière rel. à C_i de tout sous-ensemble ouvert de C_i contenant p et de diamètre $< \epsilon_i$ contient au moins $r_{c_i}(p)$ points. Soit ϵ un nombre inférieur à tous les nombres ϵ_i et, en même temps, inférieur à tous les nombres $\delta(S_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. On voit facilement que la frontière de tout sous-ensemble ouvert de l'espace contenant p et de diamètre $< \epsilon$ contient au moins $k + \sum_1^{n(p)} r_{c_i}(p)$ points. On a donc

$$\text{(ii)} \qquad r(p) \geqslant m(p) - n(p) + \sum_{i=1}^{n(p)} r_{c_i}(p).$$

Les formules (i) et (ii) donnent la formule (A).

Considérons, à présent, le cas $r(p)=\omega$; on conclut aussitôt que, ou bien le nombre $m(p)$ est infini $(=\aleph_0)$ ou bien il existe un élément cyclique C contenant p et tel que $r_c(p)=\omega$; donc $r_c(p)= =r(p)$. Enfin, dans les cas $r(p)=\aleph_0$ et $r(p)=\mathfrak{c}$, on conclut en tenant compte de 4.4) que (indépendamment des nombres $m(p)$ et $n(p)$), il existe un élément cyclique C contenant le point p et tel que $r_c(p)=r(p)$.

Remarque. Désignons par Q l'ensemble de tous les points d'arrêt et par K l'ensemble de tous les points qui coupe l'espace. Donc, pour tout point p de $1-(K+Q)$, il existe précisément un élément cyclique C le contenant et on a

$$r(p)=r_c(p)\geqslant 2.$$

Or, tout point de Q étant d'ordre 1, et tout point de K sauf un nombre tout au plus dénombrable de points étant d'ordre 2 [1]), il s'ensuit qu'il n'y a qu'un nombre tout au plus dénombrable de points p de l'espace pour lesquels on a

$$r(p)>2 \quad \text{et} \quad r(p)\neq r_c(p).$$

On conclut de là que, pour tout nombre $\alpha=2,3,4,\ldots$, la propriété d'un ensemble de ne contenir qu'un nombre au plus dénombrable de points d'ordre $>\alpha$ est cycliquement extensible. En cas $\alpha=2$, nous avons le propriété (11) du § 11.

15. *Autres applications.*

Parmi différentes applications d'éléments cycliques notons les suivantes.

La notion d'élément cyclique fut appliquée:

(a) Par M. Moore[10] pour définir et étudier l'hyper-espace obtenu lorsqu'on décompose la surface sphérique en sous-continus de façon semi-continue. Cet espace (appelé „cactoid“) est, en effet, un espace Péanien dont tous les éléments cycliques qui ne se réduisent pas à un seul point sont homéomorphes à la surface sphérique; ou, ce qui est équivalent[16], c'est un espace de Janiszewski.

(b) Par M. Ayres[12] pour caractériser les „irreducible basic sets“ [1]) comme ensembles qui contiennent tous les points d'arrêt et qui contiennent aussi exactement un point qui ne coupe pas l'espace de chaque „noeud“ qui ne se réduit pas à un point; et aussi par M. Ayres[14] pour caractériser les espaces Péaniens qui sont homéomorphes à la frontière d'un domaine plan connexe par le fait que tous leurs vrais éléments cycliques sont des courbes simples fermées.

(c) Par M. Whyburn[20] pour prouver le théorème que l'ensemble composé de tous les points d'arrêt et de tous les points qui coupent l'espace Péanien est homéomorphe à un sous-ensemble d'une dendrite.

Considérons encore les exemples suivants du même genre:

(d) Supposons que pour tout $\epsilon>0$, l'espace Péanien ne contienne qu'un nombre fini de courbes simples fermées de diamètre $>\epsilon$. Or, comme on voit facilement, bien qu'un tel espace puisse contenir un nombre infini de courbes simples fermées, on peut démontrer[5] que chacun de ses éléments cycliques n'en contient qu'un nombre fini. Il en résulte aussitôt que tout élément cyclique possède la propriété, très forte, que chacun de ses sous-ensembles connexes soit un semi-continu. Cette propriété étant selon § 11, prop. (2), cycliquement extensible, il s'ensuit qu'elle appartient aussi à l'espace entier.

(e) Supposons que toute point coupe localement l'espace Péanien (c. à. d., tout point p coupe une région contenant p). Bien que dans ces conditions l'espace entier puisse contenir des continus de condensation, on peut démontrer[18] qu'aucun de ses éléments cycliques ne contient de continu de condensation. Il résulte donc [2]) que chaque vrai élément cyclique est somme d'un ensemble fermé de dimension 0 et d'un nombre fini ou dénombrable d'arcs libres. En conséquence, chacun de ses sous-ensembles connexe contient un arc simple. Cette dernière propriété étant, selon § 11 prop. (13), cycliquement extensible, il s'ensuit qu'elle appartient aussi à l'espace entier.

[1]) Voir G. T. Whyburn, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 30 (1928), pp. 597—609.

[1]) Cela veut dire, un ensemble K possédant la propriété que l'„arc curve“ $M(K)$ est identique avec l'espace entier et qui est irréductible par rapport à cette propriété.

[2]) Voir P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes.* Deuxième Partie, Verhand. der Akad. Te Amsterdam, XIII, no. 4.

Bibliographie concernant les éléments cycliques et leurs applications.

1. G. T. Whyburn, *Cyclicly connected continuous curves*, Proc. Ntl. Acad. Sci., vol. 13 (1927), pp. 31—38.
2. G. T. Whyburn, *Some properties of continuous curves*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 33 (1927), pp. 305—308.
3. G. T. Whyburn, *Concerning the open subsets of a plane continuous curve*, Proc. Ntl. Acad. Sci., vol. 13 (1927), 650—657.
4. W. L. Ayres, *On the structure of a plane continuous curve*, Proc. Ntl. Acad. Sci., vol. 13 (1927), pp. 749—754.
5. G. T. Whyburn, *On a problem of W. L. Ayres*, Fund. Math., t. 11 (1928), pp. 296--301.
6. G. T. Whyburn, *Concerning the structure of a continuous curve*, Amer. Jour. Math. vol. 50 (1928), pp. 167—194.
7. W. L. Ayres, *Concerning the arc-curves and basic sets of a continuous curve*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 30 (1928), pp. 567—578.
8. W. L. Ayres, *Continuous curves which are cyclicly connected*, Bull. Acad. Pol. Sc. et Let., 1928, pp. 127—142.
9. G. T. Whyburn, *Concerning Menger Regular Curves*, Fund. Math., t. 12 (1928), pp. 264—294.
10. R. L. Moore, *Concerning upper-semi-continuous collections*, Monatsh. für Math. u. Physik, Bd. 36 (1929), pp. 81—88.
11. W. L. Ayres, *On continua which are disconnected by the omission of any point and some related problems*, Monatsh. für Math. u. Physik, Bd. 36 (1929), pp. 133—148.
12. W. L. Ayres, *Concerning the arc-curves and basic sets of a continuous curve, second paper*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 31 (1929), pp. 595—612.
13. W. L. Ayres, *Conditions under which every arc of a continuous curve is a subset of a maximal arc of the curve*, Math. Ann., Bd. 101 (1929), pp. 194—209.
14. W. L. Ayres, *Continuous curves homeomorphic with the boundary of a plane domain*, Fund. Math., t. 14 (1929), pp. 92—95.
15. G. T. Whyburn, *Continuous curves and arc-sums*, Fund. Math., t. 14 (1929), pp. 103—106.
16. C. Kuratowski, *Quelques applications d'éléments cycliques de M. Whyburn*, Fund. Math., t. 14 (1929), pp. 138—144.
17. W. L. Ayres, *Concerning continuous curves in metric space*, Amer. Jour. Math., vol. 51 (1929), pp. 577—594.
18. G. T. Whyburn, *Concerning points of continuous curves defined by certain im kleinen properties*, Math. Ann., Bd. 102 (1929), pp. 313—336.
19. Leo Zippin, *A study of continuous curves and their relation to the Janiszewski-Mulliken Theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 31 (1929), pp. 744—770.
20. G. T. Whyburn, *On the set of all cut points of a continuous curve*, Fund. Math., t. 15 (1930), pp. 185—194.
21. W. L. Ayres, *Some generalizations of the Scherrer fixed-point theorem*, Fund. Math. t. 16.
22. G. T. Whyburn, *On the structure of connected and connected im kleinen point sets*, Trans. Amer. Math. Soc. (à paraître).
23. G. T. Whyburn, *The rationality of certain continuous curves*, Bull. Amer. Math. Soc. (à paraître).