Sur les rétractes.

Par

Karol Borsuk (Varsovie).

Dans ma Thèse [1]) j'ai introduit la notion de *rétracte* [2]) et je l'ai employée en Topologie dans les recherches concernant les transformations continues des ensembles en leurs sous-ensembles, dans l'étude des extensions des fonctions continues, définies dans un ensemble, sur des sur-ensembles de celui-ci (sans altération de l'ensemble des valeurs de la fonction), dans certains problèmes sur les continus péaniens unicohérents [3]), etc.

Le but de cette Note est de donner la définition et d'étudier systématiquement quelques propriétés fondamentales de cette notion.

1. *Termes et notations.* J'appelle *entourage du point p dans l'ensemble A* tout ensemble $U \subset A$ dont p est un *point intérieur* relativement à A, c'est-à-dire tel que $p \in U - \overline{A - U}$. L'ensemble A est dit *localement connexe dans le point* $p \in A$, si chaque entourage du point p dans A contient un *entourage connexe* du point p dans A. L'ensemble A est dit *localemet connexe,* s'il l'est dans chacun de ses points. Je me servirai du terme *compact* dans le sens „compact en soi". L'ensemble connexe est dit un *continu* ou une *région* dans A, suivant qu'il est compact ou ouvert dans l'espace A. J'appelle *espace péanien* tout continu localement connexe et *espace quasi-péanien* tout ensemble qui est un *G_δ absolu* [4]) connexe et localement connexe. L'espace E est dit *unicohérent*, si l'égalité $E = A + B$ où A et B sont connexes et fermés dans E entraîne la connexité de l'ensemble $A \cdot B$.

[1]) présentée en octobre 1929 à l'Université de Varsovie pour obtenir le grade de Docteur en Philosophie.

[2]) Ce terme est dû à M. Mazurkiewicz.

[3]) Voir en particulier mes Notes *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents* (ce volume, p. 171), et suivantes (à paraître dans Fund. Math.).

[4]) C. à d. le produit d'une suite d'ensembles ouverts dans un espace *complet*; voir N. Aronszajn, Fund. Math. XV, p. 228.

J'entends par *espace métrique* tout ensemble E où l'on a défini une *métrique* $\varrho_E(x, y)$, c'est à dire, pour un E fixe, une fonction $\varrho_E(x, y)$ de deux variables $x \in E$ et $y \in E$ satisfaisant aux trois postulats imposés d'habitude à la fonction „distance entre x et y" [1]).

J'appelle *espace métrisable* tout espace auquel on peut attribuer une métrique; cette propriété est d'ailleurs un *invariant topologique*, c.-à-d., inaltérable par les transformations homéomorphes (transformations biunivoques et bicontinues).

Etant donnée une suite infinie de nombres réels

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots,$$

où pour un n donné on a $x_i = 0$ à partir de $i > n$ (resp. où l'on a $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{i}$ pour tout i), je désignerai par $\{x_i\}$ le point à coordonnées (1) de l'espace euclidien à n dimensions R_n (resp. du „cube fondamental" Q_ω de l'espace de Hilbert). Ainsi R_n (resp. Q_ω) sera considéré comme l'ensemble des $\{x_i\}$ où $i = 1, 2, \ldots$ métrisé par la formule de Pythagore. Étant donnée une fonction biunivoque f transformant l'ensemble A et B, je désignerai par f_{-1} la fonction *inverse* à f. Ainsi $f(A) = B$ entraîne $f_{-1}(B) = A$ et réciproquement.

Enfin, pour abréger le langage, j'appellerai *fonction intrinsèque* dans un ensemble A toute fonction définie dans A et telle que $f(A) \subset A$. Ainsi je dirai p. ex. que l'ensemble A *admet un point invariant,* lorsque pour chaque fonction f continue et intrinsèque dans A l'équation $f(x) = x$ admet une solution.

2. Étant donné un ensemble $B \subset A$, j'appelle *fonction rétractante* l'ensemble A en B, toute fonction f intrinsèque et continue dans A, telle que $B = f(A)$ et qui remplit l'équation fonctionnelle

$$(2) \qquad f[f(x)] = f(x).$$

Lorsqu'une telle fonction *existe* pour l'ensemble B, ce dernier sera dit *rétracte de A.*

Exemples.

(a) Pour tout ensemble A l'identité $f(x) = x$ est une fonction rétractante A en A: *tout ensemble est un rétracte de lui-même.*

(b) La fonction constante $f(x) = p$ où $p \in A$, définie sur A, est une fonction rétractante A en (p): *tout point est un rétracte de chaque ensemble qui le contient.*

(c) Pour tout $k \leqslant n$ la fonction f définie dans l'espace R_n par la formule $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots)$ est une fonction rétractante R_n en R_k: *tout espace R_k est un rétracte de R_n pour $k \leqslant n$* [2]).

[1]) Voir p. ex. Hausdorff, *Mengenlehre*, S. 94.

[2]) C'est un cas particulier du théorème suivant (d'ailleurs très simple): X_1 et Y_1 étant respectivement des rétractes des espaces X et Y, leur *produit topologique* $Z_1 = X_1 \times Y_1$ (pour définition de ce terme voir Kuratowski, Fund. Math. p. 356, Problème 49) est un rétracte du produit topologique $Z = X \times Y$.

(d) *La demi-droite est un rétracte de la droite*: cette rétraction est donnée par la fonction $f(x)=|x|$ définie sur l'ensemble des nombres réels R_1. On a, en effet, dans ce cas: $f(R_1) =$ demi-droite $\underset{x}{E}[x \geqslant 0] \subset R$ [1]).

(e) S étant une sphère a n dimensions dans l'espace R_n et c le centre de S, la fonction f définie dans R_n par les formules:

Pour $p \in S$ $f(p)=p$,

Pour p *non* $\in S$ $f(p)=$ le point d'intersection de la surface de S avec le vecteur $[\overrightarrow{cp}]$

donne une rétraction de R_n en S: *ainsi toute sphère n-dimensionnelle est un rétracte de* R_n.

3. *Pour qu'une fonction f intrinsèque dans A et continue dans cet ensemble soit une fonction rétractante A en B, il faut et il suffit que l'on ait à la fois:*

(3) $$f(A) \subset B,$$

(4) $$\textit{pour chaque } x \in B \quad f(x)=x.$$

Démonstration: Si f est une fonction rétractante A en B, alors on a par définition: $f(A)=B$, ce qui entraîne la condition (3). Si, en outre, $x \in B$, il existe un $y \in A$ tel que selon (2): $f(x)=f[f(y)]= =f(y)=x$, de sorte que la condition (4) est également remplie.

Inversement, si une fonction f intrinsèque dans A et continue dans cet ensemble remplit les conditions (3) et (4), on a d'après (3) pour tout $x \in A$: $f(x) \in f(A) \subset B$, d'où selon (4): $f[f(x)]=f(x)$, de sorte que f est une fonction rétractante A en B, c. q. f. d.

4. *Un rétracte du rétracte d'un ensemble A est un rétracte de l'ensemble A.*

Démonstration: φ et ψ étant respectivement des fonctions rétractantes A en B et B en C, il suffit de montrer que la fonction $f=\psi\varphi$ est une fonction rétractante A en C. En effet, f est par définition de φ et ψ intrinsèque dans A et continue dans cet ensemble; de plus, $f(A)=\psi\varphi(A)=\psi(B)=C$. On a par conséquent pour tout $x \in A$: $f(x) \in C \subset B$, d'où en vertu de (4): $ff(x)= =\psi\varphi f(x)=\psi f(x)=\psi\psi\varphi(x)=\psi\varphi(x)=f(x)$, c. q. f. d.

5. *Tout rétracte d'un ensemble est relativement fermé dans cet ensemble.*

1) $\underset{x}{E}[\,]$ désigne l'ensemble de tous les x à propriété $[\,]$.

Démonstration: Soient f une fonction rétractante A en B et

(5) $$x_n \in B \quad \textit{pour} \quad n=1,2,\ldots,$$

(6) $$\lim_{n=\infty} x_n = x \in A.$$

On a d'après (4): $x_n=f(x_n)$, d'où selon (6), $x=\lim\limits_{n=\infty} f(x_n)$ et en vertu de la continuité de la fonction f, $x=f(x) \in f(A)=B$, c. q. f. d.

6. *Si l'ensemble B est un rétracte de l'ensemble A et l'ensemble A est dans le point $p \in B$ localement connexe, alors l'ensemble B est dans le point p localement connexe.*

Démonstration. Il faut démontrer que chaque entourage U du point p dans B contient un entourage connexe U_0 du point p dans B. Soit f une fonction rétractante A en B. Cette fonction étant continue et $f(p)=p$, il existe un entourage G du point p dans A tel que $f(G) \subset U$. Mais l'ensemble A est dans le point p localement connexe; il existe donc un entourage connexe $\Gamma \subset G$ du point p dans A. L'ensemble $U_0=f(\Gamma)$ satisfait aux conditions:

1° U_0 est connexe,

2° $U_0=f(\Gamma) \subset f(G) \subset U$,

3° U_0 est un entourage du point p dans B, car l'ensemble $U \cdot \Gamma = U \cdot (\Gamma \cdot B)$, comme produit de deux entourages du point p dans B, est un entourage du point p dans B et $U \cdot \Gamma = f(U \cdot \Gamma) \subset f(\Gamma) = U_0$, c. q. f. d.

7. Théorème. *Les propriétés suivantes de l'espace A appartiennent à son rétracte B*: 1° d'être un espace péanien (resp. quasi-péanien) 2° d'être un espace quasi-péanien unicohérent 3° d'admettre un point invariant.

Démonstration: 1° La démonstration résulte de **5.** et **6.**, la connexité et la compacticité étant des invariants des transformations continues et l'ensemble relativement fermé dans un G_δ absolu étant lui-même un G_δ absolu.

2° Soit, en effet, B un rétracte non- unicohérent d'un espace quasi-péanien A. Ils existent donc [1]) deux points $p, q \in B$ et deux ensembles M et N tels que

(a) $M+N \subset B$; $M+N$ *sont fermés dans* B *et* $M \cdot N=0$,

(b) *Ni* M *ni* N *ne coupe* B *entre* p *et* q,

(c) $M+N$ *coupe* B *entre* p *et* q.

En désignant par f la fonction rétractante A en B, posons:

(7) $$\mathfrak{M}=\underset{x \in A}{E}[f(x) \in M] \quad et \quad \mathfrak{N}=\underset{x \in A}{E}[f(x) \in N].$$

Les ensembles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ remplissent les conditions:

(α) $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{N}$ *sont fermés* [2]) *dans* A *et disjoints* (selon (a)),

(β) *Ni* $\mathfrak{M}$ *ni* $\mathfrak{N}$ *ne coupe* A *entre* p *et* q, en vertu de (b) et des formules $\mathfrak{M} \cdot B=M$; $\mathfrak{N} \cdot B=N$ qui résultent de (3), (4), (b) et (7),

(γ) $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$ *coupe* A *entre* p *et* q, ce qui résulte de (c), car pour chaque continu $C \subset A-(\mathfrak{M}+\mathfrak{N})$ on a d'après (7), (3) et (4), $f(C) \subset B-(M+N)$.

Mais l'ensemble des propositions (α), (β) et (γ) équivaut [1]) à la non-unicohérence de A.

3° Soient f une fonction rétractante un ensemble A admettant un point invariant en l'ensemble B et φ une fonction arbitraire intrinsèque dans B et continue dans cet ensemble. La fonction φf étant intrinsèque et continue dans A, il existe un $x_0 \in A$ tel que

(8) $$\varphi f(x_0)=x_0.$$

Mais $\varphi f(A) \subset B$, d'où $x_0 \in B$ et en vertu de (4) $f(x_0)=x_0$, ce qui donne selon (8), $\varphi(x_0)=x_0$.

8. Etant donnée une fonction continue φ définie sur un ensemble P, je dirai que la fonction continue ψ est une *extension de la fonction* φ *sur un sur-ensemble* P_1 *de* P *relative à un ensemble* Q, si elle remplit les conditions:

[1]) C. Kuratowski, Fund. Math. XIII, p. 309 ($\mathfrak{U}_4$). La démonstration est aussi valable pour les espaces quasi-péaniens.

[2]) p. ex. Hausdorff, Mengenlehre, S. 194.

(9) La fonction ψ est définie sur l'ensemble P_1

(10) $$\psi(P_1) \subset Q$$

(11) $$\psi(x)=\varphi(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in P.$$

9. *Lorsqu'une fonction continue* φ *définie sur un ensemble* P *admet une extension* ψ *sur un ensemble* P_1 *relative à un ensemble* A, *elle admet aussi une extension sur* P_1 *relative à tout rétracte* B *de* A, *qui contient* $\varphi(P)$.

Démonstration: La fonction $f\psi$ où f est la fonction rétractante A en B remplit en effet les conditions:

1° elle est définie sur P_1 et continue,

2° $f\psi(P_1) \subset f(A)=B$,

3° pour tout $x \in P$, $f\psi(x)=\psi(x)=\varphi(x)$,

en vertu de (4).

10. **Théorème.** *Pour qu'un ensemble* B *soit rétracte de* A, *il faut et il suffit que toute fonction continue* φ *définie sur* B *admette une extension sur* A *relative à* $\varphi(B)$.

Démonstration: 1° Nécessité. f désignant une fonction rétractante A en B et φ une fonction continue arbitraire définie sur B, la fonction φf remplit les conditions: elle est continue et définie sur A, on a $\varphi f(A)=\varphi(B)$ et enfin $\varphi f(x)=\varphi(x)$ pour tout $x \in B$, car selon (4), $f(x)=x$ pour $x \in B$.

La fonction φf est donc par définition une extension de φ sur A relative à $\varphi(B)$.

2° Suffisance résulte du fait que la fonction ψ obtenue par l'extension sur A relative à B de la fonction $\varphi(x)=x$ (considérée comme définie sur B) est une fonction qui rétracte A en B.

11. **Lemme.** *Etant donnée une suite de fonctions réelles* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_i(x), \ldots$ *définies sur un ensemble quelconque* P *et telles que pour un* n *donné* $\varphi_i=0$ *à partir de* $i>n$ (*resp.* $0 \leqslant \varphi_i(x) \leqslant \frac{1}{i}$ *pour tout* $x \in P$ *et* $i=1,2,\ldots$), *leur continuité dans un point* $p \in P$ *est une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* $f(x)=\{\varphi_i(x)\}$ *soit continue au point* p.

Démonstration: La continuité de f est en effet suffisante en vertu de l'inégalité $|\varphi_i(x)-\varphi_i(p)| \leqslant \varrho[f(x), f(p)]$ pour tout $x \in P$ et $i=1, 2, \ldots$

D'autre part, la série $\psi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}[\varphi_i(x)-\varphi_i(p)]^2$ étant uniformément convergente, la continuité de toutes les fonctions φ_i entraîne celle de ψ. Comme $\varrho[f(x), f(p)]=\sqrt{\psi(x)}$ et $\psi(p)=0$, on a $\lim_{x\to p} f(x)=f(p)$.

12. Lemme. *Si en outre, P est un sous-ensemble fermé d'un espace métrisable P_1, il existe une extension de f sur P_1 relative à R_n (resp. à Q_ω).*

Démonstration: En vertu du théorème bien connu [1]) sur l'extension des fonctions réelles, la fonction φ_i admet une extension sur l'espace P_1 tout entier relative à R_1. Or l'ensemble formé du nombre 0 $\left(\text{resp. l'intervalle } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{i}\right)$ étant un rétracte de R_1 [2]), il existe en vertu du **9.** une fonction ψ_i qui constitue l'extension de φ_i sur l'ensemble P_1 relative à l'ensemble R_1 pour $i=1, 2, \ldots, n$ et à l'ensemble formé du nombre 0 pour $i>n$ (resp. relative à l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{i}$ pour $i=1, 2, \ldots$). La fonction $F(x)=\{\psi_i(x)\}$ où $x \in P_1$ est par conséquent, en vertu du lemme précédent, l'extension de f sur P_1 relative à R_n (resp. à Q_ω).

13. Théorème. *Tout ensemble fermé situé dans un espace métrisable A et homéomorphe à un rétracte de R_n (resp. de Q_ω) est un rétracte de A.*

Démonstration: En vertu du lemme précédent, la transformation homéomorphe $h(x)$ de l'ensemble donné $B \subset A$ en rétracte B_0 de R_n (resp. de Q_ω) admet une extension sur A relative à l'espace R_n (resp. à Q_ω). En vertu du **9.** il existe donc une extension g de h sur A relative à B_0.

La fonction $h_{-1}g$ effectue la rétraction de A en B, car

[1]) Voir p. ex. Hausdorff, Mengenlehre, S. 248.

[2]) Voir l'exemple (a) (resp. l'exemple (e)), p. 153 (resp. 154).

1° elle est définie sur A et continue,

2° $h_{-1}g(A)=h_{-1}(B_0)=B$,

3° $h_{-1}g[h_{-1}g(x)]=h_{-1}g(x)$,

puisque $x \in A$, donc $g(x) \in B_0$ et $h_{-1}g(x) \in B$, d'où $gh_{-1}g(x)=hh_{-1}g(x)=g(x)$ et enfin $h_{-1}gh_{-1}g(x)=h_{-1}g(x)$.

14. Corollaire. *L étant un arc simple, p un point de L et M un espace métrisable tel que $L-M=(p)$, l'espace M n'admet pas de point invariant.*

Démonstration: L'arc simple L contient un arc simple Λ à extrémité p.

Ainsi $\Lambda-(p)$

(a) est fermé dans M,

(b) est homéomorphe à une demi-droite, donc au rétracte de l'espace R_1 (voir l'exemple (d), p. 154),

(c) n'admet aucun point invariant.

Or. les propriétés (a) et (b) impliquent en vertu du **13.** que $\Lambda-(p)$ est un rétracte de M, d'où il résulte en vertu du **7.3°** et de la proposition (c) que M n'admet pas de point invariant, c. q. f. d.

15. Définition [1]). J'appellerai *rétracte absolu* tout espace séparable qui est métrisable et qui constitue un rétracte de chacun de ses sur-espaces métrisables.

Exemple. Les rétractes bornés de l'espace R_n sont des rétractes absolus. En effet, tout rétracte borné de R_n étant compact et par conséquent fermé dans tout sur-ensemble métrisable A, est d'après **13.** un rétracte de A.

16. Lemme. *Etant donnée une homéomorphie $h(B)=B_1$ où B est situé dans l'espace topologique A, il existe un espace topologique A_1 et une homéomorphie*

$$g(A)=A_1 \tag{12}$$

telle que

$$g(x)=h(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in B. \tag{13}$$

[1]) Dans ma Thèse j'ai déduit et appliqué des propriétés essentielles des rétractes absolus, d'abord sans introduire explicitement la notion-même. Le terme et la définition du texte sont dues à M. Aronszajn.

Il suffit, en effet, de poser (13) et

(14) $g(h) =$ couple ordonné $[h(B), x]$ pour $x \in A - B$,

(15) $$g(A) = A_1,$$

(16) U étant un entourage de x dans A, $g(U)$ est un entourage de $g(x)$ dans A_1.

Ainsi défini, A_1 est un espace topologique et la transformation $g(A) = A_1$ est l'homéomorphie cherchée.

17. *La propriété d'être un rétracte absolu est un invariant de l'homéomorphie.*

Démonstration. Soient B_1 un rétracte absolu et h une transformation homéomorphe de B en B_1. Il faut démontrer que B est un rétracte de son sur-ensemble métrisable arbitraire A.

En vertu du lemme précédent il existe un espace topologique A_1 contenant B_1 et une transformation homéomorphe g remplissant les conditions (12) et (13). Comme image homéomorphe de l'espace métrisable A, A_1 est une espace métrisable et on a $B_1 = h(B) = g(B) \subset A_1$. Mais B_1 est un rétracte absolu; il existe donc une fonction f rétractante l'espace A_1 en B_1.

La fonction $h_{-1}fg$

1° est définie sur A et continue,

2° $h_{-1}fg(A) = h_{-1}f(A_1) = h_{-1}(B_1) = B$,

3° pour $x \in B$ on a $h_{-1}fg(x) = h_{-1}fh(x) = h_{-1}h(x) = x$, car en vertu de (4) $fh(x) = h(x)$.

En vertu de **3.**, B est donc un rétracte de A.

Exemple. L'image homéomorphe de la sphère dans l'espace R_n est un rétracte absolu. Ceci résulte de ce qui précède d'après l'exemple de **15.** et l'exemple (e) de **2.** En particulier, chaque arc simple est un rétracte absolu.

18. Théorème. *Les rétractes absolus coïncident avec les images homéomorphes des rétractes de Q_ω.*

Démonstration. Tout ensemble B homéomorphe à un rétracte de Q_ω est en vertu de **5.** et de la compacticité de Q_ω un ensemble compact, donc fermé relativement à chacun de ses sur-ensembles métrisables A. En vertu du théoreme **13.** B est donc un rétracte de A.

D'autre part, un rétracte absolu est, comme ensemble métrisable et séparable, homéomorphe à un sous-ensemble B de Q_ω [1]) et ce dernier est en vertu de **17.** un rétracte de l'espace Q_ω, c. q. f. d.

Comme Q_ω admet un point invariant [2]), on déduit du théorème précédent et du théorème **7.** le

Corollaire. *Tout rétracte absolu admet un point invariant.*

19. Lemme. *Etant donné un rétracte absolu B, toute fonction continue f définie sur un sous-ensemble fermé P d'un espace métrisable P_1 et telle que $f(P) \subset B$ admet une extension sur P_1 relative à B.*

Démonstration. En vertu du théoréme précédent il existe une homéomorphie $h(B) = B_1$ où B_1 est un rétracte de Q_ω. En vertu de **12.** et **9.** la fonction hf admet une extension ψ sur P_1 relative à B_1.

La fonction $h_{-1}\psi$

1° est définie dans l'espace P_1 et continue,

2° $h_{-1}\psi(P_1) \subset h_{-1}(B_1) = B$,

3° pour $x \in P$, $h_{-1}\psi(x) = h_{-1}hf(x) = f(x)$,

ce qui prouve que $h_{-1}\psi$ est une extension de f sur P_1 relative à B.

20. Lemme. *E étant un sous-ensemble fermé et borné de R_n et f une fonction continue définie sur E, les conditions:*

1° $f(E) \subset R_n$,

2° $f(x) = x$ *pour tout* $x \in E \cdot \overline{R_n - E}$

entraînent

3° $E \subset f(E)$.

Démonstration: Supposons au contraire qu'il existe un point $p \in E - f(E)$.

S désignant l'intérieur de sphère de centre p située dans R_n et dont le rayon r surpasse le diamètre de E, on a

(17) $$E \subset S.$$

[1]) en vertu du „Einbettungssatz" de P. Urysohn, voir p. ex. Menger, *Dimensionstheorie*, S. 57.

[2]) Schauder, Math. Zeitschr. Bd. 26., p. 52. et Studia Math. t. II, p. 173.

Soit $\varphi(x)$ la fonction définie sur $\overline{S}$ par les relations:

$$\varphi(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad x \in E, \tag{18}$$

$$\varphi(x) = x \quad \text{pour} \quad x \in \overline{S} - E. \tag{19}$$

En vertu de 2° et (1), φ est continue et on a:

$$\varphi(\overline{S}) \subset R_n - (p). \tag{20}$$

$$\varphi(x) = x \quad \text{pour} \quad x \in \overline{S} - S. \tag{21}$$

Désignons par $g(x)$ pour tout $x \in R - (p)$ le point d'intersection du rayon $\overrightarrow{px}$ avec $\overline{S} - S$. La fonction g est donc continue sur $R_n - (p)$ et on a

$$g(x) = x \quad \text{pour} \quad x \in \overline{S} - S. \tag{22}$$

En conséquence la fonction $g\varphi$

(a) est définie sur $\overline{S}$ et continue (selon (20)),
(b) $g\varphi(\overline{S}) = \overline{S} - S$,
(c) $g\varphi(x) = x$ pour $x \in \overline{S} - S$ (en vertu de (21) et (22)).

h désignant la transformation antipode de la surface de S,

(α) $hg\varphi(x)$ est une fonction définie sur $\overline{S}$ et continue (selon (a)),
(β) $hg\varphi(\overline{S}) = \overline{S} - S$ (selon (b)),
(γ) $hg\varphi(x) \neq x$ pour $x \in \overline{S}$ (en vertu de (c) et (β)).

Mais la sphère $\overline{S}$ admet un point invariant [1]); les conditions (α), (β) et (γ) sont donc contradictoires, c. q. f. d.

21. Théorème. *Si B est un rétracte de l'espace R_n, alors toutes les composantes de $R_n - B$ sont non-bornées.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une composante bornée Γ de $R_n - B$. L'espace R_n étant quasi-péanien, on a $\overline{\Gamma} \cdot \overline{(R_n - \overline{\Gamma})} \subset B$ [2]). La fonction f qui rétracte R_n en B remplit alors les conditions:

[1]) d'après le bien connu *„Fixpunktsatz"* de M. L. E. J. Brouwer, Math. Ann. Bd. 71.

[2]) voir Tietze, Monatsh. für Math. u. Phys. Bd. 33, S. 15—17.

1° $f(x) = x$ pour $x \in \overline{\Gamma} \cdot \overline{(R_n - \overline{\Gamma})}$ selon (4),
2° $f(\overline{\Gamma}) \subset B$; donc $\overline{\Gamma} - f(\overline{\Gamma}) \neq 0$,

ce qui est impossible pour une fonction continue en vertu du lemme précédent.

Les rétractes absolus étant des ensembles compacts en vertu de 18. et de la compacticité de l'espace Q_ω et le complémentaire d'un ensemble compact dans l'espace R_n ($n \geqslant 2$) ne contenant qu'une seule composante non-bornée, le théorème 21. implique le

Corollaire. *Aucun rétracte absolu ne coupe l'espace R_n ($n \geqslant 2$) qui le contient.*

22. Les propriétés démontrées jusqu'à présent des rétractes absolus (qui sont, comme nous l'avons vu, des invariants topologiques) peuvent être résumées comme il suit:

1° Les rétractes absolus sont des continus péaniens (selon les théorèmes 7. et 18., Q_ω en étant un),
2° Chaque rétracte absolu admet un point invariant (corollaire du théorème 18.),

d'où [1])

3° Les rétractes absolus sont unicohérents,
4° Aucun rétracte absolu contenu dans l'espace R_n ($n \geqslant 2$) ne coupe cet espace (corollaire du théorème 21.).

La question s'impose: *les propriétés 1°—4° suffisent-elles pour caractériser les rétractes absolus au point de vue topologique?*

Pour les rétractes absolus de R_n où $n \leqslant 2$ la réponse est positive: il suffit de prendre la propriété 1° avec une quelconque des 2°—4°. Pour $n > 2$ la réponse est, par contre, négative, même lorsqu'on prend toutes les quatre conditions ensemble (elles ne sont d'ailleurs pas indépendantes l'une des autres). On n'a qu'à considérer l'ensemble

$$E = \underset{\{x_i\}}{E}\left[\left(x_1 - \frac{1}{p}\right)^2 + x_2^2 = \frac{1}{p^2}\ (p = 1, 2, \ldots);\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 1;\ x_i = 0 \text{ pour } i > 3\right] + \underset{\{x_i\}}{E}[(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 1;\ x_i = 0 \text{ pour } i > 2],$$

qui remplit les conditions 1°—4° sans être un rétracte absolu.

D'ailleurs la structure géométrique des rétractes absolus peut être très compliquée, comme le montre l'exemple suivant:

[1]) C. Kuratowski, Fund. Math XIV, p. 307.

Divisons chaque côté d'un triangle $T \subset R_2$ en trois parties égales et menons par les points de la division les trois parallèles aux côtés de T. Les droites divisent le triangle T en 9 triangles égaux. Il y a parmi eux trois triangles T_1, T_2 et T_3 qui (exceptés les sommets) sont contenus dans l'intérieur de T. Les triangles T_1, T_2, T_3 possèdent un sommet commun b (c'est le centre de gravité du triangle T). Soit $\delta_1 > 0$ et c un point de l'espace R_3 tel que $bc \perp T$ et $\varrho(b, c) = \delta_1$.

Désignons par

(S) $$T'_1, T'_2, \ldots, T'_9,$$

les triangles ayant pour sommets le point c et deux sommets d'un des triangles T_1, T_2 et T_3. Posons

$$f_1(T) = T - (T_1 + T_2 + T_3) + T'_1 + T'_2 + \ldots T'_9;$$

cette surface est donc formée de 15 triangles que nous supposerons rangés d'une façon quelconque en une suite $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \ldots, T_{15}^{(1)}$ et elle contient un *segment de ramification*, à savoir le segment $\overline{bc}$, commun à 6 triangles de la suite (S).

Soumettons chacun de ces triangles à l'opération f_1, en remplaçant δ_1 par un $\delta_2 > 0$ plus petit et posons $f_2(T) = \sum_{i=1}^{15} f_1(T_i^{(1)})$.

En procédant ainsi de suite et en choisissant convenablement la suite des nombres $\{\delta_n\}$, on peut obtenir à la limite une multiplicité Cantorienne à 2 dimensions étant un *rétracte absolu*, mais *ne contenant aucune image homéomorphe du cercle*.

Ainsi le problème de caractériser topologiquement les rétractes absolus, en particulier de les caractériser par leurs propriétés intrinsèques reste ouvert. Il paraît que l'on peut aboutir à une solution, en considérant certains espaces fonctionnels dont je vais m'occuper dans la suite (voir la fin de cette note p. 170, problème).

23. Soient P un espace topologique et Q un espace métrique et compact.

Définition [1]. Je désignerai par $\Phi_Q(P)$ l'espace dont les éléments sont des fonctions continues définies sur P et dont les valeurs appartiennent à Q. L'espace $\Phi_Q(P)$ sera métrisé par la formule:

(23) $$\varrho_{\Phi_Q(P)}(f_1 f_2) = \operatorname*{Sup}_{x \in P} \varrho_Q[f_1(x), f_2(x)] \quad \text{où} \quad f_1, f_2 \in \Phi_Q(P).$$

Je vais avoir recours aux propriétés suivantes de cet espace fonctionnel:

Théorème 1. *L'espace métrique $\Phi_Q(P)$ est borné et complet.*

En effet, pour tout couple $f_1, f_2 \in \Phi_Q(P)$ on a

$$\varrho_{\Phi_Q(P)}(f_1 f_2) = \operatorname*{Sup}_{x \in P} \varrho_Q[f_1(x), f_2(x)] \leqslant \operatorname*{Sup}_{x,y \in Q} \varrho_Q(x, y) < +\infty$$

en vertu de la compacticité de l'espace Q.

[1]) Comp. Fréchet, *Les Espaces Abstraits* (Paris, 1928), p. 89.

Soit d'autre part

(24) $$\lim_{n_i, n_j \to \infty} \varrho_{\Phi_Q(P)}(f_{n_i} f_{n_j}) = 0$$

où $f_n \in \Phi_Q(P)$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Pour tout $x \in P$ on a donc

$$\lim_{n_i, n_j \to \infty} \varrho_Q(f_{n_i}(x), f_{n_j}(x)) = 0,$$

ce qui entraîne à cause de la compacticité de Q l'existence de

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in Q.$$

La métrique (23) donne pour tout $x \in Q$

(25) $$\varrho_Q(f(x), f_n(x)) \leqslant \operatorname*{Sup}_{m > n} \varrho_Q(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \operatorname*{Sup}_{m > n} \varrho_{\Phi_Q(P)}(f_m f_n)$$

et selon (24)

(26) $$\lim_{n \to \infty} [\operatorname*{Sup}_{m > n} \varrho_{\Phi_Q(P)}(f_m f_n)] = 0,$$

de sorte que la suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers la fonction f. La fonction f est donc continue et comme $f(P) \subset Q$, on a par conséquent $f \in \Phi_Q(P)$.

Les formules (25) et (26) donnent

$$\lim_{n \to \infty} \varrho_{\Phi_Q(P)}(f f_n) = 0.$$

L'espace $\Phi_Q(P)$ est donc complet.

Théorème [1]) **2.** *Si l'espace P est compact, l'espace $\Phi_Q(P)$ est séparable* [2]).

Démonstration; Soit Π l'espace formé de toutes les fonctions (continues et discontinues) définies dans P et prenant comme valeurs les points de Q; supposons Π métrisé pareillement à (23) pour $\Phi_Q(P)$).

Evidemment

(27) $$\Phi_Q(P) \subset \Pi.$$

P étant séparable, il existe une suite $\{U_n\}$ d'ensembles ouverts dans P telle que pour tout G ouvert dans P et pour tout $x \in G$, il existe un n tel que

(28) $$x \in U_n \subset G.$$

σ désignant l'ensemble de toutes les suites finies aux termes naturels $(n_1, n_2, \ldots n_k)$ telles que

(29) $$P \subset U_{n_1} + U_{n_2} + \cdots + U_{n_k},$$

on a

(30) $$\sigma \text{ est dénombrable.}$$

[1]) Comp. Fréchet, *Thèse*, Paris, 1906, p. 36.

[2]) Dans le cas où Q contient un arc simple, le théorème réciproque est aussi vrai.

Soit s une suite finie arbitraire $\{n_1 n_2 \dots n_k\} \in \sigma$. Envisageons les ensembles disjoints:

$$(31)\quad \begin{cases} W_s^{(1)} = U_{n_1} \\ W_s^{(2)} = U_{n_2} - U_{n_1} \\ W_s^{(3)} = U_{n_3} - U_{n_1} - U_{n_2} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ W_s^{(k)} = U_{n_k} - U_{n_1} - U_{n_2} - \dots - U_{n_{k-1}}. \end{cases}$$

D désignant un ensemble dénombrable dense dans Q, soit Π_s l'ensemble de toutes les fonctions φ définies sur P et telles que:

$$(32)\qquad \varphi(P) \subset D$$

$$(33)\qquad \begin{cases} \varphi(x) \text{ est constant sur chacun des ensembles } W_s^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ \text{pris séparément.} \end{cases}$$

Par conséquent

$$(34)\qquad \Pi_s \text{ est dénombrable et } \Pi_s \subset \Pi,$$

ce qui implique selon (30) que l'on a pour la somme

$$(35)\qquad \Pi_\sigma = \sum_{s \in \sigma} \Pi_s$$

$\Pi_\sigma \subset \Pi$ et que Π_σ est également dénombrable.

L'espace Π_σ étant par conséquent séparable, il reste à montrer que $\Phi_Q(P) \subset \subset \overline{\Pi}_\sigma . \Pi$. Je vais démontrer à ce but qu'à toute distance de $f \in \Phi_Q(P)$ il existe dans Π une fonction $\varphi \in \Pi_\sigma$.

Envisageons une fonction arbitraire $f \in \Phi_Q(P)$ et un $\varepsilon > 0$. Pour chaque $x \in P$ l'ensemble

$$(36)\qquad G_x = \underset{y}{E}\, [\varrho_Q(f(x), f(y)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon]$$

est, comme on sait, ouvert dans P.

En vertu de (28) il existe pour tout $x \in P$ un indice $n(x)$ tel que

$$(37)\qquad x \in U_{n(x)} \subset G_x.$$

En vertu de la compacticité de P il existe parmi les indices $n(x)$ une suite finie $s = \{n(x_1), n(x_2), \dots n(x_n)\}$ remplissant (29). Donc

$$(38)\qquad s \in \sigma.$$

La densité de D dans Q implique d'autre part l'existence pour tout $i = 1, 2, \dots k$ d'un point a_i tel que

$$(39)\qquad a_i \in D \quad \text{et} \quad \varrho_Q[a_i, f(x_i)] < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Posons dans la formule (33)

$$(40)\qquad \varphi(x) = a_i \quad \text{pour chaque } x \in W_s^{(i)}.$$

En vertu de (29) et (31) la fonction φ est définie sur l'ensemble P tout entier et elle remplit les conditions (32) et (33), d'où, selon (35), $\varphi \in \Pi_\sigma$. En outre, pour le point arbitraire $x \in P$ il existe un indice i tel que $x \in W \subset U_{n(x_i)}$, d'où selon (40), (37), (36) et (39)

$$\varrho_Q(f(x), \varphi(x)) \leqslant \varrho_Q(f(x), f(x_i)) + \varrho_Q(f(x_i), a_i) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Il en résulte selon (23) que $\varrho_\pi(f, \varphi) = \sup_{x \in P} \varrho_Q(f(x), \varphi(x)) \leqslant \varepsilon$, c. q. f. d.

Théorème 3. *Si l'espace P est homéomorphe à l'espace P' et l'espace Q à l'espace Q', alors l'espace $\Phi_Q(P)$ est homéomorphe à l'espace $\Phi_{Q'}(P')$.*

Démonstration. Les homéomorphies $g(P) = P'$ et $h(Q) = Q'$ posées, envisageons les fonctions F définie sur $\Phi_Q(P)$ et F' définie sur $\Phi_{Q'}(P')$ par les formules:

$$(41)\qquad F(f) = h f g_{-1} \quad \text{pour} \quad f \in \Phi_Q(P),$$

$$(42)\qquad F'(f') = h_{-1} f' g \quad \text{pour} \quad f' \in \Phi_{Q'}(P').$$

Ainsi F *non* $\in \Phi_{Q'}(P')$, bien que pour toute valeur particulière $F(f)$ de F on a $F(f) \in \Phi_{Q'}(P')$, car $h f g_{-1} \in \Phi_{Q'}(P')$.

On a par conséquent

1° $F(\Phi_Q(P)) \subset \Phi_{Q'}(P')$ et $F'(\Phi_{Q'}(P')) \subset \Phi_Q(P)$

2° Les fonctions F et F' sont continues dans $\Phi_Q(P)$ resp. $\Phi_{Q'}(P')$.

En effet, par suite de la compacticité de Q et de la continuité de h il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ tel que

$$(43)\qquad \varrho_Q(x, y) < \eta \text{ entraîne } \varrho_{Q'}[h(x), h(y)] < \varepsilon \text{ uniformément pour tous } x, y \in Q.$$

Or, soient $f_1, f_2 \in \Phi_Q(P)$ telles que $\varrho_{\Phi_Q(P)}(f_1, f_2) < \eta$. Pour tout $x \in P'$ on a $g_{-1}(x) \in P$, donc $\varrho_Q[f_1 g_{-1}(x), f_2 g_{-1}(x)] < \eta$ d'où selon (43) $\varrho_{Q'}[h f_1 g_{-1}(x), h f_2 g_{-1}(x)] < \varepsilon$ et enfin, selon (23), $\varrho_{\Phi_{Q'}(P)}[F(f_1), F(f_2)] \leqslant \varepsilon$.

La démonstration de la continuité de F' est symétrique.

3° $F' F(f) = f$ pour tout $f \in \Phi_Q(P)$ et, d'une façon symétrique, $F F'(f') = f'$ pour $f' \in \Phi_{Q'}(P')$.

En effet, on a (p. ex. pour f) selon (42) et (41):

$$F' F(f)(x) = h_{-1} F(f) g(x) = h_{-1} h f g_{-1} g(x) = f(x).$$

Les propriétés 1°, 2° et 3° prouvent que la fonction F transforme $\Phi_Q(P)$ en $\Phi_{Q'}(P')$ par l'homéomorphie, c. q. f. d.

24. Théorème. *Q_1 étant un rétracte d'un espace métrique compact Q, $\Phi_{Q_1}(P)$ est un rétracte de l'espace $\Phi_Q(P)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que par définition 23. $Q_1 \subset Q$ entraîne $\Phi_{Q_1}(P) \subset \Phi_Q(P)$. Etant donnée une rétraction f de Q en Q_1, considérons dans $\Phi_Q(P)$ la fonction F définie par la condition

$$(44)\qquad F(\varphi) = f\varphi \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \Phi_Q(P).$$

Il suffit de montrer que F rétracte $\Phi_Q(P)$ en $\Phi_{Q_1}(P)$. Or,

1° La fonction F est définie dans l'espace $\Phi_Q(P)$ et continue.

En effet, pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_Q(P)$ on a selon (23)

$$\varrho_{\Phi_{Q_1}(P)}[F(\varphi_1), F(\varphi_2)] = \operatorname*{Sup}_{x \in P} \varrho_{Q_1}[f\varphi_1(x), f\varphi_2(x)]. \tag{45}$$

En vertu de la compacticité de Q il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta < 0$ tel que l'inégalité $\varrho_Q(x, y) < \eta$ entraîne l'inégalité $\varrho_{Q_1}[f(x), f(y)] < \varepsilon$ uniformément pour tous les couples $x, y \in Q$ à la fois. Par conséquent si $\varrho_{\Phi_Q(P)}(\varphi_1 \varphi_2) < \eta$, on a $\varrho_{Q_1}[f\varphi_1(x), f\varphi_2(x)] < \varepsilon$ pour chaque $x \in P$ d'où selon (45) $\varrho_{\Phi_{Q_1}(P)}[F(\varphi_1), F(\varphi_2)] \leqslant \varepsilon$.

2° $F[\Phi_Q(P)] \subset \Phi_{Q_1}(P)$, en vertu de (44),

3° $F(\varphi) = \varphi$ pour tout $\varphi \in \Phi_{Q_1}(P)$.

En effet, $\varphi \in \Phi_{Q_1}(P)$ entraîne $\varphi(x) \in Q_1$ pour tout $x \in P$ d'où selon (4) $f\varphi(x) = \varphi(x)$, c'est-à-dire $F(\varphi) = \varphi$.

F remplit ainsi toute les conditions de **3.**, c. q. f. d.

25. Théorème. *P_1 étant un rétracte de P et Q_1 un rétracte de Q, l'espace $\Phi_{Q_1}(P_1)$ est isométrique à un rétracte de l'espace $\Phi_Q(P)$.*

Démonstration: $\Phi_{Q_1}(P)$ étant d'après le théorème précédent un rétracte de $\Phi_Q(P)$, il suffit de prouver que $\Phi_{Q_1}(P_1)$ est isométrique à un rétracte de $\Phi_{Q_1}(P)$.

Soit f une fonction rétractante P en P_1. Considérons dans $\Phi_{Q_1}(P)$ la fonction F définie par la condition:

$$F(\varphi) = \varphi(f) \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \Phi_{Q_1}(P_1). \tag{46}$$

J'affirme que la transformation F est isométrique. En effet, d'après **3.** on a pour tout $x \in P_1$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_{Q_1}(P_1)$: $\varphi_1(x) = \varphi_1 f(x)$ et $\varphi_2(x) = \varphi_2 f(x)$ d'où immédiatement

$$\varrho_{\Phi_{Q_1}(P_1)}(\varphi_1 \varphi_2) \leqslant \varrho_{\Phi_{Q_1}(P)}(\varphi_1 f, \varphi_2 f). \tag{47}$$

D'autre part, pour chaque $x \in P$, $f(x) \in P_1$ alors, selon (23), $\varrho_{Q_1}[\varphi_1 f(x), \varphi_2 f(x)] \leqslant \varrho_{\Phi_{Q_1}(P_1)}[\varphi_1 \varphi_2]$, d'où selon (23)

$$\varrho_{\Phi_{Q_1}(P)}(\varphi_1 f, \varphi_2 f) \leqslant \varrho_{\Phi_{Q_1}(P_1)}(\varphi_1 \varphi_2). \tag{48}$$

Les inégalités (47) et (48) entraînent selon (46)

$$\varrho_{\Phi_{Q_1}(P_1)}(\varphi_1 \varphi_2) = \varrho_{\Phi_{Q_1}(P)}[F(\varphi_1) F(\varphi_2)],$$

de sorte que l'ensemble $A = F[\varphi_{Q_1}(P_1)] \subset \Phi_{Q_1}(P)$ est isométrique à $\Phi_{Q_1}(P_1)$. Il reste à démontrer que l'ensemble A est un rétracte de $\Phi_{Q_1}(P)$.

Envisageons la fonction $\mathfrak{F}$ définie dans l'espace $\Phi_{Q_1}(P)$ par la condition

$$\mathfrak{F}(\varphi) = \varphi f \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \Phi_{Q_1}(P).$$

La fonction $\mathfrak{F}$ transforme l'espace $\Phi_{Q_1}(P)$ en un sous-ensemble de l'espace A. Il suffit de montrer que $\mathfrak{F}$ rétracte $\Phi_{Q_1}(P)$ en A.

En vertu de l'inclusion $f(P) = P_1 \subset P$ on a pour $\varphi_1', \varphi_2' \in \Phi_{Q_1}(P)$, selon (23)

$$\varrho_{\Phi_{Q_1}(P)}[\mathfrak{F}(\varphi_1'), \mathfrak{F}(\varphi_2')] = \operatorname*{Sup}_{x \in} \varrho_{Q_1}[\varphi_1' f(x), \varphi_2' f(x)] \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in P} \varrho_{Q_1}[\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)] = \\ = \varrho_{\Phi_{Q_1}(P)}(\varphi_1', \varphi_2'),$$

ce qui entraîne la continuité de $\mathfrak{F}$.

En outre, si $\varphi \in A$, alors $\varphi = \psi f$ où $\psi \in \Phi_{Q_1}(P_1)$ donc $\mathfrak{F}(\varphi) = \psi f f = \psi f = \varphi$. Il en résulte selon **3.** que $\mathfrak{F}$ effectue la rétraction de $\Phi_{Q_1}(P)$ en A, c. q. f. d.

26. Lemme 1. *L'espace $\Phi_{Q_\omega}(P)$ est convexe* [1]).

Démonstration: Il suffit [2]) de prouver que entre tous deux fonctions $f', f'' \in \Phi_{Q_\omega}(P)$ il existe dans $\Phi_{Q_\omega}(P)$ un arc géodétique. Soit $f'(x) = \{\varphi_i'(x)\}$ et $f''(x) = \{\varphi_i''(x)\}$ où φ_i' et φ_i'' sont d'après **11.** les fonctions continues telles que

$$0 \leqslant \varphi_i'(x) \leqslant \frac{1}{i} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \varphi_i''(x) \leqslant \frac{1}{i} \quad \text{pour tout } x \in P \text{ et } i = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

Envisageons la fonction $f_t(x)$ définie pour $x \in P$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ par la formule

$$f_t(x) = \{\varphi_i'(x) + t[\varphi_i''(x) - \varphi_i'(x)]\}. \tag{50}$$

Il est facile de prouver que

1° Pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f_t \in \Phi_{Q_\omega}(P)$

2° $f_0 = f'$; $f_1 = f''$

3° $\varrho_{\Phi_{Q_\omega}(P)}(f_0, f_1) = \varrho_{\Phi_{Q_\omega}(P)}(f_0, f_t) + \varrho_{\Phi_{Q_\omega}(P)}(f_t, f_1)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Les propriétés 1°, 2° et 3° prouvent que l'ensemble composé de fonctions f_t où $0 \leqslant t \leqslant 1$ est un arc géodétique entre f' et f'' dans l'espace $\Phi_{Q_\omega}(P)$, c. q. f. d.

L'espace $\Phi_{\Phi_\omega}(P)$ étant complet (théorème **1** de **23.**), le lemme **1.**

[1]) L'espace métrique M est dit *convexe* (Menger, Math. Ann. Bd. 100, S. 82), si pour chaque couple de points $p, q \in M$ il existe un point $x \in M$ tel que: $p \neq x \neq q$ et $\varrho_M(p, x) + \varrho_M(x, q) = \varrho(p, q)$.

[2]) Lorsque l'espace M est complet (comme c'est le cas de $\Phi_{Q_\omega}(P)$, la convexité équivaut à l'existence dans l'espace M d'un arc géodétique entre tous deux points $p, q \in M$, c. à. d. d'un arc simple contenu dans M et isométrique à l'intervalle $[0, \varrho(p, q)]$ des nombres réels (voir Menger, l. c., p. 89).

entraîne la connexité et la connexité locale [1]) de $\Phi_{Q\omega}(P)$. On obtient ainsi le

Lemme 2. *L'espace* $\Phi_{Q\omega}(P)$ *est quasi péanien.*

27. Théorème. *Si Q est un rétracte absolu, l'espace $\Phi_Q(P)$ est quasi-péanien.*

Ceci résulte du lemme **2.**, théorème **18.**, **24.** et **7.** En vertu du théorème **2.** de **23.**, on obtient le

Corollaire. *Si Q est un rétracte absolu, l'espace $\Phi_Q(Q)$ est quasi-péanien et séparable.*

Le problème suivant reste ouvert.

Problème. *Les rétractes absolus sont-ils identiques aux espaces Q pour lesquels $\Phi_Q(Q)$ sont des espaces quasi-péaniens et séparables?*

[1]) Menger, l. c., p. 94.

Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents.

Par

Karol Borsuk (Varsovie).

Au I Congrès des Math. des Pays Slaves (Varsovie 1929) [1]) M. Knaster a attiré l'attention sur le rôle de la notion topologique *d'unicohérence* [2]) et proposé quelques notions nouvelles qui en dérivent et qui semblent, à son avis, se prêter à l'étude de plusieurs problèmes importants, restés ouverts malgré leur analogie avec les problèmes résolus par les méthodes de la Topologie Combinatoire.

Le but de cette Note est avant tout de la nature méthodologique, bien que la méthode developpée ici dans l'ordre d'idées proposé par M. Knaster m'ait conduit à la démonstration d'un théorème très général (chap. II,) et aux solutions de plusieurs problèmes (chap. III).

Tous ces résultats [3]) (que j'obtiens d'ailleurs sans avoir recours aux notions combinatoires) concernent les espaces *péaniens* (c.-à-d. les images continues du segment rectiligne) *unicohérents*, et même plus généralement, les espaces étant des *ensembles G_δ absolus* [4]) *con-*

[1]) B. Knaster, *Einige Probleme über Punktmengen mit Fixpunkten*, Comptes Rendus du I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Varsovie 1929, p. 287.

[2]) P. ex. C. Kuratowski, Fund. Math. XIII, p. 307, où l'unicohérence est définie pour les continus. Plus généralement, j'appellerai l'ensemble connexe E *unicohérent*, si pour toute décomposition de E en deux ensembles connexes E_1 et E_2 fermés dans E, leur produit $E_1 . E_2$ est connexe.

[3]) dont le théorème 2. trouve son corrélatif (sous d'autres rapports plus fort) dans les théorèmes de M. Vietoris et de M. Mayer exprimés et prouvés par les méthodes combinatoires; cf.: Mayer, Monatsh. f. Math. u. Phys., Bd. 36 (1929), S. 31—42; Vietoris, Monatsh. f. Math. u. Phys., Bd. 37 (1930), S. 159—162.

[4]) c.-à.-d. des sous-ensembles de l'espace complet qui sont G_δ par rapport à cet espace (voir: Hausdorff, *Mengenlehre*, II Aufl., S. 136; cf. N. Aronszajn, Fund. Math. XV, p. 228, note [1])).