Über konjugierte Exponentenfolgen

von

W. ORLICZ (Lwów).

Man sagt, eine Reihe Σa_ν konvergiere mit dem Exponenten α $(\alpha > 1)$, wenn die Ungleichung,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^\alpha < +\infty \tag{1}$$

besteht. Bekanntlich ist dafür, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu, \tag{2}$$

wo $\{b_\nu\}$ eine feste Folge bedeutet, bei beliebigen mit den Exponenten α konvergenten Σa_ν konvergiere, notwendig und hinreichend, daß die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu|^\beta < +\infty \tag{3}$$

besteht. Dabei ist β in (3) aus der Relation $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ zu berechnen — es ist der zu α *konjugierte* Exponent.

Bei gewissen Untersuchungen in der Theorie von Orthogonalentwicklungen hat man mit den Reihen Σa_ν zu tun, die einer zu (1) analogen Beziehung genügen, in welcher aber die Exponenten nicht notwendig gleich sind.

Im folgenden bezeichnet immer $A \equiv \{\alpha_\nu\}$ eine Folge von Exponenten > 1. Eine Reihe Σa_ν wollen wir als *mit der Exponentenfolge* $\{\alpha_\nu\}$ (kurz mit A) *konvergent* bezeichnen, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\alpha_\nu} < +\infty \tag{1'}$$

stattfindet.

Die Folge $B \equiv \{\beta_\nu\}$, wo

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=1$$

ist, werden wir die zu $\{\alpha_\nu\}$ *konjugierte Exponentenfolge* nennen.

Im § 1 dieser Note gebe ich die entsprechende Verallgemeinerung des eingangs erwähnten Satzes für den Fall, daß man statt eines festen Exponenten eine Exponentenfolge in Betracht zieht.

Wenn $\alpha' < \alpha$ ist, so gibt es immer eine mit α konvergente aber mit α' divergente Reihe. Es könnte scheinen, daß sich diese Tatsache auf den Fall verallgemeinern lässt, wo α' verschiedene Exponenten bedeuten, dh. daß es für jede Exponentenfolge $A \equiv \{\alpha_\nu\}$, $\alpha_\nu < \alpha$ immer eine Reihe gibt, die mit α konvergiert und mit A divergiert. Im Allgemeinen ist das aber nicht der Fall. So ist z. B. jede mit dem Exponenten 2 konvergente Reihe auch mit der Exponentenfolge A konvergent, wenn wir $\alpha_n = 2 - 1/n$ setzen (vgl. Satz 3).

Der Frage, wann die Konvergenz mit einer Exponentenfolge der Konvergenz mit einem festen Exponenten gleichwertig ist, sind die Sätze $3-3''$ gewidmet.

Im § 2 werden kurz analoge Sätze für Funktionenfolgen besprochen. Im § 3 werden endlich einige Anwendungen der vorangehenden Sätze angedeutet [1]).

§ 1.

Satz 1. *Dafür, daß die Reihe (2) bei beliebigen mit A konvergenten Reihen Σa_ν konvergiere, ist notwendig und hinreichend die Existenz einer Zahl k, $0 < k < 1$, für welche die Ungleichung*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |k b_\nu|^{\beta_\nu} < +\infty \tag{4}$$

besteht.

Beweis. Unser Beweis stützt sich auf die Bemerkung, daß die Funktion $|u|^\lambda$ für $\lambda > 1$ *konvex* ist und auf die elementare Ungleichung

[1]) Der Hauptinhalt dieser Note wurde in der Sitzung vom 10. 1. 1930 der Poln. math. Gesellschaft (Abteilung Lwów) vorgetragen.

(5) $$|u|.|v| \leqslant \frac{1}{\alpha}|u|^{\alpha} + \frac{1}{\beta}|v|^{\beta},$$

die für beliebige u, v stattfindet — α, β bedeuten wie oben, die konjugierten Exponenten [2]). Dann und nur dann gilt in (5) das Gleichheitszeichen, wenn $|u|^{\alpha} = |v|^{\beta}$ ist.

1° Die Bedingung (4) ist hinreichend.

Nach (5) haben wir

$$k|a_\nu|.|b_\nu| \leqslant \frac{1}{\alpha_\nu}|a_\nu|^{\alpha_\nu} + \frac{1}{\beta_\nu}|k b_\nu|^{\beta_\nu},$$

und indem wir links und rechts über ν summieren, bekommen wir

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu||b_\nu| \leqslant \frac{1}{k}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_\nu}|a_\nu|^{\alpha_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_\nu}|k b_\nu|^{\beta_\nu}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{k}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^{\alpha_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty}|k b_\nu|^{\beta_\nu}\right).$$

2° Die Bedingung (4) ist notwendig.

Wie leicht zu sehen, darf man ohne Einschränkung der Allgemeinheit alle $b_\nu \geqslant 0$ voraussetzen.

Zuerst werden wir den folgenden Hilfssatz beweisen:

Es existiert eine Konstante $K > 0$ mit der Eigenschaft, daß für eine beliebige der Bedingung

(6) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{\alpha_\nu} \leqslant 1, \qquad a_\nu \geqslant 0$$

genügende Reihe Σa_ν, die Ungleichung

(7) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu \leqslant K$$

besteht.

Angenommen (7) sei nicht erfüllt. Dann existieren Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(1)}, \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(2)}, \ldots \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(i)} \ldots,$$

derart daß

[2]) Vgl. F. Riesz, Su alcune disuguaglianze, Boll. dell'Un. Mat. Ital. 7 (2) (1928) p. 1—3. Diese Ungleichung ist übrigens der Sonderfall einer allgemeinen, zuerst von Herrn W. H. Young bewiesenen Ungleichung; W. H. Young, On classes of summable functions and their Fourier series, Proc. Royal Soc. A 87 (1912) p. 225—229.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(i)\alpha_\nu} \leqslant 1, \quad a_\nu^{(i)} \geqslant 0, \\ \text{(b)} & \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(i)} b_\nu > 2^i . i \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, 3 \ldots)$$

ist. Wir bilden eine neue Reihe Σc_ν, indem wir setzen

$$c_\nu = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} a_\nu^{(i)}.$$

Die Anwendung einer bekannten Eigenschaft von konvexen Funktionen [3]) auf die Funktionen $|u|^{\alpha_\nu}$ ergibt die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^{\alpha_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}a_\nu^{(i)}\right)^{\alpha_\nu} \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}a_\nu^{(i)\alpha_\nu}\right)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^{(i)\alpha_\nu} \leqslant 1.$$

Die Reihe Σc_ν konvergiert also mit Δ. Andererseits gilt die Abschätzung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu b_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}a_\nu^{(i)} > \frac{1}{2^j}\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^{(j)} b_\nu > j,$$

woraus $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu b_\nu = +\infty$ folgen müsste, da ja j einen beliebigen Index bedeutet. Das ist aber ein Widerspruch mit unserer Voraussetzung.

Wir wählen jetzt $\{\bar{a}_\nu\}$, daß es sei $\bar{a}_\nu^{\alpha_\nu} = \left(\frac{b_\nu}{K+1}\right)^{\beta_\nu} = \bar{b}_\nu^{\beta_\nu}$.

Dann ist $\bar{a}_\nu \bar{b}_\nu = \bar{b}_\nu^{\beta_\nu}$ und

(8) $$\sum_{\nu=1}^{n}\bar{a}_\nu^{\alpha_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n}\bar{b}_\nu^{\beta_\nu} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Wir behaupten:

[3]) Ist $f(x)$ eine beliebige, stetige, konvexe Funktion, $\{x_\nu\}$ eine Zahlenfolge und $\{d_\nu\}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen, für welche $\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu = 1$ ist, so gilt die Ungleichung $f\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu x_\nu\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu f(x_\nu)$, vorausgesetzt, daß beide Seiten der Ungleichung einen Sinn haben.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{a}_\nu^{\alpha_\nu} \leqslant 1 . \tag{9}$$

Anderfalls gäbe es nämlich ein N mit $\varrho = \sum_{\nu=1}^{N} \bar{a}_\nu^{\alpha_\nu} > 1$. Es ist aber

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\bar{a}_\nu}{\varrho}\right)^{\alpha_\nu} \leqslant \frac{1}{\varrho} \sum_{\nu=1}^{N} \bar{a}_\nu^{\alpha_\nu} = 1 ,$$

also nach (6), (7)

$$\sum_{\nu=1}^{N} \bar{a}_\nu b_\nu \leqslant K \sum_{\nu=1}^{N} \bar{a}_\nu^{\alpha_\nu} ,$$

und weiter

$$\sum_{\nu=1}^{N} \bar{a}_\nu \bar{b}_\nu \leqslant \frac{K}{K+1} \sum_{\nu=1}^{N} \bar{a}_\nu^{\alpha_\nu} ,$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \bar{b}_\nu^{\beta_\nu} \leqslant \frac{K}{K+1} \sum_{\nu=1}^{N} \bar{a}_\nu^{\alpha_\nu} .$$

Die letzte Ungleichung bedeutet aber einen Widerspruch mit (8). Es gilt also (9), woraus wegen (8) auch (4) mit $k = \frac{1}{K+1}$ folgt [4]).

Unmittelbar aus dem Satz 1 folgt

Satz 2. *Es sei $A \equiv \{\alpha_\nu\}$ eine Exponentenfolge mit*

$$1 < \alpha \leqslant \alpha_n .$$

Dafür, daß für jede mit A konvergente Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, die Reihe (2) konvergiere, ist notwendig und hinreichend die Konvergenz der Reihe Σb_ν mit der zu A konjugierten Exponentenfolge B.

Es liegt die folgende Frage nahe:

Wann kann man für eine vorgegebene Exponentenfolge A einen festen Exponenten α finden, mit der Eigenschaft, daß jede mit A konvergente Reihe auch mit α konvergiert und umgekehrt?

[4]) Der vorangehende Beweis ist dem Beweise des Hilfssatzes 6, I der Arbeit von Z. W. Birnbaum — W. Orlicz, Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, Studia Math. 3 (1931) p. 1—67, spez. p. 17—20, nachgebildet.

Unter gewissen Voraussetzungen wird diese Frage durch die folgenden Sätze beantwortet.

Satz 3. *Gegeben sei eine Exponentenfolge $A \equiv \{\alpha_\nu\}$,*

$$1 \leqslant \alpha < \alpha_\nu .$$

Dafür, daß die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\alpha_\nu} \tag{10}$$

immer die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\alpha} \tag{11}$$

zur Folge habe [5]), *ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend:*

Es gibt eine Zahl k $(0 < k < 1)$, für welche die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} k^{\gamma_\nu} \tag{12}$$

konvergiert — dabei bedeutet $\{\gamma_\nu\}$ die zu $\{\alpha_\nu/\alpha\}$ konjugierte Exponentenfolge, dh. es ist $\gamma_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu - \alpha}$.

Beweis. (a) Zuerst setzen wir $\alpha = 1$ voraus. Nach (5) haben wir

$$|a_\nu|\, k \leqslant \frac{1}{\alpha_\nu} |a_\nu|^{\alpha_\nu} + \frac{1}{\gamma_\nu} k^{\gamma_\nu} ,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| \leqslant \frac{1}{k} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\alpha_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} k^{\gamma_\nu} \right) ,$$

wo $\gamma_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu - 1}$ ist. Aus der letzten Ungleichung folgt $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| < +\infty$ für jede mit A konwergente Reihe Σa_ν, falls wir die Konvergenz von (12) voraussetzen.

Die Konvergenz der Reihe (12) bildet auch eine notwendige Bedingung. Setzen wir voraus, daß für jede mit A konver-

[5]) Bei unserer Voraussetzung folgt natürlich immer aus der Konvergenz von (11) die Konvergenz von (10).

gente Reihe Σa_ν die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ konvergiert, so sind offensichtlich die Voraussetzungen von Satz 1, wenn wir dort $b_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ setzen, erfüllt. Es gibt also nach diesem Satze eine Zahl $k, 0 < k < 1$, für welche (4) stattfindet. In unserem Falle ist aber (4) mit der Konvergenz der Reihe (12) (mit $\gamma_\nu = \alpha_\nu/\alpha_\nu - 1$) identisch.

(b) Nun setzen wir ein beliebiges $\alpha > 1$ voraus. Es ist leicht zu sehen, daß man dann und nur dann für eine beliebige mit A konvergente Reihe Σa_ν auf die Konvergenz der Reihe (11) schließen kann, wenn für jede der Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\frac{\alpha_\nu}{\alpha}} < +\infty$$

genügende Reihe Σa_ν die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ konvergiert. Die Anwendung des unter (a) bewiesenen Satzes, wobei α_ν durch α_ν/α zu ersetzen ist, gibt unsere Behauptung.

Geht man von $\alpha > 1$ und A zu dem konjugierten Exponenten β, bezw. zur konjugierten Exponentenfolge B über, so erhält man den folgenden

Satz 3′. *Gegeben sei eine Exponentenfolge $B \equiv \{\beta_\nu\}$ wo $\beta_n < \beta < +\infty$ sind. Dafür, daß immer die Konvergenz der Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\beta}$$

die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\beta_\nu} \tag{13}$$

zur Folge habe, ist notwendig und hinreichend die Existenz einer Zahl k $(0 < k < 1)$, für welche die Reihe (12) konvergiert. Die α_ν sollen dabei die zu β_ν konjugierten Exponenten bedeuten.

Den Grenzfall $\beta = \infty$ $(\alpha = 1)$ muß man besonders formulieren:

Satz 3″. *Dafür, daß für jede nullkonvergente Zahlenfolge $\{a_\nu\}$ die Reihe (13) konvergiere, ist notwendig und hinreichend die Existenz einer Zahl k $(0 < k < 1)$ mit*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} k^{\beta_\nu} < +\infty . \tag{14}$$

§ 2.

Es sei $\alpha(x) > 1$ eine Funktion. Die zu ihr *konjugierte* Funktion — im folgendem soll sie mit $\beta(x)$ bezeichnet werden — definieren wir durch die Relation

$$\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{\beta(x)} = 1 .$$

Setzen wir $\alpha(x)$ als L-meßbar voraus, so ist für ein meßbares $f(x)$ auch $|f(x)|^{\alpha(x)}$ eine meßbare Funktion. Im weiteren setzen wir voraus daß $\alpha(x)$ also auch $\beta(x)$ meßbar ist.

Eine meßbare Funktion $f(x)$ nennen wir mit $\alpha(x)$ *integrierbar*, wenn das Integral

$$\int_0^1 |f(x)|^{\alpha(x)} dx \tag{15}$$

existiert.

Verschiedene Untersuchungen über die mit einem konstanten α integrierbaren Funktionen, lassen sich auf gewisse Klassen der mit einem $\alpha(x)$ integrierbaren Funktionen verallgemeinern.

Ohne auf die Einzelheiten näher einzugehen, geben wir hier einige Beispiele von derartigen Sätzen. Bei dem Beweise von Satz 4 kann man genau dieselbe Methode anwenden, mit welcher man gewöhnlich den entsprechenden Satz im Falle $\alpha = \text{Const.}$ beweist [6]). Bei dem Beweise von Satz 5 kann man sich z. B. der Methode, die, in der unter [4]) zitierten Arbeit angewandt wurde, bedienen [7]).

Satz 4. *Aus der Bedingung*

$$\lim_{p, q \to \infty} \int_0^1 |f_p(x) - f_q(x)|^{\alpha(x)} dx \tag{16}$$

folgt die Existenz einer meßbaren Funktion $f(x)$, für welche

[6]) Vgl. etwa S. Kaczmarz — W. Nikliborc, Sur les suites des fonctions, Fund. Math. 11 (1928) p. 151—168.

[7]) l. c. [4]) p. 54.

$$(17) \qquad \lim_{\nu\to\infty}\int_0^1 |f_\nu(x)-f(x)|^{\alpha(x)}dx=0$$

stattfindet.

Setzen wir noch weiter $\alpha(x)<x$ *und die Integrierbarkeit eines* $f_p(x)$ *mit* $\alpha(x)$ *voraus, so folgt aus (16) nicht nur (17) sondern auch die Integrierbarkeit von* $f(x)$ *mit* $\alpha(x)$. *Es läßt sich auch dann aus (17) auf (16) schließen.*

Satz 5. *Es sei* $\{f_\nu(x)\}$ *eine Folge von meßbaren Funktionen, die der Bedingung*

$$(18) \qquad \int_0^1 |f_\nu(x)|^{\alpha(x)}dx<K \qquad (\nu=1,2,3\ldots)$$

genügen, wo $1<\alpha\leqslant\alpha(x)$ *ist.*

Man kann aus $\{f_\nu(x)\}$ *eine Teilfolge* $\{f_{n_\nu}(x)\}$ *herausgreifen mit den folgenden Eigenschaften:*

Es gibt eine mit $\alpha(x)$ *integrierbare Funktion* $f(x)$ *so, daß für jede mit* $\beta(x)$ *integrierbare Funktion* $g(x)$

$$(19) \qquad \lim_{\nu\to\infty}\int_0^1 f_{n_\nu}(x)\,g(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

gilt; ferner besteht die Ungleichung

$$(20) \qquad \underline{\lim}_{\nu\to\infty}\int_0^1 |f_{n_\nu}(x)|^{\alpha(x)}dx\geqslant\int_0^1 |f(x)|^{\alpha(x)}dx.$$

Satz 6. *Dafür, daß für eine beliebige mit* $\alpha(x)$ *integrierbare Funktion* $f(x)$, *das Integral*

$$(21) \qquad \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

existiere, ist notwendig und hinreichend, daß für ein gewisses k $(0<k<1)$

$$(22) \qquad \int_0^1 |k\,g(x)|^{\beta(x)}dx<+\infty$$

sei.

Satz 6'. *Setzt man außerdem voraus, daß* $1<\alpha\leqslant\alpha(x)$ *ist, so existiert (21) dann und nur dann für jedes mit* $\alpha(x)$ *integrierbare* $f(x)$, *wenn* $g(x)$ *mit* $\beta(x)$ *integrierbar ist.*

Man kann natürlich in den Sätzen 4—6' statt (0,1) irgendeine andere meßbare Menge als Definitionsmenge wählen.

Es gibt für Integrale keine Analogien zu den Sätzen 3, 3', 3''; man kann nämlich folgendes leicht zeigen: Ist jede mit $\gamma(x)$ integrierbare Funktion auch mit $\delta(x)$ integrierbar und umgekehrt, so muß fast überall $\gamma(x)=\delta(x)$ gelten.

§ 3.

In einer interessanten Arbeit des Herrn S. Banach [8]) über lakunäre trigonometrischen Reihen ist die folgende Anwendung des dort bewiesenen allgemeinen Äquivalenzsatzes gegeben:

Es gibt eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_\nu\}$ mit

$$(23) \qquad 0<\varepsilon_\nu<1, \quad \lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu=0$$

und eine stetige Funktion $f(x)$, für welche die Reihe

$$(24) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(|a_\nu|^{2-\varepsilon_\nu}+|b_\nu|^{2-\varepsilon_\nu}\right),$$

wo a_ν, b_ν die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ bedeuten, divergiert. Daß nicht für jede Zahlenfolge (23) man eine solche stetige Funktion angeben kann, ist nach dem Satze 3' klar.

Aus diesem Satze kann man auch leicht die Bedingungen für $\{\varepsilon_\nu\}$ entnehmen, unter welchen die Beweisführung des Herrn Banach anwendbar ist — also sicher eine stetige Funktion mit der divergenten Reihe (24) existiert.

Ohne darauf näher einzugehen setzen wir nun voraus, daß es für eine gewisse Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ eine stetige Funktion gibt mit divergenter Reihe (24). Der Einfachheit halber setzen wir noch $2-\varepsilon_n=\alpha_n$, so daß $1<\alpha_n<2$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=2$ ist.

Unter dieser Voraussetzung kann man folgendes behaupten:

Satz 7. *Es existiert eine trigonometrische Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$, *die keine Fourierreihe ist, für welche aber*

$$(25) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(|a_\nu|^{\beta_\nu}+|b_\nu^*|^{\beta_\nu}\right)<+\infty$$

gilt, wo β_ν *die zu* α_ν *konjugierten Exponenten bedeuten.*

[8]) S. Banach, Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, Stud. Math. 2 (1930) p. 207—220; vgl. insb. p. 208—209.

Beweis[9]). Wir nehmen an, daß jede trigonometrische Reihe, für welche (25) gilt, die Entwicklung einer integrierbaren Funktion darstellt. Bezeichnen wir mit c_ν, d_ν die Fourierkoeffizienten einer beliebigen stetigen Funktion, so könnte man daraus schließen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1} (a_\nu c_\nu + b_\nu d_\nu) \tag{26}$$

$(C1)$ summierbar ist und weiter, da $\{a_\nu\}$, $\{b_\nu\}$ nur der Bedingung (24) unterworfen sind, müßte daraus die gewöhnliche Konvergenz von (26) folgen. Nach Satz 2 müßte also die Reihe

$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (|c_\nu|^{\alpha_\nu} + |b_\nu|^{\alpha_\nu})$ konvergieren was aber unserer Voraussetzung widerspricht.

In der oben zitierten Arbeit von Herrn S. Banach wurde auch der folgende Satz bewiesen:

Es existiert eine gegen $+\infty$ konvergierende Folge $\{\lambda_\nu\}$ von positiven Zahlen und eine integrierbare Funktion $f(x)$ von der Eigenschaft, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(|a_\nu|^{\lambda_\nu} + |b_\nu|^{\lambda_\nu} \right)$$

divergiert. Dabei bedeuten a_ν, b_ν die Fourierkoeffizienten von $f(x)$.

Indem man die Beweismethode, die ich zu analogen Zwecke an anderer Stelle[10]) angewandt habe und den Satz 3′ ausnützt, kann man den folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Satz 8. *Gegeben sei ein beliebiges, unendliches Orthogronalsystem, dessen Funktionen gleichmäßig beschränkt sind. Wenn für die Exponentenfolge $\{\lambda_\nu\}$ die Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} k^{\lambda_\nu}$$

bei jedem $0 < k < 1$ divergiert, dann existiert eine integrierbare Funktion $f(x)$, für welche die Reihe

[9]) Diese Beweismethode ist der Abhandlung entlehnt worden: H. Steinhaus, Sur les développements orthogonaux, Bull. Ac. Pol. (1926) p. 11—39. insbes. p. 30, Théor. XI.

[10]) W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen I, Studia Math. 1 (1929) p. 1—39; spez. p. 38, Satz 26.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^{\lambda_\nu}$$

divergent ist. Dabei bedeuten c_ν die Entwicklungskoeffizienten von $f(x)$ nach dem gegebenen System.

Die angeführte Bedingung für $\{\lambda_\nu\}$ ist offenbar auch notwendig dafür, daß eine Funktion mit der verlangten Eigenschaft existiert.

Zum Schluß werden wir noch einige Anwendungen der Sätze aus § 2 geben.

Satz 9. *Gegeben sei ein Orthogonalsystem $\{\varphi_\nu(x)\}$, das den folgenden Bedingungen genügt:*

$$\text{a)} \quad |\varphi_n(x)| < L_n ,$$

$$\text{b)} \quad \int_0^1 |K_n(x,t)|\, dx < L \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

wo $K_n(x,t) = \sum\limits_{\nu=1}^{N(n)} b_{n\nu} \left[\sum\limits_{i=1}^{\nu} \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(t) \right]$ *ist und die Matrix (b_{ij}) einer linearen, zeilenfiniten, permanenten Limitierungsmethode T entspricht.*

Es bezeichne $\sigma_n(x)$ die n-te T-Transformierte der Orthogonalreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x) . \tag{27}$$

Dafür, daß (27) die Orthogonalentwicklung einer mit $\alpha(x)$, $1 < \alpha \leqslant \alpha(x) \leqslant \varkappa < +\infty$, integrierbaren Funktion sei, ist die Ungleichung

$$\int_0^1 |\sigma_n(x)|^{\alpha(x)}\, dx < L' \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

notwendig und hinreichend

Satz 10. *Die Voraussetzungen wie im vorigen Satze.*

Dafür, daß (27) die Orthogonalentwicklung einer mit $\alpha(x)$, $1 < \alpha \leqslant \alpha(x) \leqslant \varkappa < +\infty$, integrierbaren Funktion sei, ist

$$\lim_{p,\, q \to \infty} \int_0^1 |\sigma_p(x) - \sigma_q(x)|^{\alpha(x)}\, dx = 0$$

notwendig und hinreichend.

(Reçu par la Rédaction le 6. 5. 1931).