Sur une classe de dendrites.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

M. Čech a posé le problème suivant [1]).

Trouver les conditions nécessaires et surffisantes auxquelles doit satisfaire un continu C, pour qu'il existe une fonction réelle continue sur C et ne prenant chaque valeur qu'un nombre fini des fois au plus.

Trois conditions nécessaires ont été données par M. Čech [2]). Je me propose de donner la solution du problème dans le cas où C est une dendrite c. à d. un continu péanien ne contenant aucune ligne simple fermée [3]).

I. Remarques préliminaires.

1. Soit A un espace métrique, compact, $f(x)$ une fonction continue pour $x \in A$, transformant A en un ensemble B, ce que j'indiquerai en ecrivant $B = f(A)$. Pour $A_1 \subset A$ je poserai $f(A_1) = \sum_{x \in A_1} f(x)$. Pour $y \in B$ je vais désigner par $f^{-1}(y)$ l'ensemble de tous les x tels que $f(x) = y$. Chacun de ces ensembles sera nommé *tranche de* $f(x)$ [4]). Si tout $f^{-1}(y)$ est fini je dirais que $f(x)$ est une *fonctions à tranches finies*. Je dirais enfin en suivant la terminologie de M. Čech *qu'un continu possède la propriété P*, s'il existe une fonction continue à tranches finies le transformant en un arc simple.

2. Soit D une dendrite, $b \in D$; b est une extrémité de D, un point ordinaire de D, un point de ramification de D suivant que

[1]) Dans une lettre à M. Saks.

[2]) comp. la Note précédente.

[3]) Dendrite = acyclic curve = Baumkurve.

[4]) comp. Kuratowski: Fund. Math. XI, p. 169—185 en part. p. 181. Je modifie un peu la terminologie de M. Kuratowski.

$D - b$ contient un seul, deux ou plus de deux constituants. Désignons par E et R l'ensemble des extrémités de D et l'ensemble de ses points de ramification. On sait que R est dénombrable et que E est un G_δ [5]).

Si $b \in D$, $c \in D$, il n'existe dans D qu'un seul arc simple aux extrémités b et c [6]); nous le désignerons par (bc).

3. Soit $U \subset D$; j'appelle *point limite bilatéral* de U tout point $b \in D$ tel que l'on a pour deux constituants T_1, T_2 de $D - b$ la relation:

$$b \in (T_1 \times U)' \times (T_2 \times U)' = (\overline{T_1} \times U)' \times (\overline{T_2} \times U)' \tag{1}$$

Désignons par $\Phi(U)$ la *„cohérence bilatérale"* de U, c. à d. l'ensemble de points limites bilatéraux de U, contenus dans U [7]). Posons:

$$\begin{aligned} &\Phi_0(U) = U \\ &\Phi_{\alpha+1}(U) = \Phi(\Phi_\alpha(U)) \qquad \alpha\text{-nombre ordinal} \\ &\Phi_\alpha(U) = \prod_{\beta<\alpha} \Phi_\beta(U) \qquad \alpha\text{-nombre ordinal de seconde espèce.} \end{aligned} \tag{2}$$

Il existe un premier nombre ordinal $\lambda(U)$ tel que $\Phi_{\lambda(U)}(U) = \Phi_{\lambda(U)+1}(U)$. On a: $\lambda(U) < \Omega$; j'omets la démonstration de cette inégalité, car elle est évidente si U est dénombrable, seul cas que nous aurons à considérer. Posons: $M(U) = \Phi_{\lambda(U)}(U)$. Si $M(U) = 0$, nous dirons que *U est réductible par l'opération Φ*.

4. Nous définirons maintenant une operation Ψ applicable aux dendrites (incl. l'ensemble vide et l'ensemble se réduisant à un seul point). Posons:

$$\begin{aligned} &\Psi(D) = \overline{\sum_{\substack{x \in R \\ y\, R}} (xy)} \qquad \text{si } R \neq 0 \\ &\Psi(D) = 0 \qquad\qquad \text{si } R = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

[5]) Kuratowski—Zarankiewicz: Bull. Amer. Soc. 1927, p. 571—575. Ważewski: Ann. Soc. Pol. 2 (1923) p. 169. Menger: Math. Ann. 96 (1926) p. 574. Gehman: Trans. Amer. Soc. 30, p. 63—84. Menger: Math. Ann 95, p. 282.

[6]) Mazurkiewicz: Fund. Math. II, p. 123.

[7]) L'opération Φ dépendant de D, il faudrait écrir à la rigueur Φ^D au lieu de Φ; mais si $U \subset D_1 \subset D$ alors $\Phi^{D_1}(U) = \Phi^D(U)$; donc si l'on se borne à considérer l'opération Φ pour une dendrite fixe D et ses sous-dendrites, on peut supprimer l'indice D. On pose: $\Phi(0) = 0$.

$\Psi(D)$ est un continu $\subset D$, contenant R et irréductible par rapport à ces propriétés. Soit:

$$\Psi_1(D) = \Psi(D)$$

$$(4) \qquad \Psi_{\alpha+1}(D) = \Psi(\Psi_\alpha(D)) \qquad \alpha \text{ nombre ordinal } < \Omega$$

$$\Psi_\alpha(D) = \prod_{\beta<\alpha} \Psi_\beta(D) \qquad \alpha \text{ nombre ordinal de seconde espèce } < \Omega.$$

Il existe un premier nombre ordinal $\mu(D) < \Omega$ tel que $\Psi_{\mu(D)}(D) = \Psi_{\mu(D)+1}(D)$. Posons $N(D) = \Psi_{\mu(D)}(D)$. Si $N(D) = 0$ nous dirons que D est réductible par l'opération Ψ.

5. *Si $N(D) = 0$, alors E est clairsemé (donc dénombrable* [8]) *et vice versa.* Supposons que E contient un sous-ensemble H dense en soi. Soit: $D_\alpha = \Psi_\alpha(D)$ et désignons par E_α, R_α l'ensemble des extrémités resp. l'ensemble de points de ramification de D_α. Un point d'une dendrite qui est point-limite des extrémités de cette dendrite est aussi point-limite de ses points de ramification; d'autre part, l'extrémité d'une dendrite est encore l'extrémité de toute sous-dendrite qui la contient. Donc si $H \subset E_\alpha$ on aura $H \subset R'_\alpha \subset \overline{R}_\alpha \subset \subset \Psi(D_\alpha) = D_{\alpha+1}$ donc aussi $H \subset E_{\alpha+1}$. Comme $H \subset E$, on aura: $H \subset E_{\mu(D)} \subset D_{\mu(D)} = N(D)$, c. à d.: on a $N(D) \neq 0$.

Supposons maintenant que E est dénombrable; il en est de même pour E_α. Rangeons les points de E en une suite: $a_1, a_2, \ldots$ et considérons un point $c \in E_\alpha$. Si $c \in E + R$ posons $\varphi(c) = c$. Si $c \in E_\alpha - (E + R)$, alors $D - c$ se décompose exactement en deux constituants. $\dot{D}_\alpha - c$ étant connexe et $\subset D - c$, l'un de ces constituants contient $D_\alpha - c$, l'autre que nous désignerons par $T_0(c)$ est disjoint avec $D_\alpha - c$. $\overline{T_0(c)}$ étant une dendrite contient au moins deux extrémités [9]), donc au moins une extrémité différente de c; cette extremité est évidemment une extremité de D; donc $T_0(c) \times E \neq 0$. Posons: $\varphi(c) = a_{k_1}$, a_{k_1} étant le premier point de la suite $\{a_k\}$ contenu dans $T_0(c)$. La fonction $\varphi(c)$ est définie pour tout $c \in E_\alpha$ et on a $\varphi(c) \in E + R$. Je dis que pour $c_1 \neq c_2$ on a $\varphi(c_1) \neq \varphi(c_2)$. C'est évident si $c_1 \in E + R$, $c_2 \in E + R$. Si l'un des points c_1, c_2 p. ex. c_1 est contenu dans $E + R$, l'autre dans $E_\alpha - (E + R)$, on a: $\varphi(c_1) = c_1 \in E_\alpha \subset D_\alpha$ et $\varphi(c_2) \in T_0(c_2)$, donc comme $T_0(c_2) \times D_\alpha = 0$ il en résulte: $\varphi(c_1) \neq \varphi(c_2)$. Soit enfin $c_1 \in E_\alpha - (E + R)$ et $c_2 \in E_\alpha - (E + R)$. Si on aurait

[8]) Un G_δ dénombrable est clairsèmé et vice versa (Théor. de M. W. H. Young).

[9]) Mazurkiewicz: Fund. Math. II, p. 119—130.

$\varphi(c_1) = \varphi(c_2)$ on aurait: $T_0(c_1) \times T_0(c_2) \neq 0$, donc $T_0(c_1) = T_0(c_2)$ et: $c_2 \in \overline{T_0(c_1)} \times (D_\alpha - c_1)$ c. à d. $T_0(c_1)$ et $D_\alpha - c$, ne seraient pas disjoints ce qui est impossible. On voit que $\varphi(c)$ établit une correspondance biunivoque entre E_α et une partie de l'ensemble dénombrable $E + R$. Donc E_α est dénombrable. En particulier $E_{\mu(D)}$ est dénombrable, donc clairsèmé. Soit c' un point isolé de $E_{\mu(D)}$. Supposons $R_{\mu(D)} \neq 0$ et soit $c'' \in R_{\mu(D)}$. Comme $c' \in E_{\mu(D)} - E'_{\mu(D)}$ on a c' non $\in \overline{R_{\mu(D)}}$. Soit c''' le premier point de l'arc $(c'c'')$ à partir de c' contenu dans $\overline{R_{\mu(D)}}$ l'ensemble $[D_{\mu(D)} - (c'c'')] + c'''$ est un continu contenant $\overline{R_{\mu(D)}}$ donc contenant $\Psi(D_{\mu(D)}) = D_{\mu(D)+1} = D_{\mu(D)}$ donc contenant c' ce qui est contradictoire. Donc: $R_{\mu(D)} = 0$, donc $D_{\mu(D)+1} = N(D) = 0$ c. q. f. d.

II. Les conditions nécessaires.

6. *Si la dendrite D possède la propriété P alors E est dénombrable.* C'est un cas particulier du théorème 2 de M. Čech [10]).

7. *Si la dendrite D possède la propriété P, alors $M(R) = 0$.* Supposons au contraire $M(R) \neq 0$ et soit $f(x)$ une fonction continue à tranches finies transformant D en un intervalle fermé.

Lemme. Soit H un ensemble fermé, I un intervalle fermé, $q \in M(R) - H$ un point tel que $f(q)$ est intérieur à I; il existe alors deux points q', r' tels que:

$$(5) \qquad f(qr') \subset I$$

$$(6) \qquad q' \in M(R) - [H + (qr')]$$

$$(7) \qquad H \times (qr') = 0$$

$$(8) \qquad f(q') \text{ est intérieur a } f((qr')).$$

Soit $f(q) = \alpha$. H étant fermé et $f^{-1}(\alpha)$ fini il existe un $\eta > 0$ tel que les inégalités

$$(9) \qquad \rho(x, q) < \eta; \quad x \in D; \quad z \in (xq); \quad z \neq q$$

entraînent:

$$(10) \qquad (xq) \times H = 0; \quad f((xq)) \subset I; \quad f(z) \neq \alpha$$

il en résulte que l'intervalle fermé $f((xq))$ a α comme extremité.

[10]) v. la Note précédente.

$D-q$ contient trois constituants T_i, $i=1,2,3$ tels que:

(11) $$q \in (T_1 \times M(R))' \times (T_2 \times M(R))'$$

considérons trois points z_i, $i=1,2,3$ tels que $z_i \in T_i$; $\varrho(z_i,q)<\eta$. Parmi les trois intervalles fermés $f((z_i\, q))$ il-y-en a deux qui ont α pour extrémité gauche (resp. droite). Moyennant une permutation d'indices 1, 2 resp. un changement de $f(x)$ en $2\alpha - f(x)$ nous pouvons supposer que $f((z_1\, q))$ et un des intervalles $f((z_i\, q))$ $i=2,3$ ont α pour extremité droite; désignons par r' le premier des deux points z_2, z_3 pour lequel $f((z_i\, q))$ a α comme extremité droite. On a évidemment (5), (7) et $(q r')\times T_1=0$; $f(r')=\beta<\alpha$. D'après (11) nous pouvons déterminer $q'\in(T_1\times M(R))$ de manière à avoir: $\varrho(q,q')<\eta$ et: $|f(q')-\alpha|<\alpha-\beta$. Ce point satisfait à (6), reste à démontrer (8), ce qui revient à démontrer l'inégalité: $f(q')<\alpha$. Or q' et z_1 étant contenus dans le semicontinu T_1 on a: $(q' z_1)\subset T_1\times[(q' q)+(q z_1)]$. Soit $z\in(q' z_1)$ alors $z\in T_1$, donc $z\neq q$ et comme $z\in(q' q)+(q z_1)$ on aura $f(z)\neq\alpha$. L'intervalle fermé $f((q' v_1))$ ne contient pas α mais contient $f(z_1)<\alpha$, donc il est situé entièrement à gauche de α; donc $f(q')<\alpha$ et le lemme est démontré.

Déterminons deux suites de points: $q_0, q_1, \dots$, et $s_1, s_2, \dots$ de manière suivante.

(I) q_0 est un point arbitraire de $M(R)$; q_1, s_1 sont tels que $q_1\in M(R)-(q_0\, s_1)$ et que $f(q_1)$ est intérieur à l'intervalle $f((q_0\, s_1))$; ces points existent d'après le lemme.

(II) Supposons détérminés: $q_0, q_1, \dots, q_k, s_1, s_2, \dots, s_k$ de manière que $q_k\in M(R)-\sum_{i=0}^{k-1}(q_i\, s_{i+1})$ et que $f(q_k)$ est intérieur à l'intervalle $f((q_{k-1}\, s_k))$. q_{k+1}, s_{k+1} sont deux points, tels que

(12) $$f((q_k\, s_{k+1}))\subset f((q_{k-1}\, s_k))$$

(13) $$q_{k+1}\in M(R)-\sum_{i=0}^{k}(q_i\, s_{i+1})$$

(14) $$(q_k\, s_{k+1})\times\sum_{i=0}^{k-1}(q_i\, s_{i+1})=0$$

(15) $f(q_{k+1})$ est intérieur à l'intervalle $f((q_k\, s_{k+1}))$

l'existence de ces points est une conséquence du lemme.

D'après (14) on a pour $k\neq j$:

(16) $$(q_j\, s_{j+1})\times(q_k\, s_{k+1})=0.$$

D'après (12) $\prod_{k=0}^{\infty} f((q_k\, s_{k+1}))\neq 0$; soit $y'\in\prod_{k=0}^{\infty} f((q_k\, s_{k+1}))$. L'arc $(q_k\, s_{k+1})$ contient un point x_k tel que $f(x_k)=y'$ donc $x_k\in f^{-1}(y')$. Les points x_k étant différents entre eux d'après (16), on voit que $f^{-1}(y')$ contient une infinité de points, contrairement à la supposition que $f(x)$ est à tranches finies.

III. Les conditions suffisantes.

8. *Si $M(R)=N(D)=0$ alors D possède la propriété P.* La démonstration procédéra par induction transfinie. Nous ferons d'abord quelques remarques et nous considérerons quelques cas particuliers.

9. *Si la fonction continue $f(x)$ à tranches finies transforme le continu C en un continu possèdant la propriété P, alors C possède la propriété P.*

10. *Soit C un continu possèdant la propriété P; $x_1\in C$; $x_2\in C$; J un arc simple aux extrémités y_1, y_2. Il existe une fonction continue à tranches finies $f(X)$, telle que $f(C)=J$, $f(x_i)=y_i$, $i=1,2$.* — J'omets la démonstration de 9 et 10.

11. J'appelle *étoile* une dendrite n'ayant qu'un seul point de ramification; x_0 étant ce point, une étoile est de la forme: $\sum_k(x_0\, x_k)$ où: $(x_0\, x_k)\times(x_0\, x_j)=x_0$ pour $k\neq j$; si la somme est infinie alors [11]: $\lim_{k=\infty}\delta((x_0\, x_k))=0$. Une étoile possède évidemment la propriété P.

12. J'appelle *peigne* une dendrite D de la forme: $D=(x_1\, x_2)+\sum_k(y_k\, z_k)$ où:

(17) $$(x_1\, x_2)\times(y_k\, z_k)=y_k \qquad y_k\neq x_i,\quad i=1,2$$

(18) $$(y_k\, z_k)\times(y_j\, z_j)=0 \qquad k\neq j.$$

On a: $R=\sum_k y_k\subset(x_1\, x_2)$.

Si pour une peigne D on a $M(R)=0$, alors D possède la propriété P. C'est évident si $\lambda(R)=0$, car alors $R=\Phi_0(R)=0$ et la peigne se réduit à un arc simple.

[11]) $\delta(A)=$ diamètre de l'ensemble A.

Soit maintenant $\lambda(R)=\alpha<\Omega$ et supposons que le théorème est vrai pour toute peigne D^* telle que $M(R^*)=0$, $\lambda(R^*)<\alpha$, R^* désignant l'ensemble de points de ramification de D^*.

D'après $M(R)=0$, $\lambda(R)=\alpha$ on aura:

$$R=\sum_{0\leqslant\beta<\alpha}[\Phi_\beta(R)-\Phi_{\beta+1}(R)]. \tag{19}$$

Considérons un point y_k. D'après (19) il existe un $\beta_k<\alpha$ tel que $y_k\in\Phi_{\beta_k}(R)-\Phi_{\beta_k+1}(R)$. Les deux arcs semi-ouverts: $(x_i\,y_k)-y_k$, $i=1,2$ sont contenus dans des constituants différents de $D-y_k$. Le point y_k ne peut pas être simultanement point limite de $(x_1\,y_k)\times\Phi_{\beta_k}(R)$ et $(x_2\,y_k)\times\Phi_{\beta_k}(R)$, car il serait alors point limite bilatéral de $\Phi_{\beta_k}(R)$ donc point de $\Phi_{\beta_k+1}(R)$. Il en résulte que l'on peut détérminer un point $t_k\in(x_1\,x_2)-R$ tel que:

$$(t_k\,y_k)\times\Phi_{\beta_k}(R)=y_k. \tag{20}$$

Détérminons une suite d'entiers: $k_1, k_2, \ldots$ et une suite de points $v_1, v_2, \ldots$ de manière suivante: I) $k_1=1$, $v_1=t_1$; II) Supposons détérminés $k_1, k_2, \ldots, k_m$, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ de manière que: $v_n\in(x_1\,x_2)-R$, $n=1,2,\ldots,m$. Soit k_{m+1} le plus petit entier pour lequel: $y_{k_{m+1}}\in R-\sum_{n=1}^{m}(y_{k_n}v_n)$ et v_{m+1} un point de $(y_{k_{m+1}}\,t_{k_{m+1}})-R$ tel que $(y_{k_{m+1}}\,v_{m+1})\times\sum_{m=1}^{m}(y_{k_n}v_n)=0$. On a les relations:

$$R\subset\sum_m(y_{k_m}v_m) \tag{21}$$

$$v_m\in(x_1\,x_2)-R \tag{22}$$

$$(y_{k_n}v_n)\times(y_{k_m}v_m)=0 \qquad m\neq n \tag{23}$$

$$(y_{k_m}v_m)\times\Phi_{\beta_{k_m}}(R)=y_{k_m}. \tag{24}$$

Posons:

$$R_m=[R\times(y_{k_m}v_m)]-y_{k_m} \tag{25}$$

$$D_m=(z_{k_m}v_m)+\sum_{y_i\in R_m}(y_i\,v_i). \tag{26}$$

D'après (22), (25), (26) on voit que D_m est une peigne et que R_m est l'ensemble de ses points de ramification. D'après (24), (25):

$$\Phi_{\beta_{k_m}}(R_m)=[\Phi_{\beta_{k_m}}(R)\times(y_{k_m}v_m)]-y_{k_m}=0. \tag{27}$$

Donc $\lambda(R_m)\leqq\beta_{k_m}<\alpha$. D_m est par suite une dendrite possédant la propriété P et d'après **10** il existe une fonction continue à tranches finies $f_m(x)$, telle que: $f_m(D_m)=(y_{k_m}v_m)$, $f_m(y_{k_m})=y_{k_m}$, $f_m(v_m)=v_m$. On a de plus: $\varrho(x,f_m(x))\leqq\delta(D_m)$ et comme d'après (23): $D_m\times D_n=0$ pour $m\neq n$ on aura: $\lim_{m=\infty}\delta(D_m)=0$. L'inclusion (21) montre que:

$$D=\Big[(x_1x_2)-\sum_m(y_{k_m}v_m)\Big]+\sum_m D_m=B+\sum_m D_m=\overline{B}+\sum_m D_m. \tag{28}$$

Définissons $f(x)$ par les formules: $f(x)=x$ pour $x\in B$ et $f(x)=f_m(x)$ pour $x\in D_m$. En se servant des propriétés de $f_m(x)$ et de la relation: $\overline{B}\times D_m=y_{k_m}+v_m$ on vérifie sans peine que $f(x)$ est continue. On a pour $x\in B$, $f^{-1}(x)=x$ et pour $y\in(y_{k_m}v_m)$, $f^{-1}(y)=f_m^{-1}(y)$. Donc $f(x)$ est à tranches finies. Enfin:

$$f(D)=f(B)+\sum_m f_m(D_m)=B+\sum_m(y_{k_m}v_m)=(x_1\,x_2). \tag{29}$$

Donc D possède la propriété P et notre théorème est démontré par induction.

13. *Soit D une dendrite $x_0\in E$, $z_0\in D-x_0$. Si toute dendrite contenue dans $D-x_0$ possède la propriété P, alors il existe une fonction continue à tranches finies $f(x)$ telle que $f(D)=(x_0\,z_0)$; $f^{-1}(x_0)=x_0$.*

Soit $z_1, z_2, \ldots$, une suite de points, telle que: $\lim_{k=\infty}z_k=x_0$; $z_k\in(x_0\,z_{k-1})-[E+R+z_{k-1}]$. Posons: $L_0=D$ et désignons pour $k=1,2,\ldots$ par L_k celui des deux constituants de $D-z_k$ qui contient x_0. Soit $Q_k=\overline{L}_{k-1}\times(D-L_k)$, $k=1,2,\ldots$, Q_k contient z_{k-1} et z_k et il est la partie commune de deux dendrites, donc c'est un continu, une dendrite étant un continu unicohérent [12]). x_0 n'est pas contenu dans Q_k, donc Q_k possède la propriété P. D'après **10** il existe une fonction continue à tranches finies $f_k(x)$ telle que:

$$f_k(Q_k)=(z_{k-1}\,z_k);\; f_k(z_{k-1})=z_{k-1};\; f_k(z_k)=z_k;\; \varrho(x,f_k(z))\leqq\delta(Q_k) \tag{30}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}Q_k\times Q_{k+1}&=\overline{L}_{k-1}\times\overline{L}_k\times(D-L_k)\times(D-L_{k+1})=\\&=\overline{L}_k\times(D-L_k)=z_k\end{aligned} \tag{31}$$

et si $l\geqq 2$:

[12]) C. Kuratowski: Fund. Math. XII, p. 311.

$$(32) \qquad \overline{L}_{k+l-1} \subset \overline{L}_{k+1} \subset L_k$$

$$(33) \qquad Q_k \times Q_{k+l} = \overline{L}_{k-1} \times \overline{L}_{k+l-1} \times (D - L_k) \times (D - L_{k+l}) \subset \subset L_k \times (D - L_k) = 0$$

$$(34) \qquad (z_{k-1} z_k) \times \prod_{l=0}^{\infty} \overline{L}_l \subset (D - L_k) \times \overline{L}_{k+1} \subset (D - L_k) \times L_k = 0$$

$$(35) \qquad (x_0 z_0) \times \prod_{l=0}^{\infty} \overline{L}_l = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(z_{k-1} z_k) \times \prod_{l=0}^{\infty} \overline{L}_l \right] = x_0.$$

Je dis que: $x_0 = \prod_{l=0}^{\infty} \overline{L}_l$; supposons en effet le contraire et soit $x' \in \prod_{l=0}^{\infty} \overline{L}_l - x_0$; x_0 étant une extrémité de D on a:

$$(36) \qquad (x' z_0) \subset (D - x_0) \times [(x' x_0) + (x_0 z_0)]$$

$$(37) \qquad (x' z_0) = [(x' z_0) \times (x' x_0)] + [(x' z_0) \times (x_0 z_0)]$$

$$(38) \qquad [(x' z_0) \times (x' x_0)] \times [(x' z_0) \times (x_0 z_0)] \subset (D - x_0) \times (x' x_0) \times (x_0 z_0) = 0$$

car $\prod_{l=0}^{\infty} \overline{L}_l$ étant un continu et contenant x', x_0 contient aussi $(x' x_0)$. D'après (38) $(x' z_0)$ est contenu soit dans $(x' x_0)$, soit dans $(x_0 z_0)$; mais c'est impossible d'après (35). Donc $D = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$. Posons: $f(x_0) = x_0$; $f(x) = f_k(x)$ pour $x \in Q_k$. En se servant de (30), (31), (33) et de ce que $\lim \delta(Q_k) = 0$ on voit sans peine que $f(x)$ est continue. On a $f(D) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(Q_k) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (z_{k-1} z_k) = (x_0 z_0)$. Enfin

$$(39) \qquad f^{-1}(x_0) = x_0$$

$$(40) \qquad f^{-1}(z) = f_k^{-1}(y) \quad \text{pour} \quad y \in (z_{k-1} z_k) - (z_{k-1} + z_k)$$

$$(41) \qquad f^{-1}(z_k) = f_k^{-1}(z_k) + f_{k+1}^{-1}(z_k).$$

Les formules (39)—(41) montrent que $f(x)$ est à tranches finies.

14. *Soit D une dendrite, $x_0 \in D$. Si toute dendrite contenue dans $D - x_0$ possède la propriété P, alors il en est de même pour D.* Désignons par $T_1, T_2, \ldots$, les constituants de $D - x_0$; x_0 étant une extrémite de $\overline{T}_k$ et x_k désignant un point arbitraire de T_k, il existe d'après **13** une fonction continue à tranches finies $f_k(x)$ telle que:

$f_k(\overline{T}_k) = (x_0 x_k)$; $f_k^{-1}(x_0) = x_0$. D'autre part: $D = x_0 + \sum_k T_k$. Posons $f(x_0) = x_0$; $f(x) = f_k(x)$ pour $x \in T_k$. La fonction $f(x)$ est évidemment continue et à tranches finies car pour $y \in (x_0 x_k) - x_0$ on a: $f^{-1}(y) = f_k^{-1}(y)$ et $f^{-1}(x_0) = x_0$. Enfin $f(D) = \sum_k (x_0 x_k)$, c. à d. $f(D)$ est une étoile. D'après **9** et **11** il en résulte que D possède la propriété P.

15. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème **8**. Il est vrai pour $\mu(D) = 1$, car alors D ne contient aucun point de ramification et se réduit par suite à un arc simple. Il suffit donc (en tenant compte du fait que $\Psi_\beta(D)$ est fermé, donc pour $N(D) = 0$, $\mu(D)$ de première espèce) de démontrer l'énoncé suivant: *si toute dendrite D^* telle que $M(R^*) = N(D^*) = 0$ et $\mu(D^*) = \alpha < \Omega$ possède la propriété P, alors toute dendrite D telle que $M(R) = N(D) = 0$ et $\mu(D) = \alpha + 1$ possède la propriété P.* Considérons l'ensemble $\Psi_\alpha(D)$; comme $\Psi[\Psi_\alpha(D)] = N(D) = 0$, $\Psi_\alpha(D)$ est un point ou un arc simple. Supposons d'abord que $\Psi_\alpha(D)$ se réduit au point x_0. Soit $D^* \subset D - x_0$ une dendrite. On a: $\Psi_\alpha(D^*) \subset D_* \times \Psi_\alpha(D) \subset \subset (D - x_0) \times (x_0) = 0$; d'autre part: $M(R^*) \subset M(R) = 0$. Donc D^* possède la propriété P. Donc d'après **14** D possède la propriété P c. q. f. d.

Supposons en second lieu que $\Psi_\alpha(D)$ est un arc simple. Cet arc est contenu dans un arc simple $(x_1 x_2)$ *saturé* dont les extrémités sont des extrémités de D [13]). Désignons par $y_1, y_2, \ldots$ les points de $(x_1 x_2) \times R = R_0$ et par $T_1, T_2, \ldots$ les constituants de $D - (x_1 x_2)$. Soit U_k l'ensemble somme de tous les T_l tels que: $\overline{T}_l \times (x_1 x_2) = y_k$, z_k un point arbitraire de U_k. Considérons le continu $\overline{U}_k$. On a:

$$(42) \qquad \Psi_\alpha(\overline{U}_k) \subset \overline{U}_k \times \Psi_\alpha(D) = y_k$$

donc $\overline{U}_k$ possède la propriété P. D'après **10** il existe une fonction continue à tranches finies $f_k(x)$ telle que: $f_k(\overline{U}_k) = (y_k z_k)$; $f_k(y_k) = y_k$. Posons $f(x) = x$ pour $x \in (x_1 x_2)$ et $f(x) = f_k(x)$ pour $x \in U_k$. Comme $D = (x_1 x_2) = \sum_k U_k$ on aura:

$$(43) \qquad f(D) = (x_1 x_2) + \sum_k (y_k z_k) = D_0$$

et on vérifie sans peine que $f(x)$ est continue et à tranches finies.

[13]) Mazurkiewicz: Fund. Math. II, p. 129—130.

D'après (43) D_0 est une peigne ayant R_0 comme ensemble de points de ramification, donc $M(R_0)=0$. D'après **12** D_0 possède la propriété P, donc d'après **9** il en est de même pour D c. q. f. d.

IV. Résumé.

Les résultats de II et III nous permettent d'énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Soit D une dendrite. Pour qu'il existe une fonction continue à tranches finies transformant D en un arc simple il faut et il suffit:* a) *que l'ensemble des extrémités de D soit dénombrable,* b) *que l'ensemble de points de ramification de D soit réductible par l'opération Φ de cohérence bilatérale, définie dans* **3**.

Warszawa 7/IV. 1931.

Sur la représentation des fonctions aux points de continuité approximative par des intégrales singulières.

Par

Isidore Natanson (Leningrad, U. R. S. S.).

Dans cette Note je vais examiner quelques questions, relatives à la représentation des fonctions aux points de continuité approximative par des intégrales singulières.

M. H. Lebesgue, dans son important Mémoire „Sur les intégrales singulières" (Annales des Toulouse, série III, tome I, 1909), avait établi la condition nécessaire et siffisante pour que l'on ait la relation

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\,\varphi_n(t,x)\,dt=f(x),$$

quelle que soit la fonction $f(t)$ bornée et approximativement continue dans le point x.

(Il est vrai que M. Lebesgue avait étudié les points, dans lesquels a lieu la relation

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(t+x)-f(x)|\,dt=0;$$

or, pour les fonctions bornées, la classe de ces points-ci coïncide avec la classe de points de continuité approximative).

Autant, cependant, la démonstration du théorème, concernant ce sujet, a été simplement indiqué par M. Lebesgue, nous nous permettons de donner dans tous les détails la preuve de cette proposition de l'éminent auteur. À cette question est consacré § 2 de la Note présente.