Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen[1]).

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

Im Gegensatz zu den manchmal paradoxen Eigenschaften der in der Topologie vorkommenden Punktmengen, weisen diejenigen Gebilde, mit denen wir in anderen geometrischen Disziplinen (elementare, analytische, projektive Geometrie u. s. w.) oder in deren Anwendungen gewöhnlich zu tun haben, einen viel regelmässigeren Bau und unserer Intuition leichter zugängliche Eigenschaften auf. Anschaulich ausgedrückt, sind diese Mengen (Figuren) nicht zu sehr „faserig", sie enthalten nicht unendlich viele zu tiefe „Spalten" oder „Aushöhlungen", sie sind mehr oder weniger „glatt".

Ohne die Frage nach dem vollen mathematischen Inhalt dieser intuitiven Begriffe hier entscheiden zu wollen, bemerken wir nur dass mit denselben mindestens folgende, in den Anwendungen wichtige Eigenschaften verknüpft sind: liegt eine solche Punktmenge in einem euklidischen Raume, so muss auch ihre Begrenzung eine verhältnismässig einfache topologische Struktur haben: sie muss zumindest lokal zusammenhängend sein und keine unerreichbare Randpunkte enthalten.

Nun ist bis jetzt auf dem Boden der punktmengentheoretischen Topologie keine den obigen Forderungen genügende Punktmengenklasse definiert worden. Die durch S. Mazurkiewicz[2]) und H. Hahn[3]) eingeführte und durch zahlreiche andere Mathematiker untersuchte Klasse der lokal zusammenhängenden Räume ist von diesem

[1]) Die Hauptresultate dieser Arbeit sind (ohne Beweise) in meiner in C. R. Bd. 194, (1932), S. 951 publizierten Note veröffentlicht worden.

[2]) S. Mazurkiewicz, C. R. Soc. Sc. Varsovie 6, (1913), S. 305 und 941.

[3]) H. Hahn, Jahresber. D. Math. Ver., 23, (1914), S. 319.

Standpunkte aus zu umfassend: schon ebene lokal zusammenhängende Kontinua (stetige Streckenbilder), welche die Ebene in unendlich viele Gebiete zerschneiden, können lokal unzusammenhängende Begrenzungen mit unerreichbaren Punkten besitzen. In den höherdimensionalen euklidischen Räumen gibt es sogar stetige Streckenbilder mit unzerlegbaren Begrenzungen, sowie stetige Streckenbilder, die eine gemeinsame Begrenzung dreier Gebiete bilden[4]), u. s. w.

Dagegen hat Alexander auf dem Boden der kombinatorischen Topologie, einen Begriff[5]) eingeführt, den die Kombinatoriker ebenfalls „Zusammenhang im Kleinen" nennen und der eine wichtige Klasse von Räume charakterisiert, die sich duch Regelmässigkeit ihrer Struktur auszeichnen. Diese Räume sind aber bis jetzt nur mit kombinatorischen Methoden untersucht worden.

Der Zweck dieser Arbeit ist, eine Punktmengeklasse ($\mathfrak{R}$-Mengen), welche im Bereich der endlichdimensionalen Mengen mit der Klasse der im kombinatorischen Sinne im Kleinen zusammenhängenden Räumen zusammenfällt, einzuführen und punktmengentheoretisch zu untersuchen.

Im § 1 gebe ich die Definition der $\mathfrak{R}$-Mengen an, indem als Ausgangspunkt eine (mit dem Begriffe des Retraktes[6]) eng verbundene) Eigenschaft „im Grossen" gewählt wird, und untersuche elementare Eigenschaften dieser Mengen. Der § 2 ist der Untersuchung der $\mathfrak{R}$-Mengen in euklidischen Räumen gewidmet, und zwar als Hauptresultat den Beweis enthält, dass die $\mathfrak{R}$ Mengen den beiden erforderlichen Begrenzungseigenschaften genügen. Die dort bewiesenen Sätze stellen eine Verallgemeinerung des qualitativen Inhaltes des für die Ebene von Jordan angegebenen und von Brouwer[7]) erweiterten Satzes über das Zerschneiden des n-dimensionalen euklidischen Raumes durch topologisches Bild einer $(n-1)$-dimensionalen Kugeloberfläche. Schliesslich beschäftige ich mich im § 3 mit einer Eigenschaft „im Kleinen" die ich „lokale Zusammenziehbarkeit"[8]) nenne und beweise, dass dieselbe in den in sich kompakten,

[4]) Ein solches Beispiel ist in meiner Mitteilung am II Kongress der polnischen Mathematiker in Wilno (1931) enthalten.

[5]) Siehe S. Lefschetz, *Topology* (New York, 1930) S. 91.

[6]) Vgl. Fund. Math. 17 S. 152. Die Definition dieses Begriffes wird hier S. 222, angeführt.

[7]) L. E. J. Brouwer, Math. Ann. 71, (1911), S. 314 und 321.

[8]) In meiner obenerwähnten Note in der C. R. wurde diese Eigenschaft „contractibilité locale" genannt.

metrischen, endlichdimensionalen Räumen für die $\mathfrak{R}$-Mengen charakteristisch ist.

§ 1. Die $\mathfrak{R}$-Mengen und ihre elementare Eigenschaften.

1. **Definition**[9]). Ist P ein topologischer und A ein metrischer kompakter Raum, so bezeichnet A^P den Raum, der als Elemente alle stetige Funktionen φ, wo $\varphi(P) \subset A$, hat und der durch die Formel

$$\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \operatorname*{Sup}_{x \in P} \varphi[\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \quad wo \quad \varphi_1, \varphi_2 \in A^P$$

metrisiert ist.

Ist P eine Teilmenge eines topologischen Raumes T und $\varphi \in A^P$, so heisst eine Funktion f *Erweiterung von* φ *auf* T *relativ zu* A, wenn $f \in A^T$ und $f(x) = \varphi(x)$ für jedes $x \in P$ ist. Der aus allen Funktionen $\varphi \in A^P$, die eine Erweiterung auf T rel. zu A haben, bestehende Teilraum von A^P wird mit $\Pi(A^P, T)$ bezeichnet.

Ist $P = A$ und hat die im Raume A durch die Formel $\varphi(x) = x$ definierte Funktion φ eine Erweiterung f auf T rel. zu A (also $\varphi \in \Pi(A^P, T)$), so heisst f eine den Raum T *auf* A *retrahierende*[10]) Funktion und A selbst ein *Retrakt des Raumes* T. Ein *absoluter Retrakt* heisst eine jede in sich kompakte metrisierbare Menge A, welche Retrakt jedes, sie enthaltenden, metrisierbaren Raumes M ist[11]).

Ist $A \subset T$ und gibt es eine Umgebung[12]) $U \subset T$ von A, derart dass A ein Retrakt von U ist, so heisst A ein *Umgebungsretrakt von* T.

Ein „absoluter" Umgebungsretrakt, also eine *in sich kompakte metrisierbare Punktmenge, welche ein Umgebungsretrakt von jedem sie enthaltenden metrisierbaren Raume ist, wird* $\mathfrak{R}$*-Menge genannt.*

Es folgt aus dieser Definition, dass jeder absolute Retrakt eine $\mathfrak{R}$-Menge ist; nicht aber umgekehrt, da z. B. jede endliche (auch leere) Punktmenge offenbar eine $\mathfrak{R}$-Menge ist, während die absoluten Retrakte Kontinua sind[13]).

[9]) Vgl. K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. 17, (1931), S. 152—170.

[10]) Anstatt der früher gebrauchten Bezeichnung „zusammenziehende Funktion" (vgl. K. Borsuk, Fund. Math. 18, (1932), S. 199), welcher wir uns hier in anderem Sinne bedienen werden.

[11]) Vgl. K. Borsuk, Fund. Math. 17, (1931), S. 160, 18).

[12]) Die Menge U wird eine *Umgebung der Menge* A *im Raume* T genannt, wenn A im *Innern* von U enthalten ist d. h. wenn $A \subset U - \overline{T - U} \subset T$ ist.

[13]) l. c. S. 163, 22, 1°.

2. *Das homöomorphe Bild einer* $\mathfrak{R}$*-Menge ist wieder eine solche.*

Beweis. Sei h eine homöomorphe Abbildung, welche die Punktmenge A auf die Punktmenge A_1 abbildet und M_1 eine metrisierbare Obermenge von A_1. Es gibt dann eine Obermenge M von A und eine homöomorphe Abbildung g der Menge M auf M_1, welche eine Erweiterung von h ist[14]). Ist nun A eine $\mathfrak{R}$-Menge, so gibt es eine Funktion f, die eine Umgebung $U \subset M$ von A auf A retrahiert. Die Funktion gfg_{-1}, wo g_{-1} die Umkehrung der Abbilduug g bezeichnet, retrahiert die Umgebung $U_1 = g(U) \subset M_1$ von A_1 auf A_1, womit A_1 eine $\mathfrak{R}$-Menge ist, w. z. b. w.

3. *Die* $\mathfrak{R}$*-Mengen sind mit den homöomorphen Bildern der abgeschlossenen Umgebungsretrakte von* Q_ω[15]) *identisch.*

Beweis. Ist, erstens, A eine $\mathfrak{R}$-Menge, so gibt es[16]) eine mit A homöomorphe Teilmenge B von Q_ω, welche nach 2. Retrakt einer Umgebung $V \subset Q_\omega$ von B ist.

Ist, zweitens, h eine homöomorphe Abbildung der Teilmenge A eines beliebigen metrisierbaren Raumes M auf eine abgeschlossene, also in sich kompakte Teilmenge B von Q_ω, so ist A auch eine in sich kompakte Menge und somit gibt es[17]) eine Erweiterung φ von h auf M rel. zu Q_ω. Wenn nun B Retrakt einer Umgebung $V \subset Q_\omega$ von B ist und f die V auf B retrahierende Funktion bezeichnet, so retrahiert die Funktion $h_{-1}f\varphi$, die Umgebung $U = \underset{x}{E}[\varphi(x) \in V]$ von A im Raume M auf A, w. z. b. w.

4. *Die endlichdimensionalen* $\mathfrak{R}$*-Mengen sind mit den homöomorphen Bildern abgeschlossener und beschränkter Umgebungsretrakte der euklidischen Räume identisch.*

Es ist einerseits eine endlichdimensionale $\mathfrak{R}$-Menge mit einer in sich kompakten Teilmenge eines euklidischen Raumes R_n, also nach 2., mit einer abgeschlossenen und beschränkten Umgebungsretrakte von R_n homöomorph. Andererseits

[14]) l. c. S. 159, **16**.

[15]) d. h. in sich kompakte Teilmenge des Hilbertschen Raumes, die als Elemente alle Folgen $\{x_n\}$, wo $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}$ für $n = 1, 2, \ldots$, hat. Vgl. z. B. K. Menger, *Dimensionstheorie*, (Leipzig u. Berlin 1928), S. 13—14.

[16]) Nach dem bekannten *Einbettungssätze* von P. Urysohn, nach welchem jeder separable metrische Raum mit einer Teilmenge von Q_ω homoomorph ist. Siehe z. B. K. Menger, l. c. S. 57.

[17]) K. Borsuk, l. c. S. 158, **12**.

ergibt sich aus 3. und da jede offene Teilmenge des euklidischen Raumes mit einem Retrakte einer offenen Teilmenge von Q_ω homöomorph ist und da Retrakt eines Retraktes wieder ein Retrakt ist[18]), dass ein homöomorphes Bild eines in sich kompakten Umgebungsretraktes von R_n eine endlichdimensionale $\mathfrak{R}$-Menge ist.

5. *Ist A eine $\mathfrak{R}$-Menge und B eine abgeschlossene Teilmenge von A, die ein Umgebungsretrakt von A ist, so ist B eine $\mathfrak{R}$-Menge.*

Beweis. Man kann nach 3. voraussetzen, dass $A \subset Q_\omega$ ist. Sei f eine die Umgebung U von A auf A retrahierende Funktion. Nach Voraussetzung gibt es in A eine Umgebung V von B in A und eine V auf B retrahierende Funktion φ. Die Funktion φf retrahiert dann die Umgebung $G = \underset{x}{E}[f(x) \in V]$ von B in Q_ω auf B, woraus es nach 3. und weil B (als eine abgeschlossene Teilmenge von A) in sich kompakt ist folgt, dass B eine $\mathfrak{R}$-Menge ist, w. z. b. w.

6. *Ist B eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes M und A eine $\mathfrak{R}$-Menge, so ist jede Funktion $\varphi \in A^B$ einer Erweiterung auf eine (von φ abhängende) Umgebung $U \subset M$ von B relativ zu A fähig.*

Man kann nach 3. voraussetzen, dass $A \subset Q_\omega$ ist. Dann hat[17]) die Funktion φ eine Erweiterung ψ auf M rel. zu Q_ω. Die Menge A ist aber eine $\mathfrak{R}$-Menge; es gibt also eine Funktion f, die eine Umgebung $U \subset Q_\omega$ von A auf A retrahiert. Die Funktion $f\psi$ bildet dann eine Erweiterung von φ auf die Umgebung $V = E[\psi(x) \in U] \subset M$ von B rel. zu A, w. z. b. w.

7. Satz[19]). *Ist A eine $\mathfrak{R}$-Menge und T ein topologischer Raum, so ist der Raum A^T lokal zusammenhängend.*

Beweis. Da die topologischen Eigenschaften des Raumes A^T nur von denen der Räume A und T abhängen[20]), so kann man $A \subset Q_\omega$ voraussetzen. Es seien: U eine Umgebung von A in Q_ω und f eine U auf A retrahierende Funktion. Da A in sich kompakt ist, gilt es:

$$\varrho(A, Q_\omega - U) = \lambda > 0. \tag{1}$$

Die Menge $P = \underset{x \in Q_\omega}{E}[\varrho(x, A) \leqslant \frac{1}{2}\lambda]$ ist eine abgeschlossene und somit in sich

[18]) l. c. S. 154, 4.
[19]) Vgl. K. Borsuk, l. c. S. 170, 27.
[20]) l. c. S. 167, Théorème 3.

kompakte Teilmenge von Q_ω. Es gibt also für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ mit der Eigenschaft:

$$\textit{aus} \quad \varrho(x, y) < \eta \quad \textit{folgt} \quad \varrho[f(x), f(y)] \leqslant \varepsilon \quad \textit{für jedes} \quad x, y \in P. \tag{2}$$

Um nun den lokalen Zusammenhang von A^T zu beweisen, genügt es für je zwei Funktionen $\varphi_0, \varphi_1 \in A^T$ mit der Eigenschaft

$$\varrho(\varphi_0, \varphi_1) < \eta \tag{3}$$

die Existenz einer stetigen einparametrigen Funktionenschar $\{\varphi_t\}$ im Raume A^T zu zeigen, wo $\varrho(\varphi_t, \varphi_0) \leqslant \varepsilon$ für $0 \leqslant t \leqslant 1$ ist. Man kann sich ausserdem auf den Fall

$$0 < \varepsilon < \tfrac{1}{2}\lambda \quad \textit{und} \quad 0 < \eta < \tfrac{1}{2}\lambda \tag{4}$$

beschränken.

Für jedes $0 \leqslant t \leqslant 1$ und $x \in T$ sei $y_t(x)$ der um $t \cdot \varrho[\varphi_0(x), \varphi_1(x)]$ von $\varphi_0(x)$ entfernter Punkt der Strecke $\overline{\varphi(x)\varphi_1(x)} \subset Q_\omega$. Nach (3) und (4) ist $\overline{\varphi_0(x)\varphi_1(x)} \subset P$ und somit ist die Funktion f im Punkte $y_t(x)$ definiert, wobei nach (2) und, da $f\varphi_0 = \varphi_0$,

$$\varrho[fy_t(x), y_0(x)] \leqslant \varepsilon \quad \textit{für jedes} \quad x \in T \quad \textit{und} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{5}$$

gilt.

Setzen wir nun $\varphi_t(x) = fy_t(x)$ für jedes $x \in T$ und $0 \leqslant t \leqslant 1$, so erhalten wir in A^T eine stetige einparametrige Funktionenschar, wobei nach (5), $\varrho(\varphi_0, \varphi_t) \leqslant \varepsilon$ für jedes $0 \leqslant t \leqslant 1$ ist, w. z. b. w.

8. Hilfssatz. *Voraussetzungen*: 1^0 *Die Punktmengen E_1 und E_2 sind in ihrer Summe abgeschlossen,*

2^0 $A \subset E_1 + E_2$,

3^0 $U_i \supset A$. *E_i für $i = 1, 2$, ist eine offene (relativ zu E_i) Teilmenge von E_i.*

Behauptung: Die Menge $U = U_1 + U_2$ ist eine Umgebung von A in der Menge $E_1 + E_2$.

Beweis. Nach 3^0 gibt es in $E_1 + E_2$ offene Mengen Γ_i $(i = 1, 2)$, für die

$$U_i = \Gamma_i \cdot E_i \tag{6}$$

gilt.

Es ist $\Gamma_1 \cdot (E_1 - E_2) \subset U_1$, $\Gamma_2 \cdot (E_2 - E_1) \subset U_2$ und $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdot (E_1 + E_2) \subset U_1 + U_2$, woraus nach 2^0, 3^0 und (6), $A = A \cdot (E_1 - E_2) + A \cdot (E_2 - E_1) + A \cdot E_1 \cdot E_2 \subset \Gamma_1 \cdot (E_1 - E_2) + \Gamma_2 \cdot (E_2 - E_1) + \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \subset U_1 + U_2$ folgt. Um nun die Behauptung zu beweisen, genügt es nur zu bemerken, dass die Mengen $\Gamma_1 \cdot (E_1 - E_2)$, $\Gamma_2 \cdot (E_2 - E_1)$, $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$, also auch ihre Summe, in $E_1 + E_2$ offen sind.

9. Satz[21]). *Sind A_1 und A_2 abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raumes A, $A = A_1 + A_2$ und $A_1 \cdot A_2$ eine $\mathfrak{R}$-Menge, so ist A dann und nur dann eine $\mathfrak{R}$-Menge, wenn A_1 und A_2 $\mathfrak{R}$-Mengen sind.*

Beweis. Sind A_1 und A_2 zwei $\mathfrak{R}$-Mengen, so sind dieselben, also auch A, in sich kompakt. Da $A_1 \cdot A_2$ eine $\mathfrak{R}$-Menge ist, so gibt es für einen beliebigen metrisierbaren Raum $M \supset A$ eine Funktion f, die eine in M offene Obermenge G von $A_1 \cdot A_2$ auf $A_1 \cdot A_2$ retrahiert. Nehmen wir nun zwei in M offene Mengen G_1 und G_2 mit den Eigenschaften:

$$(7) \qquad \begin{gathered} A_1 - A_2 \subset G_1, \quad A_2 - A_1 \subset G_2, \quad G_1 \cdot G_2 = 0, \\ (G_1 + G_2) \cdot A_1 \cdot A_2 = 0, \end{gathered}$$

und betrachten zwei Funktionen f_i $(i = 1, 2)$, welche auf den Mengen

$$(8) \qquad P_i = (G - G_1 - G_2) + A_i, \quad wo \quad i = 1, 2,$$

folgendermassen definiert sind:

$$(9) \qquad \begin{aligned} f_i(x) &= f(x) \quad \textit{für} \quad x \in G - G_1 - G_2, \\ f_i(x) &= x \quad \textit{für} \quad x \in A_i, \end{aligned}$$

so ist es leicht zu ersehen, dass $f_i \in A_i^{P_i}$ für $i = 1, 2$ ist.

Wir setzen

$$(10) \qquad E_1 = (G + G_1 + G_2) - G_2 \quad \textit{und} \quad E_2 = (G + G_1 + G_2) - G_1.$$

Nach (8) und (10) gilt es $P_i = [E_i - (G_1 + G_2)] + A_i$, wo beide Summanden und somit ihre Summe P_i abgeschlossene Teilmengen von E_i sind. Infolgedessen gibt es nach **6**. eine offene Teilmenge U_i von E_i, wo

$$(11) \qquad P_i \subset U_i \subset E_i \quad \textit{für} \quad i = 1, 2$$

ist, sowie eine Erweiterung φ_i von f_i auf U_i relativ zu A_i.

Nach (7) und (10) erhalten wir

$$(12) \qquad E_1 + E_2 = G + G_1 + G_2 \supset A,$$

sowie $E_1 = (E_1 + E_2) - G_2$ und $E_2 = (E_1 + E_2) - G_1$. Hiermit sind die Mengen E_i in ihrer Summe abgeschlossen. Da, schliesslich, nach (10), (7) und (11) $A \cdot E_i = A_i \subset P_i \subset U_i$ $(i = 1, 2)$ besteht, so sind alle Voraussetzungen des Hilfssatzes **8**. erfüllt. Die Menge $U = U_1 + U_2$ ist also eine Umgebung von A in $E_1 + E_2 = G + G_1 + G_2$ und, da diese Menge offen ist, bildet sie auch in M eine Umgebung von A.

[21]) Vgl. N. Aronszajn u. K. Borsuk, Fund. Math. 18, (1932), S. 194.

Bemerken wir nun, dass wir nach (8), (11), (10) und (7) $G - G_1 - G_2 \subset P_1 \cdot P_2 \subset U_1 \cdot U_2 \subset E_1 \cdot E_2 = [(G - G_2) + G_1] \cdot [(G - G_1) + G_2] = G - G_1 - G_2$ und somit

$$(13) \qquad U_1 \cdot U_2 = E_1 \cdot E_2 = G - G_1 - G_2$$

haben.

Da die Mengen E_i $(i = 1, 2)$ in ihrer Summe abgeschlossen sind, so ist nach (11) und (13): $\overline{U}_1 \cdot (U_1 + U_2) = U_1 + \overline{U}_1 \cdot U_2 \subset U_1 + E_1 \cdot E_2 = U_1$. Folglich sind auch die Mengen U_i $(i = 1, 2)$ in ihrer Summe abgeschlossen. Es ergibt sich daraus und da die Funktion φ_i eine Erweiterung der durch die Formeln (9) definierten Funktion f_i ist, dass die auf der Menge $U = U_1 + U_2$ durch die Gleichung

$$\varphi(x) = \varphi_i(x) \quad \textit{für} \quad x \in U_i, \quad i = 1, 2$$

definierte Funktion, die Umgebung U von A im Raume M auf A retrahiert. Es ist also A eine $\mathfrak{R}$-Menge.

Ist andererseits A eine $\mathfrak{R}$-Menge und φ eine Funktion, die eine Umgebung $V \subset A$ von $A_1 \cdot A_2$ retrahiert, so bildet die Menge $U_i = A_i + V$ eine Umgebung von A_i in A und die für $x \in U_i$ durch die Formeln:

$$\begin{aligned} f_i(x) &= x \quad \textit{für} \quad x \in A_i, \\ f_i(x) &= \varphi(x) \quad \textit{für} \quad x \in V - A_i \end{aligned}$$

definierte Funktion f_i retrahiert U_i auf A_i. Daraus und aus **5**. schliessen wir, dass A_i eine $\mathfrak{R}$-Menge ist, w. z. b. w.

10. Korollar. *Alle Komplexe der kombinatorischen Topologie sind $\mathfrak{R}$-Mengen.*

Dies ergibt sich aus **9**. durch Induktion (nach Dimension und Anzahl der den betreffenden Komplex bildenden Simplexe), indem man berücksichtigt, dass der Korollar im Falle eines (-1)-dimensionalen Komplexes (d. h. einer leeren Menge), sowie im Falle eines einzelnen n-dimensionalen Simplexes richtig ist.

11. Hilfssatz. *Ist A eine Teilmenge eines metrischen Raumes M, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$, derart dass für je zwei Funktionen $f \in Q_\omega^M$ und $\varphi \in Q_\omega^A$ aus der Bedingung*

(14) $$\varrho[f(p), \varphi(p)] \leqslant \eta \quad \textit{für jedes} \quad p \in A$$

die Existenz einer Erweiterung ψ von φ auf M relativ zu Q_ω von der Eigenschaft $\varrho(\psi, f) < \varepsilon$ folgt.

Beweis. Sei $\eta > 0$ eine beliebige Zahl von der Eigenschaft

(15) $$\textit{aus} \quad |\varepsilon_n| \leqslant \mathrm{Min}\left(\eta, \frac{1}{n}\right) \quad \textit{für} \quad n = 1, 2, \ldots \quad \textit{folgt} \quad \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2} \leqslant \varepsilon.$$

Sei ferner $\alpha_n(x)$ eine stetige reelle Funktion, welche folgendermassen definiert ist:

$$\alpha_n(x) = 0 \quad \textit{für} \quad x < 0; \qquad \alpha_n(x) = x \quad \textit{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n};$$

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{n} \quad \textit{für} \quad x > \frac{1}{n}.$$

Diese Definition ergibt unmittelbar folgende Schlüsse:

(16) $$0 \leqslant \alpha_n(x) \leqslant \frac{1}{n},$$

(17) $$\textit{aus} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \quad \textit{folgt} \quad |\alpha_n(x+y) - x| \leqslant \mathrm{Min}\left(|y|, \frac{1}{n}\right).$$

Es seien nun f und φ zwei die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes erfüllende Funktionen, und zwar

$$f(p) = \{f_n(p)\}, \quad \textit{wo} \quad 0 \leqslant f_n(p) \leqslant \frac{1}{n}, \quad \textit{für} \quad p \in M,$$

$$\varphi(p) = \{\varphi_n(p)\}, \quad \textit{wo} \quad 0 \leqslant \varphi_n(p) \leqslant \frac{1}{n}, \quad \textit{für} \quad p \in A.$$

Auf Grund von (14) erfüllen dann die Funktionen $\varepsilon_n(p) = f_n(p) - \varphi_n(p)$ für $p \in A$ die Ungleichung

$$|\varepsilon_n(p)| \leqslant \varrho[f(p), \varphi(p)] \leqslant \mathrm{Min}\left(\eta, \frac{1}{n}\right).$$

Es bezeichne $\lambda_n(p)$ die Erweiterung von $\varepsilon_n(p)$ auf M relativ zum Intervalle $-\eta \leqslant x \leqslant \eta$. Wir setzen:

$$\psi_n(p) = \alpha_n(f_n(p) - \lambda_n(p)) \quad \textit{und} \quad \psi(p) = \{\psi_n(p)\} \quad \textit{für jedes} \quad p \in M.$$

Da ψ_n stetig ist, so ist nach (16), $\psi \in Q_\omega^M$, wobei für jedes $p \in A$, $\psi_n(p) = \alpha_n(f_n(p) - \varepsilon_n(p)) = \alpha_n(\varphi_n(p)) = \varphi_n(p)$ ist, und somit ψ eine Erweiterung von φ auf M relativ zu Q_ω darstellt. Dabei haben wir nach (17) für jedes $p \in M$ die Beziehung $|\psi_n(p) - f_n(p)| \leqslant \mathrm{Min}\left(|\lambda_n(p)|, \frac{1}{n}\right) \leqslant \mathrm{Min}\left(\eta, \frac{1}{n}\right)$, woraus nach (15),

$$\varrho(\psi, f) = \operatorname*{Sup}_{p \in M} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (\psi_n(p) - f_n(p))^2} \leqslant \varepsilon$$

folgt, w. z. b. w.

12. Satz [22]) *Ist B eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes M und A eine $\mathfrak{R}$-Menge, so ist $\Pi(A^B, M)$ eine offene und zugleich abgeschlossene Teilmenge von A^B.*

Beweis. Man kann sich auf den Fall $A \subset Q_\omega$ beschränken. Es genügt zu zeigen, dass es eine positive Zahl η gibt, für welche die Ungleichung

(18) $$\varrho(\varphi_0, \varphi_1) \leqslant \eta, \quad \textit{wo} \quad \varphi_0 \in \Pi(A^B, M) \quad \textit{und} \quad \varphi_1 \in A^B,$$

die Beziehung $\varphi_1 \in \Pi(A^B, M)$ zur Folge hat.

Sei f eine Funktion, die eine Umgebung $U \subset Q_\omega$ von A auf A retrahiert. Da A in sich kompakt ist, haben wir

(19) $$\varepsilon = \varrho(A, Q_\omega - U) > 0.$$

Bezeichnet nun f_0 eine Erweiterung von φ_0 auf M relativ zu A, so gibt es nach Hilfssatz **11.** eine positive Zahl η derart, dass die Umgleichung (18) die Existenz einer Erweiterung ψ von φ_1 relativ zu Q_ω mit der Eigenschaft $\varrho(f_0, \psi) < \varepsilon$ ergibt. Nach (19) ist somit $\psi(x) \in U$ für jedes $x \in M$. Die Funktion $f_1 = f\psi$ bildet dann eine Erweiterung von φ_1 relativ zu A, so dass $\varphi_1 \in \Pi(A^B, M)$ ist, w. z. b. w.

13. Korollar. *Damit A ein absoluter Retrakt sei, ist es notwendig und hinreichend, dass A eine $\mathfrak{R}$-Menge und der Raum A^A zusammenhängend sei.*

Als absoluter Retrakt ist A eine $\mathfrak{R}$-Menge (nach **1.**) und der Raum A^A zusammenhängend [19]). Ist andererseits A eine $\mathfrak{R}$-Menge,

[22]) Vgl. K. Borsuk, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38, (1931), S. 382, 4.

so hat nach dem vorigen Satze der Zusammenhang von A^A zur Folge, dass $\Pi(A^A, M) = A^A$ für jede metrisierbare Obermenge M von A gilt, also dass jede Funktion $f \epsilon A^A$ eine Erweiterung auf M relativ zu A besitzt. Insbesondere bildet irgendeine Erweiterung der identischen Abbildung $f(x) \equiv x$ eine M auf A retrahierende Funktion, w. z. b. w.

14. Korollar [23]). *Ist A eine $\mathfrak{R}$-Menge und gehört die Funktion φ zu einer, eine konstante Funktion enthaltenden Komponente von A^A, so gibt es einen Punkt $x_0 \epsilon A$, für den $\varphi(x_0) = x_0$ ist (Fixpunkt).*

Beweis. Man kann $A \subset Q_\omega$ voraussetzen. Auf Grund von **12.**, $\varphi \epsilon \Pi(A^A, Q_\omega)$ ist; somit gibt es eine Erweiterung ψ von φ auf Q_ω relativ zu A. Da die Menge Q_ω einen Fixpunkt besitzt [24]) und $\psi(Q_\omega) \subset A \subset Q_\omega$ ist, so gibt es ein $x_0 \epsilon Q_\omega$ derart, dass $x_0 = \psi(x_0) \epsilon A$ gilt. Für jedes $x \epsilon A$ ist aber $\varphi(x) = \psi(x)$ und somit $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = x_0$, w. z. b. w.

Hiermit ist folgende noch offene Frage gebunden:

Bleibt die Behauptung des Korollars **14.** *richtig, wenn man von der Menge A nur voraussetzt, dass sie in sich kompakt ist?*

§ 2. $\mathfrak{R}$-Mengen in euklidischen Räumen.

15. Ist E eine Teilmenge eines metrischen Raumes M, so wird mit $U_{\varepsilon, M}(E)$ die Menge $\underset{x \epsilon M}{E}[\varrho(x, E) < \varepsilon]$ bezeichnet (im Falle $M = R_n$ kann der Index M vernachlässigt werden).

Unter A ist in diesem § stets eine im euklidischen n-dimensionalen Raume R_n liegende $\mathfrak{R}$-Menge, unter U eine auf A retrahierbare Umgebung im R_n und unter φ eine U auf A retrahierende Funktion zu verstehen.

16. Satz. *Die Punktmenge $R_n - A$ ist Vereinigungsmenge endlich vieler Gebiete.*

Beweis. Da in jeder Umgebung von einer in sich kompakten Teilmenge von R_n fast alle Komponenten ihrer Komplementärmenge

[23]) Dieser Korollar bildet eine Verallgemeinerung des Satzes, nach welchem die absoluten Retrakte einen Fixpunkt besitzen (l. c. S. 161, Corollaire). Dieser Satz bildet seinerseits eine Verallgemeinerung des Brouwerschen *Fixpunktsatzes*, nach welchem die euklidische n-dimensionale Kugel H_n einen Fixpunkt besitzt.

[24]) J. Schauder, Math. Zeitschr. 26, S. 52 und Studia Math. 2, S. 173.

liegen [25]), bleibt es zu zeigen, dass für jede beschränkte Komponente Γ von $R_n - A$, die Beziehung $\Gamma - U \neq 0$ besteht.

Anderenfalls und da $F(\Gamma) = \overline{\Gamma} \cdot (R_n - \Gamma) \subset A$ ist, wäre die Funktion φ in der ganzen Menge $\overline{\Gamma}$ definiert, wobei $\varphi(\overline{\Gamma}) \subset A \subset R_n - \Gamma$ und für jedes $x \epsilon F(\Gamma)$, $\varphi(x) = x$ gelten würde, was für eine stetige Funktion unmöglich ist [26]), w. z. b. w.

17. Hilfssatz. *Sind H' und H'' zwei Kugeln in R_n mit dem Mittelpunkte p und den Radien $r' < r''$, so gibt es höchstens endlich viele Komponenten von $H'' - A$, die in H' Häufungspunkte besitzen.*

Beweis. Da φ stetig und A in sich kompakt ist, gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, für die:

$$\overline{U_\varepsilon(A)} \subset U, \tag{20}$$

$$\varrho[\varphi(x), x] \leqslant \tfrac{1}{4}(r'' - r') \quad \textit{für jedes} \quad x \epsilon \overline{U_\varepsilon(A)} \tag{21}$$

ist. Da aber fast alle Komponenten von $H'' - A$ in der Umgebung $U_\varepsilon(A) \cdot H''$ der in sich kompakten Teilmenge $A \cdot H''$ des peanoschen Raumes H'' liegen [25]), so gäbe es im Falle der Ungültigkeit des zu bewiesenden Hilfssatzes eine Komponente Γ der Menge $H'' - A$ mit den Eigenschaften:

$$\Gamma \subset U_\varepsilon(A), \tag{22}$$

$$\overline{\Gamma} \cdot H' \neq 0. \tag{23}$$

Es bezeichne nun H die Kugel mit dem Mittelpunkte p und dem Radius $r = r' + \tfrac{3}{4}(r'' - r')$. Sei ferner v die Funktion welche als Werte die freien Vektoren $v(x)$ im Raume R_n annimt und die auf der abgeschlossenen Menge $H + F(\Gamma)$ folgendermassen definiert ist:

$$\begin{aligned} v(x) &= 0 && \textit{für} \quad x \epsilon H, \\ v(x) &= \overrightarrow{x\varphi(x)} && \textit{für} \quad x \epsilon F(\Gamma). \end{aligned} \tag{24}$$

Da $\varphi(x) = x$ für jedes $x \epsilon A$ gilt, so ist die Funktion v nach (24) stetig, wobei nach (22) und (21)

$$|v(x)| \leqslant \tfrac{1}{4}(r'' - r') \quad \textit{für jedes} \quad x \epsilon H + F(\Gamma). \tag{25}$$

[25]) K. Borsuk, Mathematica, 8, (in Vorbereitung).

[26]) K. Borsuk, Fund. Math. 17, (1931), S. 161, 20.

gilt. Mit Rücksicht auf die perfekte Zuordnung zwischen den freien Vektoren $v(x)$ und den Endpunkten der ihnen gleichen Vektoren mit gemeinsamem Anfangspunkte 0, und da alle diese Endpunkte nach (25) in der Kugel mit dem Mittelpunkte 0 und dem Radius $\frac{1}{2}(r''-r')$ (also in einem absoluten Retrakte [27])) liegen, besitzt die Funktion $v(x)$ eine die Bedingung (25) erfüllende Erweiterung [28]) auf H''. Man kann also voraussetzen, dass die Funktion $v(x)$ bereits auf H'' definiert ist. Wir betrachten nun die folgendermassen auf $\overline{\Gamma}$ definierte Funktion ψ:

$$\psi(x)=\varphi(x)-v(x).$$

Nach (21) und (25) ist dann:

(26) $\varrho[\psi(x),x]\leqslant\varrho[\varphi(x),x]+|v(x)|\leqslant\frac{1}{2}(r''-r')$ *für jedes* $x\,\epsilon\,\overline{\Gamma}$

und

(27) $\psi(x)=\varphi(x)$ *für jedes* $x\,\epsilon\,\Gamma\cdot H,$

(28) $\psi(x)=x$ *für jedes* $x\,\epsilon\,F(\Gamma).$

Da aber $\overline{\Gamma}\cdot H'\neq 0$ ist, gibt es einen Punkt $a\,\epsilon\,\Gamma$, derart dass $\varrho(a,R_n-H)>\frac{1}{2}(r''-r')$. gilt. Ist nun $x\,\epsilon\,H$, so gibt nach (27), $\psi(x)=\varphi(x)\,\epsilon\,A$ und somit $\psi(x)\neq a$; ist dagegen $x\,\epsilon\,\overline{\Gamma}-H$, so ist $\varrho(x,a)>\frac{1}{2}(r''-r')$ und nach (26) wieder $\psi(x)\neq a$. Es ist also $a\,\epsilon\,R_n-\psi(\overline{\Gamma})$, was wegen der Stetigkeit von ψ, der Bedingung (28) widerspricht [26]).

18. Hilfssatz. *Liegt der Mittelpunkt p der Kugel H auf der Begrenzung einer Komponente Γ von $H-A$ und ist H'' eine mit H konzentrische Kugel, so liegt p auf der Begrenzung einer Komponente von $\Gamma\cdot H''$.*

Beweis. Im Falle $H\subset H''$ ist $F=\Gamma\cdot H''$ und unsere Behauptung offenbar richtig. Man kann also voraussetzen, dass $H''\subset H$ ist. Jede Komponente von $\Gamma\cdot H''$ ist dann zugleich eine Komponente von $H''-A$. Sei nun H' eine mit H'' konzentrische, aber kleinere Kugel. Auf Grund des Hilfssatzes **17.** gibt es nur endlich viele Komponenten von $H''-A$, also auch von $\Gamma\cdot H''$, die ihre Häufungspunkte u. a. auf H' besitzen. Gehört nun der Punkt p

[27]) l. c. S. 161, Beispiel.
[28]) l. c. S. 161, **19**.

keiner von ihren Begrenzungen, so gehört er auch nicht der Begrenzung ihrer Summe und somit der Menge $F(\Gamma)$, was der Voraussetzung widerspricht.

19. Satz. *Jeder Punkt der Begrenzung einer Komponente von R_n-A ist von dieser Komponente aus erreichbar.*

Beweis. Sei $p\,\epsilon\,F(\Gamma)$, wo Γ eine Komponente von R_n-A ist und bezeichne $H^{(k)}$ die Kugel mit dem Mittelpunkte p und dem Radius $\dfrac{1}{k}$ $(k=1,2,\ldots)$. Aus dem Hilfssatze **18.** folgt durch Induktion die Existenz einer Punktmengenfolge $\{\Gamma_k\}$ mit den Eigenschaften:

1) Γ_k *ist eine Komponente von* $H^{(k)}-A$, *wobei* $p\,\epsilon\,F(\Gamma_k)$ *für* $k=1,2,\ldots,$
2) Γ_{k+1} *ist eine Komponente von* $\Gamma_k\cdot H^{(k+1)}$ *(also* $\Gamma_{k+1}\subset\Gamma_k$*) für* $k=1,2,\ldots.$

Wenn wir nun eine beliebige Punktfolge $\{p_k\}$, wo $p_k\,\epsilon\,\Gamma_k$, nehmen, so gibt es einen einfachen Bogen $L_k\subset\Gamma_k\subset H^{(k)}$ mit Endpunkten p_k und p_{k+1}. Die Menge $\sum_{k=1}^{\infty}L_k+(p)$ ist ein stetiges in der Menge $\Gamma+(p)$ liegendes Streckenbild. Greifen wir aus diesem Streckenbilde einen einfachen Bogen mit Endpunkten p und $p'\neq p$ heraus [29]), so erhalten wir einen einfachen Bogen, welcher, von seinem Endpunkte p abgesehen, in Γ liegt, w. z. b. w.

20. Hilfssatz. *Für jedes $\varepsilon>0$ gibt es ein $\eta>0$, derart dass je zwei Punkte $x,y\,\epsilon\,F(A)$, welche sich durch einen (abgesehen von seinen Endpunkten) in R_n-A liegenden einfachen Bogen L vom Durchmesser $\leqslant\eta$ verbinden lassen, sich in $F(A)$ durch ein Kontinuum vom Durchmesser $\leqslant\varepsilon$ verbinden lassen*

Beweis. Setzen wir vor allem voraus, dass $\eta<\varrho(A,R_n-U)$, also dass $L\subset U$ gilt und dass η dabei so klein ist, dass $L+\varphi(L)$ in einer Kugel $H\subset U$ mit dem Mittelpunkte $p\,\epsilon\,L-A$ und dem Radius $\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon$ liegt. Es sei C die $\varphi(L)$ enthaltende Komponente von $H\cdot A$ und Γ die den Punkt p enthaltende Komponente von $H-C$. Wegen der Unikohärenz [30]) der Kugel H, ist die Begrenzung

[29]) S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **1**, (1920), S. 201.
[30]) welche sich z. B. aus der Tatsache, dass H ein absoluter Retrakt ist (vgl. Fussnote (27), S. 232), ergibt. K. Borsuk, l. c. S. 163, **22**.

$(H-\Gamma)\cdot\overline{\Gamma}$ der Komponente Γ in H ein Teilkontinuum [31]) von $F(C)\subset \subset F(A)\cdot H$, wobei $\delta[(H-\Gamma)\cdot\overline{\Gamma}]\leqslant\varepsilon$ und $x, y\in(H-\Gamma)\cdot\overline{\Gamma}$ ist, w. z. b. w.

21. Satz [32]). *Die Begrenzung von A ist lokal zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $\varepsilon>0$ und $p\in F(A)$ beliebig gegeben, und H eine Kugel mit dem Mittelpunkte p und dem Radius $\frac{1}{2}\eta$, wo η eine der Behauptung des Hilfssatzes **20.** genügende Zahl ist. Es bezeichne G die Summe der Menge R_n-U und aller Komponenten von $H-A$ mit zu p fremden Begrenzungen. Auf Grund des Hilfssatzes **17.** ist $\lambda=\varrho(p, G)>0$. Ist nun $x\in F(A)$, wobei $\varrho(p, x)<\lambda$, so gibt es auf Grund von **17.** und der Definition von λ, eine Komponente Γ von $H-A$, derart dass $p, x\in F(\Gamma)$ ist, und folglich, nach Satz **19**, zwei in $\Gamma+(p)+(x)$ liegende einfache Bögen, deren einer den Punkt p und der andere den Punkt x als Endpunkt enthält. Daraus und da Γ zusammenhängend ist, ergibt sich die Existenz eines in $\Gamma+(p)+(x)\subset H$ liegenden einfachen Bogens mit den Endpunkten p und x und, da $\delta(H)=\eta$ ist, lassen sich nach Hilfssatz **20.** p und x in $F(A)$ durch ein Kontinuum vom Durchmesser $\leqslant\varepsilon$ verbinden, w. z. b. w.

22. Die in den Sätzen **16**, **19**, und **21.** bewiesenen Eigenschaften der $\mathfrak{R}$-Mengen in euklidischen Räumen erweisen sich als für ebene $\mathfrak{R}$-Mengen (siehe Satz **33.** S. 242) charakteristisch, während sie zur Charakterisierung der $\mathfrak{R}$-Mengen schon in R_3 nicht mehr hinreichen [33]).

Es sei hierzu erwähnt, dass der bekannte Brouwersche (im Falle $n=2$ von Jordan bewiesene) Satz [7]), nach welchem homöomorphes Bild einer Kugelfläche in R_n in diesem Raume zwei Gebiete bestimmt und gemeinsame, aus beiden Gebieten in allen Punkten erreichbare Begrenzung derselben bildet, mit den Sätzen **16.** und **19.** in enger Beziehung steht. Während, der Satz **16.** in gewissem Sinne dem ersten Teile des Brouwerschen Satzes entspricht, bildet der Satz **19.** (und zwar auf Grund des Korollars **10.**) eine Verallgemeinerung dessen letzten Teiles. Diese Tatsache ist nicht ohne methodologisches Interesse, denn dadurch (und da sich die Invarianz des Schnittes in euklidischen Räumen auch punktmengentheoretisch beweisen lässt [34]), wird der qualitative Teil des Brouwerschen Satzes auf den Boden der punktmengentheoretischen Topologie hereingeführt.

[31]) sogenannter Phragmen-Brouwerscher Satz. Vgl. C. Kuratowski, Fund. Math. 8, S. 148.

[32]) Mit Rücksicht auf den Satz **33.** und auf den Phragmen-Brouwerschen Satz, bildet dieser Satz eine Verallgemeinerung des Satzes von M. Torhorst, Math. Zeitschr. 9, (1921), S. 44—65, wonach die Begrenzung jeder Komponente der Komplementärmenge eines ebenen stetigen Streckenbildes, wieder ein stetiges Streckenbild ist.

[33]) Als Beispiel kann das von mir angegebene Kontinuum (l. c. S. 163, 22) dienen.

§ 3. Charakterisierung der $\mathfrak{R}$-Mengen von endlicher Dimension durch lokale Zusammenziehbarkeit.

23. Definition. Eine Teilmenge P eines topologischen Raumes T wird *in T zusammenziehbar* genannt [35]), wenn es eine stetige Operation $f(x, t)$ gibt, derart dass:

$$1^0\ f(x, 0)=x, \qquad 2^0\ f(x, t)\in T, \qquad 3^0\ f(x, 1)=const.,$$

für jedes $x\in P$ und $0\leqslant t\leqslant 1$ ist.

Beispiele: 1. Jede echte Teilmenge der Kreislinie K_2 ist in K_2 zusammenziehbar. Hingegen ist K_2 in sich selbst nicht zusammenziehbar [36]).

2. Damit eine in R_n abgeschlossene Teilmenge P einer Menge $E\subset R_n$ in E zusammenziehbar sei, ist es notwendig [36]) (aber nicht hinreichend), dass jede beschränkte Komponente von R_n-P in E liegt.

3. Damit alle endliche Teilmengen eines top logischen Raumes T in T zusammenziehbar seien, ist es notwendig und hinreichend, dass sich je zwei Punkte von T durch einen in T liegenden einfachen Bogen verbinden lassen.

4. Ein metrischer kompakter Raum M ist dann und nur dann in sich selbst zusammenziehbar, wenn sich je zwei Elemente von M^M durch einen in M^M liegenden einfachen Bogen verbinden lassen. Denn bilden einerseits die Funktionen f_t im Raume M^M einen die Funktion $f_0(x)\equiv x$ mit der Funktion $f_1(x)\equiv const.$ verbindenden einfachen Bogen, so erfüllt die Funktion $f(x, t)=f_t(x)$ die Bedingungen 1^0, 2^0 und 3^0 der Definition. Gibt es andererseits eine diese Bedingungen erfüllende Funktion $f(x, t)$, so bilden die Funktionen $f[\varphi(x), t]$, wo φ ein beliebig gegebenes Element des Raumes M^M ist, ein in M^M liegendes und $\varphi_0(x)\equiv(x)$ mit $\varphi_1(x)\equiv const.$ verbindendes stetiges Streckenbild, woraus sich die geforderte Eigenschaft des Raumes M ergibt. Insbesondere, wenn M ein absoluter Retrakt ist, ist M^M ein quasi-peanoscher Raum [19]), und somit M in sich zusammenziehbar.

24. Von jetzt an wird mit H_n die in R_n liegende Kugel mit dem Mittelpunkte 0, dem Radius 1 und der Oberfläche K_n bezeichnet.

[34]) K. Borsuk, Math. Ann. 106, (1932), S. 239—248.

[35]) Der Begriff der Zusammenziehbarkeit ist eng mit dem kombinatorischen Begriffe der *Homotopie* verbunden.

[36]) K. Borsuk, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38, (1931), S. 383, 7.

Satz. *Jede stetige Funktion φ, die K_n auf eine in einem topologischen Raume T zusammenziehbare Menge P abbildet, hat eine Erweiterung auf H_n relativ zu T.*

In der Tat, bildet die Funktion

$$\psi(x) = \varphi f(\overrightarrow{0x} \cdot K_n, 1 - \varrho(0, x)) \quad \textit{für} \quad x \in H_n - (0),$$
$$\psi(0) = \varphi f(a, 1),$$

wo $f(x, t)$ eine die Bedingungen der Definition **23.** erfüllende Funktion und a ein beliebieger Punkt von P ist, eine Erweiterung von φ auf H_n relativ zu T.

25. Definition. Ein topologischer Raum T wird *im Punkte $p \in T$ lokal zusammenziehbar* genannt, wenn es für jede Umgebung U von p eine in U zusammenziehbare Umgebung U_0 von p gibt.

Die lokale Zusammenziehbarkeit eines Raumes T im Punkte p hat den lokalen Zusammenhang von T in diesem Punkte zur Folge (weil die Menge aller Werte von $f(x, t)$ für $x \in U_0$ und $0 \leqslant t \leqslant 1$, eine in U liegende zusammenhängende Umgebung von p bildet), aber nicht umgekehrt. So ist z. B. die bekannte universale ebene Sierpińskische Kurve[37]) lokal zusammenhängend, aber in keinem Punkte p lokal zusammenziehbar (denn es enthält jede Umgebung von p Begrenzungen gewisser Komplementärgebiete (vgl. **23.**, Beispiel 2).

Ist der Raum T in jedem Punkte lokal zusammenziehbar, so wird er schlechthin *lokal zusammenziehbar* genannt.

Beispiele: 1. Jede offene Teilmenge eines euklidischen (oder, allgemeiner, eines vektoriellen) Raumes ist lokal zusammenziehbar, weil jede Umgebung U ihres beliebigen Punktes p eine Kugel $U_\varepsilon(p)$, also eine in sich zusammenziehbare Umgebung von p enthält. In der Tat erfüllt die für $x \in U_\varepsilon(p)$ und $0 \leqslant t \leqslant 1$ folgendermassen erklärte Funktion:

$$f(x, t) = \textit{Punkt, der die Strecke } \overline{px} \textit{ im Verhältnisse, } (1 - t) : t \textit{ teilt,}$$

die Bedingungen der Definition **23.**, indem wir $P = U_\varepsilon(p)$ und $T = U$ setzen.

2. Eine ebene in sich kompakte lokal zusammenhängende und die Ebene höchstens in endlich viele Gebiete zerschneidende Punktmenge A ist lokal zusammenziehbar. In der Tat, ist λ der kleinste Durchmesser der Komponenten von $R_n - A$, so gibt es, da A lokal zusammenhängend ist, für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $p \in A$ ein stetiges Streckenbild $C \subset A$, welches eine Umgebung von p in A bildet, wobei $\delta(C) < \mathrm{Min}\,(\lambda, \varepsilon)$ ist. Es folgt daraus, dass alle beschränkten Komponenten Γ_n der Menge $R_2 - C$ in A liegen, und somit, dass die Menge $C' = C + \Sigma\Gamma_n \subset A$ ein stetiges, R_2 nicht zerschneidendes Streckenbild vom Durchmesser $< \lambda$, also ein absoluter Retrakt ist[38]). Nach Beispiel 4. von **23.**, ist also C'

[37]) W. Sierpiński, C. R. 162, 1916), S. 629.

[38]) K. Borsuk, Fund. Math. 18, (1932), S. 211, Korollar 2.

in sich selbst, folglich auch in $U_\varepsilon(p)$, zusammenziehbar und, da ε beliebig vorausgesetzt wurde, A lokal zusammenziehbar ist.

26. Satz. *Ist A ein Retrakt von B und B im Punkte $p \in A$ lokal zusammenziehbar, so ist auch A in p lokal zusammenziehbar.*

Beweis. Es bezeichne φ eine B auf A retrahierende Funktion und U eine Umgebung von p in A. Die Menge $V = \underset{x \in B}{E}[\varphi(x) \in U]$ ist dann eine Umgebung von p in B. Es existiert also eine Umgebung $V_0 \subset V \subset B$ von p und eine die Bedingungen der Definition **23.** (wenn wir $V_0 = P$ und $V = T$ setzen) erfüllende Funktion $f(x, t)$. Die Menge $U_0 = V_0 \cdot A$ bildet dann eine Umgebung von p in A, welche durch die Funktion $\varphi f(x, t)$ in U zusammengezogen wird, w. z. b. w.

27. Korollar. *Die $\mathfrak{R}$-Mengen sind lokal zusammenziehbar.*

Dies ergibt sich auf Grund des Satzes **26.** mit Rücksicht auf **3.** und **25.**, Beispiel 1.

28. Satz. *Ein metrischer kompakter Raum A ist dann und nur dann lokal zusammenziehbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ gibt, derart dass sich für jedes $p \in A$ die Kugel $U_{\eta,A}(p)$ in der Kugel $U_{\varepsilon,A}(p)$ zusammenziehen lässt.*

Beweis. Offenbar ist die Bedingung hinreichend. Ist andererseits A lokal zusammenziehbar, so gibt es für jedes $p \in A$ eine offene in $U_{\frac{1}{2}\varepsilon,A}(p)$ zusammenziehbare Menge U_p. Somit sind die Werte der Funktion

$$(29). \qquad \lambda(x) = \underset{p \in A}{\mathrm{Sup}}\, \varrho(x, A - U_p) \quad \textit{für jedes} \quad x \in A$$

positive Zahlen, und da diese Funktion stetig und die Menge A in sich kompakt ist, so gibt es eine Zahl η, für die

$$(30) \qquad \lambda(x) > \eta > 0 \quad \textit{für jedes} \quad x \in A$$

besteht.

Ist nun irgendein $x \in A$ gegeben, so gibt es nach (29) und (30) eine Menge $U_p \supset U_{\eta,A}(x)$. Demnach ist $x \in U_p$ und, da sich die Menge U_p in $U_{\frac{1}{2}\varepsilon,A}(p)$ zusammenziehen lässt, ist sie auch in $U_{\varepsilon,A}(x)$ zusammenziehbar. Umsomehr ist die Kugel $U_{\eta,A}(x) \subset U_p$ in $U_{\varepsilon,A}(x)$ zusammenziehbar, w. z. b. w.

29. Auf Grund des Satzes **28.**, ist für jedes $\varepsilon > 0$ die obere Schranke $s(\varepsilon)$ der die Bedingungen dieses Satzes erfüllenden Zahlen η positiv und $s(\varepsilon)$ eine nichtabnehmende Funktion von ε. Setzen wir $\eta(\varepsilon) = \frac{1}{2}\operatorname{Min}(\varepsilon, \frac{1}{2}s(\varepsilon))$, $\eta_0(\varepsilon) = \varepsilon$ und $\eta_{k+1}(\varepsilon) = \eta(\frac{1}{2}\eta_k(\varepsilon))$ für jedes $\varepsilon > 0$ und $k = 0, 1, \ldots$, so ergibt sich daraus und aus dem Satze **24.** folgender

Hilfssatz. *Für jede metrische, in sich kompakte und lokal zusammenziehbare Menge A und für jedes $\varepsilon > 0$, gibt es eine Zahlenfolge $\{\eta_k(\varepsilon)\}$ mit den Eigenschaften:*

1^0 $\eta_0(\varepsilon) = \varepsilon$,

2^0 $0 \leqslant \eta_{k+1}(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{4}\eta_k(\varepsilon)$ *für* $k = 0, 1, \ldots$,

3^0 *Für jedes $p \in A$ und $k = 0, 1, \ldots$, hat jede stetige K_n auf eine Teilmenge von $U_{\eta_{k+1}(\varepsilon),A}(p)$ abbildende Funktion eine Erweiterung auf H_n relativ zu $U_{\frac{1}{2}\eta_k(\varepsilon),A}(p)$.*

4^0 *Aus $\varepsilon \leqslant \varepsilon'$ folgt $\eta_k(\varepsilon) \leqslant \eta_k(\varepsilon')$, für $k = 0, 1, \ldots$.*

30. Bilden die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_k$ $(k \geqslant 0)$ von R_n eine mit keiner Teilmenge von R_{k-1} isometrische Punktmenge, so nenne ich *k-Simplex* (oder einfach *Simplex*) in R_n mit *Eckpunkten* $p_0, p_1, \ldots, p_k$ die kleinste konvexe Teilmenge von R_n, die alle diese Punkte enthält. Die leere Menge nenne ich (-1)-*Simplex*. Die l-Simplexe, deren Eckpunktmenge in der eines k-Simplexes S enthalten ist, nenne ich l-Seite von S.

Eine endliche Folge $S_1, S_2, \ldots, S_p$ von Simplexen bildet in Simplexe S ein *Netz von der Ordnung* ε, wenn:

1) $S = \sum_{i=1}^{p} S_i$,

2) *$S_i \cdot S_j$ ist eine gemeinsame l-Seite von Simplexen S_i und S_j für $i = 1, 2, \ldots, p$ und $j = 1, 2, \ldots, p$,*

3) *$\delta(S_i) \leqslant \varepsilon$ für $i = 1, 2, \ldots, p$.*

Eine Summe endlich vieler Simplexe eines Netzes wird ein *Komplex* desselben Netzes genannt. Jede l-Seite (bzw. Eckpunkt) eines Simplexes eines Netzes, welcher in einem Komplexe dieses Netzes als dessen Bestandteil erhalten ist, wird *l-Seite* (bzw. *Eckpunkt*) dieses Komplexes heissen.

Eine Folge $\{\sigma_k\}$ der Netze wird *normal* genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Die Ordnung ε_k des Netzes σ_k strebt mit $\frac{1}{k}$ nach 0,

b) Jeder Simplex von σ_k ist ein Komplex von σ_{k+1}.

Es ist klar, dass jede Teilfolge einer normalen Folge normal ist.

31. Es sei ein metrischer, kompakter, lokal zusammenziehbarer Raum A gegeben, ferner M und M' zwei (gleich- oder verschiedendimensionale) Komplexe eines (in einem Simplexe S konstruierten) Netzes σ *mit denselben Eckpunkten*, wobei $M \subset M'$ ist, schliesslich $\varphi \in A^M$ eine Funktion mit den Eigenschaften:

$$\text{I} \qquad \varrho[\varphi(x), \varphi(y)] < \eta_m(\varepsilon),$$

wo $\varepsilon > 0$ beliebig vorausgegeben, $m > \dim(M')$ und (x, y) zwei Eckpunkte von M, die in einem Simplexe von σ liegen sind,

$$\text{II} \qquad \delta[\varphi(S^{(l)})] < \tfrac{1}{2}\eta_{m-l}(\varepsilon),$$

wo $S^{(l)}$ eine beliebige l-Seite von M bezeichnet. Bezeichnen wir mit I′ bzw. II′ die Eigenschaften, welche aus I, bzw. II entstehen, indem M durch M' und φ durch φ' ersetzt wird, so gilt folgender

Hilfssatz. *Jede den Bedingungen I und II genügende Funktion $\varphi \in A^M$ besitzt eine Erweiterung $\varphi' \in A^{M'}$, die den Bedingungen I′ und II′ genügt.*

B e w e i s. Da die Eckpunkte von M und M' zusammenfallen, so gibt es, im Falle $M \neq M'$ ein $l_0 \geqslant 1$, derart dass:

(31) *Für $l < l_0$ ist jede l-Seite von M' eine Seite von M,*

(32) *Es gibt eine l_0-Seite $S^{(l_0)}$ von M', welche in M nicht liegt.*

Es genügt den Beweis für den Fall

$$M' = M + S^{(l_0)}, \quad \text{wo} \quad l_0 \geqslant 1, \tag{33}$$

durchzuführen.

Es sei N die Summe aller $(l_0 - 1)$-Seiten von $S^{(l_0)}$. Nach (31) und (33) ist der Komplex N in M enthalten. Somit ist die Funktion φ in N definiert, wobei man nach I für $l_0 = 1$ und nach II für $l_0 > 1$

$$\delta[\varphi(N)] < 2 \cdot \tfrac{1}{2}\eta_{m-(l_0-1)}(\varepsilon) = \eta_{m-l_0+1}(\varepsilon) \tag{34}$$

erhält.

Nach (34) haben wir für einen beliebigen Punkt $x_0 \in \varphi(N)$

$$\varphi(N) \subset U_{\eta_{m-l_0+1}(\varepsilon),A}(x_0) \tag{35}$$

und da $S^{(l_0)}$ mit der Kugel H_{l_0} homöomorph ist (wobei N in die Kugelfläche K_{l_0} übergeht), so gibt es nach Hilfssatz **29.** und nach (35) eine Erweiterung ψ der Funktion φ von N auf $S^{(l_0)}$ relativ zu $U_{\frac{1}{4}\eta_{m-l_0}^{(\varepsilon)}, A}(x_0)$. Folglich

$$\delta(\psi(S^{(l_0)})) < 2\cdot\tfrac{1}{4}\,\eta_{m-l_0}(\varepsilon) = \tfrac{1}{2}\,\eta_{m-l_0}(\varepsilon). \tag{36}$$

Nach (33), I, II und (36) erfüllt also die Funktion

$$\varphi'(x) = \varphi(x) \quad \textit{für} \quad x \in M,$$
$$\varphi'(x) = \psi(x) \quad \textit{für} \quad x \in S^{(l_0)}$$

die Bedingungen I′ und II′, w. z. b. w.

32. Satz. *Unter den endlichdimensionalen Punktmengen sind die $\mathfrak{R}$-Mengen als metrisierbare, in sich kompakte und lokal zusammenziehbare Punktmengen charakterisiert.*

Beweis[39]). Auf Grund von **27.** bleibt es nur zu zeigen, dass eine metrisierbare, endlichdimensionale, in sich kompakte und lokal zusammenziehbare Punktmenge A eine $\mathfrak{R}$-Menge ist. Wegen der Einbettbarkeit von A in einen euklidischen Raum[40]), kann man $A \subset R_n$ annehmen. Mit Rücksicht auf **4.** bleibt es also zu zeigen, dass A ein Umgebungsretrakt von R_n ist.

Sei S ein n-Simplex in R_n, der A in seinem Innern enthält. Betrachten wir eine normale Folge $\{\sigma_k\}$ der Netze in S und bezeichnen: mit N_k die Summe aller mit A nicht punktfremden, mit

[39]) Die Grundidee dieses Beweises ist im Beweise des Lefschetzschen *Deformationssatzes* enthalten. Vgl. S. Lefschetz, l. c. S. 93. Durch eine kleine Abänderung unseres Beweises kann man zeigen, dass sich in unserem Satze die Voraussetzung der lokalen Zusammenziehbarkeit durch die Voraussetzung des Zusammenhanges im Kleinen im kombinatorischen Sinne ersetzen lässt. Vgl. S. Lefschetz, l. c. S. 347, wo sich dieser Satz implizit und ohne vollständigen Beweis befindet.

Die Begriffe der $\mathfrak{R}$-Mengen, der lokal zusammenziehbaren und der in kombinatorischem Sinne im kleinen zusammenhängenden Räumen sind also im Bereiche der in sich kompakten, metrisierbaren, endlichdimensionalen Räumen äquivalent. Die Frage nach der Äquivalenz ohne Voraussetzung der endlichen Dimension bleibt noch offen.

[40]) Nach dem bekannten *Einbettungssatze* von K. Menger und G. Nöbeling, nach welchem jeder separable metrisierbare n-dimensionale Raum mit einer Teilmenge von R_{2n+1} homöomorph ist. Siehe K. Menger, l. c S. 296.

N_k^* die Summe aller übrigen Simplexe von σ_k. Setzen wir

$$T_k = N_k \cdot N_k^*.$$

Da $\varrho(T_k, A) > 0$ ist, so kann man (indem man eventuell die Folge $\{\sigma_k\}$ durch eine Teilfolge ersetzt) annehmen, dass

$$A \subset N_{k+1} \subset N_k - T_k \subset S$$

und dass für jeden Simplex $S_{i,k}$ des Netzes σ_k

$$\delta(S_{i,k}) < \frac{1}{3}\,\eta_{2n}\left(\frac{1}{k}\right) \tag{37}$$

gilt.

Wählen wir nun für jeden Punkt $x \in S$ einen beliebigen Punkt $\alpha(x)$ in der Menge $\underset{y \in A}{E}[\varrho(x, y) = \varrho(x, A)]$[41]) aus, so gilt:

$$\begin{aligned} &\alpha(x) = x \quad \textit{für jedes} \quad x \in A \\ &\varrho[\alpha(x), x] < \frac{1}{3}\,\eta_{2n}\left(\frac{1}{k}\right) \quad \textit{für jedes} \quad x \in N_k. \end{aligned} \tag{38}$$

Bezeichnen wir nun mit P_k die Menge der Eckpunkte des Netzes σ_k, welche zu T_k gehören, und wenden den Hilfssatz **31.** im Falle $M = P_k$, $M' = T_k$, $\varphi = \alpha$, $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$, $m = 2n$ an. Es gibt also eine Funktion $\psi_k \in A^{T_k}$ welche eine Erweiterung von $\alpha(x)$ bildet, wobei nach **29.** 1° und 2° für jede l-Seite $S^{(l)}$ des Komplexes T_k von σ_k,

$$\delta[\psi_k(S^{(l)})] < \frac{1}{2}\,\eta_{2n-l}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{8}\,\eta_n\left(\frac{1}{k}\right)$$

ist, woraus und aus (38)

$$\varrho[\psi_k(x), x] \leqslant \frac{1}{8}\,\eta_n\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3}\eta_{2n}\left(\frac{1}{k}\right) \quad \textit{für jedes} \quad x \in T_k \tag{39}$$

folgt.

Es bezeichne W_k die Menge der zu $N_k - N_{k+1} + T_{k+1}$ gehörenden Eckpunkte des Netzes σ_{k+1}. Die in der Menge $M_k = W_k + T_k + T_{k+1}$ folgendermassen definierte Funktion φ_k:

$$\begin{aligned} &\varphi_k(x) = \psi_k(x) \quad && \textit{für} \quad x \in T_k, \\ &\varphi_k(x) = \psi_{k+1}(x) \quad && \textit{für} \quad x \in T_{k+1}, \\ &\varphi_k(x) = \alpha(x) \quad && \textit{für} \quad x \in W_k - T_k - T_{k+1} \end{aligned} \tag{40}$$

[41]) Diese Auswahl kann, da diese Menge in sich kompakt ist, effektiv vorgenommen werden.

erfüllt nach (39), **29.**, 4^0 und (38) die Ungleichung

$$\varrho(x, \varphi_k(x)) \leqslant \frac{1}{8}\eta_n\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3}\eta_{2n}\left(\frac{1}{k}\right),$$

woraus sich nach (37) und **29.**, 2^0, 4^0

$$\varrho[\varphi_k(x), \varphi_k(y)] \leqslant \frac{1}{4}\eta_n\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{2}{3}\eta_{2n}\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3}\eta_{2n}\left(\frac{1}{k+1}\right) \leqslant \frac{1}{2}\eta_n\left(\frac{1}{k}\right)$$

für je zwei zu einem Simplexe des Netzes σ_{k+1} gehörende Punkte x, y von M_k ergibt.

Setzen wir also $\varphi = \varphi_k$, $M = M_k$, $M' = N_k - N_{k+1} + T_{k+1}$, $\sigma = \sigma_{k+1}$ und $m = n$, so werden alle Voraussetzungen des Hilfssatzes **31.** erfüllt, woraus die Existenz einer Erweiterung φ'_k von φ_k auf M' folgt, die den folgenden Bedingungen genügt:

1) $\varphi'_k \in A^{N_k - N_{k+1} + T_{k+1}}$,

2) *Für jede l-Seite $S^{(l)}$ des Komplexes $N_k - N_{k+1} + T_{k+1}$ von σ_{k+1} gilt* $\delta(\varphi'_k(S^{(l)})) \leqslant \frac{1}{2}\eta^{n-l}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{2k}$.

Es gilt insbesondere nach (37), (38), (39) und (40):

$$\varrho(x, \varphi'_k(x)) \leqslant \frac{1}{2k} + \frac{2}{3}\eta_{2n}\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{8}\eta_n\left(\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} \tag{41}$$

für jedes $x \in N_k - N_{k+1} + T_{k+1}$.

Nach (40) und (41) retrahiert also die Funktion

$$\varphi(x) = x \quad \textit{für} \quad x \in A,$$
$$\varphi(x) = \varphi'_k(x) \quad \textit{für} \quad x \in N_k - N_{k+1} + T_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

die Umgebung $N_1 = A + \sum_{k=1}^{\infty}(N_k - N_{k+1} + T_{k+1})$ von A auf A, w. z. b. w.

33. Satz. *Ebene $\mathfrak{R}$-Mengen sind mit den in sich kompakten, lokal zusammenhängenden und die Ebene in höchstens endlich viele Gebiete zerschneidenden Punktmengen identisch.*

B e w e i s. Erstens, ist eine $\mathfrak{R}$-Menge in sich kompakt, nach **27.** lokal zusammenziehbar, also nach **25.** lokal zusammenhängend, und, auf Grund des Satzes **16.**, zerschneidet sie die Ebene in höchstens endlich viele Gebiete. Zweitens, ist jede in sich kompakte, lokal zusammenhängende und die Ebene in höchstens endlich viele Gebiete zerschneidende ebene Punktmenge, nach **25.**, Beispiel **2**, lokal zusammenziehbar und somit nach Satz **32.** eine $\mathfrak{R}$-Menge, w. z. b. w.

Sur les composants dimensionnels d'un espace compact.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

D'après U r y s o h n on appelle *multiplicité Cantorienne de dimension n* un espace compact de dimension n, s'il reste connexe après la suppression d'un ensemble fermé de dimension $n-2$ quelconque[1]) R étant compact de dimension n, M. A l e x a n d r o f f appelle[2]) *composant dimensionnel* (dimensionnelle Komponente) de R tout ensemble fermé qui est 1) contenu dans R, 2) une multiplicité Cantorienne de dimension n et 3) saturé par rapport aux propriétés 1) et 2). Toute définition de la dimension engendre de cette manière une notion correspondante de multiplicité Cantorienne et de composant dimensionnel[3]). Je me borne à la considération des multiplicités Cantoriennes dites *simples* (einfach) par M. A l e x a n d r o f f qui correspondent à la définition de la dimension de B r o u w e r - M e n g e r - U r y s o h n (que je vais désigner par le symbole dim R) et je vais donner pour ce cas particulier la solution du problème II posé par M. A l e x a n d r o f f dans son mémoire cité[4]).

T h é o r è m e. *Si la classe de composants dimensionnels* (correspondants à la définition de dimension de B r o u w e r - M e n g e r -

[1]) U r y s o h n. Fund. Math. VII p. 124.

[2]) A l e x a n d r o f f: *Dimensionstheorie*. Math. Ann. 106 p. 214—215. M. T u m a r k i n (C. R. 186 p. 420) appelle ces ensembles: multiplicités Cantoriennes maximales.

[3]) M. A l e x a n d r o f f considère les multiplicités Cantoriennes simples et mod m, qui correspondent aux dimensions mod m introduites par lui (comp. m. c. p. 162—238).

[4]) m. c. p. 216.