Posons, en outre, $s \prec t$ lorsque, pour n suffisamment grand, on a constamment $s^{(n)} < t^{(n)}$. On prouve facilement à l'aide du théorème de M. Zermelo l'existence d'une *échelle indénombrable*, c. à d. d'une famille indénombrable de suites bien ordonnée selon la relation $s \prec t$. Or, *toute famille de ce genre jouit de la propriété λ*. La démonstration de ce fait ne diffère pas au fond de celle de M. Lusin exposée au vol. II des Fundamenta (p. 155).

Je veux attirer ici l'attention à quelques énoncés liés aux transformations des espaces à propriété λ.

1. *Si un espace $\mathcal{Y}$ jouissant de la propriété λ est une image biunivoque et continue d'un espace (arbitraire) $\mathcal{X}$, l'espace $\mathcal{X}$ jouit également de la propriété λ.*

En effet, P étant un sous-ensemble dénombrable de l'espace $\mathcal{X}$ et f désignant la transformation en question, $f(P)$ comme ensemble dénombrable, est un G_δ (dans $\mathcal{Y}$) et, la fonction f étant continue, l'ensemble $f^{-1}[f(P)] = P$ est un G_δ dans $\mathcal{X}$.

2. *$y = f(x)$ étant une transformation arbitraire d'un espace $\mathcal{X}$ jouissant de la propriété λ, l'image géométrique de cette transformation, c. à d. l'ensemble $I = \underset{xy}{E}[y = f(x)]$ jouit de la propriété λ.*

Car la projection de I sur $\mathcal{X}$ est une transformation biunivoque et continue.

3. *Chaque ensemble de puissance $\aleph_1$ est une image biunivoque et continue d'un espace à propriété λ.*

Il existe, en effet, un espace $\mathcal{X}$ à propriété λ et de puissance $\aleph_1$ (comme nous l'avons indiqué auparavant). Or $\mathcal{Y}$ étant l'ensemble donné et $f(x)$ une transformation biunivoque de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, l'ensemble $I = \underset{xy}{E}[y = f(x)]$ jouit de la propriété λ et $\mathcal{Y}$ en est une image biunivoque et continue.

Remarquons finalement que le dernier énoncé implique, dans l'hypothèse du continu, que *„la propriété de Baire sur tout ensemble parfait" n'est pas invariante relativement aux transformations biunivoques et continues* (bien qu'elle soit, dans les espaces complets, un invariant de l'homéomorphie). Car, d'une part, il existe des ensembles (de puissance $\aleph_1$) dépourvus de la propriété de Baire et, d'autre part, chaque ensemble à propriété λ jouit de la propriété de Baire sur tout ensemble parfait, puisqu'il y est de I-re catégorie.

Sur une classe de fonctions considérée dans l'étude du problème de Dirichlet.

Par

Otton Nikodym (Varsovie).

Le traîtement du problème de Dirichlet concernant l'équation $\Delta f = 0$ à l'aide du principe connu du minimum a trouvé des voies nouvelles dès l'apparation des Mémoires de M. M. B. Levi et G. Fubini [1]). Le premier de ces auteurs a trouvé que pour le dit problème il est avantageux d'introduire des fonctions spéciales que je propose d'appeler fonctions (BL) et dont la définition sera donnée dans ce qui va suivre. J'ai présenté au *II Congrès des Mathématiens Roumains à Turnu Severin* (1932) une méthode permettant, à l'aide des fonctions (BL) de traiter le problème de Dirichlet [2]) pour des équations symétriques du type elliptique d'une manière très simple par le principe du minimum et s'appuyant sur la théorie générale des espaces vectoriels abstraits.

Je me propose ici de développer quelques propriétés des fonctions (BL) non seulement à cause de leur importance, mais surtout parce qu'elles sont intéressantes en elles mêmes.

§ 1. Notions préliminaires.

1. Soit D un ensemble ouvert et borné dans l'espace euclidien à 3 dimensions pourvu d'un système U de coordonnées cartésiennes.

[1]) Beppo Levi. *Sul principio di Dirichlet.* Rend. Circ. Mat. di Palermo 1906. T. XXII, p. 303.
Guido Fubini. *Il principio di minino e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari.* Rend. Circ. Mat. di Palermo 1907. T. XXIII, p. 58. ff.

[2]) et mêmes des problèmes plus généraux.

Nous dirons: le *domaine* D. Appelons *ligne* $l_{\xi,\eta}$ *relative à* D l'ensemble de tous les points de D situés sur la droite $x=\xi$, $y=\eta$, mais à condition que cet ensemble n'est pas vide. Pour que ξ, η détermine la droite relative $l_{\xi,\eta}$ il faut et il suffit que le point (ξ, η), situé sur le plan x, y du système U, appartienne à la projection orthogonale $D_{x,y}$ de D sur le dit plan. Appelons *plan* l_ζ *relative à* D l'ensemble (on le suppose non vide) de tous les points de D situés sur le plan $z=\zeta$. Le point $z=\zeta$ situé sur l'axe z appartient à la projection D_z du domaine D sur l'axe z. D'une manière analogue on définit les lignes relatives $l_{\eta,\zeta}$, $l_{\zeta,\xi}$ et les plans relatifs l_ξ, l_η.

Soit $f(P)$ une fonction réelle définie presque partout dans D. Disons que $f(P)$ *est sur la ligne relative* $l_{\xi,\eta}$ *intérieurement absolument continue* si, quel que soit le segment droit et fermé $\langle A, B\rangle$ contenu dans $l_{\xi,\eta}$, la fonction $f(P)$ est partout définie dans $\langle A, B\rangle$ et, si l'on la considère comme une fonction du point de ce segment, elle est absolument continue au sens de G. Vitali, c'est-à-dire, la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ existe presque partout sur $\langle A, B\rangle$ et on a:

$$\int_{A'}^{B'} \frac{\partial f}{\partial z}\, dz = f(B') - f(A') \quad \text{pour tout } A',\ B',$$

contenu dans $\langle A, B\rangle$ [1]. Si pour une telle fonction l'intégrale Lebesgu'ienne

$$\int_{l_{\xi,\eta}} \frac{\partial f}{\partial z}\, dz$$

existe, la fonction admet *sur* $l_{\xi,\eta}$ *des valeurs limites frontières* bien déterminées. Cela veut dire, par définition, que, si (A, B) est un segment rectiligne ouvert, contenu dans $l_{\xi,\eta}$ et *saturé* [2]), les limites:

$$(1) \qquad \lim_{P\to A} f(P), \quad \lim_{P\to B} f(P), \quad \text{où} \quad P \in (A, B),$$

existent (et sont finies).

[1]) Il n'est pas vrai que f est nécessairement absolument continue dans $l_{\xi,\eta}$, ou même dans tout segment ouvert contenu dans $l_{\xi,\eta}$.

[2]) c'est-à-dire que tout segment ouvert (A', B') contenu dans $l_{\xi,\eta}\cdot D$ et contenant (A, B), coïncide avec (A, B).

Remarquons que, dans notre cas, on peut *prolonger la fonction* $f(P)$ *sur* $l_{\xi,\eta}$, en lui attribuant, d'une manière supplémentaire, les valeurs (1) resp. dans A et B.

Nous dirons qu'*une propriété subsiste pour presque toute ligne relative* $l_{x,y}$, s'il existe un ensemble E, *épais dans* $D_{x,y}$ [1]) tel que, si $(\xi, \eta) \in E$, la dite propriété subsiste pour $l_{\xi,\eta}$. D'une manière analogue nous dirons qu'*une propriété subsiste pour presque tout plan relatif* l_z.

2. Définition I. Disons que la fonction $f(P)$ est (relativement au système U des coordonnées) une *fonction de M. Beppo Levi dans un ensemble ouvert et borné* D (ou plus simplement: *une fonction* (BL)) si:

1º elle est définie presque partout dans D,

2º elle est intérieurement absolument continue sur presque toute droite relative à D,

3º les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ sont à carré sommable dans D.

Remarquons qu'une fonction (BL) peut avoir des discontinuités, et mêmes en nombre infini. Posons p. ex.

$$f_0(x, y, z) = \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2+z^2)$$

pour $0 < x^2+y^2+z^2 < 1$. On trouve aisément:

$$\iiint \left\{\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz = 4\pi.$$

C'est donc une fonction (BL).

Si l'on pose

$$(2) \qquad f(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_n(x-a_n,\ y-b_n,\ z-c_n),$$

où $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n p_n$ converge, $p_n > 0$, et (a_n, b_n, c_n) sont des points quelconques contenus dans le cube $(0, \frac{1}{2})$, on peut démontrer que (2) converge presque partout dans le cube et représente une fonction (BL).

[1]) c'est-à-dire mes $E =$ mes $D_{x,y}$, $E \subset D_{x,y}$.

Il n'est pas sans intérêt que, même dans le cas de deux dimensions, on peut trouver une fonction g continue du point de la circonférence d'un cercle C pour laquelle il n'existe aucune fonction (BL) dans C admettant sur la fontière les valeurs g [1]).

Si $f(P)$ est (BL) dans D, elle admet sur presque toute droite $l_{y,z}$ des valeurs limites frontières bien déterminées.

Cela se démontre aisément à l'aide du théorème de M. Fubini concernant les intégrales multiples. A la fin du travail nous montrerons que les trois systèmes de valeurs limites frontières correspondant aux droites $l_{z,y}$, $l_{y,z}$, $l_{z,x}$ sont pour le cas d'une sphère presque partout les mêmes.

3. Pour étudier les propriétés des fonctions (BL) il est commode d'introduire d'abord des notions auxiliaires et d'en établir quelques propriétés.

Supposons, d'une manière générale, qu'une propriété — désignons la par (α) — a lieu sur presque toute ligne relative $l_{x,y}$, $l_{y,z}$, $l_{z,x}$. Soient $E_{x,y}$, $E_{y,z}$ et $E_{z,y}$ les ensembles épais resp. dans $D_{x,y}$, $D_{y,z}$, $D_{z,x}$ correspondant à ces lignes. Il existe un ensemble épais de plans relatifs l_y dont chacun contient un ensemble épais de lignes $l_{x,y}$, où (α) subsiste. Désignons ces plans par $l_{y(x)}$. D'une manière analogue on obtient des plans $l_{y(z)}$, $l_{x(y)}$, $l_{x(z)}$, $l_{z(x)}$, $l_{z(y)}$. Désignons par $A_{x,y}$ l'ensemble de tous les points de D par lesquels passe une droite $l_{x,y}$ en question et, par $A_{x(y)}$ l'ensemble de tous les point de D par lesquels passe un plan $l_{x(y)}$. Les ensembles épais $A_{x,y}$, $A_{y,z}$, $A_{z,x}$, $A_{x(y)}$, $A_{y(x)}$, $A_{y(z)}$, $A_{z(y)}$, $A_{z(x)}$, $A_{x(z)}$ ont un ensemble A commun qui est épais dans D.

[1]) J. Hadamard. *Sur le principe de Dirichlet.* Bull. Soc. math. d. France 1906, p. 135.

Soit $f(x) \geqslant 0$ une fonction définie dans $0 < x \leqslant 1$, tendant vers ∞ pour $x \to 0$ et ne s'évanouissant que pour $x = 1$. Supposons que $y = f(x)$ est une courbe analytique. Considérons le domaine A ouvert situé sur le plan de la variable complexe $z = x + iy$ et dont le contour se compose du segment droit $-1 \leqslant x \leqslant +1$, $y = 0$ et de deux courbes $y = f(x)$ et $y = f(-x)$. Désignons par $\varphi(z)$ une des fonctions qui effectuent la réprésentation conforme du cercle unitare D sur le domaine A et, qui soit continue dans le cercle fermé. Définissons la fonction $g(P)$ sur la frontière C du cercle, en posant $g(P)$ égale à l'abscisse du point du domaine A qui correspond à P. Si l'aire du domaine A est infinie, on démontre que $g(P)$ satisfait aux éxigences du texte. En effet, le „dirichlétien" de la partie réelle de $\varphi(z)$ est infini.

Tout point de A jouit de la propriété que par lui passent des lignes et des plans de toute sorte que nous venons de considérer. Les lignes relatives passant par A sont des lignes où la propriété (α) a lieu et, les plans qui passent par A contiennent (chacun) deux systèmes épais de droites relatives, où (α) subsiste. Les repères de lignes et de plans jouissant de la dite propriété s'appellerons *repères de régularité pour la propriété* (α).

Remarquons que si l'on considère, en outre, une propriété (β) qui subsiste dans presque tout point de D et une propriété (γ) qui a lieu pour presque tout plan relative, on voit aisément qu'il existe aussi un ensemble épais de points de D dans lesquels les repères jouissent à la fois des propriétés (α), (β) et (γ).

Si l'on a une infinité dénombrable de systèmes épais de repères par rapport aux propriétés resp. (α_1), (α_2), ..., il existe un système épais de repères de régularité pour l'ensemble de toutes ces propriétés.

En appliquant ce que nous venons de dire à une fonction $f(P)$ du type (BL) dans D, on trouve qu'il existe un ensemble épais de repères de régularité pour les propriétés suivantes:

1. $f(P)$ est absolument continue intérieurement sur des lignes relatives,
2. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sont à carré sommable sur des lignes relatives,
3. elles sont à carré sommable sur des plans relatifs,
4. $f(P)$ possède de valeurs frontières sur des lignes relatives.

On appellera ces repères, *repères normaux pour* $f(P)$.

§ 2. Mesurabilité.

1. Commençons par un lemme qui nous sera utile dans ce qui va suivre.

Lemme. Soit $g(P)$ une fonction définie presque partout dans un parallélopipède rectangulaire et ouvert Q dont les côtés sont parallèles aux axes du système des coordonnées. Supposons que $g(P)$ est continue sur presque toute droite relative à Q.

Dans ces conditions $f(P)$ est mesurable dans Q et, si $z = \Phi(x, y)$

est continue, $f(x, y, \Phi(x, y))$ est aussi une fonction mesurable de deux variables x, y, nb. si la surface $z = \Phi(x, y)$ se trouve dans Q.

Démonstration. Montrons d'abord qu'une fonction $h(x, y)$, définie presque partout dans le rectangle R, et continue sur presque toute droite relative, est mesurable (B) à un ensemble de mesure nulle près.

En effet, soient (a, b), (a_1, b_1), où $a < a_1$, $b < b_1$ des sommets opposés de R. Choisissons les nombres $a < x_1^{(u)} < \ldots < x_{2^u-1}^{(u)} < a_1$ dont les différences successives ne surpassent pas $\frac{1}{u}(a_1 - a)$ et tels que $x = x_i^{(u)}$ est une ligne de continuité pour h. Définissons la fonction continue $h_u(x, y)$ dans $a_1^{(u)} \leqslant x \leqslant a_{2^u-1}^{(u)}$ $b < y < b_1$, en posant $h_u(x_i^{(u)}, y) = h(x_i^{(u)}, y)$ et en la faisant varier linéairement dans $x_i^{(u)} \leqslant x \leqslant x_{i+1}^{(u)}$ et pour tout y fixé. Si l'on fait tendre u vers l'infini en conservant toujours les points $x_i^{(u)}$ quand on passe à la $u+1$-ème subdivision, on obtient la proposition énoncée.

En procédant à l'espace, considérons les repères de régularité par rapport à la continuité de $g(P)$ sur des lignes relatives et, supposons — ce qui ne restreint pas la généralité — que le parallélopipède possède les points $(0, 0, 0)$ et (a, b, c), où a, b, c sont des nombres positifs, pour des sommets opposés. Choisissons des nombres $0 < z_1^{(u)} < \ldots < z_{2^u-1}^{(u)} < c$, de manière que leur distance ne surpasse pas c/u et que les plans $z = z_i^{(u)}$ appartiennent aux repères de régularité. La fonction $g(x, y, z_i^{(u)})$ de deux variables x, y est, d'après ce qui précède, égale presque partout à une fonction $g_i^{(u)}(x, y)$ mesurable (B). Définissons la fonction $g^{(u)}(x, y, z)$ en la posant égale à $g_i^{(u)}(x, y)$ dans les point du plan relatif $z = z_i^{(u)}$ et en la faisant varier linéairement (par continuité) dans les intervalles $z_i^{(u)} \leqslant z \leqslant z_{i+1}^{(u)}$ et pour tout x et y fixé. Les fonctions $g^{(u)}$ définies ainsi dans $0 < x < a$, $0 < y < b$ et $z_1^{(u)} \leqslant z \leqslant z_{2^u-1}^{(u)}$ sont mesurables (B). Si l'on fait successivement des subdivisions de l'intervalle $(0, c)$ et qu'on procède vers l'infini, la fonction $\limsup g^{(u)}(P)$ qui est mesurable (B), coïncide avec $g(P)$ sur presque toute ligne $l_{x,y}$. Le théorème en résulte immédiatement.

2. En appliquant le lemme démontré à la fonction $f(P)$ du type (BL) dans D et en tenant compte de ce que D peut être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable de parallélopipèdes ouverts, on obtient que:

Toute fonction $f(P)$ du type (BL) est mesurable et, si $z = \Phi(x, y)$ est une surface continue se trouvant dans D, la fonction $f(x, y, \Phi(x, y))$ est aussi mesurable.

En particulier, $f(P)$ est mesurable superficiellement sur la surface de toute sphère fermée contenue dans D.

3. Pour aller plus loin nous introduirons une notion auxiliaire. Soit D un ensemble ouvert et borné. Soient $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, c des nombres tels que le rectangle R: $a_1 < x < a_2$, $b_1 < y < b_2$, $z = c$ soit contenu dans D. Soit $\Phi(x, y)$ une fonction quelconque définie dans $a_1 < x < a_2$, $b_1 < y < b_2$, telle que $\Phi(x, y) > c' > c$ et que l'ensemble M des points $a_1 < x < a_2$, $b_1 < y < b_2$, $c < z < \Phi(x, y)$ représente un domaine ouvert. Dans le cas, où ce domaine est contenu dans D, nous l'appellerons *domaine-colonne de D* (se trouvant au dessus de R). Le rectangle R s'appelle *la base* et l'ensemble $a_1 < x < a_2$, $b_1 < y < b_2$, $z = \Phi(x, y)$ le *front de la colonne*.

On voit aisément ce qu'on doit comprendre par un domaine-colonne se trouvant au dessous de R et, d'une manière analogue, on peut parler aussi des rectangles parallèles aux plans xz resp. yz.

4. Soit $f(P)$ une fonction (BL) dans D et M un domaine-colonne se trouvant au dessus d'un rectangle R[1]. Définissons la fonction $f_0(x, y)$ presque partout dans $R_{x,y}$ en lui attribuant la valeur égale à la valeur limite et frontière au front de M admise par $f(P)$ sur des lignes relatives $l_{x,y}$ et dans M.

Dans ces conditions $f_0(x, y)$ est mesurable.

Pour démontrer cela il suffit de remarquer que $\Phi(x, y)$ peut être considérée comme limite d'une suite croissante de fonctions $\Phi_n(x, y)$ continues et telles que la surface $z = \Phi_n(x, y)$ est contenue dans M.

§ 3. Sommabilité carrée.

1. Reprenons les hypothèses et les notations de l'énoncé du théorème précedant. Alors $f(P)$ est à carré sommable dans M et $f_0(x, y)$ est à carré sommable dans $R_{x,y}$.

[1]) Le front de M peut être contenu entièrement ou partiellement dans la frontière du domaine D.

Nous ne donnerons qu'une esquisse de démonstration pour $f_0(x, y)$, parce que le cas de $f(P)$ se traite d'une manière analogue. Il suffit de démontrer le théorème pour le cas, où la base R de la colonne M contient un point (a, b, c), origine d'un repère normal. On a pour un ensemble épais de points (ξ, y) de $R_{x,y}$:

$$f_0(\xi, y) = A + B + C + D, \tag{1}$$

où

$$A = f(a, b, c), \qquad B = f(\xi, b, c) - f(a, b, c) = \int_a^\xi \frac{\partial f(x, b, c)}{\partial x}\, dx,$$

$$C = f(\xi, \eta, c) - f(\xi, b, c) = \int_b^\eta \frac{\partial f(\xi, y, c)}{\partial y}\, dy,$$

$$D = f_0(\xi, \eta) - f(\xi, \eta, c) = \int_c^\zeta \frac{\partial f(\xi, \eta, z)}{\partial z}\, dz,$$

où on a posé $\zeta \underset{df}{=} f_0(\xi, \eta)$. On a

$$f_0^2 \leqslant 4(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)\ ^{1)}.$$

Les quatre termes de (1) étant des fonctions mesurables des variables x, y il suffit de démontrer que A^2, B^2, C^2, D^2 ne surpassent pas des certaines fonctions sommables. En désignant par σ un nombre supérieur à 1 et au diamètre du domaine D, on trouve:

$$\iint_{R_{x,y}} B^2\, dx\, dy \leqslant \sigma^3 \int_{l_{b,c}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dx,$$

$$\iint_{R_{x,y}} C^2\, dx\, dy \leqslant \sigma^3 \iint_{l_c} \left(\frac{\partial f(\xi, y, c)}{\partial y}\right)^2 dx\, dy, \tag{2}$$

$$\iiint_{R_{x,y}} D^2\, dx\, dy \leqslant \sigma^3 \iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 dx\, dy\, dz.$$

La première et la troisième de ces inégalités ne présentant pas de difficulté, nous nous bornons à la démonstration de la deuxième.

[1]) Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a $2ab \leqslant a^2 + b^2$.

On a

$$C^2 \leqslant \sigma \int_b^\eta \left(\frac{\partial f(\xi, y, c)}{\partial y}\right)^2 dy \leqslant \sigma \cdot g(\xi, \eta),$$

où

$$g(\xi, \eta) \underset{df}{=} \int_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial f(\xi, y, c)}{\partial y}\right)^2 dy.$$

Pour démontrer l'existence de l'intégrale $\iint g\, dx\, dy$ remarquons d'abord que nous nous trouvons sur le plan relatif l_c de sommabilité carrée de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

On a

$$\iint_{R_{x,y}} \left(\frac{\partial f(\xi, y, c)}{\partial y}\right)^2 dy\, d\xi = \int_{a_1}^{a_2} d\xi \int_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial f(\xi, y, c)}{\partial y}\right)^2 dy. \tag{3}$$

L'expression (3) ne dépendant ni de ξ ni de η, les intégrales

$$\int_{b_1}^{b_2} d\eta \iint_{R_{x,y}} \left(\frac{\partial f(\xi, y, c)}{\partial y}\right)^2 dy\, d\xi = \tag{4}$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} d\eta \int_{a_1}^{a_2} d\xi \int_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial f(\xi, y, c)}{dy}\right)^2 dy \leqslant \sigma \iint_{l_c} \left(\frac{\partial f(\xi, y, c)}{\partial y}\right)^2 dy\, d\xi$$

existent. La fonction à intégrer étant non négative et possédant l'intégrale itérée, il en résulte d'après un théorème de M. Tonelli[1]) que l'intégrale

$$\iint_{R_{x,y}} d\xi\, d\eta \int_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial f(\xi, y, c)}{\partial y}\right)^2 dy$$

existe aussi et est égale à (4). L'inégalité (2) en résulte aisément. La sommabilité carrée de f_0 est ainsi démontrée.

[1]) Si une fonction mesurable de deux variables est non négative, l'existence d'une intégrale itérée implique l'existence de l'intégrale double.

Tonelli. *Sull' integrazione par parti.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 18. II. 1909.

Comp. aussi G. Fichtenholz. *Sur une fonction de deux variables sans intégrale double.* Fund. Math. VI. 1924. p. 30 ff.

En même temps nous avons établi l'inégalité suivante:

$$\int\int_{R_{x,y}} f_0^2\,dx\,dy \leqslant 4\sigma^3\left\{f^2(a,b,c)+\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]\right\}, \tag{5}$$

l'intégration dans le membre droit étant étendue sur les lignes relatives $l_{a,b}$, $l_{b,c}$, $l_{c,a}$, sur le plans relatifs l_a, l_b, l_c de D et sur le domaine entier D.

D'une manière analogue on obtient:

$$\int\int_M\int f^2(P)\,dx\,dy\,dz \leqslant \tag{6}$$

$$\leqslant 4\sigma^4\left\{f^2(a,b,c)+\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]\right\}.$$

Si nous nous souvenons de la définition d'un domaine-colonne et tenons compte du fait que l'ensemble de repères normaux est épais dans D, nous pouvons énoncer le lemme suivant qui va nous servir dans la suite:

Dans les conditions du théorème précédant il existe un cube Q contenu dans M et un ensemble épais de points (a,b,c) dans Q tel que les inégalités (5) et (6) substitent, où σ désigne un nombre ne dépendant que du choix du domaine D.

2. Du théorème démontré il résulte que, si D est somme d'un nombre fini de domaines-colonnes de n'importe quelle sorte, $f(P)$ est à carré sommable.

Si la fonction $f(P)$ est (BL) dans un ensemble ouvert et borné, elle est à carré sommable dans toute sphère fermée contenue dans D et, par conséquent, aussi dans tout ensemble fermé contenu dans D.

Si $f(P)$ est (BL) dans une sphère ouverte, elle est à carré sommable.

Remarquons qu'il n'est pas vrai qu'une fonction (BL) dans un ensemble ouvert et borné y est nécessairement à carré sommable. En effet, nous donnerons plus tard un exemple d'un domaine simplement connexe et borné et d'une fonction (BL) qui n'y est pas à carré sommable.

Une fonction (BL) dans D est à carré sommable sur la surface de toute sphère fermée contenue dans D.

En effet, la surface de la sphère peut être divisée en des morceaux en nombre fini dont chacun peut être considéré comme le front d'un domaine-colonne.

Si l'équation du front S est p. ex. $z=\Phi(x,y)$, où $\cos(z,n)>\alpha>0$, le symbole n désignant la direction de la normale intérieure, on a

$$\int\int_{S_{x,y}} f^2\,dx\,dy=\int\int_S f^2\cos(z,n)\,d\omega \geqslant \alpha\cdot\int\int_S f^2\,d\omega.$$

§ 4. Suites infinies de fonctions (BL).

1. Définition II. *Soit D un ensemble ouvert et borné, et $f(P)$, $f_n(P)$, $(n=1,2,\ldots)$ une suite infinie de fonctions (BL) dans D. Nous dirons que la suite $\{f_n\}$ tend vers f en moyenne carrée du gradient dans D si*

$$\lim_{n\to\infty}\int\int_D\int\left\{\left[\frac{\partial(f_n-f)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial(f_n-f)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial(f_n-f)}{dx}\right]^2\right\}dx\,dy\,dz=0.$$

Nous écrirons $f_n \overset{D}{\to} f$.

Si $f_n \overset{D}{\to} f$, on a aussi $f_n \overset{D}{\to} f+\text{const.}$ Si la limite introduite existe, elle est unique à une constante additive et arbitraire près. Si $f_n \overset{D}{\to} f$, on a $f_{k_n} \overset{D}{\to} f$ pour toute suite infinie partielle.

Dans ce qui va suivre nous admetterons que D est connexe, donc que D est un domaine borné et ouvert.

Nous démontrerons que la notion introduite de la limite jouit d'une propriété analogue à celle de Cauchy. En effet, nous allons démontrer que

la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction f du type (BL) telle que $f_n \overset{D}{\to} f$ se présente que voici: quel que soit $\varepsilon>0$, il existe un nombre μ tel que les inégalités $n>\mu$, $m>\mu$ entraînent:

$$\int\int_D\int\left\{\left[\frac{\partial(f_n-f_m)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial(f_n-f_m)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial(f_n-f_m)}{\partial z}\right]^2\right\}dx\,dy\,dz<\varepsilon.$$

Nous appellerons cette condition: la condition (C).

La condition (C) étant évidemment nécessaire, il suffit seulement d'en démontrer la suffisance.

Supposons que la condition (C) subsiste pour une suite donnée $\{f_n(P)\}$ de fonctions (BL) dans un domaine ouvert et borné D. Nous allons montrer d'abord qu'il existe alors une suite partielle d'indices $\{k_n\}$ et une suite de constantes $\{q_n\}$, telles que $f_{k_n}(P)+q_n$ converge presque partout dans D vers une fonction $f(P)$ du type (BL). De plus il existe un ensemble épais de droites $l_{x,y}$ jouissant de la propriété suivante: Si (A, B) est un segment ouvert situé sur une telle droite, contenu dans D et saturé, la suite $f_{k_n}(P)+q_n$ de fonctions prolongées (par adjonction des valeurs frontières limites) converge uniformément sur $\langle A, B\rangle$ fermé vers $f(P)$ prolongée.

Après avoir démontré cela dans les numéros 2—6, nous démontrerons le théorème précédant.

2. Démonstration. Puisque

$$\iiint_D \left[\frac{\partial(f_n-f_m)}{\partial x}\right]^2 dx\,dy\,dz<\varepsilon$$

dès que n et m sont assez grands, la suite $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x}\right\}$ est convergente en moyenne carrée (ordinaire) vers une fonction $F(P)$ qui est à carré sommable dans D: $\frac{\partial f_n}{\partial x}\xrightarrow{2}F(P)$ et, d'une manière analogue, on obtient des relations:

$$\frac{\partial f_n}{\partial y}\xrightarrow{2}G(P),\quad \frac{\partial f_n}{\partial z}\xrightarrow{2}H(P).$$

On trouve aisément que la fonction $\int\limits_{l_{\eta,\zeta}}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}-F\right)^2 dx$ de deux variables η, ζ est définie presque partout dans $D_{y,z}$ et qu'elle y tend en moyenne simple vers 0. Il en résulte l'existence d'une suite partielle $\{l_n\}$ d'indices, telle que la suite

$$\int\limits_{l_{\eta,\zeta}}\left(\frac{\partial f_{l_n}}{\partial x}-F\right)^2 dx$$

tend d'une manière ordinaire vers 0 dans presque tout point η, ζ de $D_{y,z}$.

De plus on a

$$\left(\int\limits_{l_{\eta,\zeta}}\left|\frac{\partial f_{l_n}}{\partial x}-F\right|dx\right)^2\leqslant\sigma\cdot\int\limits_{l_{\eta,\zeta}}\left(\frac{\partial f_{l_n}}{\partial x}-F\right)^2 dx,$$

où σ désigne le diamètre de D.

Le même peut se dire pour les lignes relatives et les dérivées restantes. On voit aussi que pour les trois dérivées la suite partielle peut être choisie la même.

Il existe un système épais de repères qui soient normaux pour toute fonction $f_n(P)$ et qui, en même temps soient réguliers par rapport aux propriétés que nous venons d'exposer dans ce numéro. Nous appelons ces repères: *repères normaux de la suite partielle choisie.*

Remarquons que tout ce que nous venons de dire à propos de la suite $\{f_n\}$ s'applique aussi à une suite partielle quelconque.

3. Cela étant, partons d'une suite partielle arbitraire et extrayons-y une autre $\{f_{k_n}\}$ conformément au numéro précédant. Cette suite sera fixée dans les numéros 3—7.

Envisageons un domaine-colonne M_z dont la base R contient l'origine $P(a, b, c)$ d'un répère normal de la suite $\{f_{k_n}\}$ qui sera désignée tout simplement par $\{f_\nu\}$ pour éviter de lourdes indices. En ne considérant que des points (ξ, η, ζ) de M_z+R, on a pour presque tout (ξ, η) et pour tout ζ:

$$f_\nu(\xi,\eta,\zeta)=f_\nu(a,b,c)+\int_a^\xi\frac{\partial f_\nu(x,b,c)}{\partial x}dx+$$
$$+\int_b^\eta\frac{\partial f_\nu(\xi,y,c)}{\partial y}dy+\int_c^\zeta\frac{\partial f_\nu(\xi,\eta,z)}{\partial z}dz.$$

On trouve:

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^\xi\frac{\partial f_\nu}{\partial x}=\int_a^\xi F(x,b,c)\,dx,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_b^\eta \frac{\partial f_\nu}{\partial y} = \int_b^\eta G(\xi, y, c)\, dy,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^\zeta \frac{\partial f_\nu}{\partial z} = \int_c^\zeta H(\xi, \eta, z)\, dz.$$

Choisissons une suite infinie $\{q_\nu\}$ de nombres de manière que $f_\nu(P_0)+q_\nu$ soit convergente. Il suffit p. ex. de poser $q_\nu \overset{\mathrm{df}}{=} -f_\nu(P_0)$. Il existe alors la limite:

$$(1) \qquad \lim_{\nu\to\infty}[f_\nu(\xi, \eta, \zeta)+q_\nu] = f_0 + \int_a^\xi F\, dx + \int_b^\eta G\, dy + \int_c^\zeta H\, dz,$$

où on a posé $f_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \lim\limits_{\nu\to\infty}[f_\nu(P_0)+q_\nu]$.

Définissons la fonction $f_3(\xi, \eta, \zeta)$ dans les points de presque toute droite $l_{\xi,\eta}$ relative à M_3 par la formule:

$$(2) \qquad f_3(\xi, \eta, \zeta) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{\nu\to\infty}[f_\nu(\xi, \eta, \zeta)+q_\nu].$$

L'inégalité

$$|q_\nu + f_\nu(\xi, \eta, \zeta) - f_3(\xi, \eta, \zeta)| \leqslant |q_\nu - f_0| + \\ + \int_a^\xi \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial x} - F\right| dx + \int_b^\eta \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y} - G\right| dy + \\ + \int_c^{\Phi(\xi,\eta)} \left|\frac{\partial f_\nu(\xi, \eta, z)}{\partial z} - H(\xi, \eta, z)\right| dz,$$

où $z = \Phi(x, y)$ représente le front de la colonne M_3, nous montre que, si l'on fixe (ξ, η), la suite

$$q_\nu + f_\nu(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{tend vers} \quad f_3(\xi, \eta, \zeta)$$

uniformément sur presque toute ligne $l_{\xi,\eta}$ relative à $M_3 + R$.

La fonction $\int_c^\zeta H\, dx$ étant absolument continue par rapport à ζ, on a, de (1) et (2) sur la même ligne:

$$\frac{\partial f_3}{\partial \zeta} = H.$$

De plus, on voit aisément que f_3 possède une valeur limite frontière au front de M_3 et que la convergence uniforme dont on a parlé s'étend sur les fonctions $q_\nu + f_\nu$ prolongées et, enfin, que la limite est identique avec f_3 prolongée ainsi.

Des résultats analogues on obtient en envisageant des colonnes M_1, M_2 dont les bases sont perpendiculaires à l'axe x ou a y.

4. Soit maintenant Q un parallélopipède rectangulaire et ouvert dont les arrêtes sont parallèles aux axes du système des coordonnées. Supposons que la fermeture de Q est contenue dans D. Soit P_0 un point de Q et, en même temps, l'origine d'un repère normal pour la suite $\{f_\nu\}$. En choisissant la suite de nombres $\{q_\nu\}$ de manière que $\lim\limits_{\nu\to\infty}\{f_\nu(P_0)+q_\nu\}$ existe, nous obtiendront trois fonctions $f_{(1)}(\xi, \eta, \zeta)$, $f_{(2)}(\xi, \eta, \zeta)$ et $f_{(3)}(\xi, \eta, \zeta)$ définies et continues resp. sur presque toute ligne $l_{y,z}$, $l_{z,x}$, $l_{x,y}$ relative à Q. En effet Q peut être considéré comme la somme de deux colonnes augmentées de leurs base commune passant par P_0.

La suite $q_\nu + f_\nu(x, y, z)$ converge uniformément vers $f_{(1)}(x, y, z)$ sur presque toute ligne $l_{y,z}$ relative à Q, elle converge unifomément vers $f_2(x, y, z)$ resp. vers $f_3(x, y, z)$ uniformément resp. sur presque toute ligne relative $l_{x,z}$ et $l_{x,y}$. Il en résulte qu'il existe une fonction $f(x, y, z)$ continue sur presque toute droite $l_{x,y}$, $l_{y,z}$, $l_{z,x}$ et égale presque partout dans Q à $f_{(1)}$, $f_{(2)}$ et $f_{(3)}$.

On a sur ces lignes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = G, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = H.$$

La fonction f est du type (BL) dans Q.

5. La fonction f que nous venons d'obtenir pour la suite $\{f_\nu\}$ et Q a l'aire de dépendre du choix du point P_0.

Changeons P_0 en un autre point $P_0' \in Q$ qui soit l'origine d'un repère normal pour la suite $\{f_\nu\}$. Choisissons des constantes $\{q_\nu'\}$ de manière que $f_\nu(P_0') + q_\nu'$ converge et déterminons la fonction f' y correspondant:

$$\lim_{\nu\to\infty}[f_\nu(P) + q_\nu'] = f'(P)$$

presque partout dans Q. On a:

$$F = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial x}, \quad G = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial x}, \quad H = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f'}{\partial z};$$

les fonctions f et f' sont absolument continues sur presque toutes les droites $l_{x,y}$, $l_{y,z}$, $l_{z,x}$ relatives à Q. Il en résulte que $f = f' + \text{const.}$ dans Q presque partout. De plus, la limite $\lim_{\nu\to\infty}(q_\nu - q'_\nu)$ existe. Réciproquement si l'on se donne la suite $\{q''_n\}$ de manière que $\lim_{\nu\to\infty}(q_\nu - q''_n)$ existe, la suite $\{f_\nu(P) + q''_\nu\}$ converge sur presque toute ligne relative vers une fonction f'', où $f'' = f + \text{const.}$ dans Q presque partout.

On voit ainsi que la fonction f ne dépend pas essentiellement du choix du point P_0.

Pour exprimer que $\lim_{\nu\to\infty}\{f_\nu(P) + q_\nu\}$ existe presque partout dans Q, convenons de dire que la suite $\{q_\nu\}$ est *assujettie à* Q.

6. Soient maintenant Q' et Q'' deux parallélopipèdes ouverts dont les fermetures soient contenues dans D. Supposons que $Q' \cdot Q'' \neq 0$. Si $\{q'_\nu\}$ et $\{q''_\nu\}$ sont des suites assujetties resp. à Q' et Q'', et f', f'' les fonctions y correspondant, on a $f' = f'' + \text{const.}$ presque partout dans le parallélopipède $Q' \cdot Q''$ et, $\{q'_\nu\}$ et $\{q''_\nu\}$ sont assujetties à $Q' \cdot Q''$. Il en résulte que $\{q'_\nu\}$ et $\{q''_\nu\}$ sont assujetties à la fois à Q' et à Q''. On voit aussi qu'il existe une suite $\{q_\nu\}$ telle que la limite $\lim_{\nu\to\infty}[f_\nu(P) + q_\nu]$ existe presque partout dans $Q' + Q''$. Pour $\{q_\nu\}$ on peut admettre une suite arbitraire assujettie à Q' (on a Q'').

Le domaine D peut être considéré comme la somme dénombrable de parallélopipèdes

$$D = Q' + Q'' + \ldots + Q^{(m)} + \ldots,$$

tels que $Q^{(m)} \cdot Q^{(m+1)} \neq 0$. En tenant compte de ce qui précède, on en déduit qu'il existe une suite de constantes $\{q_\nu\}$ tels que la limite

$$\lim_{\nu\to\infty}[f_\nu(P) + q_\nu]$$

existe sur presque toute droite relative à D. Si l'on envisage une telle droite, on voit, d'après le résultat obtenu à la fin du N° 3 que la convergence est uniforme sur tout segment fermé $\langle A, B\rangle$ si le segment ouvert (A, B) est contenu dans la droite en question, et qu'on prolonge les fonctions f_ν et f de la manière indiquée plus haut. En effet les colonnes envisagées dans le N° 3 peuvent être choisies de manière que leurs fronts soient contenus dans la frontière du domaine D.

On a presque partout dans D

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = G, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = H \tag{3}$$

et, comme les fonctions F, G, et H sont à carré sommable dans D, on trouve que la fonction f est du type (BL) dans D.

Le théorème auxiliaire énoncé à la fin du N° 1 est ainsi démontré. Nous avons aussi démontré un peu de plus: De toute suite partielle tirée de $\{f_n\}$ on peut extraire une autre $\{f_{l_n}\}$ que les propriétés énoncées dans le dit théorème subsistent.

Le suite $\{q_\nu\}$ a l'aire de dépendre du choix de la suite partielle $\{f_\nu\}$, mais nous verons un peu plus loin, qu'il existe une suite $\{a_n\}$ qui peut servir de la suite $\{q_\nu\}$ pour toute suite partielle choisie ainsi.

7. Procédons maintenant à la démonstration de la suffisance de la condition (C) énoncée dans le Nr. 1. En reprenant la suite partielle $\{f_\nu\}$ et en tenant compte de (3) on peut écrire:

$$\lim_{\nu\to\infty}\iiint_D\left\{\left[\frac{\partial(f_\nu - f)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(f_\nu - f)}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial(f_\nu - f)}{\partial z}\right]^2\right\}dx\,dy\,dz = 0.$$

Nous avons ainsi démontré que de toute suite partielle $\{f_\lambda\}$ on peut extraire une autre $\{f_\nu\}$ et trouver une fonction f, telles que

$$f_\nu \overset{D}{\to} f.$$

Pour démontrer que $f_n \overset{D}{\to} f$, il suffit de remarquer que, si l'on envisage deux suites partielles différentes $\{f_{\lambda'}\}$, $\{f_{\lambda''}\}$ et qu'on en fait extraire, par la méthode précédente, des suites $\{f_{\lambda'}\}$, $\{f_{\nu''}\}$ qui convergent en moyenne du gradient carré resp. vers f' et f'', on a nécessairement $f' - f'' = \text{const}$ presque partout dans D. Donc, si la relation $f_n \overset{D}{\to} f$ était en défaut, on pourrait trouver une suite partielle qui ne contiendrait aucune sous-suite f_ν, telle que $f_\nu \overset{D}{\to} f$.

Le théorème „de Cauchy" est ainsi démontré complètement.

§ 5. Convergence en moyenne carrée.

1. *Si $f_n(P)$, $f(P)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ sont des fonctions (BL) dans un domaine ouvert et borné D et si $f_n(P) \overset{D}{\to} f(P)$, il existe une suite $\{a_n\}$ de nombres, telle que $f_n(P) + a_n$*

tend en moyenne carrée ordinaire vers $f(P)$ dans tout ensemble E fermé, contenu dans D.

Démonstration. Il suffit de démontrer le théorème dans le cas, où E est une sphère fermée, contenue dans D, centrée dans un point arbitraire et du rayon suffisamment petit. Soit donc $P_0 \epsilon D$ et le rayon de la sphère S, centrée en P_0, assez petit pour qu'il existe un parallélopipède Q rectangulaire dont les arrêtes sont parallèles aux axes x, y, z et contenu (après la fermeture) dans D. Il existe une suite partielle $\{f_{k_n}\}$ et des constantes $\{q_n\}$ telles que $f_{k_n} + q_n \to f$ presque partout daus D, donc aussi dans Q et S. D'après ce que nous avons démontré dans le § 3 No. 1 (6), il existe dans Q un cube Q' et des ensembles F_n épais dans Q' tels que

$$\iiint_S [f_{k_n}(P) + q_n - f(P)]^2 \, dx\, dy\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \sigma' \Big\{ [f_{k_n}(a_n, b_n, c_n) - f(a_n, b_n, c_n)]^2 +$$

$$+ \int \Big[\frac{\partial (f_{k_n} - f)}{\partial x}\Big]^2 + \Big[\frac{\partial (f_{k_n} - f)}{\partial y}\Big]^2 + \Big[\frac{\partial (f_{k_n} - f)}{\partial z}\Big]^2 \Big\},$$

le point (a_n, b_n, c_n) pouvant être choisi arbitrairement dans F_n et, l'intégration étant étendue sur les droites l_{a_n, b_n}, l_{b_n, c_n}, l_{c_n, a_n}, sur les plans l_{a_n}, l_{b_n}, l_{c_n} relatifs à D et sur le domaine D et, σ' désignant une constante positive. Il en résulte que $f_{k_n}(P) + q_n$ converge en moyenne carrée vers $f(P)$ dans S. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant:

De toute suite partielle on peut extraire une autre $f_{l_n}(P)$ et trouver une suite de constantes q_n' telles que $f_{l_n}(P) + q_n'$ converge dans S en moyenne carrée vers $f(P)$.

2. Cela étant démontré, fixons un indice n et considérons l'expression

$$\iiint_S [f_n(P) + p_n - f(P)]^2 \, dx\, dy\, dz, \tag{1}$$

où p_n est un nombre variable. Il existe un nombre $p_n = a_n$ qui rend (1) minimum.

Je dis que la suite $f_n(P) + a_n$ converge en moyenne carrée vers $f(P)$ dans S. En effet, dans le cas contraire on aurait

$$\iiint_S [f_{\alpha_n}(P) + a_{\alpha_n} - f(P)]^2 \, d\tau > a > 0$$

pour une suite $\{\alpha_n\}$ d'indices. Mais, d'après le résultat déjà obtenu (dans le No. 1) il existe une suite partielle $\{\beta_n\}$ de $\{\alpha_n\}$ telle que

$$\iiint_S [f_n(P) + q_{\beta_n} - f(P)]^2 \, d\tau \to 0$$

pour une suite convenable de constantes $\{q_{\beta_n}\}$. Mais, il en résulte une contradiction, étant donné que

$$\iiint_S [f_{\beta_n}(P) + a_{\beta_n} - f(P)]^2 \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \iiint_S [f_{\beta_n}(P) + q_{\beta_n} - f(P)]^2 \, d\tau.$$

Le théorème est ainsi démontré pour la sphère S.

3. Si deux suites $\{p_n\}$ et $\{p_n'\}$ jouissent de la propriété que $f_n + p_n$ et $f_n + p_n'$ converge en moyenne carrée vers f dans S, on a $\lim_{n\to\infty} (p_n - p_n') = 0$. Cela résulte de l'inégalité

$$\sqrt{\iiint_S (p_n - p_n')^2 \, d\tau} \leqslant \sqrt{\iiint_S (f_n + p_n - f)^2 \, d\tau} +$$

$$+ \sqrt{\iiint_S (f_n + p_n' - f)^2 \, d\tau}.$$

Réciproquement, si $f_n + p_n$ converge vers f en moyenne carrée et, si $\lim_{n\to\infty} (p_n - p_n') = 0$, $f_n + p_n'$ converge en moyenne carrée vers f. En considérant D comme somme d'une infinité dénombrable de sphères convenablement choisies $S_1, S_2, \ldots$, on trouve que

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{S_m} [f_n(P) + a_n - f(P)]^2 \, d\tau = 0$$

pour tout S_m. Le théorème en résulte aisément.

Remarquons que la condition nécessaire et suffisante afin que $f_n(P) + p_n$ converge en moyenne carrée dans tout ensemble fermé contenu dans D est que la limite

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - p_n)$$

existe, où a_n désigne le nombre p_n minimisant l'intégrale

$$\iiint_S (f_n + p_n - f)^2\, d\tau$$

pour une sphère S arbitraire fixe, fermée et contenue dans D.

4. D'une manière analogue on traite la convergence en moyenne carrée sur la surface d'une sphère fermée quelconque, contenue dans D.

On trouve pour les surfaces des sphères des théorèmes analogues à ceux pour la convergence en moyenne carrée pour les domaines à trois dimensions, les constantes additives p_n étant les mêmes ainsi que les fonctions limites.

Comme conséquence de ces théorèmes nous trouvons que de toute suite partielle tirée de $f_n(P)+a_n$ on peut extraire une autre jouissant des propriétés énoncées dans le théorème du § 4. No. 1 concernant la convergence uniforme.

Remarquons que l'ensemble de droites relatives, où la convergence uniforme à lieu, dépend peut-être du choix de la suite partielle. Je ne sais pas, si elle en dépend effectivement.

5. Remarquons qu'une fonction (BL) n'est pas nécessairement à carré sommable.

Pour en donner un exemple plan considérons les rectangles:

$$A_n:\ \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^{n-1}},\quad \frac{2}{3} \leqslant y \leqslant 1,$$

$$B_n:\ \frac{1}{2^{n-1}} - \varepsilon_n \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^{n-1}},\quad \frac{1}{3} \leqslant y \leqslant \frac{2}{3},$$

$$C\ :\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{3},$$

où $\varepsilon_n < 0$ sont des nombres suffisamment petits afin que les B_n n'aient pas de points communs. Soient α_n des nombres positifs tels que $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ mes A_n diverge.

Soit D l'ensemble de tous les points intérieurs à $\sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n) + C$. Définissons $f(P)$ dans D, en posant $f(P) = \alpha_n$ dans A_n, $f(P) = 0$ dans C et en faisant varier $f(P)$ linéairement et par continuité dans les B_n. On peut choisir ε_n si minces que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\iint_{B_n}\!\!\int\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 d\tau$$

converge.

La fonction $f(P)$ est évidemment (BL) sans être à carré sommable dans D.

Il serait intéressant de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour un domaine D, afin que toute fonction (BL) dans D y soit à carré sommable.

Remarquons qu'on peut avoir $f_n \overset{D}{\to} f$ sans que $f_n + b_n$ converge en moyenne carrée dans D et cela quelle que soit la suite de constantes b_n.

Pour en donner un exemple, il suffit de poser f_n égale à f dans $A_m + B_m$ si $m \geqslant n+1$ et, égale à 0 dans le reste du domaine D considéré dans l'exemple précédant.

§ 6. Unicité de la prolongation.

1. Si nous prolongeons une fonction (BL) dans D sur des droites relatives à D, nous obtiendrons trois fonctions définies dans des points de la frontière de D. Il est intéressant d'examiner est-ce qu'elles coïncident, ou non.

Pour le cas d'une sphère nous allons démontrer que la coïncidance a lieu presque partout[1]).

Supposons donc que $f(P)$ est (BL) dans la sphère S ouverte du rayon f et centrée dans l'origine. Soit $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < \ldots$ une suite infinie tendant vers 1. Si $H(x,y,z)$ est une fonction définie presque partout dans S et à carré sommable, la suite $H(\alpha_n x,\ \alpha_n y,\ \alpha_n z)$ tend en moyenne carrée vers $H(x,y,z)$ dans S. En effet, cela est vrai dans le cas, où H est un polynôme. La proposition générale s'obtient, si l'on tient compte du fait que toute fonction à carré sommable peut être approximée (en moyenne carrée) par des fonctions continues et, par conséquent, par des polynômes.

[1]) Dans la démonstration nous nous appuierons sur les théorèmes concernant les suites de fonctions (BL), mais on peut trouver une démonstration directe. Il n'est pas necessaire de supposer que f est (BL). Il suffit de supposer que f possède des valeurs limites et frontières sur presque toutes les droites relatives.

Cela étant, posons $\frac{\partial f}{\partial x} = F$, $\frac{\partial f}{\partial y} = G$, $\frac{\partial f}{\partial z} = H$, et $f_n(P) \underset{df}{=} f(\alpha_n x, \alpha_n y, \alpha_n z)$. La fonction f_n est définie dans la sphère S_n du rayon $\frac{1}{\alpha_n}$. Comme

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} = \alpha_n F(\alpha_n x,\ \alpha_n y,\ \alpha_n z), \text{ etc.},$$

on obtient sans peine:

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_S [\alpha_n F(\alpha_n x,\ \alpha_n y,\ \alpha_n z) - F(x, y, z)]^2\, d\tau = 0$$

et des relations analogues pour G et H qui expriment que f_n tend en moyenne carrée vers f dans S.

D'après le théorème du § 4. N° 1, il existe alors une suite partielle $\{f_{k_n}\}$ et une suite de constantes $\{q_n\}$ telles que les fonctions prolongées de $f_{k_n} + q_n$ tendent uniformément sur presque toute ligne relative $l_{x,y}$ vers la fonction prolongée de f et, il en est d'analogue pour des droites relatives $l_{y,z}$ et $l_{z,x}$.

Or les valeurs de trois fonctions prolongées de $f_{k_n} + q_n$ ne considérées que dans S coïncident avec les valeurs de cette fonction sur la frontière de S, si l'on la considère dans S_n et, ces trois fonctions ne forment qu'une seule fonction définie presque partout sur la frontière de S. On en déduit que les trois fonctions „frontières" de f coïncident aussi presque partout.

2. Si l'on se souvient du résultat obtenu à la fin du § 3. N° 1, on voit que:

Si $f(P)$ est (BL) dans une sphère S, ses valeurs limites et frontières représentent une fonction définie presque partout sur la frontière de S. Cette fonction est à carré sommable.

On peut aussi démontrer que:

Si $f_n(P) \overset{D}{\to} f(P)$ dans une sphère D, il existe une suite de constantes $\{a_n\}$ telle que les fonctions définies par les valeurs limites et frontières des f_n tendent en moyenne carrée sur la surface de S vers la fonction obtenue de la même manière de f. Les constantes a_n sont celles, pour lesquelles $f_n + a_n$ converge en moyenne carrée vers f dans D.

Il serait intéressant d'examiner le cas du domaine général; il ne semble pas être trop difficile.

Sur une propriété des constituantes des ensembles analytiques.

Par

Sophie Piccard (Neuchâtel).

Soit $\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ un système déterminant donné, formé d'ensembles quelconques et soit E le *noyau* de ce système, c'est-à-dire l'ensemble

$$E = \Sigma\, \delta_{n_1}\, \delta_{n_1, n_2}\, \delta_{n_1, n_2, n_3} \ldots\ldots,$$

où la sommation s'étend à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots$

Posons, pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$\delta^0_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \tag{1}$$

$$\delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots n_k, n} \tag{2}$$

pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, et

$$\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \prod_{\xi < \alpha} \delta^{\xi}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \tag{3}$$

pour tout nombre ordinal α de seconde espèce.

Posons ensuite

$$S^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{\alpha}_{n} \tag{4}$$

et

$$T^{\alpha} = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} (\delta^{\alpha}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}), \tag{5}$$