Sur un théorème de Baire généralisé dans la théorie des espaces abstraits.

Par

K. Kunugui (Sapporo, Japon).

1. M. Sierpiński [1]) a demontré que les trois propriétés suivantes sont équivalentes pour les classes (S) [2]).

Propriété I: Tout ensemble non dénombrable d'éléments de la classe considérée contient au moins un élément de condensation.

Propriété II: Tout ensemble clairsemé d'éléments de la classe considérée est au plus dénombrable.

Propriété III: Toute infinité bien ordonnée d'ensembles fermés distincts d'éléments de la classe considérée, dont chacun contient tous les suivants, est dénombrable.

La démonstration de M. Sierpiński pour l'équivalence de I et II est valable pour les classes (L) quelconques. D'autre part, M. Kuratowski [3]) a donné un exemple d'une classe (L) jouissant de la propriété III, mais ne jouissant pas de la propriété I. Or nous allons montrer comment on peut modifier la propriété III et le raisonnement de M. Sierpiński de sorte qu'il soit valable dans les espaces (V) [4]) quelconques (plus généraux que les classes (L)).

Précisons d'abord les notions dont nous nous servirons dans ce qui suit.

[1]) W. Sierpiński, *Sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits.* Fund. Math. t. 2, (1921) pp. 179-88.

[2]) Voir M. Fréchet, *Espaces Abstraits* 1928, p. 211.

[3]) C. Kuratowski, Fund. Math. t. 3, (1922) pp. 41-3.

[4]) M. Fréchet loc. cit. p. 172.

Nous dirons qu'une famille F d'ensembles *couvre* [5]) l'ensemble E, si chaque point de E est un point de l'un au moins des ensembles de F, et que F *couvre complètement* E, si tout point de E est intérieur à l'un au moins des ensembles de F. Rappelons que la fermeture de l'ensemble E est $E + E'$. La fermeture d'un ensemble n'est pas nécessairement fermée. Un espace (V), où toute fermeture est fermée sera dit un espace *quasi-accessible* [6]).

Maintenant nous allons démontrer le

Théorème: *Dans un espace (V) quelconque, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:*

(A) Soit M un sous-ensemble quelconque d'un ensemble E considéré. Étant donnée une famille infinie d'ensembles F qui *couvre complètement* M, on peut extraire une sous-famille F_1 de F, *couvrant* M, et constituée seulement par une infinité dénombrable d'ensembles de F.

(B) Tout sous-ensemble M non dénombrable de l'ensemble E contient dans M au moins un point de condensation.

(C) Tout sous-ensemble clairsemé de l'ensemble E est au plus dénombrable.

(D) Toute infinité bien ordonnée de sous-ensembles de l'ensemble E, dont chacun contient tous les suivants et aucun n'est contenu dans la fermeture des suivants, est dénombrable.

Démonstration. Pour établir notre théorème, il suffit évidemment de démontrer que $(A) \to (B)$ [7]), $(B) \to (C)$, $(C) \to (D)$ et $(D) \to (A)$.

$(A) \to (B)$: Soit M un sous-ensemble non dénombrable quelconque de l'ensemble E. Supposons que M ne contienne aucun point de condensation. Alors tout point p de M, aurait un voisinage $V(p)$ tel que $V(p) \cdot M$ soit dénombrable Comme la famille des $V(p)$ couvre complètement M, on peut, d'après (A), extraire de cette famille une famille $F_1 = \{V_n\}$ au plus dénombrable qui couvre M. Cela veut dire que $M = M \cdot \sum_n V_n = \sum_n M V_n$ et l'ensemble M serait un ensemble dénombrable, contrairement à notre hypothèse.

$(B) \to (C)$: Voir M. Fréchet: *Quelques propriétés des ensembles abstraits*, Fund. Math. t. 10 (1927) pp. 333-34.

[5]) On voit la différence entre cette définition et celle de M. Fréchet ibid. p. 176.

[6]) Voir Antoine Appert, C. R. Acad. Sc., Paris 194 (1932) p. 2278.

[7]) $(A) \to (B)$ signifie que la propriété (A) entraîne (B).

$(C) \to (D)$: Nous n'avons qu'à suivre le raisonnement de M. Sierpiński [1]) pour la démonstration de II $\to$ III. Soit $\{M_\alpha\}$ une famille bien ordonnée de sous-ensembles de l'ensemble E, dont chacun contient tous les suivants et aucun n'est contenu dans la fermeture des suivants. L'ensemble $M_\alpha - M_\alpha\,\{M_{\alpha+1} + M'_{\alpha+1}\}$ n'est pas vide pour chaque indice α (si α est le dernier, on pose $M_{\alpha+1} = 0$). Prenons un point quelconque p_α de cet ensemble. On aura ainsi une suite bien ordonnée de points $\{p_\alpha\}$. Désignons par G_α l'ensemble de tous les points p_ξ pour $\xi \geqslant \alpha$. $G_{\alpha+1} \subset M_{\alpha+1}$ entraîne $G'_{\alpha+1} \subset M_{\alpha+1}$ et par suite $G'_{\alpha+1} \cdot p_\alpha = 0$.

Nous allons montrer que l'ensemble $G_0 = \sum\limits_\alpha p_\alpha$ est clairsemé. En effet, soit G un sous-ensemble dense en soi de l'ensemble G_0. Il existerait alors le premier terme p_μ de G_0 qui appartient à G. G étant dense en soi, $p_\mu \subset G'$. Dans tout espace (V), cela entraîne que $p_\mu \subset (G - p_\mu)'$; d'autre part $G - p_\mu \subset G_{\mu+1}$ entraîne $(G - p_\mu)' \subset$ $\subset G'_{\mu+1}$ et par suite $p_\mu \subset G'_{\mu+1}$; ceci contredit la propriété obtenue plus haut. Donc G_0 est un ensemble clairsemé, et d'après (C), G_0 est un ensemble au plus dénombrable. Par conséquent, la suite bien ordonnée $\{M_\alpha\}$ est aussi au plus dénombrable.

$(D) \to (A)$: Soit M un sous-ensemble quelconque de l'ensemble E, et $F = \{V\}$ une famille d'ensembles qui couvre complètement M. Choisissons un point p_0 quelconque de M, et un ensemble V_0 de F contenant p_0 à son intérieur. Soit α un nombre ordinal. Si p_β sont définis pour tout nombre ordinal β inférieur à α, et si $H_\alpha = \sum\limits_{\beta<\alpha} V_\beta$ ne couvre pas M, choisissons un point p_α de $M - M \cdot H_\alpha$ et un ensemble V_α de F contenant p_α à son intérieur.

Posons $M_\alpha = M - M \cdot H_\alpha$; nous avons ainsi une suite bien ordonnée $\{M_\alpha\}$. Or, M_α contient le point p_α, et $M_{\alpha+1}$ ne contient pas V_α; par suite, $M_\beta + M'_\beta \subset M_{\alpha+1} + M'_{\alpha+1}$ $(\alpha < \beta)$ ne contient pas p_α. Donc, d'après (D), la suite bien ordonnée $\{M_\alpha\}$ est au plus dénombrable. Il existe alors un nombre ordinal γ inférieur à Ω tel que $H_\gamma \supset M$. $\{V_\beta\}$ $(\beta < \gamma)$ est une sous-famille de F au plus dénombrable, et ainsi nous avons établi la proposition (A).

2. Il est presque évident que, dans un espace quasi-accessible, nos propriétés (D) et (III) sont équivalentes.

En effet, d'abord, la suite bien ordonnée de III est un cas particulier de celle de (D). D'autre part, supposons qu'on ait III, et soit $\{M_\alpha\}$ une suite bien ordonnée de sous-ensembles de E, dont chacun contient tous les suivants et aucun n'est contenu dans la fermeture des suivants. Considérons la suite bien ordonnée $\{N_\alpha\}$ $(N_\alpha = M_\alpha + M'_\alpha)$ au lieu de $\{M_\alpha\}$. N_α est un ensemble fermé, et $M_\alpha \supset M_\beta$ $(\alpha < \beta)$ entraîne $N_\alpha \supset N_\beta$ $(\alpha < \beta)$. De plus $N_\alpha - N_\beta \supset N_\alpha - N_{\alpha+} \supset M_\alpha -$ $- M_\alpha N_{\alpha+1}$ $(\alpha < \beta)$ n'est pas vide. Donc d'après III, $\{N_\alpha\}$ est au plus dénombrable. Par conséquent $\{M_\alpha\}$ l'est aussi.

3. Il est, pareillement, évident que, dans les espaces (V) quelconques, on peut modifier la propriété (D) de la façon suivante:

(D_1) Toute infinité bien ordonnée de sous-ensembles distincts de l'ensemble E, dont chacun contient tous les suivants et est fermé dans le premier terme, est dénombrable.

En effet, d'abord, la suite bien ordonnée de (D_1) est un cas particulier de celle de (D). D'autre part, supposons qu'on ait (D_1) et soit $\{M_\alpha\}$ une suite bien ordonnée de sous-ensembles de l'ensemble E, dont chacun contient tous les suivants, et aucun n'est contenu dans la fermeture des suivants. Considérons l'ensemble G_α (dans la démonstration de $(C) \to (D)$) au lieu de M. D'après la définition, G_α est fermé dans G_0, et d'après (D_1), $\{G_\alpha\}$ est au plus dénombrable. Par conséquent, $\{M_\alpha\}$ l'est aussi.

Donc les propriétés (D) et (D_1) sont équivalentes dans les espaces (V) quelconques, mais l'exemple de M. Kuratowski montre qu'elles ne sont pas équivalentes à III.

4. Quant à la propriété (A), pour les espaces quasi-accessibles, elle est évidemment équivalente à celle de Lindelöf [8]) *de tous les sous-ensembles*. Mais, pour les espaces (V) quelconques, celle-ci n'est qu'un cas particulier de (A). Nous allons montrer l'existence d'un ensemble E dans un espace (E) [9]) (moins général que la classe (L)) jouissant de la propriété (A), mais non de la propriété de Lindelöf.

Prenons tous les nombres réels entre 0 et 1, $0 \leqslant x \leqslant 1$, et représentons-les dans le système de numération dont la base est 6. Un point compris dans cet intervalle est désigné par l'expression $\alpha = 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ où les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, sont tous 0, 1, 2, 3, 4 ou 5. (Supposons que, sauf pour le point O, les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ne sont pas tous nuls à partir d'un certain rang).

[8]) M. Fréchet loc. cit. p. 176.
[9]) ibid. pp. 213—14.

Définissons l'écart $\varrho(\alpha,\beta)$ entre deux points $\alpha = 0\cdot\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ et $\beta = 0\cdot\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ comme il suit: S'il y a au moins un indice n tel que $|\alpha_n - \beta_n| \geqslant 2$, on pose $\varrho(\alpha,\beta) = 1$; si pour tout n on a $|\alpha_n - \beta_n| \leqslant 1$ et si ν est le premier rang tel que $\alpha_n \neq \beta_n$ (c'est-à-dire $\alpha_n = \beta_n (n < \nu)$ et $\alpha_\nu \neq \beta_\nu$), on pose $\varrho(\alpha,\beta) = \frac{1}{\nu}$; enfin $\varrho(\alpha,\alpha) = 0$. Notre espace R est ainsi un espace (E).

Soit maintenant E un ensemble de tous les points dont les chiffres sont tous 2 ou 3: $e = 0\cdot e_1, e_2, e_3, \dots\ e_n = 2$ ou 3. Comme la puissance de E est égale à c, E est non dénombrable.

Appelons voisinage $V_n(e)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ d'un point e de E, un ensemble de tous les points p de R tels que l'on ait $\varrho(p, e) < \frac{1}{n}$.

Ceci revient à dire que $V_n(e)$ est un ensemble de tous les points p de R à l'expression suivante:

$$e = 0\cdot e_1, e_2, e_3, \dots$$
$$p = 0\cdot e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \dots$$

si $e_{n+\nu} = 2$, $p_{n+\nu} = 1, 2$ ou 3; si $e_{n+\nu} = 3$, $p_{n+\nu} = 2, 3$ ou 4. $(\nu = 1, 2, 3, \dots)$.

1) *L'ensemble de tous les points intérieurs de $V_n(e)$ est au plus dénombrable.*

Soit $p = 0\cdot e_1, e_2, \dots, e_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \dots$ un point de $V_n(e)$, dont il y a une infinité de p_{n_ν} différents de e_{n_ν} $(\nu = 1, 2, 3, \dots)$. Si l'on a pour une infinité d'indices n_ν $(\nu = 1, 2, 3, \dots)$, $e_{n_\nu} = 2$, posons $p^{(\lambda)}_{n_\lambda} = 0$ ou 4 suivant que $p_{n_\nu} = 1$ ou 3, et $p^{(\lambda)}_n = p_n$ pour $n \neq n_\lambda$. Si l'on a, pour une infinité d'indices n_ν, $e_{n_\nu} = 3$, posons $p^{(\lambda)}_{n_\lambda} = 1$ ou 5 suivant que $p_{n_\lambda} = 2$ ou 4, et $p^{(\lambda)}_n = p_n$ pour $n \neq n_\lambda$. Nous avons ainsi une suite de points de R

$$p^{(\lambda)} = 0\cdot e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, p_{n+1}, \dots, p^{(\lambda)}_{n_\lambda}, \dots \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots)$$

qui ne sont pas contenus dans $V_n(e)$.

Comme $\varrho(p^{(\lambda)}, p) = \frac{1}{n_\lambda}$, on a $\lim\limits_{\lambda\to\infty} p^{(\lambda)} = p$. Donc, p n'est pas intérieur à $V_n(e)$.

Tous les autres points p' de $V_n(e)$ n'ont qu'un nombre fini d'indices n tels que $p'_n \neq e_n$. Il n'existe qu'une infinité dénombrable de tels points dans $V_n(e)$. Donc, l'ensemble de tous les points intérieurs à $V_n(e)$ est au plus dénombrable.

2) *L'ensemble E ne jouit pas de la propriété de Lindelöf.*

En effet, associons à chaque point e de E un de ses voisinages $V_n(e)$. La famille $\{V_n(e)\}$ couvre E complètement, puisque e est un point intérieur de $V_n(e)$. E étant un ensemble non dénombrable, et chaque $V_n(e)$ ne contenant qu'une infinité dénombrable de points intérieurs, aucune famille $\{V_{n_\nu}(e_\nu)\}$ dénombrable de voisinages tirés de $\{V_n(e)\}$, ne peut couvrir E complètement.

3) *L'ensemble E jouit de la propriété* (A).

Désignons par N tous les points e de E, dont les chiffres e_n dans l'expression $e = 0\cdot e_1, e_2, e_3, \dots$ sont tous 2 ou tous 3 à partir d'un certain rang. N est un ensemble dénombrable; par suite N jouit de la propriété (A). Donc il nous suffit de montrer que l'ensemble $F = E - N$ (au lieu de E) jouit de (A).

Faisons correspondre à chaque point $f = 0\cdot f_1, f_2, f_3, \dots$ de F, un nombre réel x, $0 < x < 1$, représenté par $x + \varphi(f) = 0\cdot f_1 - 2, f_2 - 2, \dots$ dans le système dont la base est 2. Cette correspondance $\varphi(F)$ est biunivoque. On voit que $\varphi(F\cdot V_n(e))$ est l'ensemble de tous les points ξ de $\varphi(F)$ tels que $\xi = 0\cdot x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots\ \xi_{n+\nu} = 0$ ou 1, où $\varphi(f) = 0\cdot x_1, x_2, x_3, \dots$ Donc c'est un intervalle (sur $\varphi(F)$) qui contient $\varphi(f)$ dans son intérieur.

Soit, maintenant, M un sous-ensemble quelconque de F et $\mathfrak{F} = \{V\}$ une famille infinie d'ensembles qui couvre complètement M. À chaque point p de M est associé un ensemble V de $\mathfrak{F}$ contenant f dans son intérieur. V contient un $V_n(p)$, et par suite, $\varphi(F\cdot V)$ contient $\varphi(F\cdot V_n(p))$. Or il existe une infinité dénombrable de $\varphi(F\cdot V_n(p))$ dont la somme couvre $\varphi(M)$. Par conséquent, il existe une infinité dénombrable d'ensembles V tirés de $\mathfrak{F}$, dont la somme couvre M. Ainsi F jouit de la propriété (A).

Sapporo, le 21 août 1933.