

Sur une généralisation de la notion d'homéomorphie.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Soient \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux espaces complets séparables et $y = f(x)$ une transformation biunivoque entre deux sous-ensembles de ces espaces. Cette transformation est dite une *homéomorphie de classe α, β* , lorsque la fonction $f(x)$ est de classe α et la fonction inverse $f^{-1}(y)$ est de classe β ¹⁾.

L'homéomorphie généralisée ainsi conçue, qui comprend comme cas particulier (où $\alpha = 0 = \beta$) l'homéomorphie dans le sens habituel, s'est montrée très utile dans l'étude des ensembles boreliens (que nous supposons toujours situés dans des espaces complets séparables).

Rappelons en d'abord quelques propriétés.

D'après un théorème de MM. Lusin et Souslin, devenu classique dans la Théorie générale des fonctions, si $y = f(x)$ est une fonction biunivoque et mesurable B , définie sur un ensemble borelien A , la fonction inverse $x = f^{-1}(y)$ est aussi mesurable B (sur l'ensemble $f(A)$). Autrement dit, *chaque fonction biunivoque et mesurable B (définie sur un ensemble borelien) est une homéomorphie généralisée (d'une certaine classe α, β)*.

¹⁾ Voir ma *Topologie I*, Monografie Matematyczne t. 3, Warszawa-Lwów 1933, p. 221. Les ensembles fermés sont dits de classe 0 *multiplicative*, les ensembles ouverts — de classe 0 *additive*. D'une façon générale, α étant un nombre transfini $< \Omega$, les produits (sommés) dénombrables d'ensembles de classe $< \alpha$ sont dits de classe α *multiplicative* (additive). Les ensembles qui sont simultanément de classe α *multiplicative* et *additive* sont dits *ambigus* de classe α .

Une fonction $f(x)$ est dite de *classe α* lorsque l'ensemble $f^{-1}(F)$, c. à d. l'ensemble des x tels que $f(x)$ appartient à F , est de classe α *multiplicative*, quel que soit l'ensemble fermé F .

Dans les mêmes hypothèses faites sur f et A , l'ensemble $f(A)$ est borelien. Or, si A est de classe *multiplicative* $\alpha > 0$ et si f est une *homéomorphie de classe α, β* , l'ensemble $f(A)$ est de classe *multiplicative* $\beta + \alpha$ ¹⁾. Il importe de remarquer que les hypothèses que l'ensemble A est de classe α et que la fonction $f(x)$ est biunivoque de classe α ne suffisent pas pour calculer la classe de l'ensemble $f(A)$: la connaissance de la classe de la fonction inverse $f^{-1}(y)$ est indispensable. Cela tient au fait que l'on ne peut rien dire, en général, sur la classe d'une fonction inverse à une fonction de classe α (même à une fonction continue).

Une conséquence immédiate du théorème précédent est l'*invariance de la notion de classe multiplicative α (> 0) par rapport aux homéomorphies de classe $\alpha, 0$* ²⁾. Un cas très particulier de cet énoncé est l'invariance topologique (c. à d. invariance par rapport aux homéomorphies de classe 0, 0) de la classe α , invariance qui est une conséquence du théorème de M. Lavrentieff sur le prolongement des fonctions continues. Ce dernier s'est montré un cas particulier du théorème suivant sur le prolongement de l'homéomorphie de classe α, β : *toute homéomorphie de classe α, β entre deux ensembles arbitraires A et B se laisse prolonger (sans altérer sa classe) sur deux ensembles respectivement de classes multiplicatives $\alpha + \beta + 1$ et $\beta + \alpha + 1$* ³⁾.

Revenons sur le théorème qui permet de calculer la classe de l'ensemble $f(A)$ à l'aide de la classe de l'ensemble A et de celle de l'homéomorphie f . Il en résulte (en remplaçant α par 1 et β par α) que A étant un espace complet séparable et f une homéomorphie de classe 0, α , l'ensemble $f(A)$ est de classe *multiplicative* $\alpha + 1$. Comme nous allons voir⁴⁾, ce théorème admet un théorème inverse: chaque ensemble de classe *multiplicative* $\alpha + 1$ se laisse obtenir d'un espace complet séparable, convenablement choisi, à l'aide d'une homéomorphie de classe 0, α . On parvient ainsi à la *caractérisation*

¹⁾ *Topologie I*, p. 222 et Comptes Rendus, Paris t. 197 (1933), p. 1090.

²⁾ En ce qui concerne le problème de l'invariance de la propriété de Baire par rapport aux homéomorphies généralisées, on consultera les résultats de M. Sierpiński publiés dans ce volume.

³⁾ *Topologie I*, p. 221 et Comptes Rendus I, cit.

⁴⁾ Cf. N° 3, théor. 1. Les autres énoncés du N° 3 rentrent dans un ordre d'idées analogue. Il est à remarquer qu'ils permettent de généraliser et de préciser plusieurs théorèmes importants de M. Lusin (voir ses *Ensembles analytiques*, Paris 1930, chap. II).

suivante des ensembles de classe multiplicative $\alpha + 1$: ces ensembles coïncident avec les ensembles qui admettent une représentation paramétrique biunivoque de classe 0, α sur un espace complet ou encore: sur un ensemble fermé dans l'ensemble des nombres irrationnels (si $\alpha > 0$).

Dans le cas particulièrement important où l'ensemble donné est lui-même un espace complet séparable et dense en soi, cet ensemble s'obtient par une homéomorphie de classe 0, 1 de l'ensemble \mathcal{N} des nombres irrationnels (qui est topologiquement complet). On en déduit facilement qu'entre chaque couple d'espaces complets séparables qui ont la même puissance il existe une homéomorphie de classe 1, 1¹⁾. Des énoncés analogues concernent les ensembles boreliens de classe arbitraire, de sorte que dans le domaine des ensembles boreliens — donc dans le domaine des ensembles que l'on rencontre habituellement — l'équivalence au sens de la Théorie des ensembles (identité de la puissance) se laisse réaliser toujours à l'aide d'une homéomorphie généralisée (dont la classe peut être calculée).

1. Lemme. Étant donné dans un espace métrique séparable un ensemble dense en soi non vide D qui est une différence de deux ensembles fermés: $D = A - B$, il existe une suite d'ensembles fermés F_1, F_2, \dots tels que $D = F_1 + F_2 + \dots$ et que la différence $D_n = F_n - (F_1 + \dots + F_{n-1})$ est dense en soi et non vide, quel que soit n .

On peut supposer de plus que $\delta(F_n) < \epsilon$, $\delta(X)$ désignant le diamètre de l'ensemble X .

Démonstration. Soit p un point de D ; p en étant un point d'accumulation, il existe dans $D - p$ deux ensembles U et V tels que $\bar{U} - U = p = \bar{V} - V$ (on peut, en effet, admettre que U est constitué par une suite de points p_n tels que $\lim p_n = p$, $p_n \neq p$, $p_n \in D$; la définition de V est analogue et, en outre, $U \cdot V = 0$).

Supposons de plus que $\delta(U) < \epsilon$. Les ensembles U et $V + B$ étant séparés (c. à d. qu'aucun d'eux ne contient de point d'accumulation de l'autre), il existe un ensemble ouvert G tel que

$$U \subset G, \bar{G} \cdot (V + B) = 0 \text{ et } \delta(G) < \epsilon^2.$$

¹⁾ Le cas particulier où ces espaces sont topologiquement contenus dans l'ensemble des nombres réels a été établi par M. Sierpiński, *Fund. Math.* 21 (1933), p. 66.

²⁾ Voir par ex. *Topologie I*, p. 99 (V, 6).

Posons $F_1 = \bar{G}D$. Il vient $F_1 \subset \bar{D} \subset A$, d'où $F_1 \subset A - B$, car $F_1 \cdot B \subset \bar{G}_1 \cdot B = 0$. L'ensemble G étant ouvert, GD est dense en soi et il en est de même de F_1 . En outre, comme $p \in \bar{U} \subset \bar{G}D = F_1$, $p \in \bar{V}$ et $V \subset D - \bar{G} \subset D - F_1$, il vient $p \in F_1 \cdot \bar{D} - \bar{F}_1$, ce qui prouve que l'ensemble $D - F_1$ n'est pas fermé.

Faisons correspondre à chaque point x de $D - F_1$ un ensemble ouvert H_x tel que: $x \in H_x$, $\bar{H}_x \cdot (B + F_1) = 0$ et $\delta(H_x) < \epsilon$. En vertu du théorème de Lindelöf il existe une suite x_2, x_3, \dots telle que $D - F_1 \subset H_{x_2} + H_{x_3} + \dots$. Posons $F_n = \bar{H}_{x_n} \cdot \bar{D}$ pour $n > 1$. Il vient $F_n \subset \bar{D} \subset A$, d'où $F_n \subset D - F_1$, car $F_n \cdot (B + F_1) \subset \bar{H}_{x_n} \cdot (B + F_1) = 0$. Par conséquent $D = F_1 + F_2 + \dots$.

En outre, l'ensemble $D - F_1$ n'étant pas fermé, il existe une infinité d'indices n tels que la différence $D_n = F_n - (F_1 + \dots + F_{n-1})$ est non vide. On peut donc supposer qu'il en est ainsi de chaque n .

Or, H_{x_n} étant ouvert, $H_{x_n} \cdot D$ est dense en soi et il en est de même de F_n . Comme ensemble ouvert dans F_n , l'ensemble D_n est dense en soi et non vide.

Lemme généralisé. \mathcal{E} étant un espace métrique séparable et dense en soi, on peut faire correspondre à chaque système fini d'entiers positifs n_1, \dots, n_k un ensemble fermé F_{n_1, \dots, n_k} de façon que l'on ait:

$$(1) F_{n_1, \dots, n_k} \neq 0 \quad (2) \delta(F_{n_1, \dots, n_k}) < 1/k$$

$$(3) \mathcal{E} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \quad (4) D_{n_1, \dots, n_k} = \sum_{i=1}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_k, i}$$

où D_{n_1, \dots, n_k} est défini par les conditions:

$$(5) \begin{cases} D_{n_1, \dots, n_{k-1}, 1} = F_{n_1, \dots, n_{k-1}, 1}, \\ D_{n_1, \dots, n_{k-1}, t} = F_{n_1, \dots, n_{k-1}, t} - (F_{n_1, \dots, n_{k-1}, 1} + \dots + F_{n_1, \dots, n_{k-1}, t-1}). \end{cases}$$

Démonstration. Procédons par induction. En posant dans le lemme précédent: $D = \mathcal{E}$ et $\epsilon = 1$, on en déduit l'existence d'une suite d'ensembles fermés F_1, F_2, \dots , satisfaisant aux conditions (1)–(3) pour $k = 1$. En outre, les ensembles D_1, D_2, \dots , sont denses en soi et non vides.

Admettons que pour un indice $k \geq 1$ les ensembles D_{n_1, \dots, n_k} soient denses en soi et non vides. En vertu du même lemme, il existe une suite d'ensembles fermés $F_{n_1, \dots, n_k, 1}, F_{n_1, \dots, n_k, 2}, \dots$ qui satisfont aux conditions (1) et (2) (en y remplaçant k par $k+1$), à la condition (4), ainsi qu'à la condition supplémentaire que les ensembles $D_{n_1, \dots, n_k, 1}, D_{n_1, \dots, n_k, 2}, \dots$ soient denses en soi et non vides.

Le lemme généralisé se trouve ainsi établi.

Remarquons que d'après (5) on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} D_{n_1, \dots, n_k, i} = \sum_{i=1}^{\infty} F_{n_1, \dots, n_k, i}$$

On en conclut en raison de (3) et (4) que

$$(6) \quad \mathcal{O} = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \quad \text{et} \quad (7) \quad D_{n_1, \dots, n_k} = \sum_{i=1}^{\infty} D_{n_1, \dots, n_k, i}$$

On a enfin

$$(8) \quad F_{n_1} \cdot F_{n_1 n_2} \cdot F_{n_1 n_2 n_3} \cdot \dots = D_{n_1} \cdot D_{n_1 n_2} \cdot D_{n_1 n_2 n_3} \cdot \dots,$$

car, d'une part, $D_{n_1, \dots, n_k} \subset F_{n_1, \dots, n_k}$ et, d'autre part, $F_{n_1, \dots, n_k, i} \subset D_{n_1, \dots, n_k}$ selon (4).

Théorème. Chaque espace \mathcal{O} complet séparable et dense en soi se laisse obtenir de l'ensemble \mathcal{I} des nombres irrationnels (de l'intervalle 01) par une homéomorphie de classe 0, 1¹⁾.

Démonstration. Désignons, d'une façon générale, par $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \dots$ le développement en fraction continue du nombre irrationnel $z \in \mathcal{I}$.

$\{F_{n_1, \dots, n_k}\}$ étant le système d'ensembles fermés considéré dans le lemme généralisé, la suite $F_{z_1}, F_{z_1 z_2}, F_{z_1 z_2 z_3}, \dots$ se compose, pour chaque z , d'ensembles fermés, non vides, décroissants et à diamètre tendant vers 0 (cf. (1), (2) et (4)). Leur produit se réduit donc à un seul point; nous le désignons par $f(z)$:

$$(9) \quad f(z) = F_{z_1} \cdot F_{z_1 z_2} \cdot F_{z_1 z_2 z_3} \cdot \dots$$

¹⁾ Il serait intéressant de reconnaître si ce théorème ne se laisse pas étendre sur les ensembles $F_{\sigma\delta}$ composés exclusivement de points de condensation.

Ainsi, la fonction $f(z)$ se trouve définie sur l'ensemble \mathcal{I} tout entier. En tenant compte de (2), on prouve facilement qu'elle est continue²⁾.

Soit x un point arbitraire de l'espace \mathcal{O} . Les ensembles D_1, D_2, \dots étant disjoints (cf. (5)), on conclut de (6) qu'il existe un et un seul indice n_1 tel que $x \in D_{n_1}$. D'une façon analogue, si $x \in D_{n_1, \dots, n_k}$, il existe selon (7) un et un seul indice n_{k+1} tel que $D_{n_1, \dots, n_k, n_{k+1}}$. Par conséquent, il existe un et un seul nombre irrationnel z tel que $x \in D_{z_1} \cdot D_{z_1 z_2} \cdot \dots$, c. à d. (en raison de (8) et (9)) tel que $x = f(z)$; notamment $z = \frac{1}{|n_1|} + \frac{1}{|n_2|} + \dots$.

Autrement dit, la fonction $f(z)$ transforme \mathcal{I} en l'espace \mathcal{O} tout entier de façon biunivoque.

Désignons par $z = g(x)$ la fonction inverse à $x = f(z)$. Il reste à démontrer que la fonction $g(x)$ est de première classe. Il suffit³⁾ de démontrer qu'il en est ainsi de la fonction $z^k = g^k(x)$; c. à d. que l'entier positif z^k , considéré comme fonction de x , en est une fonction de première classe.

Tout revient donc à démontrer que m et k étant deux entiers positifs arbitraires, l'ensemble $\mathbb{E}_x [g^k(x) = m]$ ³⁾ est un F_σ . Enfin cette dernière proposition sera établie dès que l'égalité suivante sera démontrée:

$$\mathbb{E}_x [g^k(x) = m] = \sum_z D_{n_1, \dots, n_{k-1}, m}$$

la sommation étant étendue à tous les systèmes composés de $k-1$ entiers positifs. Car les ensembles $D_{n_1, \dots, n_{k-1}, m}$ sont des F_σ , comme des différences de deux ensembles fermés.

Or, posons $x = f(z)$. D'une part, l'égalité $g^k(x) = m$ donne $z^k = m$, d'où $f(z) \in D_{z_1, \dots, z_{k-1}, m}$. Donc $x \in \sum D_{n_1, \dots, n_{k-1}, m}$.

D'autre part, si $x \in \sum D_{n_1, \dots, n_{k-1}, m}$, il vient selon (8) et (9) $x \in D_{z_1, \dots, z_{k-1}} \cdot \sum D_{n_1, \dots, n_{k-1}, m}$ et les ensembles D_{n_1, \dots, n_k} étant disjoints (pour k fixe), on en tire $z^k = m$, c. à d. que $g^k(x) = m$.

¹⁾ Voir par ex. *Topologie* I, p. 223.

²⁾ Ibid., p. 182.

³⁾ = ensemble des x satisfaisant à la condition entre crochets [].

Corollaire. \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 étant deux espaces complets séparables de la même puissance, il existe entre eux une homéomorphie de classe 1, 1.

Démonstration. Dans le cas où les espaces considérés sont dénombrables (ou finis), le corollaire est évident, car chaque fonction définie sur un espace dénombrable est de I-re classe.

Supposons donc que \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont indénombrables. D'après un théorème classique, chaque espace indénombrable devient dense en soi, lorsqu'on lui enlève un ensemble clairsemé¹⁾ convenablement choisi. Il peut arriver que cet ensemble clairsemé soit fini (ou vide), mais alors on peut lui ajouter une suite infinie (et convergente) de points sans qu'il cesse d'être clairsemé et sans que le reste de l'espace cesse d'être dense en soi. Désignons donc par C_1 et C_2 deux ensembles clairsemés infinis et tels que les ensembles $\mathcal{A}_1 - C_1$ et $\mathcal{A}_2 - C_2$ soient denses en soi. Ces deux derniers ensembles sont topologiquement complets comme des ensembles G_δ ²⁾. Il existe donc en vertu du théorème précédent deux homéomorphies f_1 et f_2 de classe 0, 1 qui transforment l'ensemble \mathcal{A} respectivement en $\mathcal{A}_1 - C_1$ et $\mathcal{A}_2 - C_2$; c. à d. que $f_1(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_1 - C_1$ et $f_2(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_2 - C_2$.

Posons $f(x) = f_2 f_1^{-1}(x)$ pour $x \in \mathcal{A}_1 - C_1$.

La fonction f est donc une homéomorphie de classe 1, 1 entre $\mathcal{A}_1 - C_1$ et $\mathcal{A}_2 - C_2$. Les ensembles C_1 et C_2 étant infinis et clairsemés, donc de la puissance \aleph_0 , il existe une fonction biunivoque (que nous pouvons désigner encore par f) qui transforme C_1 en C_2 . Cette dernière fonction étant — comme nous l'avons déjà indiqué — nécessairement de I-re classe et les ensembles C_1 et $\mathcal{A}_1 - C_1$ étant des ensembles F_σ (puisque C_1 est un G_δ , comme ensemble clairsemé³⁾), la fonction f est une fonction de I-re classe sur l'espace tout entier⁴⁾.

Il en résulte aussitôt que f est une homéomorphie de classe 1, 1.

¹⁾ c. à d. ne contenant aucun ensemble dense en soi.

²⁾ D'après un théor. de M. Alexandroff, chaque ensemble G_δ (situé dans un espace complet séparable) est homéomorphe à un espace complet séparable. Cf. par ex. *Topologie* I, p. 200.

³⁾ D'après un théor. de M. W. H. Young. Cf. par ex. *Topologie* I, p. 112.

⁴⁾ D'une façon plus générale, si l'espace se compose d'une suite d'ensembles de classe α additive sur lesquels f est de classe α , f est sur l'espace tout entier de classe α . Voir par ex. H. Hahn, *Reelle Funktionen* I, Leipzig 1932, p. 287 ou *Topologie* I, p. 179.

Remarque. Chaque ensemble G_δ (situé dans un espace complet séparable) étant homéomorphe à un espace complet, le corollaire implique qu'entre chaque couple d'ensembles G_δ indénombrables il existe une homéomorphie de classe 1, 1.

Il serait intéressant de reconnaître si le terme G_δ ne pourrait être remplacé par $F_{\sigma\delta}$ ¹⁾.

Quant aux ensembles de classes supérieures à 2, cf. le corollaire 2 du N° 3.

2. Nous allons nous occuper à présent d'une opération sur les fonctions dont le rôle est ici auxiliaire mais qui présente un intérêt intrinsèque même dans le domaine de la Théorie générale des ensembles.

Considérons une suite (finie ou infinie) d'espaces $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ et une suite de fonctions $f_n(x_n)$ définies respectivement sur ces espaces (la variable x_n parcourant l'espace \mathcal{A}_n) et dont les valeurs appartiennent à un espace fixe \mathcal{Y} . Soit $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots$ le produit cartésien des espaces \mathcal{A}_n , c. à d. l'ensemble des suites infinies $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots]$ telles que $\mathfrak{z}^n \in \mathcal{A}_n$. Désignons par \mathfrak{Z} l'ensemble des \mathfrak{z} tels que $f_1(\mathfrak{z}^1) = f_2(\mathfrak{z}^2) = f_3(\mathfrak{z}^3) = \dots$ et définissons la fonction $f(\mathfrak{z})$ pour $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ en convenant que $f(\mathfrak{z}) = f_n(\mathfrak{z}^n)$ quel que soit n ²⁾.

La fonction f jouit des propriétés suivantes:

$$a. \quad f(\mathfrak{Z}) = f_1(\mathcal{A}_1) \cdot f_2(\mathcal{A}_2) \cdot \dots$$

Car la condition $y \in f(\mathfrak{Z})$ signifie qu'il existe un \mathfrak{z} tel que $y = f(\mathfrak{z})$, c. à d. tel que $y = f_n(\mathfrak{z}^n)$ quel que soit n , donc tel que l'on ait $y \in f_1(\mathcal{A}_1) \cdot f_2(\mathcal{A}_2) \cdot \dots$

b. Si les fonctions f_n sont biunivoques, la fonction f l'est également.

Car la condition $f(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{z}_1)$ implique que $f_n(\mathfrak{z}^n) = f_n(\mathfrak{z}_1^n)$, d'où $\mathfrak{z}^n = \mathfrak{z}_1^n$, quel que soit n . Il en résulte que $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1$ (puisque le n -ème terme de la suite \mathfrak{z} est identique au n -ème terme de \mathfrak{z}_1).

c. Si $Q \subset \mathcal{Y}$, on a pour chaque n

$$f^{-1}(Q) = \mathfrak{Z} \cdot \bigcap_n [f_n(\mathfrak{z}^n) \in Q] = \mathfrak{Z} \cdot \bigcap_n [\mathfrak{z}^n \in f_n^{-1}(Q)].$$

¹⁾ Cf. renvoi¹⁾, p. 210.

²⁾ En particulier, si la suite des espaces se réduit à deux termes \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 et si $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{Y}$ = l'espace des nombres réels, la fonction $F(\mathfrak{z})$ est une fonction réelle de variable complexe $\mathfrak{z} = x_1 + ix_2$. Cette fonction est définie sur la „courbe“ $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ située dans le plan $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Car la condition $z \in f^{-1}(Q)$ équivaut à $f(z) \in Q$, donc à l'hypothèse que $f_n(z^n) \in Q$ et que $z \in \mathfrak{Z}$.

d. Si les fonctions f_n sont de classe α , l'ensemble \mathfrak{Z} est de classe α multiplicative dans le produit $\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_2 \times \dots$ et la fonction f est de classe α (sur \mathfrak{Z}^1).

Par définition de \mathfrak{Z} on a, en effet,

$$\mathfrak{Z} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}_n [f_n(z^n) = f_1(z^1)].$$

Or les fonctions $f_1(x_1)$ et $f_n(x_n)$ étant de classe α , l'ensemble $\mathfrak{E}_n [f_n(x_n) = f_1(x_1)]$ l'est également et il en est encore de même de l'ensemble $\mathfrak{E}_n [f_n(z^n) = f_1(z^1)]$, puisque les fonctions z^1 et z^n sont des fonctions continues de l'argument z . L'ensemble \mathfrak{Z} est donc de classe α multiplicative.

En outre, l'égalité $f(z) = f_1(z^1)$ montre que la fonction f est de classe α , comme superposition d'une fonction de classe α d'une fonction continue.

e. Si les fonctions $y = f_n(x_n)$ sont biunivoques et si leurs fonctions inverses $x_n = f_n^{-1}(y)$ sont de classe α , la fonction $z = f^{-1}(y)$ est de classe α (sur l'ensemble $f(\mathfrak{Z})$).

En effet, la fonction $f^{-1}(y)$ fait correspondre à chaque y la suite des points $z^1(y) = f_1^{-1}(y)$, $z^2(y) = f_2^{-1}(y)$, ... Ces points étant les „coordonnées“ du point variable $f^{-1}(y)$ et étant des fonctions de classe α de la variable y , il en résulte ³⁾ que la fonction $f^{-1}(y)$ est de classe α .

f. La propriété d'être une image de classe $0, \alpha$ d'un espace complet séparable est multiplicative au sens dénombrable.

¹⁾ Le produit cartésien $\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_2 \times \dots$ est métrisé par la formule $|z - y| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|z^i - y^i|}{1 + |z^i - y^i|}$, $|z^i - y^i|$ désignant la distance des points z^i et y^i

dans l'espace \mathfrak{E}_i . Ainsi métrisé, le produit d'espaces complets séparables est complet séparable. Voir *Topologie I*, pp. 88 et 197.

²⁾ Ibid. p. 79.

³⁾ Ibid. p. 182.

Notamment, si les espaces \mathfrak{E}_n sont complets séparables et si les fonctions f_n sont des homéomorphies de classe $0, \alpha$, la fonction f est une homéomorphie de classe $0, \alpha$ (selon *d* et *e*) transformant l'espace complet séparable \mathfrak{Z} (selon *d* où l'on pose $\alpha = 0$) en l'ensemble $f(\mathfrak{E}_1) \cdot f(\mathfrak{E}_2) \cdot \dots$ (selon *a*).

Remarque. On peut ajouter aux termes „complet séparable“ le terme de dimension 0. Car les espaces \mathfrak{E}_n étant supposés de dimension 0, il en est de même de leur produit cartésien ¹⁾, donc de l'ensemble \mathfrak{Z} .

g. Etant données une suite d'ensembles E_n ambigus de classe γ dans \mathfrak{E}_n et une suite d'homéomorphies f_n de classe $0, \alpha$ et telles que $f_n(\mathfrak{E}_n) = \mathfrak{Y}$, on a $f(\mathfrak{f}_n) = f_n(E_n)$ où l'ensemble $\mathfrak{f}_n = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{E}_n [z^n \in E_n]$ est ambigu de classe γ et f est une homéomorphie de classe $0, \alpha$.

En effet, en posant dans *c*: $Q_n = f_n(E_n)$, il vient $E_n = f_n^{-1}(Q_n)$ et $f^{-1}(Q_n) = \mathfrak{f}_n$. La fonction f étant biunivoque (même une homéomorphie de classe $0, \alpha$ selon *d* et *e*), on en tire: $Q_n = f(\mathfrak{f}_n)$. Enfin z^n étant une fonction continue de z , l'ensemble $\mathfrak{E}_n [z^n \in E_n]$, et par conséquent \mathfrak{f}_n , est ambigu de classe γ .

3. **Théorème 1.** Pour qu'un ensemble A situé dans un espace complet séparable soit de classe $\alpha > 0$ multiplicative, il faut et il suffit qu'il se laisse obtenir par une homéomorphie de classe $0, \alpha - 1$ ²⁾ d'un espace complet séparable. Ce dernier espace peut être supposé de dimension 0, ³⁾ si $\alpha > 1$.

Démonstration. Comme nous l'avons déjà indiqué dans l'Introduction, la condition est suffisante.

Sa nécessité signifie, dans le cas où $\alpha = 1$, que chaque ensemble G_δ est homéomorphe (de classe $0, 0$) à un espace complet. Ceci est un théorème connu ⁴⁾. Il existe, de plus, un espace complet séparable de dimension 0 et une homéomorphie de classe $0, 1$ qui transforme cet espace en l'espace G_δ considéré ⁵⁾.

¹⁾ Ibid. p. 149.

²⁾ Si α est un nombre limite, on pose $\alpha - 1 = \alpha$.

³⁾ Rappelons que chaque espace complet séparable et de dimension 0 est homéomorphe à un ensemble fermé dans l'ensemble des nombres irrationnels. Cf. par ex. *Topologie I*, p. 224.

⁴⁾ Voir renvoi ²⁾, p. 212.

⁵⁾ *Topologie I*, p. 226.

Procédons par induction. Étant donné un nombre $\alpha > 1$, il est légitime d'admettre que chaque ensemble X de classe $\xi < \alpha$ ($\xi > 0$) se laisse obtenir d'un ensemble fermé dans l'ensemble \mathcal{N} des nombres irrationnels par une homéomorphie de classe 0, ξ .

Chaque ensemble A de classe multiplicative $\alpha > 1$ est de la forme $A = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_n^k$, les ensembles A_n^k étant ambigus de classe $\alpha_n^k < \alpha$ et étant disjoints pour n fixe ¹⁾. Par hypothèse, il existe un ensemble B_n^k fermé dans \mathcal{N} et contenu dans l'intervalle $k, k+1$ et une homéomorphie f_n^k de classe 0, α_n^k telle que $f_n^k(B_n^k) = A_n^k$. L'ensemble $B_n = B_n^1 + B_n^2 + \dots$ est évidemment fermé dans l'ensemble de tous les nombres irrationnels; il constitue donc un espace topologiquement complet, séparable, de dimension 0. La fonction f_n , définie sur B_n par la condition qu'elle coïncide avec f_n^k sur B_n^k , transforme donc B_n en $A_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_n^k$ d'une façon biunivoque et continue. De plus, la fonction f_n^{-1} inverse à f_n coïncide sur A_n^k avec la fonction inverse à f_n^k : celle-ci étant par hypothèse de classe $\alpha_n^k \leq \alpha - 1$ et les ensembles A_n^k étant ambigus de classe α_n^k , il en résulte ²⁾ que la fonction f_n^{-1} est de classe $\alpha - 1$.

Il est ainsi établi que l'ensemble A_n s'obtient par une homéomorphie de classe 0, $\alpha - 1$ d'un espace complet, séparable, de dimension 0. Il en est de même de l'ensemble $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ en raison de f .

Corollaire 1. *A étant un ensemble indénombrable de classe $\alpha > 1$ multiplicative, il existe un ensemble dénombrable (infini) D tel que $A - D$ se laisse obtenir de l'ensemble \mathcal{N} des nombres irrationnels par une homéomorphie de classe 0, $\alpha - 1$.*

Car chaque espace indénombrable, complet, séparable et de dimension 0 se compose d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble homéomorphe (de classe 0, 0) à \mathcal{N} ³⁾.

Corollaire 2. *A et B étant deux ensembles indénombrables respectivement de classes $\alpha > 2$ et $\beta > 2$ multiplicatives, il existe entre eux une homéomorphie de classe $\alpha - 1, \beta - 1$.*

¹⁾ Ibid, p. 162.

²⁾ Voir renvoi ⁴⁾ p. 212.

³⁾ d'après un théor. de M. Mazurkiewicz. Voir par ex. *Topologie I*, p. 227.

Soient, conformément au corollaire précédent, D et E deux ensembles dénombrables et f_1 et f_2 deux homéomorphismes respectivement de classes 0, $\alpha - 1$ et 0, $\beta - 1$ et telles que $f_1(\mathcal{N}) = A - D$, $f_2(\mathcal{N}) = B - D$. Posons $f(x) = f_2 f_1^{-1}(x)$ pour $x \in A - D$ et définissons $f(x)$ pour $x \in D$ de manière que l'ensemble D se trouve transformé en E d'une façon biunivoque.

La fonction f , ainsi définie, est de classe $\alpha - 1$ sur $A - D$ et de classe 1, donc de classe $\alpha - 1$ sur D . Les ensembles D et $A - D$ étant des ensembles $G_{\delta\sigma}$ par rapport à A (donc des ensembles de classe $\alpha - 1$ additive), la fonction f est de classe $\alpha - 1$ sur l'ensemble A tout entier ¹⁾.

Par raison de symétrie f^{-1} est de classe $\beta - 1$ sur B .

Théorème 2. *Étant donné dans un espace complet séparable \mathcal{Y} un ensemble A ambigu de classe $\alpha + \beta$, avec $\alpha > 0$, l'espace \mathcal{Y} se laisse obtenir d'un espace complet, séparable, de dimension 0, par une homéomorphie de classe 0, α qui transforme un ensemble ambigu de classe β en A ²⁾.*

Démonstration. Procédons par induction.

1) Si $\beta = 0$, il existe d'après le théor. 1 deux ensembles B_1 et B_2 fermés dans \mathcal{N} et situés respectivement dans les intervalles 0, 1 et 1, 2 et deux homéomorphismes f_1 et f_2 de classe 0, α telles que $f_1(B_1) = A$ et $f_2(B_2) = \mathcal{Y} - A$ (car A et $\mathcal{Y} - A$ sont de classe multiplicative α). On définit la fonction f sur l'ensemble topologiquement complet $B = B_1 + B_2$, en convenant qu'elle coïncide respectivement avec f_1 et f_2 sur B_1 et B_2 . La fonction f est donc biunivoque, continue et $f(B) = \mathcal{Y}$. En outre, comme la fonction f^{-1} coïncide respectivement sur les ensembles A et $\mathcal{Y} - A$ avec f_1^{-1} et f_2^{-1} , qui sont de classe α , de même que ces ensembles, la fonction f^{-1} est aussi de classe α . La fonction f est donc une homéomorphie de classe 0, α . Enfin $A = f(B_1)$ et B_1 est évidemment ambigu de classe 0 dans B (c. à d. que B_1 y est fermé et ouvert).

2) Si $\beta = \gamma + 1$, l'ensemble A est la limite d'une suite d'ensembles A_n ambigus de classe $\alpha + \gamma$ ³⁾:

$$A = \prod_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{n+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{n=0}^{\infty} A_{n+k}.$$

¹⁾ Voir renvoi ⁴⁾ p. 212.

²⁾ Pour le cas $\beta = 1$, voir N. Lusiu, loc. cit.

³⁾ Voir p. ex. *Topologie I*, p. 116.

Par hypothèse il existe: une suite d'espaces \mathcal{E}_n complets, séparables, de dimension 0, une suite d'ensembles E_n ambigus de classe γ dans \mathcal{E}_n et une suite d'homéomorphies f_n de classe 0, α telles que $f_n(\mathcal{E}_n) = \mathcal{Y}$ et $f_n(E_n) = A_n$. D'après g il existe un espace \mathfrak{Z} complet, séparable, de dimension 0, une suite d'ensembles f_n ambigus de classe γ dans \mathfrak{Z} et une homéomorphie f de classe 0, α telle que $f(\mathfrak{Z}) = \mathcal{Y}$ et $f(f_n) = A_n$.

La fonction f étant biunivoque, il vient

$$A = \prod_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(f_{n+k}) = f \left\{ \prod_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_{n+k} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{n=0}^{\infty} f(f_{n+k}) = f \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{n=0}^{\infty} f_{n+k} \right\}.$$

Ainsi A s'obtient à l'aide de la fonction f de la limite des ensembles f_n et celle-ci est un ensemble ambigu de classe $\beta = \gamma + 1$, comme limite d'ensembles ambigus de classe γ .

3) Si β est un nombre limite, on a

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} A_{2n} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} - A = \prod_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}$$

où A_n est ambigu de classe $\alpha + \gamma_n$ avec $\gamma_n < \beta$.

Par hypothèse il existe, comme auparavant, une suite d'espaces \mathcal{E}_n complets, séparables, de dimension 0, une suite d'ensembles E_n ambigus de classe γ_n dans \mathcal{E}_n et une suite d'homéomorphies f_n de classe 0, α telles que $f_n(\mathcal{E}_n) = \mathcal{Y}$ et que $f_n(E_n) = A_n$. D'après g il existe un espace \mathfrak{Z} complet, séparable, de dimension 0, une suite d'ensembles f_n ambigus de classe γ_n dans \mathfrak{Z} et une homéomorphie f de classe 0, α telle que $f(\mathfrak{Z}) = \mathcal{Y}$ et $f(f_n) = A_n$.

La fonction f étant biunivoque, il vient

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} f(f_{2n}) = f \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} f_{2n} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} - A = f \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} f_{2n-1} \right\},$$

d'où on conclut que $\prod_{n=1}^{\infty} f_{2n-1} = \mathfrak{Z} - \prod_{n=1}^{\infty} f_{2n}$ (car $\mathcal{Y} = f(\mathfrak{Z})$).

L'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} f_{2n}$ est donc ambigu de classe β , comme ensemble

qui est — de même que son complémentaire — de classe β multiplicative.

Théorème 3. *Le théorème précédent reste vrai, lorsqu'on y remplace les classes ambiguës par les classes multiplicatives.*

En effet, tout ensemble A de classe multiplicative $\alpha + \beta > 0$ est de la forme $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$ où les ensembles A_n sont ambigus de classe β et il existe donc selon le théor. 2 une suite d'espaces \mathcal{E}_n complets, séparables, de dimension 0, une suite d'ensembles E_n ambigus de classe β et une suite d'homéomorphies f_n de classe 0, α telles que $f_n(\mathcal{E}_n) = \mathcal{Y}$ et $f_n(E_n) = A_n$. D'après g il existe un espace \mathfrak{Z} complet, séparable, de dimension 0, une suite d'ensembles f_n ambigus de classe β dans \mathfrak{Z} et une homéomorphie f de classe 0, α telle que $f(\mathfrak{Z}) = \mathcal{Y}$ et $f(f_n) = A_n$.

La fonction f étant biunivoque, il vient

$$A = f(f_1) \cdot f(f_2) \cdot \dots = f(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots).$$

L'ensemble $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots$ étant de classe β multiplicative, le théorème se trouve démontré.

4. Théorème (d'existence). *A chaque couple de nombres α, β (inférieurs à Ω) correspond une transformation f de l'ensemble des nombres irrationnels \mathcal{I} en lui-même: $\mathcal{I} = f(\mathcal{I})$ qui est une homéomorphie précisément de classe α, β (c. à d. que ni la fonction f n'est de classe $< \alpha$, ni la fonction f^{-1} n'est de classe $< \beta$).*

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $\beta = 0$.

L'existence d'une homéomorphie de classe 1, 0 qui n'est pas une homéomorphie dans le sens habituel étant triviale, admettons que $\alpha > 1$.

Soit A un sous-ensemble de \mathcal{I} ambigu de classe α et qui ne se laisse pas décomposer en un ensemble dénombrable et un ensemble de classe multiplicative $< \alpha$ ¹⁾. D'après le théor. 2 il existe une homéomorphie f de classe $\alpha, 0$ telle que $f(\mathcal{I})$ est fermé dans \mathcal{I} et $f(A)$ est ambigu de classe 0 dans $f(\mathcal{I})$ ²⁾. Comme sous-ensemble fermé et indénombrable de \mathcal{I} , l'ensemble $f(\mathcal{I})$ devient homéo-

¹⁾ Cette dernière hypothèse signifie, quand $\alpha > 2$, que A n'est pas de classe multiplicative $< \alpha$; pour $\alpha = 2$ elle signifie que A (qui est un $F_{\sigma\delta}$ et $G_{\delta\sigma}$) n'est pas somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble dénombrable. L'existence des ensembles A de ce genre se démontre facilement.

²⁾ Notamment l'homéomorphie f est inverse à celle du théor. 2. En outre $\mathcal{Y} = \mathcal{I}$, $\beta = 0$.

morphe à \mathcal{O} en supprimant un ensemble dénombrable convenablement choisi. Autrement dit, il existe un ensemble dénombrable D tel que l'ensemble $N_1 = f(\mathcal{O} - D)$ est homéomorphe à \mathcal{O} .

L'ensemble D étant dénombrable, la différence $N_2 = \mathcal{O} - D$ est évidemment homéomorphe à \mathcal{O} .

Pour établir notre théorème (dans le cas $\alpha, 0$), il suffit donc de démontrer que la fonction f n'est pas de classe $\xi < \alpha$ sur l'ensemble N_2 .

Supposons que f soit de classe $\xi > 0$ sur N_2 . Par conséquent, AN_2 est de classe multiplicative ξ par rapport à N_2 (puisque l'ensemble $f(AN_2) = f(A) \cdot N_1$ est fermé dans N_1). Autrement dit, il existe un ensemble B de classe multiplicative ξ (dans \mathcal{O}) tel que $BN_2 = AN_2 = A - D$, d'où $A = BN_2 + AD$. Or, l'ensemble N_2 étant de classe multiplicative ξ (comme ensemble G_2), l'ensemble BN_2 l'est également. L'ensemble AD étant dénombrable, on en conclut que $\alpha \leq \xi$.

Ceci établi, passons au cas général où α et β sont arbitraires. Soient f_1 et f_2 deux homéomorphismes respectivement de classe $\alpha, 0$ et $0, \beta$ telles que $f_1(N^1) = N^1$ et $f_2(N^2) = N^2$, où N^1 et N^2 désignent respectivement les parties de \mathcal{O} contenus dans les intervalles $0, \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}, 1$. En convenant que la fonction f coïncide sur N^1 avec f_1 et sur N^2 avec f_2 , on définit une homéomorphie de classe α, β telle que $f(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Les homéomorphismes f_1 et f_2 étant supposées précisément des classes $\alpha, 0$ et $0, \beta$, f est précisément de classe α, β .

Sur les points de densité au sens fort.

Par

Frédéric Riesz (Szeged, Hongrie).

1. Dans son livre sur l'intégration récemment paru ¹⁾, M. Saks vient d'établir le théorème suivant.

Presque tous les points d'un ensemble plan en sont des points de densité au sens fort.

L'ensemble en question est supposé d'être envisagé après avoir fixé un système orthogonal de coordonnées x, y et ce que le théorème affirme, c'est que, excepté au plus certains points dont l'ensemble est de mesure nulle, tous les autres points X de l'ensemble E envisagé jouissent de la propriété suivante: pour toute suite infinie de rectangles R_n parallèles aux axes, comprenant le point X et dont les diagonales deviennent infiniment petites avec $1/n$, la densité moyenne de E par rapport à R_n (c'est la mesure extérieure de la partie de E comprise dans R_n divisée par l'aire de R_n), a pour limite l'unité.

Ce théorème comporte une généralisation surprenante du célèbre théorème de M. Lebesgue sur les points de densité; en effet on était forcé jusqu'à ces derniers jours, par des raisons de méthode, à n'admettre que des suites R_n dites régulières, savoir telles que le rapport des cotés adjacents reste entre des bornes finis indépendants de n .

M. Saks déduit son résultat d'un théorème de M. Stepanoff sur les différentielles approximatives, théorème dont la démonstration n'est pas des faciles. Vu l'importance du théorème de M. Saks

¹⁾ S. Saks: *Théorie de l'intégrale*, Monografie Matematyczne, t. II, Warszawa 1933, p. 231.