Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen.

Von

Th. Skolem (Bergen, Norwegen).

Die Reihe der ganzen positiven Zahlen soll N heissen. Es soll eine endliche oder abzählbar unendliche Menge M von wahren Aussagen über die Elemente von N gegeben sein. Diese Aussagen haben einen „Kern", der durch Konjunktion, Disjunktion und Negation von Gleichungen oder Kleinerbeziehungen zwischen arithmetischen Funktionen gebildet ist[1]); dabei bedeutet „arithmetische Funktion" eine Funktion endlich vieler Variablen derart, dass N der Wertevorrat sowohl der Variablen wie der Funktion ist. Im allgemeinsten Falle entsteht die volle Aussage aus dem Kern durch logische Quantifizierung der Variablen, d. h. durch Anwendung von „alle" und „es gibt". Zuerst will ich aber den besonders einfachen Fall betrachten, wo nur Allzeichen dem Kern vorangehen. Dann kann man durch Weglassen der Allzeichen die Aussage mit „wirklichen" oder „freien" Variablen aufschreiben, indem man sagt, dass der Kern für *beliebige* Werte der Variablen gilt. Eine solche mit freien Variablen geschriebene Aussage nenne ich eine *Formel*, und ich nehme also zuerst an, dass M eine Menge von lauter Formeln ist.

Beispiele für Formeln sind:

$$x+y=y+x \quad x+(y+z)=(x+y)+z \quad xy=yx \quad x(yz)=(xy)z$$
$$x(y+z)=xy+xz \quad (x<y)+(x=y)+(x>y)$$
$$(x \neq y)+(x+z=y+z)\ (xz=yz)$$
$$(x \neq y)+(z \neq u)+(x+z=y+u)\ (xz=yu).$$

1) Vgl. L. Kalmár, Math. Ann. 108, S. 467.

Hier bedeutet nach Schröder Nebeneinanderstellung von Aussagen ihre Konjunktion, und das Zeichen $+$ zwischen Aussagen bedeutet ihre Disjunktion. Die beiden letzten Formeln schreibt man übrigens oft mit Hilfe des Implikationszeichens $\rightarrow$ so:

$$(x=y) \rightarrow (x+z=y+z)\ (xz=yz),$$
$$(x=y)\ (z=u) \rightarrow (x+z=y+u)\ (xz=yu).$$

Ich benutze in folgenden auch die Schröderschen Zeichen Π und Σ für die Quantifikationen „alle" und „es gibt".

Die arithmetischen Funktionen, welche in den zu M gehörenden Aussagen vorkommen, bilden eine endliche oder abzählbar unendliche Menge M. Falls nicht schon alle nichtidentisch verschwindenden Polynome endlich vieler Variablen mit nicht-negativen ganzzahligen Koeffizienten in M vorkommen, können sie hinzugefügt werden; dadurch bekommt man eine Funktionenmenge M', die abzählbar unendlich ist. Falls M' nicht schon in bezug auf allerlei Einsetzungen abgeschlossen ist, so kann sie durch allmählige Ausführung aller möglichen Einsetzungen zu einer Menge $\boldsymbol{M}$ erweitert werden, die derart abgeschlossen ist.

Wie leicht einzusehen ist, wird auch $\boldsymbol{M}$ abzählbar unendlich. Die in $\boldsymbol{M}$ vorkommenden Funktionen einer Variablen bilden eine Menge $\boldsymbol{M}_1$. Die Elemente von $\boldsymbol{M}_1$ seien

$$f_1(t), f_2(t), \ldots$$

Dass jede abzählbare Funktionenmenge M_1 durch successive Ausführung aller möglichen Einsetzungen zu einer in bezug auf Einsetzungen abgeschlossenen abzählbaren Menge M_ω erweitert werden kann, lässt sich leicht so zeigen: Es gibt für jede Funktion in M_1 augenscheinlich nur eine abzählbare Menge von Funktionen, die durch einmalige Einsetzung darin von Funktionen in M_1 ableitbar sind. Also bilden alle neuen Funktionen mit denen in M_1 zusammen eine abzählbare Funktionenmenge M_2. Werden daraus wieder alle durch einmalige Einsetzung herstellbaren Funktionen gebildet, so liefern die neuen Funktionen darunter mit den Funktionen in M_2 eine abzählbare Menge M_3. In derselben Art bekommt man weiter die abzählbaren Mengen $M_4, M_5, \ldots$ Es sei M_ω die Vereinigungsmenge aller M_n. Dann ist bekanntlich auch M_ω abzählbar. Andererseits ist M_ω eine in bezug auf Einsetzungen abgeschlossene Funktionenmenge. Es sei nämlich $F(x_1, \ldots, x_l)$ eine Funktion in M_ω, und es werde statt einiger der x oder auch aller die in M_ω auftretenden Funktionen $F_1, F_2, \ldots$ eingesetzt Dann kommen $F, F_1, F_2, \ldots$ schon bezw. in $M_n, M_{n_1}, M_{n_2}, \ldots$ vor und deshalb alle in M_m vor, wenn $m = \max.(n, n_1, n_2, \ldots)$ ist. Dann kommt aber die durch die Einsetzung gebildete Funktion schon in M_{m+1} vor und also sicher in M_ω

Wie ich früher bewiesen habe [1]), gilt aber folgender Satz:

Satz 1. Wenn $f_1(t), f_2(t), \dots$ eine beliebige Folge arithmetischer Funktionen sind, so gibt es eine monoton wachsende arithmetische Funktion $g(t)$, so dass es für jedes Paar (i, j) eine natürliche Zahl $t_{i,j}$ gibt derart, dass für alle $t > t_{i,j}$ entweder stets

$f_i g(t) < f_j g(t)$ *oder stets* $f_i g(t) = f_j g(t)$ *oder stets* $f_i g(t) > f_j g(t)$ *bleibt.*

Ich will hier den Satz in einer leicht geänderten, vielleicht etwas übersichtlicheren, Art beweisen. Dabei schicke ich die Bemerkung voraus, dass, wenn $f_1(t)$ und $f_2(t)$ zwei beliebige arithmetische Funktionen sind, so gibt es eine monoton wachsende Funktion $g(t)$ derart, dass für alle t dieselbe Beziehung $<$, $=$ oder $>$ zwischen $f_1 g(t)$ und $f_2 g(t)$ besteht. Denn die Elemente t von N verteilen sich in drei Klassen, je nachdem $f_1(t) < f_2(t)$, $f_1(t) = f_2(t)$ oder $f_1(t) > f_2(t)$ ist, und in mindestens einer dieser drei Klassen müssen unendlich viele Zahlen vorhanden sein. Diese unendlich vielen Zahlen können aber als die Werte einer monoton wachsenden arithmetischen Funktion $g(t)$ für $t = 1, 2, \dots$ dargestellt werden.

Jetzt betrachten wir die unendlich vielen Funktionen $f_1, f_2, \dots$ aus M_1. Hier kann man die Paare (i, j), $i < j$, aller Indizes in einer einfach unendlichen Reihe ordnen, etwa so, dass man sie zuerst nach wachsenden Werten von $i + j$ ordnet und die mit derselben Summe $i + j$ nach wachsenden Werten von i ordnet. Dadurch bekommt man die Reihe:

(1) $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (1, 5), (2, 4), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (1, 7), \dots$

Nach der vorausgeschickten Bemerkung, gibt es nun eine monoton wachsende Funktion $g_1(t)$ derart, dass für alle t gilt

$$f_1 g_1(t)\, B_1\, f_2 g_1(t),$$

wobei B_1 eines der drei Zeichen $<$, $=$, $>$ bedeutet. Ebenso gibt es nach derselben Bemerkung, wenn man die Funktionen f_1 und f_2 darin durch $f_1 g_1$ und $f_3 g_1$ ersetzt, eine monoton wachsende Funktion $g_2(t)$ derart, dass für alle t gilt

$$f_1 g_1 g_2(t)\, B_2\, f_3 g_1 g_2(t),$$

[1]) Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung etc. Norsk mat. forenings skrifter, Serie II, 1933, S. 73—74.

wo B_2 wieder eines der Zeichen $<$, $=$, $>$ bedeutet. Weiter bekommt man nach derselben Bemerkung, wenn die Funktionen f_1 und f_2 darin hier durch $f_1 g_1 g_2$ und $f_4 g_1 g_2$ ersetzt werden, eine monoton wachsende Funktion $g_3(t)$ derart, dass

$$f_1 g_1 g_2 g_3(t)\, B_3\, f_4 g_1 g_2 g_3(t)$$

für alle t gilt, wobei B_3 entweder $<$, $=$ oder $>$ bedeutet. Das nächste mal bekommt man in gleicher Art

$$f_2 g_1 g_2 g_3 g_4(t)\, B_4\, f_3 g_1 g_2 g_3 g_4(t)$$

u. s. w. Nun setze ich für alle n

$$g_1 g_2 \dots g_n(n) = g(n)$$

und behaupte, dass dann, wenn (i, j) dass n^{te} Paar in der Reihe (1) ist, für alle $t \geqq n$ die Beziehung gilt:

$$f_i g(t)\, B_n\, f_j g(t). \tag{2}$$

Man hat ja für alle t

$$f_i g_1 g_2 \dots g_n(t)\, B_n\, f_j g_1 g_2 \dots g_n(t). \tag{3}$$

Setzt man hier speziell $t = n$, so bekommt man

$$f_i g(n)\, B_n\, f_j g(n). \tag{4}$$

Setzt man in (3) $g_{n+1} g_{n+2} \dots g_{n+h}(t)$ statt t, so erkennt man, dass für alle t gilt

$$f_i g_1 g_2 \dots g_{n+h}(t)\, B_n\, f_j g_1 g_2 \dots g_{n+h}(t),$$

und wird hier speziell $t = n + h$ gesetzt, so bekommt man

$$f_i g(n+h)\, B_n\, f_j g(n+h). \tag{5}$$

Wegen (4) und (5) gilt (2) für alle $t \geqq n$, wie behauptet wurde.

Natürlich ist $g(t)$ monoton wachsend; denn es ist ja

$$g(n+1) = g_1 g_2 \dots g_n g_{n+1}(n+1) > g_1 g_2 \dots g_n(n) = g(n),$$

wenn man bemerkt, dass $g_{n+1}(n+1) > n$ sein muss da g_{n+1} monoton wächst. Hierdurch ist Satz 1 bewiesen.

Diesen Satz wenden wir jetzt an auf die Menge M_1. Es sei also die monoton wachsende Funktion $g(t)$ derart, dass, wenn $f_i(t)$ und $f_j(t)$ zwei beliebige Elemente von M_1 sind, so gilt für alle $t > t_{i,j}$

immer eine feste Grössenbeziehung zwischen $f_i g(t)$ und $f_j g(t)$. Ich benutze dies zur Definition einer linearen Anordnung aller Elemente von M_1. Gilt nämlich für alle $t > t_{i,j}$ die Beziehung $f_i g(t) \, B f_j g(t)$, wo B entweder $<$ oder $=$ oder $>$ bedeutet, so setze ich für die Elemente f_i und f_j von M_1

$$f_i \, B f_j.$$

Dass hierdurch eine lineare Anordnung von M_1 definiert ist, ist leicht zu erkennen. Denn nach dem eben bewiesenen Satze gilt für jedes Paar (i, j) eine und nur eine der drei Beziehungen

$$f_i < f_j, \quad f_i = f_j, \quad f_i > f_j,$$

und man erkennt, dass aus $f_i < f_j$, $f_j \leqq f_h$ folgt $f_i < f_h$, und ebenso folgt $f_i = f_h$ aus $f_i = f_j$, $f_j = f_h$, während $f_i > f_j$ mit $f_j < f_i$ gleichbedeutend ist. Hat man z. B. $f_i < f_j$ und $f_j < f_h$, so heisst das, dass für alle $t > t_{i,j}$ bezw. $> t_{j,h}$

$$f_i g(t) < f_j g(t) \quad \text{und} \quad f_j g(t) < f_h g(t)$$

stattfindet, und daraus folgt für alle $t > \max(t_{i,j}, t_{j,h})$

$$f_i g(t) < f_h g(t).$$

Die feste Beziehung, die für alle $t > t_{i,h}$ zwischen $f_i g(t)$ und $f_h g(t)$ stattfindet, ist also die Beziehung $<$.

Diese Reihe der Elemente von M_1 nenne ich N^*. Es is leicht zu sehen, dass N ein echtes Anfangsstück von N^* bildet. Denn unter den Elementen von N^* kommen auch die „Konstanten" vor, d. h. die Elemente von N. Ausserdem ist augenscheinlich $1 \leqq f$, wo f beliebiges Element von N^*, und zu jedem Element $f(t)$ von N^* gibt es ein unmittelbar grösseres nämlich $f(t) + 1$. Dass $f < f + 1$ ist in N^*, ist unmittelbar klar. Man kann aber auch nicht $f < h < f + 1$ haben; denn das würde ja bedeuten, dass man für alle hinreichend grosse t $fg(t) < hg(t) < fg(t) + 1$ hätte, was unmöglich ist. Infolgedessen fängt die Reihe N^* mit den Elementen $1, 2, 3 \ldots$ von N an. Andererseits ist das Element t von N, d. h. die Funktion $f(t) = t$, augenscheinlich grösser als jede Konstante d. h. jedes Element von N; denn $fg(t) = g(t)$ wächst ja ins unendliche mit t. Also bildet tatsächlich N ein echtes Anfangsstück von N^*.

Nun können die Elemente von M, die ja Funktionen innerhalb N sind, auch als Funktionen in N^* erklärt werden und zwar so, dass

sie dabei ihre Bedeutung in N beibehalten. Diese Erweiterung der Bedeutung jener Funktionen ergibt sich in der Tat ganz von selbst. Es sei nämlich

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6}$$

eine solche Funktion. Es seien $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ variable Elemente von N^*. So oft für $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eine spezielle Wahl getroffen wird, etwa $f_1, \ldots, f_n$, so bekommt man durch Einsetzung von $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ statt $x_1, \ldots, x_n$ die Funktion

$$F(f_1(t), \ldots, f_n(t)),$$

die wegen der Abgeschlossenheit von M in bezug auf Einsetzungen wieder zu M gehört und also auch zu M_1, da ja bloss eine Variable t auftritt. Das bedeutet aber: Für jede Wahl der Werte der Variablen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ in N^* stellt $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ wieder ein Element von N^* dar. Hierdurch ist F als Funktion von n Variablen innerhalb N^* erklärt. Es ist ausserdem klar, dass wenn man speziell für $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ n Konstanten wählt, etwa $a_1, \ldots, a_n$, so stellt $F(a_1, \ldots, a_n)$ wieder eine Konstante dar, und diese Konstante ist eben der Wert in N der Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$ für die Werte $a_1, \ldots, a_n$ in N der Variablen $x_1, \ldots, x_n$. In dieser Weise können also wirklich die Funktionen (6) in N auch als Funktionen in N^* aufgefasst werden mit Beibehaltung ihrer Bedeutung in N

Satz 2. Werden die Funktionen der Menge M wie angegeben als Funktionen innerhalb N^* aufgefasst, so bleibt jede Formel der Menge M auch gültig innerhalb N^*.

Beweis: Eine beliebige Formel A der Menge M sei gegeben. Sie ist aufgebaut mittels Konjunktion, Disjunktion und Negation aus Beziehungen $=$ und $<$. Nun gilt aber sowohl in N wie in N^*, dass die Verneinung von $x = y$ als die Disjunktion $(x < y) + (y < x)$ geschrieben werden kann und die Verneinung von $x < y$ als die Disjunktion $(x = y) + (y < x)$. Infolgedessen kann die gegebene Formel mittels Konjunktion und Disjunktion allein aus Beziehungen $=$ oder $<$ aufgebaut werden und zwar im ganz gleicher Art in N^* wie in N. Bekanntlich kann dann A geschrieben werden in der Form

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m, \tag{7}$$

wo jedes A_l durch Konjunktion allein gebildet ist, etwa so:

$$(F_{1,l}(x_1, \ldots, x_n) \, B_{1,l} \, G_{1,l}(x_1, \ldots, x_n)) \ldots (F_{m_l,l}(x_1, \ldots, x_n) \, B_{m_l,l} \, G_{m_l,l}(x_1, \ldots, x_n)), \tag{8}$$

wo jedes $B_{j,i}$ entweder das Zeichen $=$ oder das Zeichen $<$ bedeutet. Nach der Voraussetzung ist also A wahr für eine beliebige Wahl der Werte der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in N. Es ist zu beweisen, dass wenn $x_1, \ldots, x_n$ ersetzt werden durch n variable Elemente $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ von N^*, so ist A wahr für eine beliebige Wahl dieser Funktionen φ in N^*.

Es sei nun $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ eine beliebige spezielle Wahl der variablen Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Dann stellt jedes $F_{r,i}(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ ein spezielles Element von N^* dar, das ich kürzer $f_{r,i}(t)$ nenne; ebenso nenne ich $G_{r,i}(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ kürzer $g_{r,i}(t)$. Nach dem oben bemerkten gibt es nun ein Element $t_{r,i}$ von N derart, dass für alle $t > t_{r,i}$ eine feste Beziehung $<$, $=$ oder $>$ zwischen $f_{r,i}g(t)$ und $g_{r,i}g(t)$ bestehen bleibt. Nun sei T das Maximum der endlich vielen Zahlen $t_{r,i}$. Wird nun speziell $t = g(T+1)$ gesetzt, oder m. a. W. $x_h = f_h g(T+1)$, $h = 1, 2, \ldots, n$, in (7) und (8), so ist A wahr, d. h. mindestens eine der Alternativen A_i ist wahr; es sei deshalb A_α wahr.

Dann sind also alle Beziehungen

$$f_{r,\alpha}g(T+1)\, B_{r,\alpha}\, g_{r,\alpha}g(T+1), \qquad r = 1, 2, \ldots, m_\alpha$$

wahr. Da aber für alle r die Beziehung $B_{r,\alpha}$ festbleibt für alle $t > T$ zwischen $f_{r,\alpha}g(t)$ und $g_{r,\alpha}g(t)$, so steht das Element $f_{r,\alpha}$ von M_1 in der Reihe N^* in der Beziehung $B_{r,\alpha}$ zu $g_{r,\alpha}$, oder m. a. W. man hat für $r = 1, 2, \ldots, m_\alpha$

$$F_{r,\alpha}(f_1(t), \ldots, f_n(t))\, B_{r,\alpha}\, G_{r,\alpha}(f_1(t), \ldots, f_n(t)),$$

d. h. A_α ist wahr für die spezielle Reihe $f_1 \ldots f_n$ von n Elementen aus N^*. Also ist auch A wahr für diese Elementreihe. Da aber diese Reihe eine beliebig gewählte war, so ist tatsächlich A eine wahre Formel auch in N^*. Hierdurch ist Satz 2 bewiesen.

Satz 3. *Es sei M eine Menge von endlich oder abzählbar unendlich vielen Aussagen über die Elemente von N, wobei jetzt auch die Quantifikation „es gibt" vorkommt. Weiter habe M' die frühere Bedeutung. Es ist dann möglich durch Hinzufügung neuer arithmetischer Funktionen, M' zu einer Menge M'' so zu erweitern, dass mittels der Funktionen in M'' jede Aussage in M als eine Formel geschrieben werden kann*

Beweis. Eine beliebige Aussage in M kann geschrieben werden in der Form

$$\sum_{x_1} \cdots \sum_{x_m} \prod_{y_1} \cdots \prod_{y_n} \sum_{z_1} \cdots \sum_{z_p} \prod_{u_1} \cdots \prod_{u_q} \sum_{v_1} \cdots \sum_{v_r} \cdots \tag{9}$$
$$\ldots A(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r, \ldots),$$

wobei die ersten Σ-Zeichen fehlen können (d. h. $m = 0$), so dass der Ausdruck mit Π-Zeichen anfängt. Diese Aussage ist aber mit der folgenden gleichbedeutend: Es gibt gewisse Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ und gewisse arithmetische Funktionen $f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_p(y_1, \ldots, y_n)$, $g_1(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q), \ldots, g_r(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q), \ldots$ derart, dass

$$A(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n, f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_p(y_1, \ldots, y_n), u_1, \ldots, u_q, \tag{10}$$
$$g_1(y_1, \ldots, u_q), \ldots, g_r(y_1, \ldots, u_q), \ldots)$$

eine Formel ist, d. h. für beliebige Werte der freien Variablen $y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q \ldots$ wahr ist. Man kann nun solche spezielle Zahlen und arithmetische Funktionen gewählt denken für jede Aussage in M. Dabei ist es nicht nötig das Auswahlprinzip zu benutzen; denn es ist leicht für alle wahren Aussagen eine eindeutig bestimmte Wahl dieser speziellen Zahlen und arithmetischen Funktionen zu definieren. Man setze nämlich zuerst

$$\prod_{y_1} \cdots \prod_{y_n} \sum_{z_1} \cdots \sum_{z_p} \prod_{u_1} \cdots \prod_{u_q} \sum_{v_1} \cdots \sum_{v_r} \cdots$$
$$\ldots A(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r, \ldots) = B(x_1, \ldots, x_m)$$

und ordne alle m-Tupel $(x_1, \ldots, x_m)$ der Elemente von N lexicographisch. Dann wähle man $a_1, \ldots, a_m$ als daß erste (kleinste) m-Tupel, für das B wahr ist. Danach setze man

$$\sum_{z_1} \cdots \sum_{z_p} \prod_{u_1} \cdots \prod_{u_q} \sum_{v_1} \cdots \sum_{v_r} \cdots$$
$$\ldots A(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r, \ldots) = C_1(y_1, \ldots, y_n, z_1).$$

Dann ist also $\prod_{y_1} \ldots \prod_{y_n} \sum_{z_1} C_1(y_1, \ldots, y_n, z_1)$ wahr. Hier kann man z_1 für jedes n-Tupel $y_1, \ldots, y_n$ so klein als möglich gewählt denken derart, dass C_1 wahr wird. Dadurch ist z_1 als eine Funktion $f_1(y_1, \ldots, y_n)$ eindeutig definiert. Weiter setze man

$$\sum_{z_3}\cdots\sum_{z_p}\prod_{u_1}\cdots\prod_{u_q}\sum_{v_1}\cdots\sum_{v_r}\cdots$$

$$\ldots A(a_1,\ldots,a_m), y_1,\ldots,y_n, f_1(y_1,\ldots y_n). z_2,\ldots,z_p, u_1,\ldots,u_q, v_1,\ldots,v_r,\ldots) = \\ = C_2(y_1,\ldots,y_n,z_2),$$

so dass also $\prod_{y_1}\ldots\prod_{y_n}\sum_{z_2} C_2(y_1,\ldots,y_n,z_2)$ wahr ist. Für jedes n-Tupel $y_1,\ldots,y_n$ kann man dann wieder z_2 so klein als möglich wählen derart, dass $C_2(y_1,\ldots,y_n,z_2)$ wahr ist. Hierdurch ist z_2 als eine Funktion $f_2(y_1,\ldots,y_n)$ definiert. Das nächste mal setze man

$$\sum_{z_4}\cdots\sum_{z_p}\prod_{u_1}\cdots\prod_{u_q}\sum_{v_1}\cdots\sum_{v_r}\cdots$$

$$\ldots A(a_1,\ldots,a_m, y_1,\ldots,y_n, f_1(y_1,\ldots,y_n), f_2(y_1,\ldots,y_n), z_3,\ldots,z_p, u_1,\ldots,u_q, v_1,\ldots,v_r\ldots) = \\ = C_3(y_1,\ldots,y_n,z_3)$$

u. s. w. Wenn alle z bestimmt sind als Funktionen von $y_1,\ldots,y_n$, so setze man

$$\sum_{v_2}\cdots\sum_{v_r}\ldots A(a_1,\ldots,a_m, y_1,\ldots,y_n, f_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,f_p(y_1,\ldots,y_n), \\ u_1,\ldots,u_q, v_1,\ldots,v_r,\ldots) = D_1(y_1,\ldots,y_n, u_1,\ldots,u_q, v_1).$$

Dann ist $\prod_{y_1}\ldots\prod_{y_n}\prod_{u_1}\ldots\prod_{u_q}\sum_{v_1} D_1(y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_q,v_1)$ wahr, und man kann v_1 für jedes $(n+q)$-Tupel $y_1,\ldots,y_n, u_1,\ldots,u_q$ so klein als möglich so wählen, dass $D_1(y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_q,v_1)$ wahr wird. Dadurch ist v_1 eindeutig als eine Funktion $g_1(y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_q)$ definiert. Danach setze man

$$\sum_{v_3}\cdots\sum_{v_r}\ldots A(a_1,\ldots,a_m, y_1,\ldots,y_n, f_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,f_p(y_1,\ldots,y_n), \\ u_1,\ldots,u_q, g_1(y_1,\ldots,y_n,u_1,\ldots,u_q), v_2,\ldots,v_r,\ldots) = D_2(y_1,\ldots,y_n, u_1,\ldots,u_q, v_2)$$

u. s. w. Es ist klar, wie hierdurch für jede Aussage in M eine Wahl der Zahlen $a_1,\ldots,a_m$ und der arithmetischen Funktionen $f_1,\ldots,f_p, g_1,\ldots,g_r,\ldots$ eindeutig bestimmt wird.

Werden die in dieser Art definierten arithmetischen Funktionen zu M' hinzugefügt, so kann jede Aussage (9) in M geschrieben werden in der Form (10). Der Ausdruck (10) ist dann wahr für beliebige Werte der freien Variablen $y_1,\ldots,y_n, u_1,\ldots,u_q,\ldots$ und stellt also eine Formel dar. Hierdurch ist Satz 3 bewiesen.

Ein sehr einfaches illustrierendes Beispiel zu Satz 3 ist folgendes. Bekanntlich ist die Kongruenz

$$2y \equiv 1 \pmod{2x+1}$$

lösbar für alle x oder m. a. W., die Aussage

$$\prod_x \sum_y \sum_z (2y = (2x+1)z+1)$$

ist wahr. Für jedes x kann man aber $y = x+1$ und $z = 1$ wählen, d. h. man hat die Formel

$$2(x+1) = (2x+1)\cdot 1 + 1.$$

Satz 4. Es habe M und M' dieselbe Bedeutung wie im vorhergehenden Satze. Dann gibt es eine geordnete Menge N^*, von der N ein echtes Anfangsstück ist derart, dass jede Aussage in M auch in N^* wahr ist bei einer gewissen Erweiterung der Bedeutung der Funktionen aus M', so dass sie Funktionen in N^* werden mit Beibehaltung ihrer Bedeutung in N.

Beweis. Nach Satz 3 können wir M' erweitern zu einer Menge M'' derart, dass mit Hilfe der Funktionen in M'' jede Aussage in M als eine Formel geschrieben werden kann. Die Menge dieser Formeln sei M'. Nach der Vorbereitung zu Satz 2 oben kann man dann eine Reihe N^* bilden, von der N ein echtes Anfangsstück ist, und eine Erweiterung der Bedeutung aller Funktionen aus M'' derart definieren, dass die letzteren Funktionen in N^* werden unter Beibehaltung ihrer Bedeutung in N; dabei bleiben nach Satz 2 die Formeln in M' noch gültig in N^*. Wenn aber eine Formel wie (10) in N^* gültig ist, so gilt offenbar auch die Aussage (9); dabei kommen in (9) nur die erweiterten Funktionen aus M' vor. Augenscheinlich ist Satz 4 hierdurch schon bewiesen.

Aus dem Satze 4 folgt sofort, *dass ein endliches oder abzählbar unendliches Axiomensystem, dessen Axiome Aussagen mit lauter Zahlenvariablen sind, die Zahlenreihe nicht charakterisieren kann.* Der Inhalt des Satzes 4 kann ja so ausgedrückt werden: Endlich oder abzählbar unendlich viele Aussagen mit lauter Individuenvariablen, die für eine Reihe von Typus ω gelten, können nicht diese Reihe von gewissen Reihen von höherem Ordnungstypus unterscheiden. Aber betrachtet man ein endliches Axiomensystem, worin höhere Variablen auftreten wie „Satzfunktion" oder „Menge", so werden nach dem Löwenheim'schen Satze bezw. einer Verallgemeinerung davon [1]) doch nur abzählbar unendlich viele Aussagen über die Zahlen daraus ableitbar sein. *Eine vollständige Charakterisierung der Zahlenreihe ist deshalb in keiner Weise möglich.*

Besonders leicht erkennt man dies für die gewöhnlichen Axiomensysteme, die man aufstellt. Gewöhnlich stellt man rekursive Axiome auf zur Konstruktion von arithmetischen Funktionen. Weiter hat man die Axiome der Beziehung $<$. In allen diesen Axiomen kommen nur Zahlenvariablen vor. Ausserdem stellt man zwei Axiome auf, worin eine variable Satzfunktion auftritt, nämlich:

Prinzip der Gleichheit:

$$(x=y)\rightarrow(S(x)\rightleftarrows S(y)).$$

Prinzip der vollständigen Induktion:

$$S(1)\prod_{x}(S(x)\rightarrow S(x+1))\rightarrow S(y).$$

Aber die herstellbaren Satzfunktionen sind durch die fünf logischen Operationen aus Beziehungen $<$ und $=$ zwischen den arithmetischen Funktionen gebildet. Da die konstruierbaren arithmetischen Funktionen natürlich alle abgezählt werden können, so wird das auch für die verschiedenen $S(x)$ der Fall sein. Infolgedessen kann jedes der beiden letzten Axiome aufgefasst werden als eine abzählbare Menge von Axiomen, wobei ein spezielles $S(x)$ in jedem auftrit; diese Axiome besitzen dann wieder ausschliesslich Zahlenvariablen. Nach Satz 4 ist also die Zahlenreihe nur unvollständig charakterisiert durch alle diese Axiome.

Eine andere Sache ist es aber, dass die Zahlenreihe z. B. durch die Peanoschen Axiome vollständig charakterisiert ist, wenn man den Begriff „Menge" oder „Satzfunktion" als etwas von vornherein gegebenes ansieht mit einer absoluten Bedeutung unabhängig von allen Erzeugungsprinzipien oder Axiomen. Will man aber die Axiomatik konsequent machen, so dass auch das Räsonieren mit den Mengen oder Satzfunktionen axiomatisiert wird, so ist also, wie wir gesehen haben, die eindeutige oder vollständige Charakterisierung der Zahlenreihe unmöglich.

[1]) Vgl. Th. Skolem, Logisch-kombinatorische Untersuchungen etc., Oslo Vid. akademis skrifter, I, 1920, N° 4.

Man bemerkt, dass meine Beweise hier auf klassisch-mathematisch-logischem Boden beruhen· besonders setzt der Beweis des Satzes 1 das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten voraus. Man konnte nun daran denken, die Überlegungen so zu gestallten, dass man sich von dem tertium non datur frei machte. Vielleicht gelingt das auch; ich habe eine Idee davon, wie ich das versuchen soll. Jedoch gehe ich hier nicht darauf ein, sondern behalte mir vor, später darauf zurückzukommen.

Bemerkung der Redaktion.

Die folgenden (mehr speziellen und unabhängigen) Ergebnisse, die im J. 1927/28 an den von Hrn. A. Tarski (Universität Warschau) geleiteten Seminarübungen erhalten wurden, stehen im unmittelbaren Zusammenhange mit dem obigen Resultate von Hrn. Th. Skolem.

1) H. A. Tarski hat darauf hingewiesen, dass die Menge der Zählaussagen (= Aussagen mit lauter Individuenvariablen), in den als konstantes Zeichen (ausser den logischen Zeichen, wie z. B. das Identitätszeichen) — das Symbol der Ordnungsrelation „$<$" auftritt, und die für den Ordnungstypus ω erfüllt sind — identisch mit der entsprechenden Menge für den Typus $\omega+(\omega^*+\omega)\cdot\tau$ (τ — ein beliebiger Ordnungstypus) ist.

2) H. S. Jaśkowski hat bewiesen (im Anschluss auf eine Arbeit von Hrn. M. Presburger: C. R. du I Congrès des Math. des Pays Slaves, 1929, S. 92 und 395), dass die Menge der Zählaussagen, in denen als konstante Zeichen (ausser den logischen Zeichen) die Symbole „1" und „$+$" auftreten, und die für den Bereich der ganzen Zahlen erfüllt sind — identisch mit der entsprechenden Menge für den Bereich der Zahlen $a+bi$ ist, wo a — ganze Zahlen, b — rationale Zahlen durchläuft.

3. H. A. Tarski hat bewiesen, als Zusatz zum bekannten Satze von Löwenheim-Skolem, dass für jede widerspuchsfreie Zählaussagenmenge, die keine Interpretation im Endlichen besitzt, eine Interpretation (nicht nur im Abzählbar-Unendlichen, sondern auch) im Unabzählbar-Unendlichen existiert. Es folgt daraus, dass solche Aussagenmengen nicht kategorisch sein können.