Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich

von

R. BAER (Manchester).

Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen einer abzählbar-unendlichen Menge auf sich ist von J. SCHREIER und S. ULAM: *Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge*, Stud. Math. 4 (1933) p. 134—141 aufgestellt worden*). Das dort gefundene Ergebnis läßt sich unter geringer Modifikation der angewandten Methoden auf beliebige unendliche Mengen verallgemeinern.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe und $\mathfrak{M}$ eine Menge von Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Dann heißt $\mathfrak{M}$ eine *Kette*, wenn von zwei in $\mathfrak{M}$ enthaltenen Untergruppen stets die eine eine Untergruppe der anderen ist, so daß also eine Kette eine Menge von Untergruppen ist, die durch die Untergruppenbeziehung geordnet wird. [Wir werden im folgenden nur mit wohlgeordneten Ketten zu tun haben].

Eine Kette von $\mathfrak{G}$ heißt eine *Jordan-Höldersche Kompositionsreihe* von $\mathfrak{G}$, wenn es 1) zu jedem Kettenglied $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{G}$ ein Kettenglied $\overline{\mathfrak{K}} > \mathfrak{K}$ gibt, so daß $\mathfrak{K}$ Normalteiler von $\overline{\mathfrak{K}}$ ist, und wenn 2) sich die Kette nicht mehr unter Erhaltung der Eigenschaft 1) verfeinern läßt.

Eine Kette von $\mathfrak{G}$ heißt eine *Hauptreihe* bezw. eine *charakteristische Reihe* von $\mathfrak{G}$, wenn 1) alle Kettenglieder Normalteiler bezw. charakteristische Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind und wenn 2) die Kette sich nicht mehr unter Erhaltung der Eigenschaft 1) verfeinern läßt.

*) Vgl. auch: L. Onufri, Ann. Mat. pura appl. (4) 7 (1929) p. 103—130. Zusatz b. d. Korrektur am 6. 7. 1934].

Daß eine Jordan-Höldersche Kompositionsreihe, eine Hauptreihe und eine charakteristische Reihe stets existieren, ersieht man in üblicher Weise unter Benutzung transfiniter Induktion.

Es sei M eine unendliche Menge der Mächtigkeit $\aleph_\mu$ und $\mathfrak{S}$ die Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen von M auf sich. Ist dann ν eine Ordinalzahl mit $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$, so sei $\mathfrak{S}_\nu$ die Gesamtheit der Elemente $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{S}$, für die $\mathfrak{a}(m) \neq m$ nur für eine Teilmenge von M erfüllt ist, deren Mächtigkeit $< \aleph_\nu$ ist. Speziell enthält $\mathfrak{S}_0$ nur Abbildungen von M, die endlich viel Elemente vertauschen, die man also als gewöhnliche Permutationen ansehen kann. Infolgedessen existiert die Teilmenge $\mathfrak{A}$ aller geraden Permutationen aus $\mathfrak{S}_0$.

Da die Summe zweier Mengen, deren Mächtigkeit $< \aleph_\nu$ ist, eine Menge ist, deren Mächtigkeit $< \aleph_\nu$ ist, so sind die $\mathfrak{S}_\nu$ und also auch $\mathfrak{A}$ Untergruppen von $\mathfrak{S}$ und mithin ist

$$\mathfrak{K}: \{1\} < \mathfrak{A} < \mathfrak{S}_0 < \mathfrak{S}_1 < \ldots < \mathfrak{S}_\nu < \ldots < \mathfrak{S}_\mu < \mathfrak{S}$$

eine Kette.

Satz. *$\mathfrak{K}$ ist sowohl eine Jordan-Höldersche Kompositionsreihe als auch die einzige Hauptreihe als auch die einzige charakteristische Reihe von $\mathfrak{S}$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}$ eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{S}$. Dann heißt eine Teilmenge Z von M ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriger *Zyklus*, wenn Z mit irgendeinem Element x auch die Elemente $\mathfrak{a}(x)$ und $\mathfrak{a}^{-1}(x)$ enthält, und wenn es zu irgend zwei Elementen x und y von Z eine ganze Zahl n gibt, so daß $x = \mathfrak{a}^n(y)$ ist. Dann läßt sich M in zu $\mathfrak{a}$ gehörige Zyklen zerlegen und ein solcher Zyklus enthält höchstens $\aleph_0$ Elemente. Enthält ein Zyklus genau i (mit $1 \leqslant i \leqslant \aleph_0$) Elemente, so heisse er ein i-Zyklus. $[\mathfrak{a}, i]$ sei die Anzahl der zu $\mathfrak{a}$ gehörigen verschiedenen i-Zyklen.

Dann gilt:

(1) *Dann und nur dann sind die Elemente $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{S}$ konjugiert, wenn*

$$[\mathfrak{a}, i] = [\mathfrak{b}, i] \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant \aleph_0$$

ist.

(2) *Dann und nur dann sind die Elemente $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{S}_\nu$ in $\mathfrak{S}_\nu$ konjugiert, wenn sie in $\mathfrak{S}$ konjugiert sind; insbesondere ist also $\mathfrak{S}_\nu$ Normalteiler von $\mathfrak{S}$.*

Dies folgt im wesentlichen wieder daraus, daß die Summe zweier Mengen, deren Mächtigkeit $< \aleph_\nu$ ist, selbst eine Menge einer Mächtigkeit $< \aleph_\nu$ ist.

(3) *Ist $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{S}$ und enthält $\mathfrak{N}$ ein Element $\mathfrak{a}$ mit $\sum_{1 < i < \aleph_0} [\mathfrak{a}, i] + \aleph_0 [\mathfrak{a}, \aleph_0] = \aleph_\nu$, so ist $\mathfrak{S}_{\nu+1}$ in $\mathfrak{N}$ enthalten.* [Dabei benutzen wir die Bezeichnung $\mathfrak{S}_{\mu+1} = \mathfrak{S}$].

Dies beweist man genau so, wie a. a. O. bewiesen wird, daß ein eine unendliche Permutation enthaltender Normalteiler alle Permutationen enthält; nur hat man dort überall das Symbol ∞ durch $\aleph_0$ bezw. $\aleph_\nu$ zu ersetzen.

Aus (3) folgt sofort:

(4) *Ist $\mathfrak{N}$ ein echter Normalteiler von $\mathfrak{S}$, so ist entweder $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{N} = \mathfrak{S}_\nu$ für ein geeignetes ν.*

Damit ist bereits gezeigt, daß $\mathfrak{K}$ die einzige Hauptreihe von $\mathfrak{S}$ ist. Da $\mathfrak{K}$ wohlgeordnet ist und bei Automorphismen von $\mathfrak{S}$ als einzige Hauptreihe in sich übergehen muß, so erfährt $\mathfrak{K}$ bei Automorphismen von $\mathfrak{S}$ die identische Abbildung, d. h. die Elemente von $\mathfrak{K}$ sind charakteristische Untergruppen von $\mathfrak{S}$ und mithin $\mathfrak{K}$ eine charakteristische Reihe. Da schließlich [wegen (2)] jeder Normalteiler von $\mathfrak{S}_\nu$ auch einer von $\mathfrak{S}$ ist und da $\mathfrak{A}$ einfach ist, so ist $\mathfrak{K}$ auch eine Jordan-Höldersche Kompositionsreihe.

Zusatz. *Ist $\mathfrak{K}$ eine endliche Kette, so ist $\mathfrak{K}$ die einzige Jordan-Höldersche Kompositionsreihe von $\mathfrak{S}$.*

Denn $\mathfrak{S}_\mu$ ist der einzige echte maximale Normalteiler von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_\nu$ der einzige echte maximale Normalteiler von $\mathfrak{S}_{\nu+1}$, $\mathfrak{A}$ der einzige echte maximale Normalteiler von $\mathfrak{S}_0$ und μ ist endlich, da $\mathfrak{K}$ endlich ist.

(Reçu par la Rédaction le 17. 3. 1934).