folgt. Dann muss aber $Q_1(x_1^2)=0$, $Q_1(f_1)=0$ sein, so dass nach dem Obigen $x_1^q x_2^3$ durch x_2^4 teilbar wäre.

Wir zeigen nun zweitens, dass es in $\mathfrak{R}$ unendlich viele modulo x_2^6 inkongruente Potenzprodukte gibt, nämlich alle Potenzprodukte von der Form

$$x_1^{2p} x_2^5, \quad p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Denn, dass alle diese Potenzprodukte dem Ring $\mathfrak{R}$ angehören, folgt aus den Relationen

$$f_3^2 - f_1 f_2^2 = x_2^5,$$

$$x_1^{2p+2} x_2^5 = x_1^{2p} x_2^6 + x_1^{2p} x_2^5 f_1,$$

von denen die zweite den Schluss von p auf $p+1$ rechtfertigt, während die erste den Beweis für $p=0$ enthält.

23. Im allgemeinen Falle des Satzes XV bilden die Polynome Φ, deren Existenz in ihm behauptet wird, offenbar ein Polynomideal, d. h. eine Gesamtheit von Polynomen mit der Eigenschaft, dass erstens die Summe zweier Polynome aus dieser Gesamtheit wieder zu ihr gehört und zweitens dasselbe für jedes Produkt eines Polynoms dieser Gesamtheit mit einem beliebigen rationalzahligen Polynom in $x_1, \ldots, x_n$ gilt. Dieses Polynomideal wollen wir als das *Führerideal* dieses Ringes bezeichnen.

Das in den Nummern 21 und 22 behandelte Beispiel zeigt nun, dass das Führerideal auch im Falle von mehr als einer Variabel *eingliedrig* sein kann, d. h., dass dieses Ideal aus sämtlichen rationalzahligen Vielfachen eines festen Polynoms-des Führers des Ringes-bestehen kann. Zugleich bildet in unserem Beispiel die Gesamtheit der Restklassen aller Polynome des Ringes nach dem Führer als Modul ein Beispiel eines kommutativen Systems höherer komplexer Zahlen mit abzählbar vielen Einheiten.

Andererseits ist es leicht Beispiele von Ringen des Satzes XV zu konstruiren, für die das Führerideal nicht eingliedrig ist. Das einfachste Beispiel dieser Art wird von derGesamtheit aller rationalzahligen Polynome in x_1, x_2 geliefert, die im Nullpunkt verschwinden. In diesem Falle deckt sich das Führerideal mit dem Ring selbst und seine Basis wird durch x_1, x_2 gebildet.

(Eingegangen am 30. Juli 1934.)

Verschärfung eines Romanoffschen Satzes.

Von

Edmund Landau (Göttingen).

Einleitung.

Lateinische Buchstaben, ausser e, f, o, O, bedeuten ganze Zahlen; die p Primzahlen, die q positive quadratfreie Zahlen, die P positive Weltkonstanten.

In seiner Arbeit *Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie* [Mathematische Annalen, Bd. 109 (1934), S. 668—678] bewies Herr Romanoff zwei wichtige Sätze. Ich knüpfe an den zweiten an, der so formuliert werden kann:

Es sei $a>1$. Dann gibt es ein nur von a abhängiges positives α mit folgender Eigenschaft.

Ist $R(x,a)$ die Anzahl der in der Form $p+a^i$, $i\geqq 0$, darstellbaren Zahlen $\leqq x$ (also 0 für $x<3$), so ist

(1) $$R(x,a)>\alpha x \text{ für } x\geqq 3.$$

Durch genauere Betrachtung der Romanoffschen Methode werde ich α in seiner Abhängigkeit von a mit dem Ergebnis

(2) $$R(x,a)>\frac{x}{P_1 \log a} \text{ für } x\geqq 3$$

abschätzen.

(2) kommt unerwartet; denn eine bessere Grössenordnung in Bezug auf a gibt es nicht. In der Tat ist $R(x,a)$ für $x\geqq 1$ nicht grösser als die Lösungszahl von

$$p\leqq x,\ a^i\leqq x,\ i\geqq 0,$$

also

(3) $$R(x,a)\leqq \pi(x)\left(\left[\frac{\log x}{\log a}\right]+1\right),$$

also für $x \geqq a$

$$R(x, a) \leqq \pi(x)\frac{2\log x}{\log a} < \frac{P_2\, x}{\log a}.$$

Nach (1) ist

$$\underline{\lim}_{x=\infty} \frac{R(x, a)}{x} > 0,$$

nach (2) sogar

$$\underline{\lim}_{x=\infty} \frac{R(x, a)}{x} \geqq \frac{1}{P_1 \log a}. \tag{4}$$

Ich werde aber über diesen $\underline{\lim}$ mehr als (4) beweisen, nämlich u. a. bei jedem $\beta < 1$ für $a \geqq a_0(\beta)$

$$\underline{\lim}_{x=\infty} \frac{R(x, a)}{x} > \frac{\beta}{\log a}. \tag{5}$$

In dieser Aussage kann 1 durch keine grössere Weltkonstante ersetzt werden; denn nach (3) ist

$$\overline{\lim}_{x=\infty} \frac{R(x, a)}{x} \leqq \frac{1}{\log a}. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt

$$\lim_{a=\infty}\left(\log a\, \underline{\lim}_{x=\infty} \frac{R(x, a)}{x}\right) = \lim_{a=\infty}\left(\log a\, \overline{\lim}_{x=\infty} \frac{R(x, a)}{x}\right) = 1.$$

(2) und (5) werden Spezialfälle des folgenden Ergebnisses meiner Arbeit sein:

Es sei $a > 1$. Dann gibt es eine nur von a abhängige positive Funktion $\varepsilon(a)$ mit

$$\lim_{a=\infty} \varepsilon(a) = 0$$

und folgender Eigenschaft.

Für $x \geqq 3$ sei $S(x, a)$ die Lösungszahl von

$$p + a^i \leqq x, \quad i \geqq 0,$$

also

$$Q(x, a) = \frac{S(x, a)}{R(x, a)} \quad (\geqq 1)$$

die mittlere Darstellungszahl aller durch $p + a^i$, $i \geqq 0$, darstellbaren Zahlen $\leqq x$. Dann ist

$$Q(x, a) < 1 + \varepsilon(a), \tag{7}$$

also

$$Q(x, a) < P_3. \tag{8}$$

In der Tat folgt (2) aus (8), weil $S(x, a)$ mindestens die Lösungszahl von

$$p \leqq \frac{x}{2}, \quad a^i \leqq \frac{x}{2}, \quad i \geqq 0$$

ist, also für $x \geqq 4$

$$S(x, a) \geqq \pi\left(\frac{x}{2}\right)\left(\left[\frac{\log\frac{x}{2}}{\log a}\right] + 1\right) > \pi\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\log\frac{x}{2}}{\log a} > \frac{x}{P_4 \log a},$$

also für $x \geqq 3$

$$S(x, a) \geqq \mathrm{Min}\left(\frac{x}{3}, \frac{x}{P_4 \log a}\right) \geqq \frac{x}{P_5 \log a},$$

$$R(x, a) = \frac{S(x, a)}{Q(x, a)} > \frac{x}{P_3 P_5 \log a} = \frac{x}{P_1 \log a}.$$

Und (5) folgt aus (7), weil $S(x, a)$ für $x \geqq 3$ mindestens die Lösungszahl von

$$p \leqq x - \frac{x}{\log x}, \quad a^i \leqq \frac{x}{\log x}, \quad i \geqq 0$$

ist, also

$$\frac{S(x, a)}{x} \geqq \frac{1}{x}\pi\left(x - \frac{x}{\log x}\right)\left(\left[\frac{\log\frac{x}{\log x}}{\log a}\right] + 1\right),$$

$$\underline{\lim}_{x=\infty} \frac{S(x, a)}{x} \geqq \frac{1}{\log a},$$

also nach (7)

$$\underline{\lim}_{x=\infty} \frac{R(x, a)}{x} \geqq \frac{\underline{\lim}_{x=\infty} \frac{S(x, a)}{x}}{\overline{\lim}_{x=\infty} Q(x, a)} \geqq \frac{1}{\log a\,(1 + \varepsilon(a))}; \tag{9}$$

(5) ist offenbar durch (9) bewiesen.

Um bei $x = 3$ beginnen zu können, habe ich den Romanoffschen Satz anfangs so formuliert wie geschehen. Eigentlich lautete er so:

Es sei $a > 1$. Dann gibt es ein nur von a abhängiges positives α_1 mit folgender Eigenschaft.

Ist $R_1(x,a)$ *die Anzahl der in der Form* $p+a^i$, $i>0$, *darstellbaren Zahlen* $\leqq x$ (also 0 für $x<a+2$), *so ist*

(10) $$R_1(x,a) > \alpha_1 x \quad \textit{für} \quad x \geqq a+2.$$

Die Änderung des Wortlauts ist ohne Belang; denn die beiden Aussagen (1) und (10) sind äquivalent. In der Tat:

1) Aus (10) folgt für $x \geqq a+2$

$$R(x,a) \geqq R_1(x,a) > \alpha_1 x;$$

für $3 \leqq x < a+2$ ist trivialerweise

$$R(x,a) \geqq 1 > \frac{1}{a+2}x.$$

2) Für $x \geqq 3$ ist (indem erst $i>0$, dann $i=0$ berücksichtigt wird)

(11) $$R(x,a) \leqq R_1(x,a) + \pi(x-1) < R_1(x,a) + P_6 \frac{x}{\log x}.$$

Aus (1) folgt also für $x \geqq e^{\frac{2P_6}{\alpha}}$ $(> e^2 > 3)$

$$R_1(x,a) > \alpha x - P_6 \frac{x}{\log x} \geqq \frac{\alpha}{2} x;$$

für $a+2 \leqq x < e^{\frac{2P_6}{\alpha}}$ ist trivialerweise

$$R_1(x,a) \geqq 1 > e^{-\frac{2P_6}{\alpha}} x.$$

Ebenso ist (2) äquivalent der Aussage:

(12) $$R_1(x,a) > \frac{x}{P_7 \log a} \quad \textit{für} \quad x \geqq 2a.$$

In der Tat:

1) Aus (12) folgt für $x \geqq 2a$

$$R(x,a) \geqq R_1(x,a) > \frac{x}{P_7 \log a};$$

für $3 \leqq x < 2a$ ist (indem nur $i=0$ berücksichtigt wird)

$$R(x,a) \geqq \pi(x-1) > \frac{x}{P_8 \log x} > \frac{x}{P_9 \log a}.$$

2) Aus (2) folgt wegen (11) für $x \geqq a^{2P_1P_6}$

$$R_1(x,a) > \frac{x}{P_1 \log a} - P_6 \frac{x}{\log x} \geqq \frac{x}{2P_1 \log a};$$

für $2a \leqq x < a^{2P_1P_6}$ ist (indem nur $i=1$ berücksichtigt wird)

$$R_1(x,a) \geqq \pi(x-a) \geqq \pi\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{x}{P_{10}\log x} > \frac{x}{P_{11}\log a}.$$

Jedenfalls wird alles bisher Angekündigte mit dem Nachweis von (7) bewiesen sein. (7) wird ein Spezialfall des Hauptsatzes dieser Arbeit sein.

Dass der Methode statt der Menge aller Primzahlen irgend eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ mit

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \text{ aus } \mathfrak{M}}} 1 > 0$$

zugrundegelegt werden kann, hatte schon Herr Romanoff in einer früheren Arbeit bemerkt: *Über zwei Sätze der additiven Zahlentheorie* [Recueil mathématique de la société mathématique de Moscou, Bd. 40 (1933), S. 514—520; russisch mit deutscher Zusamenfassung]. Damals konnte er allerdings noch nicht einmal (1) beweisen; erst in seiner anderen Arbeit bewies er den erforderlichen Haupthilfssatz, dem ich meinen § 1 widme. Ich brauche jenen Satz in schärferer Fassung (Abhängigkeit von a) und schicke § 1 voraus, um den Gang nicht später zu unterbrechen.

Aus den Romanoffschen Arbeiten setze ich nichts voraus und benutze nur klassische Sätze und einen neueren Schnirelmannschen Satz. Dieser diente auch Herrn Romanoff, dessen Weg ich mich überhaupt nach Möglichkeit anschliesse, als Grundlage.

§ 1.

Der Romanoffsche Hilfssatz.

Er lautet:

Es sei

$$a > 1,$$

$$\sigma(l,a) = \sum_{\substack{q \mid a^l - 1 \\ l \mid \varphi(q)}} \frac{1}{q} \quad \textit{für} \quad l > 0.$$

Dann konvergiert

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma(l, a)}{l}.$$

Ich füge hinzu:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma(l, a)}{l} < P_{12} (\log \log 2a)^2. \tag{13}$$

An schärferen Abschätzungen habe ich kein Interesse, da für meinen Zweck bereits

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma(l, a)}{l} = o\left(\frac{\log a}{\log \log a}\right)$$

genügen würde.

Dem Beweise von (13) gehen 4 Definitionen und 9 Hilfssätze voraus.

Definition 1:

$$f(u) = \sum_{q \mid u} \frac{1}{q} = \prod_{p \mid u} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \text{ für } u > 0.$$

Definition 2: *Für* $1 \leqq u \leqq x$ *sei* $g(u, x)$ *die Lösungszahl von*

$$u = p' - p'', \ p' \leqq x.$$

Satz 1: *Für* $x \geqq 2$, $1 \leqq u \leqq x$ *ist*

$$g(u, x) < P_{13} \frac{x}{\log^2 x} f(u).$$

Beweis: Bekannt. Satz 1 ist der am Ende der Einleitung erwähnte Schnirelmannsche Satz = Satz 23 meiner Arbeit *Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz* [Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Jahrgang 1930, S. 255—276]. Übrigens wird der Satz in § 3 nochmals angewendet werden.

Satz 2:

$$f(u) < P_{14} \log \log 3u \quad \text{für } u > 0.$$

Beweis:

$$f(u) \leqq \prod_{p \mid u} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{u}{\varphi(u)}.$$

Bekanntlich ist

$$\frac{u}{\varphi(u)} = O(\log \log u).$$

Satz 3: *Für* $x > k > 0$ *sei* $\pi(x, k)$ *die Anzahl der* p *mit*

$$p \leqq x, \ p \equiv 1 \pmod{k}.$$

Dann ist

$$\pi(x, k) < P_{15} \frac{x}{k^{\frac{1}{3}} \log x}.$$

Beweis: 1) Im Falle

$$\pi(x, k) \leqq 1$$

ist

$$\pi(x, k) < P_{16} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\log x} < P_{16} \frac{x}{k^{\frac{1}{3}} \log x},$$

2) Im Falle

$$\pi(x, k) > 1$$

ist nach Satz 1

$$\frac{\pi^2(x, k)}{4} \leqq \frac{\pi^2(x, k) - \pi(x, k)}{2}$$

$= \text{Lösungszahl von } p' \equiv p'' \equiv 1 \pmod{k}, \ p'' < p' \leqq x$

$\leqq \text{Lösungszahl von } p' - p'' \equiv 0 \pmod{k}, p'' < p' \leqq x$

$$= \sum_{\substack{u=1 \\ u \equiv 0 \pmod{k}}}^{x} g(u, x) < P_{18} \frac{x}{\log^2 x} \sum_{\substack{u=1 \\ u \equiv 0 \pmod{k}}}^{x} f(u).$$

Hierin ist

$$\sum_{\substack{u=1 \\ u \equiv 0 \pmod{k}}}^{x} f(u) = \sum_{v=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} f(vk) \leqq \sum_{v=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} f(v) f(k) = f(k) \sum_{v=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} f(v).$$

Nach Satz 2 ist

$$f(k) < P_{14} \log \log 3k < P_{17} k^{\frac{1}{3}};$$

ferner ist für $y > 0$

$$\sum_{v=1}^{y} f(v) = \sum_{v=1}^{y} \sum_{q \mid v} \frac{1}{q} = \sum_{q=1}^{y} \frac{1}{q} \left[\frac{y}{q}\right] < y \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} < P_{18} y.$$

Also

$$\pi^2(x,k) < 4\,P_{13}\frac{x}{\log^2 x}P_{17}\,k^{\frac{1}{3}}\,P_{18}\,\frac{x}{k} = P_{19}\,\frac{x^2}{k^{\frac{2}{3}}\log^2 x},$$

$$\pi(x,k) < P_{19}\,\frac{x}{k^{\frac{1}{3}}\log x}.$$

Satz 4: *Ist $y \geqq v \geqq 1$ und läuft p über v verschiedene Primzahlen $\equiv 1 \pmod{k}$, so ist*

$$\sum \frac{1}{p} < P_{20}\,\frac{\log\log 3y}{k^{\frac{1}{3}}}.$$

Beweis: O. B. d. A. laufe p über die v ersten Primzahlen $\equiv 1 \pmod{k}$. Ist p_i für $1 \leqq i \leqq v$ die $i$te Primzahl $\equiv 1 \pmod{k}$ (also $p_i > k$ und $p_i \geqq i+1$), so ist nach Satz 3

$$i = \pi(p_i, k) < P_{15}\,\frac{p_i}{k^{\frac{1}{3}}\log p_i} \leqq P_{15}\,\frac{p_i}{k^{\frac{1}{3}}\log(i+1)},$$

$$\frac{1}{p_i} < \frac{P_{15}}{k^{\frac{1}{3}}}\,\frac{1}{i\log(i+1)}.$$

Also

$$\sum_{i=1}^{v}\frac{1}{p_i} < \frac{P_{15}}{k^{\frac{1}{3}}}\sum_{i=1}^{y}\frac{1}{i\log(i+1)} < P_{20}\,\frac{\log\log 3y}{k^{\frac{1}{3}}}.$$

Definition 3: *Für $i > 0$, $l > 0$ sei $d_i(l)$ die Lösungszahl von*

(14) $$l = \prod_{j=1}^{i} k_j,\quad k_j > 0.$$

Satz 5:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i(l)}{i\,!}$$

konvergiert für $l > 0$.

Beweis: $d(l)$ $(= d_2(l))$ sei die Anzahl der positiven $k \mid l$. Aus (14) folgt

$$k_j \mid l;$$

daher ist

$$d_i(l) \leqq d^i(l);$$

es konvergiert

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d^i}{i\,!}.$$

Satz 6: *Für $l > 0$, $m > 0$, $m \mid l$, $i > 0$ ist*

$$d_i(m) \leqq d_i(l).$$

Beweis: Jeder Zerlegung

$$m = \prod_{j=1}^{i} K_j,\quad K_j > 0$$

ordne man die Zerlegung (14) mit

$$k_1 = \frac{l}{m}K_1,\quad k_j = K_j \text{ für } 1 < j \leqq i$$

zu.

Definition 4:

$$w(x) = \sum_{p \mid x} 1 \quad \textit{für } x > 0.$$

Satz 7:

$$w(x) < P_{21}\,\frac{\log x}{\log\log 2x} \quad \textit{für } x > 1.$$

Beweis: Wohlbekannt.

Satz 8: *Es sei $m > 1$ und quadratfrei,*

$$w(m) = n$$

(also $n > 0$),

$$m \,\Big|\, \prod_{h=1}^{x} a_h.$$

Dann gibt es mindestens ein i mit $1 \leqq i \leqq n$ und mindestens eine Zerlegung

(15) $$m = \prod_{j=1}^{i} k_j,\quad k_j > 1,$$

so dass für $1 \leqq j \leqq i$

$$k_j \mid a_{h_j}$$

und die h_j verschieden sind.

Vorbemerkung: Für $i > n$ ist (15) gewiss unerfüllbar. Aus (15) folgt wegen der Verschiedenheit der k_j und aus Symmetriegründen, dass sogar

(16) $$m = \prod_{j=1}^{i} k_j,\quad 1 < k_1 < \ldots < k_i$$

gefordert werden kann.

Beweis: Jedes $p|m$ teilt mindestens ein a_h. O. B. d. A. sei a_1 durch mindestens ein $p|m$ teilbar. Alsdann sei k_1 das Produkt der in a_1 aufgehenden $p|m$.

Falls $n=1$, sind wir fertig ($i=1$, $k_1=m$). Es sei also $n>1$ und die Behauptung für die n_1 mit $0<n_1<n$ schon bewiesen.
Falls $k_1=m$, sind wir auch schon fertig ($i=1$).

Anderenfalls ist

$$\frac{m}{k_1} \Big| \prod_{h=2}^{x} a_h,$$

$$0<n_1=w\left(\frac{m}{k_1}\right)<n,$$

also

$$\frac{m}{k_1}=\prod_{j=2}^{i} k_j,\ k_j>1$$

mit

$$k_j \,|\, a_{h_j} \text{ für } 2\leqq j\leqq i$$

und verschiedenen $h_1, h_2, \ldots, h_j$.

Satz 9: *N und m seien quadratfrei und >1, also*

$$y=w(N)>0,$$

$$n=w(m)>0.$$

Dann ist

$$\sum_{\substack{q|N\\ m|\varphi(q)}} \frac{1}{q}<\frac{(P_{22}\log\log 3y)^n\log 3y}{m^{\frac{1}{3}}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i(m)}{i!}.$$

Beweis: $d_i(m)$ ist für $1\leqq i\leqq n$ mindestens die Lösungszahl von (15); da hierin die k_j verschieden sind, ist $\frac{d_i(m)}{i!}$ mindestens die Lösungszahl von (16).

Aus

(17) $$q|N,\ m|\varphi(q)$$

folgt

$$m \Big| \prod_{p|q}(p-1).$$

Nach Satz 8 und Vorbemerkung gibt es also mindestens ein i mit $1\leqq i\leqq n$ und mindestens eine Zerlegung (16) von m, so dass für $1\leqq j\leqq i$ ein p_j mit

$$p_j|q,\ p_j\equiv 1 \pmod{k_j}$$

vorhanden ist, wobei die p_j verschieden sind. Alsdann ist

$$q=q_1\prod_{j=1}^{i}p_j.$$

Zu jedem q mit (17) sei ein solches System $i, k_1, \ldots, k_i$ mit (16) fest gewählt.

Für jedes vorkommende System $i, k_1, \ldots, k_i$ mit (16) ist also nach Satz 4 die über alle zugehörigen q erstreckte Summe

(18) $$\sum\frac{1}{q}\leqq\sum_{q_1|N}\frac{1}{q_1}\prod_{j=1}^{i}\sum_{\substack{p|N\\ p\equiv 1 \pmod{k_j}}}\frac{1}{p}$$

$$\leqq f(N)\prod_{j=1}^{i}\frac{P_{20}\log\log 3y}{k_j^{\frac{1}{3}}}\leqq f(N)\frac{(P_{23}\log\log 3y)^n}{m^{\frac{1}{3}}}.$$

Wenn $p^{(y)}$ die $y$te Primzahl ist, ist

$$p^{(y)}<P_{24}y^2,$$

also

$$f(N)\leqq\prod_{p\leqq p^{(y)}}\left(1+\frac{1}{p}\right)<e^{\sum\limits_{p\leqq p^{(y)}}\frac{1}{p}}<e^{\log\log p^{(y)}+P_{25}}<P_{26}\log p^{(y)}$$

$$<P_{26}\log(P_{24}y^2)<P_{27}\log 3y.$$

Also ist unsere

$$\sum\frac{1}{q}<\frac{(P_{22}\log\log 3y)^n\log 3y}{m^{\frac{1}{3}}}.$$

Bei festem i mit $1\leqq i\leqq n$ werde dies über die höchstens $\frac{d_i(m)}{i!}$ Zerlegungen (16) summiert; alsdann werde das Ergebnis über i von 1 bis n summiert. Da jedes q mit (17) in mindestens einer der Summen (18) berücksichtigt ist, ergibt sich nach Satz 5 die Behauptung.

Satz 10: *Es sei*

$$a>1,$$

$$\sigma(l,a)=\sum_{\substack{q|a^l-1\\ l|\varphi(q)}}\frac{1}{q} \quad \textit{für } l>0.$$

Dann konvergiert

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma(l,a)}{l}$$

und ist

$$< P_{12} (\log\log 2a)^2.$$

Beweis: Nach Satz 2 ist

$$\sigma(l,a) \leqq \sum_{q \mid a^l-1} \frac{1}{q} = f(a^l-1) < P_{14}\log\log(3a^l-3) < P_{14}\log\log(a^{2l})$$

(19) $$= P_{14}\log(2l\log a).$$

1) Für $l \leqq \log a$ ist nach (19)

$$\sigma(l,a) < P_{28}\log\log 2a.$$

Also ist

(20) $$\sum_{l\leqq \log a}\frac{\sigma(l,a)}{l} \leqq P_{28}\log\log 2a \sum_{l\leqq\log a}\frac{1}{l} < P_{29}(\log\log 2a)^2.$$

2) Für $l>\log a$ ist nach (19)

$$\sigma(l,a)<P_{30}\log 2l.$$

Jedes $l>0$ ist eindeutig ms^2, wo m quadratfrei, $s>0$.

21) Für $l>\log a$, $m\leqq s$ ist

$$l \geqq m^3,$$

$$m \leqq l^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\sigma(l,a)}{l} < \frac{P_{31}}{l^{0,7}} = \frac{P_{31}}{m^{0,7}s^{1,4}}.$$

Nun ist

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{1}{m^{0,7}s^{1,4}} < \frac{P_{32}}{s^{1,1}}$$

und

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{1,1}}$$

konvergent. Also

(21) $$\sum_{\substack{l>\log a\\ m\leqq s}} \frac{\sigma(l,a)}{l} < P_{33}.$$

22) Für $l>\log a$, $m>s$ ist

$$l<m^3,$$

(22) $$l \geqq m > l^{\frac{1}{3}} \geqq 1.$$

Es werde

$$N = \prod_{p\mid a^l-1} p$$

gesetzt. Dann ist N quadratfrei und >1, also nach Satz 9, 6 und 5

(23) $$\sigma(l,a) = \sum_{\substack{q\mid N\\ l\mid\varphi(q)}} \frac{1}{q} \leqq \sum_{\substack{q\mid N\\ m\mid\varphi(q)}}\frac{1}{q} < \frac{(P_{22}\log\log 3y)^n \log 3y}{m^{\frac{1}{3}}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(l)}{i!}.$$

Hierin ist nach Satz 7

$$y = w(N) < P_{21}\frac{\log N}{\log\log 2N} < P_{34}\log N < P_{34}\log(a^l)$$
$$= P_{34}\, l\log a < P_{34}\, l^2,$$

also

(24) $$\log 3y < P_{35}\log l < P_{36}\, l^{\frac{1}{20}},$$
$$\log\log 3y < P_{37}\log\log 2l;$$

nach Satz 7 ist ferner

$$n = w(m) \leqq w(l) < P_{21}\frac{\log l}{\log\log 2l}.$$

Daher ist

$$(P_{22}\log\log 3y)^n < (P_{38}\log\log 2l)^{P_{21}\frac{\log l}{\log\log 2l}}$$

(25) $$= l^{\frac{P_{21}}{\log\log 2l}(\log P_{38}+\log\log\log 2l)} < P_{39}\, l^{\frac{1}{20}}.$$

Aus (23), (24), (25), (22) folgt

$$\frac{\sigma(l,a)}{l} < \frac{1}{l} P_{40} \frac{l^{\frac{1}{10}}}{m^{\frac{1}{3}}}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(l)}{i!} < P_{40}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\,\frac{d_i(l)}{l^{\frac{91}{90}}}.$$

Die Summe der rechten Seite über l von 1 bis ∞ konvergiert wegen

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{d_i(l)}{l^{\frac{91}{90}}} = \zeta^i\left(\frac{91}{90}\right).$$

Daher ist

$$(26)\qquad \sum_{\substack{l > \log a \\ m > s}} \frac{'\sigma(l, a)}{l} < P_{41}.$$

Aus (20), (21) und (26) folgt die Behauptung.

§ 2.

Allgemeiner Ansatz.

Satz 11: *Es sei* $x \geqq 2$. $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{D}$ *seien Mengen natürlicher Zahlen* $\leqq x$; $C(u, \mathfrak{G})$ *die Lösungszahl von*

$$u = c' - c'', \; c' \text{ und } c'' \text{ aus } \mathfrak{G};$$

$D(u, \mathfrak{D})$ *die Lösungszahl von*

$$u = d' - d'', \; d' \text{ und } d'' \text{ aus } \mathfrak{D};$$

$S(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})$ *die Anzahl der Lösungen von*

$$c + d \leqq x, \; c \text{ aus } \mathfrak{G}, \; d \text{ aus } \mathfrak{D};$$

$R(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})$ *die Anzahl der verschiedenen Zahlen* $\leqq x$, *welche die Form* $c + d$, c *aus* $\mathfrak{G}$, d *aus* $\mathfrak{D}$, *haben.*

Dann ist

$$(27)\qquad S^2(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}) \leqq R(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}) \left(S(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}) + 2 \sum_{u=1}^{x} C(u, \mathfrak{G}) D(u, \mathfrak{D}) \right),$$

also, wofern $R(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})$ *nicht* 0 *ist,*

$$1 \leqq \frac{S(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})}{R(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})} \leqq 1 + \frac{2 \sum_{u=1}^{x} C(u, \mathfrak{G}) D(u, \mathfrak{D})}{S(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})}.$$

Beweis: $\psi(v, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})$ sei für $2 \leqq v \leqq x$ die Lösungszahl von

$$v = c + d, \; c \text{ aus } \mathfrak{G}, \; d \text{ aus } \mathfrak{D}.$$

Dann ist offenbar

$$\sum_{v=2}^{x} \psi(v, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}) = S(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})$$

und $R(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})$ die Anzahl der von 0 verschiedenen $\psi(v, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})$. Also

$$(28)\qquad S^2(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}) \leqq R(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}) \sum_{v=2}^{x} \psi^2(v, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}).$$

Nun ist

$$\sum_{v=2}^{x} \psi^2(v, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})$$

die Lösungszahl von

$$c + d = c' + d' \leqq x; \; c \text{ und } c' \text{ aus } \mathfrak{G}, \; d \text{ und } d' \text{ aus } \mathfrak{D}.$$

Wird hierbei

$$u = c - c' = d' - d$$

gesetzt, so ist $|u| \leqq x$, und die Anzahl der zu u gehörigen Quadrupel c, d, c', d' ist für $u = 0$ offenbar $S(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D})$, für $u \gtrless 0$ eine gerade Funktion von u und für $1 \leqq u \leqq x$ höchstens $C(u, \mathfrak{G}) D(u, \mathfrak{D})$. Also

$$(29)\qquad \sum_{v=2}^{x} \psi^2(v, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}) \leqq S(x, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}) + 2 \sum_{u=1}^{x} C(u, \mathfrak{G}) D(u, \mathfrak{D}).$$

Aus (28) und (29) folgt die Behauptung (27).

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

Hauptsatz: *Es sei* $a > 1$. *Dann gibt es eine nur von* a *abhängige positive Funktion* $\delta(a)$ *mit*

$$\lim_{a=\infty} \delta(a) = 0$$

und folgender Eigenschaft.

$\mathfrak{M}$ *sei eine nicht leere Primzahlmenge,* $k = k(\mathfrak{M})$ *ihr kleinstes Element.*

Es sei $x > k$.

Es sei $R(x, a, \mathfrak{M})$ *die Anzahl der verschiedenen*

$$(30)\qquad p + a^i \leqq x, \; p \text{ aus } \mathfrak{M}, \; i \geqq 0$$

(also positiv).

Es sei $S(x, a, \mathfrak{M})$ *die Anzahl aller Paare* p, i *mit* (30) (also $\geqq R(x, a, \mathfrak{M})$).

Es sei

$$Q(x, a, \mathfrak{M}) = \frac{S(x, a, \mathfrak{M})}{R(x, a, \mathfrak{M})}.$$

Dann ist

$$Q(x,\,a,\,\mathfrak{M}) < 1 + \frac{x\,\delta(a)}{S(x,\,a,\,\mathfrak{M})\log a}.$$

Beweis: In Satz 11 sei $\mathfrak{C}$ die Menge der $p \leqq x$ aus $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$ die Menge der $a^i \leqq x$ mit $i \geqq 0$.

Dann ist für $1 \leqq u \leqq x$ nach Definition 2 und Satz 1

$$C(u,\,\mathfrak{C}) \leqq g(u,\,x) < P_{13}\frac{x}{\log^2 x} f(u)$$

und $D(u, \mathfrak{D})$ die Lösungszahl $D(x,\,a,\,u)$ von

$$u = a^l - a^j,\quad 0 \leqq j < i \leqq \frac{\log x}{\log a};$$

ferner

$$S(x,\,\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}) = S(x,\,a,\,\mathfrak{M}),$$

$$R(x,\,\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}) = R(x,\,a,\,\mathfrak{M}).$$

Satz 11 gibt somit

$$(31)\quad Q(x,a,\mathfrak{M}) \leqq 1 + \frac{1}{S(x,\,a,\,\mathfrak{M})}\,2\,P_{13}\frac{x}{\log^2 x}\sum_{u=1}^{x} f(u)\,D(x,\,a,\,u).$$

Hierin ist

$$\sum_{u=1}^{x} f(u)\,D(x,\,a,\,u) = \sum_{0 \leqq j < i \leqq \frac{\log x}{\log a}} f(a^i - a^j).$$

Nach Satz 2 ist

$$f(a^i - a^j) = f\big(a^j(a^{i-j} - 1)\big) = f(a)\,f(a^{i-j} - 1)$$

$$< P_{14}\log\log 3\,a\,f(a^{i-j} - 1) < P_{42}\log\log 2\,a\,f(a^{i-j} - 1).$$

$h = i - j$ ist > 0 und $\leqq \frac{\log x}{\log a}$, und jedes h kommt höchstens $\frac{\log x}{\log a}$ mal als $i - j$ vor. Also

$$\sum_{u=1}^{x} f(u)\,D(x,\,a,\,u) \leqq P_{42}\log\log 2\,a\,\frac{\log x}{\log a}\sum_{h=1}^{\left[\frac{\log x}{\log a}\right]} f(a^h - 1)$$

$$= P_{42}\log\log 2\,a\,\frac{\log x}{\log a}\sum_{q=1}^{x}\frac{1}{q}\sum_{\substack{h=1\\ a^h \equiv 1 \pmod q}}^{\left[\frac{\log x}{\log a}\right]} 1.$$

Nur zu a teilerfremde q kommen vor; es gehöre a für ein solches q zum Exponenten $l(q,a)$ mod q; dann hat h wegen $l(q,a)\,|\,h$ höchstens $\frac{\log x}{l(q,a)\log a}$ Werte; daher ist

$$\sum_{u=1}^{x} f(u)\,D(x,\,a,\,u) \leqq P_{42}\log\log 2\,a\,\frac{\log^2 x}{\log^2 a}\sum_{\substack{q=1\\(q,\,a)=1}}^{x}\frac{1}{q\,l(q,a)}.$$

Nach Satz 10 ist

$$P_{12}(\log\log 2\,a)^2 > \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\sum_{\substack{q\,|\,a^l-1\\ l\,|\,\varphi(q)}}\frac{1}{q} \geqq \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\sum_{a \text{ gehört zu } l \bmod q}\frac{1}{q}$$

$$= \sum_{\substack{q=1\\(q,\,a)=1}}^{\infty}\frac{1}{q\,l(q,\,a)} > \sum_{\substack{q=1\\(q,\,a)=1}}^{x}\frac{1}{q\,l(q,\,a)}.$$

Daher ist

$$\sum_{u=1}^{x} f(u)\,D(x,\,a,\,u) < P_{43}(\log\log 2\,a)^3\frac{\log^2 x}{\log^2 a},$$

$$(32)\quad 2\,P_{13}\frac{x}{\log^2 x}\sum_{u=1}^{x} f(u)\,D(x,\,a,\,u) < P_{44}\frac{x}{\log a}\,\frac{(\log\log 2\,a)^3}{\log a} = \frac{x}{\log a}\,\delta(a)$$

mit

$$\lim_{a=\infty}\delta(a) = 0.$$

Aus (31) und (32) folgt die Behauptung.

§ 4.

Folgerungen.

1)

$$\delta(a) < P_{45},$$

also

$$Q(x,\,a,\,\mathfrak{M}) < 1 + \frac{P_{45}\,x}{S(x,\,a,\,\mathfrak{M})\log a}.$$

2) Ist $\pi_{\mathfrak{M}}(x)$ die Anzahl der $p \leqq x$ aus $\mathfrak{M}$, so ist für $x \geqq 2\,k$

$$S(x,\,a,\,\mathfrak{M}) \geqq \sum_{\substack{p \leqq \frac{x}{2}\\ p \text{ aus } \mathfrak{M}}} 1 \cdot \sum_{\substack{a^i \leqq \frac{x}{2}\\ i \geqq 0}} 1 > \pi_{\mathfrak{M}}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\log\frac{x}{2}}{\log a},$$

also

$$Q(x, a, \mathfrak{M}) < 1 + \frac{x\, \delta(a)}{\pi_{\mathfrak{M}}\left(\frac{x}{2}\right) \log \frac{x}{2}}. \tag{33}$$

3) Es sei

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi_{\mathfrak{M}}(x) \log x}{x} > 0, \tag{34}$$

also bei passendem $\gamma_{\mathfrak{M}} > 0$ für $\xi \geqq k$

$$\frac{\pi_{\mathfrak{M}}(\xi) \log \xi}{\xi} \geqq \gamma_{\mathfrak{M}}. \tag{35}$$

Dann liefert (33) für $x \geqq 2k$

$$Q(x, a, \mathfrak{M}) < 1 + \frac{2\,\delta(a)}{\gamma_{\mathfrak{M}}}. \tag{36}$$

4) Für jedes feste $\gamma > 0$ ist also bei allen $\mathfrak{M}$ mit (35) und $\gamma_{\mathfrak{M}} \geqq \gamma$ für $x \geqq 2k$

$$Q(x, a, \mathfrak{M}) < 1 + \frac{2\,\delta(a)}{\gamma},$$

also bei $a \to \infty$ gleichmässig in x und $\mathfrak{M}$

$$\lim_{a=\infty} Q(x, a, \mathfrak{M}) = 1. \tag{37}$$

5) Für jedes feste $\mathfrak{M}$ mit (34) gilt somit (37) für $x \geqq 2k$ gleichmässig in x.

6) Für die Menge $\mathfrak{M}$ aller Primzahlen ist nach (36) für $x \geqq 4$

$$Q(x, a) < 1 + \varepsilon(a), \qquad \lim_{a=\infty} \varepsilon(a) = 0.$$

Wegen

$$Q(3, a) = \frac{S(3, a)}{R(3, a)} = 1$$

ist damit die Behauptung (7) der Einleitung bewiesen.

7) Für jede Menge mit (35) ist nach (36) für $x \geqq 2k$

$$Q(x, a, \mathfrak{M}) < 1 + \frac{P_{46}}{\gamma_{\mathfrak{M}}} = \frac{\gamma_{\mathfrak{M}} + P_{46}}{\gamma_{\mathfrak{M}}} \leqq \frac{\frac{\log k}{k} + P_{46}}{\gamma_{\mathfrak{M}}} < \frac{P_{47}}{\gamma_{\mathfrak{M}}};$$

wegen

$$S(x, a, \mathfrak{M}) > \pi_{\mathfrak{M}}\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\log \frac{x}{2}}{\log a} \geqq \frac{x\, \gamma_{\mathfrak{M}}}{2 \log a}$$

also

$$R(x, a, \mathfrak{M}) = \frac{S(x, a, \mathfrak{M})}{Q(x, a, \mathfrak{M})} > \frac{\gamma_{\mathfrak{M}}^2\, x}{P_{48} \log a}.$$

Mittel-Schreiberhau, den 2. August 1934.

(Eingegangen am 4. August 1934.)