Verallgemeinerung einer Mordellschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen.

Von

J. G. van der Corput (Groningen).

In der Compositio Mathematica hat Herr L. J. Mordell[1]) eine sehr schöne, rein arithmetische Methode für die Geometrie der Zahlen entwickelt. Der Zweck dieser Note ist zu zeigen, dass man mittels seiner Methode allgemeinere Resultate ableiten kann.

In dieser Arbeit bezeichnen $k_1, \dots, k_n$ positive Zahlen.

Satz 1: *Ist M eine im n-dimensionalen Raum liegende Menge vom Volumen $V > k_1 k_2 \dots k_n$, und hat jedes zu M gehörige Punktepaar $(x_1, \dots, x_n)$ und $(y_1, \dots, y_n)$ die Eigenschaft, dass der Punkt $\left(\frac{x_1 - y_1}{k_1}, \dots, \frac{x_n - y_n}{k_n}\right)$ einer gewissen Menge N angehört, dann enthält N ausser dem Koordinatenursprung noch mindestens einen weiteren Gitterpunkt.*

Beweis: Bezeichnet A_t für positives t die Anzahl der zu M gehörigen Punkte $\left(\frac{k_1 u_1}{t}, \dots, \frac{k_n u_n}{t}\right)$ mit der Eigenschaft, dass die n Zahlen $u_1, \dots, u_n$ ganz sind, dann strebt $\frac{A_t}{t^n}$ bei unbeschränkt wachsendem t nach $\frac{V}{k_1 k_2 \dots k_n}$. Wegen $V > k_1 k_2 \dots k_n$ ist somit $A_t > t_n$ bei hinreichend grossem ganzen $t > 0$. Die betrachteten Gitterpunkte $(u_1, \dots, u_n)$ gehören zu höchstens t^n verschiedenen Restklassen mod. t, sodass wenigstens eine dieser Restklassen zwei verschiedene dieser Punkte $(u_1, \dots, u_n)$ und $(u_1', \dots, u_n')$ enthält. Die n Zahlen $\frac{u_r - u_r'}{t}$ $(r = 1, 2, \dots, n)$ sind dann ganz und nicht alle gleich Null. Da $\left(\frac{k_1 u_1}{t}, \dots, \frac{k_n u_n}{t}\right)$ und $\left(\frac{k_1 u_1'}{t}, \dots, \frac{k_n u_n'}{t}\right)$ der Menge M angehören, ist $\left(\frac{u_1 - u_1'}{t}, \dots, \frac{u_n - u_n'}{t}\right)$ ein Punkt von N, womit Satz 1 bewiesen ist.

[1]) L. J. Mordell, On some arithmetical results in the geometry of numbers, Compositio Mathematica, **1** (1934), S. 248—253.

Die Voraussetzung $V > k_1 k_2 \dots k_n$ darf nicht ohne Weiteres durch $V \geqq k_1 k_2 \dots k_n$ ersetzt werden, sogar nicht im Spezialfall mit $n = 1$ und $k_1 = 2$, da ich dann für M und auch für N das offene Intervall $(-1, 1)$ wählen kann, das ausser dem Nullpunkt keinen weiteren Gitterpunkt enthält.

Satz 2: *In Satz 1 darf die Voraussetzung $V > k_1 k_2 \dots k_n$ durch $V \geqq k_1 k_2 \dots k_n$ ersetzt werden, wenn N beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis: Enthält N ausser dem Koordinatenursprung keinen weiteren Gitterpunkt, so kann man N durch eine Ausdehnung vom Koordinatenursprung aus in eine Menge N^* überführen, die gleichfalls ausser dem Koordinatenursprung keinen weiteren Gitterpunkt enthält. Geht M durch diese Ausdehnung in M^* über, dann hat M^* ein Volumen $> V \geqq k_1 k_2 \dots k_n$, sodass nach dem vorigen Satz, mit M^* statt M und mit N^* statt N angewendet, N^* ausser dem Koordinatenursprung noch mindestens einen weiteren Gitterpunkt enthält. Hiermit ist Satz 2 bewiesen.

Der Spezialfall mit $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 2$ und $N = M$ des obigen Satzes liefert unmittelbar den berühmten Minkowskischen

Satz 3: *Eine im n-dimensionalen Raume liegende beschränkte abgeschlossene konvexe Punktmenge vom Volumen $\geqq 2^n$ mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt enthält ausser dem Koordinatenursprung noch mindestens einen weiteren Gitterpunkt.*

Satz 4: *Sind die m Funktionen $f_\mu(x_1, \dots, x_n)$ $(\mu = 1, 2, \dots, m)$ für alle reellen $x_1, \dots, x_n$ festgelegt, hat die Menge M, definiert durch*

$$(1) \qquad f_\mu(x_1, \dots, x_n) \leqq g_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

ein Volumen $V > k_1 k_2 \dots k_n$, und genügt jedes zu M gehörige Punktepaar $(x_1, \dots, x_n)$ und $(y_1, \dots, y_n)$ den Ungleichungen

$$(2)\qquad f_\mu\left(\frac{x_1-y_1}{k_1},\ldots,\frac{x_n-y_n}{k_n}\right)\leqq G_\mu \qquad (\mu=1,2,\ldots,m),$$

dann ist das System

$$(3)\qquad f_\mu(x_1,\ldots,x_n)\leqq G_\mu \qquad (\mu=1,2,\ldots,m)$$

lösbar in ganzzahligen $x_1,\ldots,x_n$, die nicht alle gleich Null sind.

Hierin darf die Voraussetzung $V>k_1k_2\ldots k_n$ durch $V\geqq k_1k_2\ldots k_n$ ersetzt werden, wenn die durch (3) *definierte Menge beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis: Anwendung der Sätze 1 und 2, wobei die Menge N durch (3) definiert wird, liefert unmittelbar Satz 4.

Sagt man bei gegebenen $k_1,\ldots,k_n$ dass eine Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ die Eigenschaft D besitzt, wenn sie für alle reellen $x_1,\ldots,x_n$ definiert ist und stets den Ungleichungen

$$(4)\qquad f\left(\frac{x_1-y_1}{k_1},\ldots,\frac{x_n-y_n}{k_n}\right)\leqq \operatorname{Max}\big(f(x_1,\ldots,x_n),\ f(y_1,\ldots,y_n)\big)$$

genügt, so bekommt man den folgenden Spezialfall von Satz 4.

Satz 5: *Besitzen die m Funktionen $f_\mu(x_1,\ldots,x_n)$ $(\mu=1,2,\ldots,m)$ die Eigenschaft D, und hat die Menge M, definiert durch* (1) *ein Volumen $V>k_1k_2\ldots k_n$, dann ist das System* (1) *lösbar in ganzzahligen $x_1,\ldots,x_n$, die nicht alle gleich Null sind.*

Hierin darf die Voraussetzung $V>k_1k_2\ldots k_n$ durch $V\geqq k_1k_2\ldots k_n$ ersetzt werden, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis: Für jedes zu M gehörige Punktepaar $(x_1,\ldots,x_n)$ und $(y_1,\ldots,y_n)$ gehört $\left(\frac{x_1-y_1}{k_1},\ldots,\frac{x_n-y_n}{k_n}\right)$ wegen (4) der Menge M an, sodass Satz 4, mit $G_\mu=g_\mu$ $(\mu=1,\ldots,m)$ angewendet, Satz 5 liefert.

Voraussetzung D fordert weniger als die folgende: Ich sage bei gegebenen $k_1,\ldots,k_n$, dass eine Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ die Eigenschaft E besitzt, wenn sie für alle reellen $x_1,\ldots,x_n$ definiert ist und stets die Ungleichung

$$(5)\qquad f\left(\frac{x_1-y_1}{k_1},\ldots,\frac{x_n-y_n}{k_n}\right)\leqq \frac{1}{2}f(x_1,\ldots,x_n)+\frac{1}{2}f(y_1,\ldots,y_n)$$

erfüllt.

Mittels des folgenden Satzes kann man viele Funktionen mit der Eigenschaft E finden.

Satz 6: *Die Funktion*

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\sigma=1}^{s}\big(\varphi_\sigma(x_1,\ldots,x_n)\big)^{\gamma_\sigma},$$

wo s eine feste natürliche Zahl, γ_σ fest und $\geqq 1$ ist, $\varphi_\sigma(x_1,\ldots,x_n)$ die Eigenschaft E besitzt und $\geqq 0$ ist, besitzt die Eigenschaft E.

Beweis: Die in Satz 6 definierte Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ besitzt wegen (5) (mit φ_σ statt f angewendet) die Eigenschaft

$$f\left(\frac{x_1-y_1}{k_1},\ldots,\frac{x_n-y_n}{k_n}\right)$$

$$\leqq\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{1}{2}\varphi_\sigma(x_1,\ldots,x_n)+\frac{1}{2}\varphi_\sigma(y_1,\ldots,y_n)\right)^{\gamma_\sigma}$$

$$\leqq\frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{s}\left\{\big(\varphi_\sigma(x_1,\ldots,x_n)\big)^{\gamma_\sigma}+\big(\varphi_\sigma(y_1,\ldots,y_n)\big)^{\gamma_\sigma}\right\}\quad\text{wegen }\gamma_\sigma\geqq 1$$

$$=\frac{1}{2}\big(f(x_1,\ldots,x_n)+f(y_1,\ldots,y_n)\big),$$

sodass $f(x_1,\ldots,x_n)$ in der Tat die Eigenschaft E besitzt.

Anwendung: *Sind $m, s_1,\ldots,s_m$ natürliche Zahlen, wird $s_1+s_2+\ldots+s_m=n$ gesetzt, bilden die n Linearformen $\psi_{\mu\sigma}(x_1,\ldots,x_n)$ $(1\leqq\mu\leqq m,\ 1\leqq\sigma\leqq s_\mu)$ ein System, dessen Jacobische Funktionaldeterminante einen Absolutwert $\Delta\neq 0$ besitzt, sind die n Zahlen $\gamma_{\mu\sigma}\geqq 1$ $(1\leqq\mu\leqq m,\ 1\leqq\sigma\leqq s_\mu)$ und die m Zahlen $g_1,\ldots,g_m$ positiv mit*

$$(6)\qquad g_1^{\omega_1}g_2^{\omega_2}\ldots g_m^{\omega_m}\geqq\Delta\,\frac{\Gamma(\omega_1+1)\,\Gamma(\omega_2+1)\ldots\Gamma(\omega_m+1)}{\prod\limits_{\mu=1}^{m}\prod\limits_{\sigma=1}^{s_\mu}\Gamma\left(\frac{1}{\gamma_{\mu\sigma}}+1\right)},$$

wo

$$\omega_\mu=\sum_{\sigma=1}^{s_\mu}\frac{1}{\gamma_{\mu\sigma}}\qquad(\mu=1,2,\ldots,m)$$

gesetzt wird, dann ist das System

$$\sum_{\sigma=1}^{s_\mu}\left|\psi_{\mu\sigma}(x_1,\dots,x_n)\right|^{\gamma_{\mu\sigma}}\leqq g_\mu \quad (\mu=1,\,2,\dots,m) \tag{7}$$

lösbar in ganzzahligen $x_1,\dots,x_n$, *die nicht alle gleich Null sind.*

Beweis: Der Absolutwert einer Linearform besitzt die Eigenschaft E mit $k_1=k_2=\dots=k_n=2$, sodass die in (7) linkerhand auftretenden Funktionen nach Satz 6 dieselbe Eigenschaft besitzen. Der durch (7) definierte Körper ist beschränkt, abgeschlossen und hat ein Volumen

$$\frac{2^n}{\Delta}\,\frac{g_1^{\omega_1}\,g_2^{\omega_2}\dots g_m^{\omega_m}}{\Gamma(\omega_1+1)\,\Gamma(\omega_2+1)\dots\Gamma(\omega_m+1)}\prod_{\mu=1}^{m}\prod_{\sigma=1}^{s_\mu}\Gamma\left(\frac{1}{\gamma_{\mu\sigma}}+1\right)\geqq 2^n$$

wegen (6), sodass die Behauptung aus Satz 5 (mit $k_1=k_2=\dots=k_n=2$ angewendet) folgt.

Bemerkungen: 1. Die Behauptungen von Herrn L. J. Mordell auf den Seiten 252 und 253 der genannten Arbeit sind nur Spezialfälle dieser Anwendung.

2. Ich habe die obige Anwendung aus Satz 5 abgeleitet, aber ich kann sie auch mittels des Minkowskischen Satzes 3 beweisen. Dazu brauche ich nur zu zeigen, dass die durch (7) definierte Menge konvex ist; denn dass sie abgeschlossen und beschränkt ist und den Koordinatenursprung zum Mittelpunkt besitzt, ist klar. Enthält die genannte Menge zwei Punkte $(x_1,\dots,x_n)$ und $(y_1,\dots,y_n)$, dann enthält sie gleichfalls $(-y_1,\dots,-y_n)$, also, da die in (7) linkerhand auftretenden Funktionen die Eigenschaft E mit $k_1=k_2=\dots=k_n=2$ besitzen, auch den Punkt $\left(\frac{x_1+y_1}{2},\dots,\frac{x_n+y_n}{2}\right)$. Da die betrachtete Menge abgeschlossen ist, folgt hieraus, dass sie konvex ist.

(Eingegangen am 13. September 1934.)

Über die Anzahl der Primzahlen eines reell-quadratischen Zahlkörpers, deren Konjugierte unterhalb gegebener Grenzen liegen.

Von

Hans Rademacher (Philadelphia, Pa.).

1. Herr A. Walfisz hat mir neulich brieflich die Frage vorgelegt, auf wieviele Weisen sich in einem reell-quadratischen Zahlkörper eine totalpositive ganze Zahl ν als Summe einer totalpositiven Primzahl und einer totalpositiven ganzen Zahl darstellen liesse. Sind $\nu>0$, $\nu'>0$ die beiden Konjugierten von ν, so kommt die Frage offenbar darauf hinaus, wieviele totalpositive Primzahlen ω es gibt mit

$$0<\omega<\nu,\quad 0<\omega'<\nu'.$$

Mit Hilfe eines neuerdings von mir bewiesenen Satzes [1]) können wir sogar allgemeiner die Frage nach der asymptotischen Abschätzung der totalpositiven Primzahlen ω mit

$$0<\omega\leqq Y,\quad 0<\omega'\leqq Y',\quad \omega\equiv\rho \pmod{\mathfrak{a}} \tag{1.1}$$

beantworten, wo Y, Y' beliebig reell positiv sind (und nicht die Konjugierten einer Körperzahl zu sein brauchen) und $\mathfrak{a}$ ein festes Ideal, ρ eine feste ganze zu $\mathfrak{a}$ prime Körperzahl sein sollen. Stellen wir die ganzen Zahlen μ des Körpers als Punkte mit den Koordinaten μ, μ' in einem rechtwinkligen System dar, so handelt es sich um die Anzahl der Primzahlen in dem Rechteck $0<\mu\leqq Y$, $0<\mu'\leqq Y'$.

[1]) Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Winkelräumen, erschein demnächst in den Mathem. Annalen.