$$(7)\qquad \sum_{\sigma=1}^{s_\mu} \left| \psi_{\mu\sigma}(x_1, \ldots, x_n) \right|^{\gamma_{\mu\sigma}} \leqq g_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

lösbar in ganzzahligen $x_1, \ldots, x_n$, die nicht alle gleich Null sind.

Beweis: Der Absolutwert einer Linearform besitzt die Eigenschaft E mit $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 2$, sodass die in (7) linkerhand auftretenden Funktionen nach Satz 6 dieselbe Eigenschaft besitzen. Der durch (7) definierte Körper ist beschränkt, abgeschlossen und hat ein Volumen

$$\frac{2^n}{\Delta} \frac{g_1^{\omega_1} g_2^{\omega_2} \ldots g_m^{\omega_m}}{\Gamma(\omega_1+1)\Gamma(\omega_2+1)\ldots\Gamma(\omega_m+1)} \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\sigma=1}^{s_\mu} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma_{\mu\sigma}} + 1\right) \geqq 2^n$$

wegen (6), sodass die Behauptung aus Satz 5 (mit $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 2$ angewendet) folgt.

Bemerkungen: 1. Die Behauptungen von Herrn L. J. Mordell auf den Seiten 252 und 253 der genannten Arbeit sind nur Spezialfälle dieser Anwendung.

2. Ich habe die obige Anwendung aus Satz 5 abgeleitet, aber ich kann sie auch mittels des Minkowskischen Satzes 3 beweisen. Dazu brauche ich nur zu zeigen, dass die durch (7) definierte Menge konvex ist; denn dass sie abgeschlossen und beschränkt ist und den Koordinatenursprung zum Mittelpunkt besitzt, ist klar. Enthält die genannte Menge zwei Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$, dann enthält sie gleichfalls $(-y_1, \ldots, -y_n)$, also, da die in (7) linkerhand auftretenden Funktionen die Eigenschaft E mit $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 2$ besitzen, auch den Punkt $\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \ldots, \frac{x_n+y_n}{2}\right)$. Da die betrachtete Menge abgeschlossen ist, folgt hieraus, dass sie konvex ist.

(Eingegangen am 13. September 1934.)

Über die Anzahl der Primzahlen eines reell-quadratischen Zahlkörpers, deren Konjugierte unterhalb gegebener Grenzen liegen.

Von

Hans Rademacher (Philadelphia, Pa.).

1. Herr A. Walfisz hat mir neulich brieflich die Frage vorgelegt, auf wieviele Weisen sich in einem reell-quadratischen Zahlkörper eine totalpositive ganze Zahl ν als Summe einer totalpositiven Primzahl und einer totalpositiven ganzen Zahl darstellen liesse. Sind $\nu > 0$, $\nu' > 0$ die beiden Konjugierten von ν, so kommt die Frage offenbar darauf hinaus, wieviele totalpositive Primzahlen ω es gibt mit

$$0 < \omega < \nu, \quad 0 < \omega' < \nu'.$$

Mit Hilfe eines neuerdings von mir bewiesenen Satzes[1]) können wir sogar allgemeiner die Frage nach der asymptotischen Abschätzung der totalpositiven Primzahlen ω mit

$$(1.1)\qquad 0 < \omega \leqq Y, \quad 0 < \omega' \leqq Y', \quad \omega \equiv \rho \pmod{\mathfrak{a}}$$

beantworten, wo Y, Y' beliebig reell positiv sind (und nicht die Konjugierten einer Körperzahl zu sein brauchen) und $\mathfrak{a}$ ein festes Ideal, ρ eine feste ganze zu $\mathfrak{a}$ prime Körperzahl sein sollen. Stellen wir die ganzen Zahlen μ des Körpers als Punkte mit den Koordinaten μ, μ' in einem rechtwinkligen System dar, so handelt es sich um die Anzahl der Primzahlen in dem Rechteck $0 < \mu \leqq Y$, $0 < \mu' \leqq Y'$.

[1]) Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Winkelräumen, erschein demnächst in den Mathem. Annalen.

Es genügt, die Primzahlen in dem einen der beiden Dreiecke, in die das Rechteck durch die Diagonale vom Nullpunkt nach (Y, Y') zerlegt wird, abzuschätzen, da das andere Dreieck sich durch Vertauschung der beiden Konjugierten ergibt. Wir fragen also nach der Anzahl $P_{\mathfrak{a}}(Y, Y')$ der Primzahlen ω mit

$$(1.2)\qquad 0 < \omega \leqq Y, \qquad \frac{\omega'}{\omega} \leqq \frac{Y'}{Y},$$

$$(1.3)\qquad \omega \equiv \rho \pmod{\mathfrak{a}}.$$

Zunächst wollen wir noch

$$(1.4)\qquad \eta_{\mathfrak{a}}^{-1} \leqq \frac{Y'}{Y} \leqq \eta_{\mathfrak{a}}$$

voraussetzen, eine Einschränkung, die man nachträglich leicht aufheben kann. Dabei sei $\eta_{\mathfrak{a}} > 1$ die totalpositive Grundeinheit mod $\mathfrak{a}$.

2. Es seien nun q_1, q_2 zwei positive Zahlen, $q_1 < q_2$, $\frac{q_2}{q_1} < \eta_{\mathfrak{a}}^2$. Dann können unter den totalpositiven Körperzahlen μ mit

$$(2.1)\qquad q_1 < \frac{\mu'}{\mu} \leqq q_2$$

nicht zwei mod $\mathfrak{a}$ assoziierte vorkommen. Führen wir die Bezeichnung

$$w_{\mathfrak{a}}(\mu) = \frac{1}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}} \log \left| \frac{\mu}{\mu'} \right|$$

ein, so ist für die Zahlen mit der Eigenschaft (2.1)

$$-\frac{\log q_2}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}} \leqq w_{\mathfrak{a}}(\mu) < -\frac{\log q_1}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}}.$$

Da wegen

$$0 < \frac{\log q_2 - \log q_1}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}} < 1$$

nur die Fälle

$$\text{(A)}\qquad \left[-\frac{\log q_2}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}}\right] = \left[-\frac{\log q_1}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}}\right]$$

und

$$\text{(B)}\qquad \left[-\frac{\log q_2}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}}\right] + 1 = \left[-\frac{\log q_1}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}}\right]$$

vorkommen können, so ist im Falle (A) $w_{\mathfrak{a}}(\mu) - [w_{\mathfrak{a}}(\mu)]$ enthalten

in dem Intervall

$$-\frac{\log q_2}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}} - \left[-\frac{\log q_2}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}}\right] \leqq w_{\mathfrak{a}}(\mu) - [w_{\mathfrak{a}}(\mu)] < -\frac{\log q_1}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}} - \left[-\frac{\log q_1}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}}\right]$$

und im Falle (B) in den beiden Intervallen

$$-\frac{\log q_2}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}} - \left[-\frac{\log q_2}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}}\right] \leqq w_{\mathfrak{a}}(\mu) - [w_{\mathfrak{a}}(\mu)] < 1$$

oder

$$0 \leqq w_{\mathfrak{a}}(\mu) - [w_{\mathfrak{a}}(\mu)] < -\frac{\log q_1}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}} - \left[-\frac{\log q_1}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}}\right].$$

In beiden Fällen ist die Gesamtlänge der Intervalle für $w_{\mathfrak{a}}(\mu) - [w_{\mathfrak{a}}(\mu)]$ gleich

$$\frac{\log q_2 - \log q_1}{2 \log \eta_{\mathfrak{a}}}.$$

Die Anwendung des „Hauptsatzes“ meiner oben zitierten Arbeit ergibt also das

Lemma: *Ist*

$$(2.2)\qquad 1 < \frac{q_2}{q_1} < \eta_{\mathfrak{a}}^2,$$

so ist die Anzahl der totalpositiven Primzahlen ω, die den Bedingungen

$$(2.3)\qquad \omega \equiv \rho \pmod{\mathfrak{a}}, \qquad N(\omega) \leqq x,$$

$$(2.4)\qquad q_1 < \frac{\omega'}{\omega} \leqq q_2$$

genügen, gleich

$$(2.5)\qquad \frac{\log q_2 - \log q_1}{4 \varphi(\mathfrak{a}) h \log \eta} \int_2^x \frac{du}{\log u} + B \cdot x e^{-c\sqrt{\log x}}.$$

Bei der Aufstellung dieser Formel ist noch von der Beziehung

$$h_0(\mathfrak{a}) \log \eta_{\mathfrak{a}} = 2 \varphi(\mathfrak{a}) h \log \eta$$

Gebrauch gemacht worden[2]; h ist die gewöhnliche Idealklassenzahl und η die Grundeinheit $\eta > 1$; B soll in (2.5) und im folgen-

[2]) l. c., Formel (6).

den Funktionen bezeichnen, die beschränkt bleiben und deren Schranken nur vom Körper und von $\mathfrak{a}$ abhängen; ferner ist auch c eine nur vom Körper und von $\mathfrak{a}$ abhängende positive Zahl.

3. Im folgenden sollen, auch wo es nicht ausdrücklich hervorgehoben wird, nur Primzahlen des Körpers betrachtet werden, die der Kongruenz (1 . 3) genügen. Es sei nun $Y' > 2$, was nach (1.4) gewiss dann der Fall sein wird, wenn

(3.1) $$Y Y' > 4\eta_{\mathfrak{a}}$$

vorausgesetzt wird. Wir wählen nun positive Zahlen $y_0', y_1', \ldots, y_l'$ mit folgender Beschaffenheit:

(3.2) $$2 = y_0' < y_1' < \ldots < y_l' = Y'$$

und

(3.3) $$1 < \frac{y_j'}{y'_{j-1}} < \eta_{\mathfrak{a}}^2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, l).$$

Die totalpositiven Primzahlen mit den Eigenschaften (1.2) teilen wir ein in die Klassen $C_0, C_1, \ldots, C_l$:

(3.4) $$0 < \frac{\omega'}{\omega} \leq \frac{2}{Y}, \quad \frac{2}{Y} < \frac{\omega'}{\omega} \leq \frac{y_1'}{Y}, \ldots, \quad \frac{y'_{l-1}}{Y} < \frac{\omega'}{\omega} \leq \frac{Y'}{Y}.$$

Nach (1.1) gilt ausserdem für $C_0, C_1, \ldots, C_l$

(3.5) $$\omega \leq Y.$$

Für $j = 1, 2, \ldots, l$ bilden wir nun Klassen $\underline{C}_j$ und $\overline{C}_j$ von Primzahlen, sodass

(3.6) $$\underline{C}_j \subset C_j \subset \overline{C}_j$$

ist. Wegen (3.4) und (3.5) ist in C_j

$$N(\omega) = \omega\,\omega' \leq \frac{\omega^2 y_j'}{Y} \leq Y y_j'.$$

Die Klasse $\overline{C}_j$, die durch

$$\frac{y'_{j-1}}{Y} < \frac{\omega'}{\omega} \leq \frac{y_j'}{Y} \quad \text{und} \quad N(\omega) \leq Y y_j'$$

definiert sei, enthält also, wie (3.6) fordert, die Klasse C_j. Die Klasse $\underline{C}_j$ sei durch

$$\frac{y'_{j-1}}{Y} < \frac{\omega'}{\omega} \leq \frac{y_j'}{Y} \quad \text{und} \quad N(\omega) \leq Y y'_{j-1}$$

definiert. In ihr ist

$$\omega^2 = N(\omega) \cdot \frac{\omega}{\omega'} < Y y'_{j-1} \cdot \frac{Y}{y'_{j-1}} = Y^2,$$

also

$$\omega < Y,$$

sie fällt somit ganz in C_j hinein.

4. Auf die Klassen $\underline{C}_j$ und $\overline{C}_j$ lässt sich das Lemma § 2 anwenden. Die Anzahl der Primzahlen in $\underline{C}_j$ ist danach

(4.1) $$\frac{\log y_j' - \log y'_{j-1}}{4\varphi(\mathfrak{a})\, h \log \eta}\, Li(Y y'_{j-1}) + B \,.\, Y Y' e^{-c\sqrt{\log Y Y'}},$$

die in $\overline{C}_j$ ist

(4.5) $$\frac{\log y_j' - \log y'_{j-1}}{4\varphi(\mathfrak{a})\, h \log \eta}\, Li(Y y_j') + B \,.\, Y Y' e^{-c\sqrt{\log Y Y'}}.$$

Hierbei ist noch benutzt worden, dass $x e^{-c\sqrt{\log x}}$ von gewissem positiven x an monoton wächst. Da nun nach (1.4) und (3.1) $Y > 2$ und nach (3.2) $Y y_j' > 4$ ist, so durfte in den Restgliedern $Y y'_{j-1}$ bezw. $Y y_j'$ durch $Y Y'$ ersetzt werden.

Die Anzahl der Primzahlen von C_0 endlich ist höchstens so gross wie die Anzahl aller totalpositiven ganzen Körperzahlen μ mit

$$0 < \frac{\mu'}{\mu} \leq \frac{2}{Y}, \qquad 0 < \mu \leq Y,$$

und diese wieder sind enthalten unter allen ganzen Körperzahlen

$$0 < \mu' \leq 2, \qquad 0 \leq \mu \leq Y.$$

Dies sind die in einem Rechteck mit den Seiten 2 und Y enthaltenen Gitterpunkte eines gewissen durch den Körper bestimmten Gitters; daher ist die Zahl der Primzahlen in C_0 gleich

$$B \,.\, Y.$$

Für die Anzahl $P_{\mathfrak{a}}(Y, Y')$ der Primzahlen aus allen Klassen $C_0, C_1, \ldots, C_l$ zusammen haben wir also

$$(4.3)\qquad \frac{1}{4\,\varphi(\mathfrak{a})\,h\log\eta}\sum_{j=1}^{l}(\log y_j'-\log y'_{j-1})\,.\,Li(Y\,y'_{j-1})$$
$$+B\,.\,l\,YY'\,e^{c\sqrt{\log YY'}}$$
$$\leqq P_{\mathfrak{a}}(Y,Y')$$
$$\leqq\frac{1}{4\,\varphi(\mathfrak{a})\,h\log\eta}\sum_{j=1}^{l}(\log y_j'-\log y'_{j-1})\,.\,Li(Y\,y_j')$$
$$+B\,.\,l\,YY'\,e^{c\sqrt{\log YY'}}+BY.$$

5. Die Summe links in (4.3) heisse $\underline{S}$, die rechts heisse $\overline{S}$. Wir setzen $u_j=\log y_j'$ und haben dann

$$(5.1)\qquad \log 2=u_0<u_1<\ldots<u_l=\log Y'$$

und

$$\underline{S}=\sum_{j=1}^{l}Li\,(Y\,e^{u_{j-1}})(u_j-u_{j-1}).$$

$$\overline{S}=\sum_{j=1}^{l}Li\,(Y\,e^{u_j})\,(u_j-u_{j-1}).$$

Offenbar ist

$$(5.2)\qquad \underline{S}\leqq\int_{\log 2}^{\log Y'}Li(Y\,e^{u})\,du\leqq\overline{S}.$$

Die u_j wählen wir nun in (5.1) äquidistant, also

$$(5.3)\qquad u_j=\log 2+\frac{j}{l}\,(\log Y'-\log 2)\,.$$

Dann ist

$$\underline{S}=\frac{1}{l}(\log Y'-\log 2)\sum_{j=1}^{l}Li(Y\,e^{u_{j-1}}),$$

$$\overline{S}=\frac{1}{l}(\log Y'-\log 2)\sum_{j=1}^{l}Li\,(Y\,e^{u_j}),$$

also

$$(5.4)\qquad \overline{S}-\underline{S}=\frac{1}{l}(\log Y'-\log 2)\,(Li\,(YY')-Li(2\,Y))$$

$$=B\,.\,\frac{1}{l}\log(YY')\,.\,Li\,(YY')=B.\,\frac{1}{l}\,YY'.$$

Aus (4.3), (5.2) und (5.4) schliessen wir dann

$$(5.5)\qquad P_{\mathfrak{a}}(Y,Y')=\frac{1}{4\,\varphi(\mathfrak{a})\,h\log\eta}\int_{\log 2}^{\log Y'}Li\,(Y\,e^{u})\,du+B.\,\frac{1}{l}\,YY'$$
$$+B.\,l\,YY'\,e^{-c\sqrt{\log YY'}}+B.Y.$$

Wegen (1.4) ist

$$(5.6)\qquad Y=B.\sqrt{YY'}.$$

Die Zahl l muss nun folgenden Bedingungen genügen: erstens nach (3.2)

$$(5.7)\qquad l\geqq 1,$$

zweitens wegen (5.3)

$$u_j-u_{j-1}=\frac{1}{l}(\log Y'-\log 2)$$

und wegen der Bedeutung der u_j

$$l=\frac{\log\dfrac{Y'}{2}}{\log\dfrac{y'_j}{y'_{j-1}}},$$

also nach (3.3)

$$(5.8)\qquad l>\frac{\log\dfrac{Y'}{2}}{2\log\eta}.$$

Für hinreichend grosses (d. h. eine gewisse nur vom Körper und $\mathfrak{a}$ abhängende Schranke überschreitendes) $Y\,Y'$ erfüllt dann

$$l=\left[e^{\frac{c}{2}\sqrt{\log YY'}}\right]$$

die Bedingungen (5.7) und (5.8). Mit diesem l folgt aus (5.5) und (5.6)

$$(5.9)\qquad P_{\mathfrak{a}}\,(Y,Y')=\frac{1}{4\,\varphi(\mathfrak{a})\,h\log\eta}\int_{\log 2}^{\log Y'}Li\,(Y\,e^{u})\,du+B\,.\,YY'\,e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log YY'}}.$$

6. Es bleibt noch eine Umformung des Integrals in (5.6) zu leisten. Es ist

$$\int_{\log 2}^{\log Y'} Li(Ye^u)\,du = \int_{\log 2}^{\log Y'} du \int_{2}^{Ye^u} \frac{dt}{\log t} = \int_{\log 2}^{\log Y'} du \int_{2Y}^{Ye^u}\frac{dt}{\log t} + B\,.\,Y\log Y'$$

$$= \iint \frac{du\,dt}{\log t} + B\,.\,Y\log Y',$$

das Doppelintegral erstreckt über das Gebiet

$$\log 2 \leqq u \leqq \log Y', \quad 2Y\leqq t\leqq Ye^u.$$

Dasselbe Gebiet lässt sich auch beschreiben durch

$$2Y\leqq t\leqq YY', \quad \log\frac{t}{Y}\leqq u\leqq \log Y'.$$

Also ist

$$\int_{\log 2}^{\log Y'} Li(Ye^u)\,du = \int_{2Y}^{YY'}\frac{dt}{\log t}\int_{\log\frac{t}{Y}}^{\log Y'} du + B\,.\,Y\log Y'$$

$$= \int_{2Y}^{YY'} \frac{dt}{\log t}(\log YY' - \log t) + B\,.\,Y\log Y' = \log YY'\int_{2Y}^{YY'}\frac{dt}{\log t}$$

$$- (YY'-2Y) + B\,.\,Y\log Y'$$

und durch partielle Integration:

$$=\log YY'\left[\frac{t}{\log t}\right]_{2Y}^{YY'} + \log YY'\int_{2Y}^{YY'}\frac{dt}{(\log t)^2} - (YY'-2Y) + B\,.\,Y\log Y',$$

woraus nach einigen Vereinfachungen und Zusammenfassungen und nochmaliger Benutzung von (1.4)

$$\int_{\log 2}^{\log Y'} Li(Ye^u)\,du = \log YY'\int_2^{YY'}\frac{dt}{(\log t)^2} + B\,.\,\sqrt{YY'}\log YY'$$

folgt. Dies tragen wir in (5.9) ein und haben

(6.1) $$P_{\mathfrak{a}}(Y,Y') = \frac{1}{4\varphi(\mathfrak{a})\,h\log \eta_{\mathfrak{a}}}\log YY'\int_2^{YY'}\frac{dt}{(\log t)^2} + B\,.\,YY'e^{-c\sqrt{\log YY'}}$$

mit c in neuer Bedeutung.

7. Nun ist $P_{\mathfrak{a}}(Y,Y')$ noch nicht die gesuchte Anzahl, sondern erst $P_{\mathfrak{a}}(Y,Y')+P_{\mathfrak{a}}'(Y',Y)$, wo $P_{\mathfrak{a}}'(Y',Y)$ sich durch Vertauschung der Konjugierten ergibt, d. h. die Anzahl der totalpositiven Primzahlen $\omega\equiv\rho \pmod{\mathfrak{a}}$ mit

$$0<\omega'\leqq Y', \quad \frac{\omega}{\omega'}\leqq\frac{Y}{Y'}$$

ist. Die rechte Seite in (6.1) ist aber symmetrisch in Y und Y', sodass die gesuchte Anzahl durch Verdoppelung des Hauptgliedes in (6.1) herauskommt. Zu bemerken ist nur noch, dass in $P_{\mathfrak{a}}(Y,Y')+P'_{\mathfrak{a}}(Y',Y)$ die möglicherweise vorhandenen Primzahlen $\frac{\omega}{\omega'}=\frac{Y}{Y'}$ doppelt gezählt worden sind. Doch sind diese von der Anzahl $B\sqrt{YY'}$, gehen also in dem Restglied von (6.1) unter. Damit haben wir die Anzahl der Primzahlen, die den Bedingungen (1.1) genügen, berechnet.

Es bleibt nur noch die Einschränkung (1.4) aufzuheben. Seien nämlich Y, Y' zwei beliebige positive Zahlen. Dann bilden wir durch Multiplikation mit Potenzen von $\eta_{\mathfrak{a}}$ die Zahlen Y_0, Y_0', sodass

$$Y_0 = Y\eta_{\mathfrak{a}}^{-k}, \qquad Y_0' = Y'\eta_{\mathfrak{a}}^{k},$$

(7.1) $$\eta_{\mathfrak{a}}^{-1}\leqq\frac{Y_0'}{Y_0}<\eta_{\mathfrak{a}}$$

(was übrigens die Bestimmung

$$k=-\left[\frac{\log Y'-\log Y}{2\log\eta_{\mathfrak{a}}}+\frac{1}{2}\right]$$

ergibt). Es ist

(7.2) $$Y_0Y_0' = YY'$$

und wegen (6.1) und (7.1) und wegen der Überlegung zu Beginn dieses § 7 ist die Anzahl der Primzahlen ω mit

(7.3) $$0<\omega\leqq Y_0, \quad 0<\omega'\leqq Y_0', \quad \omega\equiv\rho \pmod{\mathfrak{a}}$$

dann gleich

$$\frac{1}{2\varphi(\mathfrak{a})\,h\log\eta_{\mathfrak{a}}}\log Y_0Y_0'\int_2^{Y_0Y_0'}\frac{dt}{(\log t)^2}+B\,.\,Y_0Y_0'e^{-c\sqrt{\log Y_0Y_0'}}.$$

Alle Primzahlen, die (7.3) genügen, erfüllen aber auch

$$0 < \omega\,\eta_{\mathfrak{a}}^{k} \leqq Y, \quad 0 < \omega'\,\eta_{\mathfrak{a}}^{-k} \leqq Y', \quad \omega\,\eta_{\mathfrak{a}}^{k} \equiv \rho \pmod{\mathfrak{a}}$$

und umgekehrt. Nennen wir die Primzahlen $\omega\,\eta_{\mathfrak{a}}^{k}$ wieder ω, so können wir unter Berücksichtigung von (7.2) den Satz aussprechen:

Satz: *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal eines reell-quadratischen Zahlkörpers,* ρ *eine ganze zu* $\mathfrak{a}$ *prime Körperzahl, sind* Y, Y' *positive Zahlen mit* $Y Y' \geqq 2$, *so ist die Anzahl der Primzahlen* ω, *die*

$$\omega \equiv \rho \pmod{\mathfrak{a}}, \quad 0 < \omega \leqq Y, \quad 0 < \omega' \leqq Y'$$

genügen, gleich

$$\frac{1}{2\,\varphi(\mathfrak{a})\,h \log \eta} \log Y Y' \int\limits_{2}^{YY'} \frac{dt}{(\log t)^2} + B \,.\, Y Y' e^{-c\sqrt{\log Y Y'}} .$$

Hierin ist h *die Klassenzahl im gewöhnlichen Sinne und* $\eta > 1$ *die Grundeinheit des Körpers.*

Bemerkenswert ist, dass nicht der Integrallogarithmus, sondern

$$\log x \int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{(\log t)^2}$$

mit $x = Y Y'$ im Hauptglied der bewiesenen Formel auftritt. Offenbar ist für $x > 2$

$$\log x \int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{(\log t)^2} > \int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{\log t},$$

zugleich aber

$$\log x \int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{(\log t)^2} \sim \frac{x}{\log x},$$

denn

$$\log x \int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{(\log t)^2} = \log x \left[\frac{t}{(\log t)^2}\right]_2^x + 2 \log x \int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{(\log t)^3}$$

$$= \frac{x}{\log x} + O(\log x) + 2 \log x \int\limits_{2}^{\sqrt{x}} \frac{dt}{(\log t)^3} + 2 \log x \int\limits_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{(\log t)^3}$$

$$= \frac{x}{\log x} + O(\log x) + O(\sqrt{x \log x}) + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$$

$$= \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Niehagen, d. 18. August 1934.

(Eingegangen am 28. August 1934.)