$$\eta_\nu^{p^f} \equiv \eta_\nu \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{Q})$$

ist (verallgemeinerter Fermatscher Satz). Nehmen wir ein ganzes rationales q, so dass $l = qf - s$ positiv ist, so gilt:

$$(\eta_\nu \cdot \eta_\nu S_2 \ldots \eta_\nu S_\pi)^{p^l} \equiv \eta_\nu^{p^s \cdot p^{qf-s}} \equiv \eta_\nu^{p^{qf}} \equiv \eta_\nu \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{Q}).$$

Die linke Seite dieser Kongruenz ist gegenüber $\mathfrak{H}$ invariant. Es ist also

$$\eta_\nu \equiv \tau_\nu \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{Q}),$$

wobei τ_ν gegenüber $\mathfrak{H}$ invariant ist.

Nun zerlegen wir $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}\, T_2 + \ldots + \mathfrak{H}\, T_a, \qquad (a, p) = 1.$$

Es ist

$$a \cdot \tau_\nu \equiv \tau_\nu + \tau_\nu T_2 + \ldots + \tau_\nu T_a \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{Q}),$$

wobei die rechte Seite dieser Kongruenz allen Substitutionen von $\mathfrak{Q}$ gegenüber invariant, also ganz rational ist. Demnach können wir die Lösung $[a\eta_1, a\eta_2, \ldots, a\eta_r]$ des Systems (4) durch eine Lösung $[a\eta_1, x_2, \ldots, x_r]$ ersetzen, in welcher $a\eta_1, x_2, \ldots, x_r$ ganz rational sind und dabei $(a\eta_1, p) = 1$ gilt. [2])

Es sei $\mathfrak{Q}^e$ durch p teilbar. Die Zahl

$$\alpha = a\eta_1\, \omega_1 + x_2\, \omega_2 + \ldots + x_r\, \omega_r$$

ist durch $\mathfrak{Q}$, also α^e durch p teilbar. Andererseits ist α nicht in $\mathfrak{R}$ durch p teilbar, da sonst $\dfrac{\alpha}{p} = \dfrac{a\eta_1\omega_1 + \ldots + x_r\omega_r}{p}$ in $\mathfrak{R}$ enthalten wäre, was der Annahme widerspricht, dass $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$ eine Basis von $\mathfrak{R}$ ist. Denn die Koordinate $\dfrac{a\eta_1}{p}$ von $\dfrac{\alpha}{p}$ ist gebrochen. Damit ist gezeigt, dass p kritisch ist, w. z. b. w.

[2]) Diese Überlegung ist dem „*Zahlbericht*" von D. Hilbert entnommem. Vgl. *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. I, Berlin 1932, S. 135, Satz 72.

(Eingegangen am 26. Oktober 1934.)

Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper.

Von

Carl Ludwig Siegel (Frankfurt a/M.).

Durch eine scharfsinnige Combination zweier Ansätze von Hecke und Deuring ist es Heilbronn gelungen, den lange vermuteten Satz zu beweisen, dass die Classenzahl $h(d)$ des imaginären quadratischen Zahlkörpers der Discriminante d mit $|d|$ unendlich wird. Es ist naheliegend, nach einer genaueren unteren Abschätzung von $h(d)$ zu fragen. Im folgenden soll die asymptotische Formel

$$\log h(d) \sim \log \sqrt{|d|} \tag{1}$$

bewiesen werden. Da nach Dirichlet

$$\pi\, |d|^{-\frac{1}{2}}\, h(d) = L_d(1) \qquad (d < -4)$$

gilt, wo

$$L_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s}$$

gesetzt ist, so ist (1) mit der Aussage

$$\log L_d(1) = o(\log |d|) \tag{2}$$

gleichbedeutend. Man wird vermuten, dass (2) auch für positive Discriminanten d richtig ist; und dies wird ebenfalls bewiesen werden. Bedeutet ε_d die Grundeinheit, so ist nach Dirichlet

$$2\, d^{-\frac{1}{2}}\, h(d) \log \varepsilon_d = L_d(1) \qquad (d > 0)$$

und folglich die Beziehung

$$\log \bigl(h(d) \log \varepsilon_d\bigr) \sim \log \sqrt{d}$$

das Analogon zu (1) für reelle quadratische Körper.

Man wird weiter fragen, ob (2) eine Verallgemeinerung auf beliebige algebraische Zahlkörper gestattet. Da $L_d(1)$ gleich dem Residuum der Zetafunction des quadratischen Zahlkörpers der Discriminante d ist, so wird man auf grund der Dedekindschen Classenzahlformel für beliebige algebraische Zahlkörper festen Grades mit der Discriminante d, der Classenzahl h und dem Regulator R das Bestehen von

$$\log(hR) \sim \log\sqrt{|d|} \tag{3}$$

vermuten. Bei Benutzung der Classenkörpertheorie reicht die weiterhin dargelegte Methode aus, um (3) für die Menge aller in bezug auf einen beliebigen festen algebraischen Zahlkörper auflösbaren Körper zu beweisen. Der allgemeine Fall dürfte wohl solange unzugänglich sein, als die Zerlegungsgesetze nicht auflösbarer Körper noch unbekannt sind.

Zum Beweis von (2) erscheint es zweckmässig, die Heilbronnsche Idee so zu modificieren, dass die von Deuring herrührende asymptotische Entwicklung der Reihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(an^2+bn+c)^{-s}$ für $4ac-b^2\to\infty$ nicht mehr benötigt wird und statt dessen die Heckesche Abschätzung auf die Zetafunction eines aus zwei quadratischen Zahlkörpern zusammengesetzten biquadratischen Körpers übertragen wird.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein algebraischer Zahlkörper n-ten Grades mit der Grundzahl d; von seinen Conjugierten seien r_1 reell und r_2 Paare conjugiert complex. Zur Abkürzung sei $r_1+r_2=q$. Sind $x_1,\ldots,x_q$ positive Variable und $x_{r_2+l}=x_l\,(l=r_1+1,\ldots,r_1+r_2)$, so setze man $\prod\limits_{k=1}^{n}x_k=Nx$, $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=\sigma(x)$. Es sei $\zeta(s,\mathfrak{K})$ die Zetafunction von $\mathfrak{K}$ und $\varkappa$ ihr Residuum bei $s=1$, ferner

$$(2\pi)^{-r_2}|d|^{\frac{1}{2}}\varkappa=\lambda. \tag{4}$$

Hilfssatz 1:

In der ganzen s-Ebene gilt

$$2^{-r_2 s}\pi^{-\frac{n}{2}s}|d|^{\frac{s}{2}}\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\,\zeta(s,\mathfrak{K})=\frac{\lambda}{s(s-1)}+ \tag{5}$$
$$+\sum_{\mathfrak{a}}\int\limits_{Nx\geq 1}\!\!\cdots\!\int\left(Nx^{\frac{s}{2}}+Nx^{\frac{1-s}{2}}\right)e^{-\pi N\mathfrak{a}^{\frac{2}{n}}|d|^{-\frac{1}{n}}\sigma(x)}\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_q}{x_q},$$

wobei $\mathfrak{a}$ *alle ganzen Ideale aus* $\mathfrak{K}$ *durchläuft.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Integraldarstellung von $\zeta(s,\mathfrak{K})$, mit deren Hilfe Hecke die Functionalgleichung bewiesen hat.

Hilfssatz 2:

Es sei $0<s<1$ *und* $\zeta(s,\mathfrak{K})\leq 0$. *Dann ist*

$$\varkappa>s(1-s)\,2^{-n}e^{-2n\pi}|d|^{\frac{s-1}{2}}. \tag{6}$$

Beweis:

Für reelles s sind alle Glieder der unendlichen Reihe auf der rechten Seite von (5) positiv. Das Glied mit $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$ wird verkleinert, wenn das q-fache Integral nur über den Würfel $|d|^{\frac{1}{n}}\leq x_l\leq 2|d|^{\frac{1}{n}}\;(l=1,\ldots,q)$ erstreckt wird; in diesem ist aber der Integrand mindestens $|d|^{\frac{s}{2}}e^{-2n\pi}\,2^{-q}|d|^{-\frac{q}{n}}$. Folglich ist die unendliche Reihe mindestens $|d|^{\frac{s}{2}}e^{-2n\pi}\,2^{-n}$. Ist nun $0<s<1$ und $\zeta(s,\mathfrak{K})\leq 0$, so ist nach Hilfssatz 1

$$\frac{\lambda}{s(s-1)}+|d|^{\frac{s}{2}}e^{-2n\pi}\,2^{-n}<0,$$

also wegen (4) die Behauptung (6) bewiesen.

Es sei d die Discriminante eines quadratischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}_1$. Ist D die Discriminante eines von $\mathfrak{K}_1$ verschiedenen quadratischen Zahlkörpers und t die Discriminante des durch $\sqrt{dD}$ erzeugten Körpers, so ist $t^{-1}dD$ ganz, also

$$|t|\leq|dD|. \tag{7}$$

Es bedeute noch $\mathfrak{K}_2$ den durch $\sqrt{d}$ und $\sqrt{D}$ erzeugten biquadratischen Zahlkörper. Als Spezialfall bekannter Sätze der Classenkörpertheorie gilt

Hilfssatz 3:

Es ist dDt *die Discriminante von* $\mathfrak{K}_2$ *und*

$$\zeta(s,\mathfrak{K}_1)=\zeta(s)\,L_d(s),$$
$$\zeta(s,\mathfrak{K}_2)=\zeta(s)\,L_d(s)\,L_D(s)\,L_t(s).$$

Ferner erhält man durch partielle Summation leicht

Hilfssatz 4:

Es ist

$$L_d(1) < 3 \log |d|.$$

Unter Benutzung der drei letzten Hilfssätze lässt sich nun der Beweis von (2) folgendermassen führen. Wäre (2) falsch, so gäbe es ein positives $\varepsilon < 1$ und beliebig grosse $|d|$, so dass entweder $L_d(1) > |d|^{\varepsilon}$ oder $L_d(1) < |d|^{-\varepsilon}$ ist. Es sei

(8) $$3 \log |d| < |d|^{\varepsilon}.$$

Dann muss nach Hilfssatz 4 der Fall

(9) $$L_d(1) < |d|^{-\varepsilon}$$

vorliegen. Ist auch noch

(10) $$|d|^{\frac{\varepsilon}{2}} > \frac{4 e^{4\pi}}{\varepsilon (1 - \varepsilon)},$$

so liefert (9) die Ungleichung

$$L_d(1) < (1 - \varepsilon)\, \varepsilon\, 2^{-2} e^{-4\pi} |d|^{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Nach den Hilfssätzen 2 und 3 ist dann also $\zeta(1 - \varepsilon, \mathfrak{K}_1) > 0$. Weiterhin sei ein festes d gewählt, das den Ungleichungen (8) und (10) genügt.

Die Function $\zeta(s, \mathfrak{K}_1)$ wird negativ unendlich, wenn s wachsend gegen 1 strebt. Sie hat also eine Nullstelle σ im Intervall $1 - \varepsilon < \sigma < 1$. Nach Hilfssatz 3 ist auch $\zeta(\sigma, \mathfrak{K}_2) = 0$. Wendet man Hilfssatz 2 mit $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_2$ an und benutzt Hilfssatz 3, so erhält man die Ungleichung

$$L_d(1)\, L_D(1)\, L_t(1) > \sigma (1 - \sigma)\, 2^{-4} e^{-8\pi} |d D t|^{\frac{\sigma - 1}{2}}.$$

Nach (7) und Hilfssatz 4 ist daher

$$L_D(1) > \frac{\sigma (1 - \sigma)}{3^2 \cdot 2^4 \cdot e^{8\pi} \log |d| \log |d D|} |d D|^{\sigma - 1}$$

und folglich wegen $\sigma - 1 > -\varepsilon$ für alle hinreichend grossen $|D|$ die Abschätzung

$$L_D(1) > |D|^{-\varepsilon}$$

gültig. Also kann (9) nur für endlich viele d gelten, in Widerspruch zur Annahme, dass (2) falsch sei.

(Eingegangen am 4. Dezember 1934.)

Über eine Riemannsche Identität.

Von

S. Chowla (Waltair) und A. Walfisz (Radość).

Einleitung.

Im sechsten Abschnitt seiner berühmten Habilitationsschrift [1]) führt Riemann die Funktion (x) folgendermassen ein: „Man bezeichne der Kürze wegen durch (x) den Ueberschuss von x über die nächste ganze Zahl, oder, wenn x zwischen zweien in der Mitte liegt und diese Bestimmung zweideutig wird, den Mittelwerth aus den beiden Werthen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, also die Null".

Im dreizehnten Abschnitt heisst es dann: „Ebenso wohl aber, wie hienach für eine Function trotz der durchgängingen Möglichkeit der Integration die Fourier'sche Reihe nicht convergiren und selbst ihr Glied zuletzt unendlich gross werden kann, — ebenso wohl können trotz der durchgängingen Unmöglichkeit der Integration von $f(x)$ zwischen je zwei noch so nahen Werthen unendlich viele Werthe von x liegen, für welche die Reihe Ω convergirt.

Ein Beispiel liefert, (nx) in der Bedeutung, wie oben (Art. 6) genommen, die durch die Reihe

$$\sum_{1,\infty} \frac{(n x)}{n}$$

gegebene Function, welche für jeden rationalen Werth von x vorhanden ist und sich durch die trigonometrische Reihe

[1]) „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" (1854) [Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13 (1867), S. 87 — 132].